Міністерство освіти і науки України
Запорізький державний університет

Методичні вказівки та завдання до лабораторних робіт з теми

«Функції багатьох змінних»

ЗАТВЕРДЖЕНО

Вченою радою ЗДУ

Протокол № 8 від 27.03.2003 р.

Запоріжжя 2003

УДК: 513.53 (076)
ББК: В175.3 я73
М545

Методичні вказівки та завдання до лабораторних робіт з теми «Функції багатьох змінних» / Укл. Красікова І.В., Савранська А.В. – Запоріжжя: ЗДУ, 2003. - 41 с.

Методичний посібник призначений для студентів спеціальностей «математика» та «прикладна математика», які вивчають курс математичного аналізу. Він містить основні поняття та теореми, що стосуються функцій багатьох змінних, існування їх границь, неперервності, диференціального числення та його застосування. Наведено багато прикладів розв'язання задач з цих тем. Окремо пропонуються варіанти завдань до лабораторних робіт за темою «Функції багатьох змінних».

Посібник буде корисним при самостійній роботі студентів та при виконанні лабораторних робіт.

Рецензент *Д'яченко Н.М.*, канд. ф.-м. наук, доцент кафедри математичного аналізу.

Відповідальний за випуск *Шишканова С.Ф.*, доктор технічних наук, професор кафедри математичного аналізу

ЗМІСТ

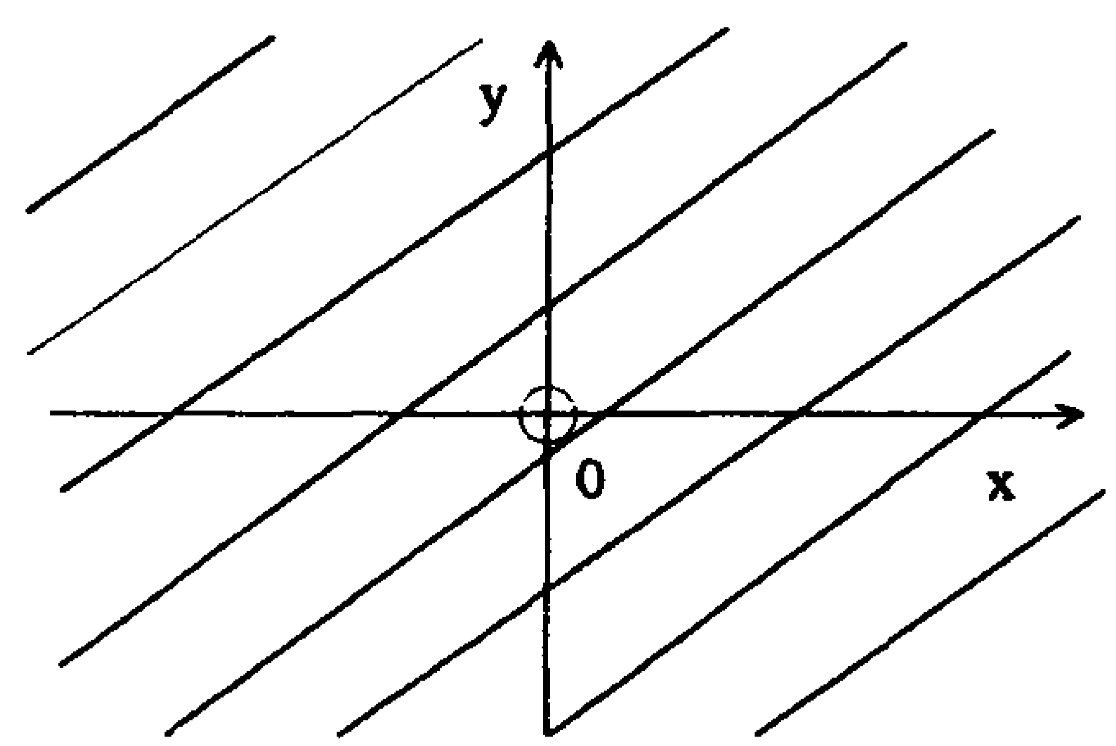
I. Функції багатьох змінних, їх границі та неперервність.

Арифметичним m -вимірним простором називається множина впорядкованих сукупностей дійсних чисел $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ з операціямипокоординатного додавання та множення на дійсний скаляр. Будемо позначати такий простір як R^m, а впорядковану сукупність чисел $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ будемо називати точкою простору та позначати M. При цьому числа x_k називаються координатами точки M.

Відображення $f: R^m \to R$ називається числовою функцією m змінних. Множина точок, на яких ці відображення задані, утворює область визначення функції f.

Приклад 1: Знайти область визначення функції двох змінних $f(x,y)$ та зобразити її на площині, якщо $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Зрозуміло, що така функція буде визначена, якщо $x^2 + y^2 \neq 0$. Такій умові задовольняють всі точки площини XOY, крім точки $(0,0)$. Значить, областю визначення функції $f(x,y)$ буде вся площина за винятком точки $(0,0)$, тобто $D(f) = R^2 \setminus \{(0,0)\}$.



Мал. 1.1. Область визначення функції $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Функція двох змінних задає деяку поверхню у просторі. Для вивчення вигляду поверхні досліджують криві, які отримують при

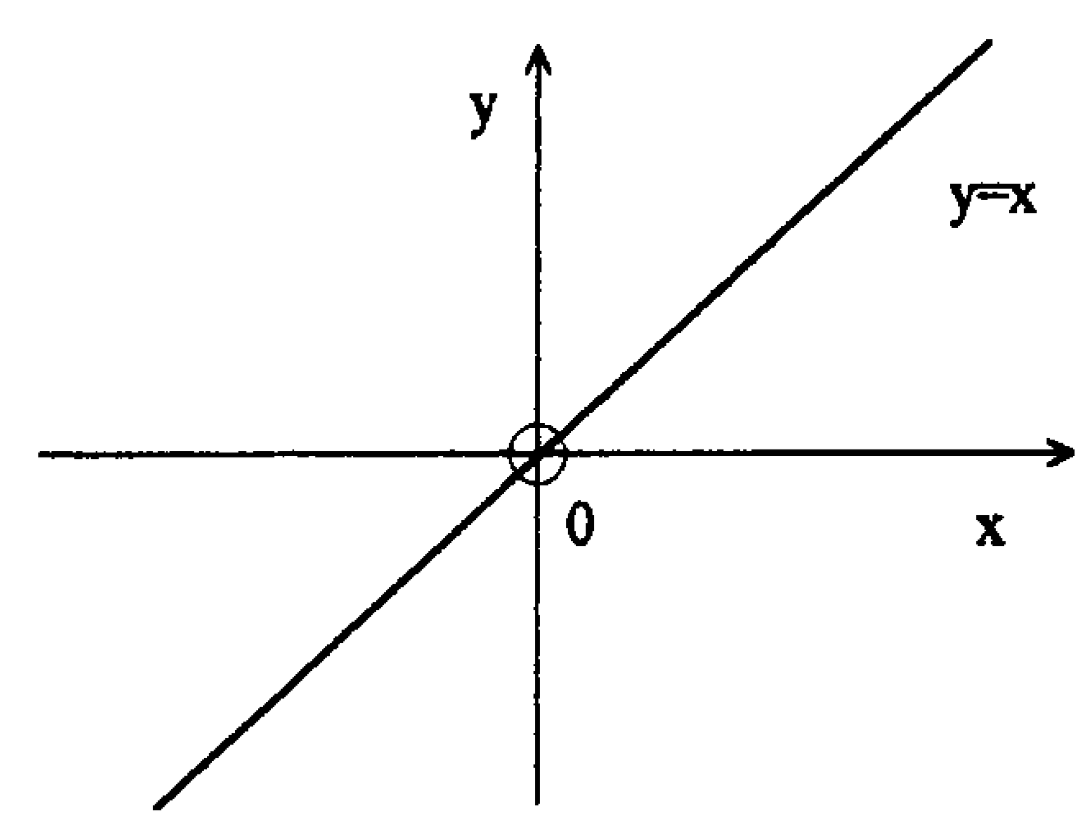
перетині поверхні площинами, паралельними координатним площинам. Якщо перетинати поверхню площинами $z = \text{const}$, ми отримаємо на площині XOY лінії $z = f(x,y)$, в точках яких функція зберігає постійні значення. Такі лінії називаються лініями рівня функції $f(x,y)$.

Приклад 2: Побудувати лінії рівня функції $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, які

співвідносяться числам $z_1 = \frac{1}{2}$; $z_2 = \frac{1}{2}$; $z_2 = 0$; $z_3 = \frac{1}{4}$.

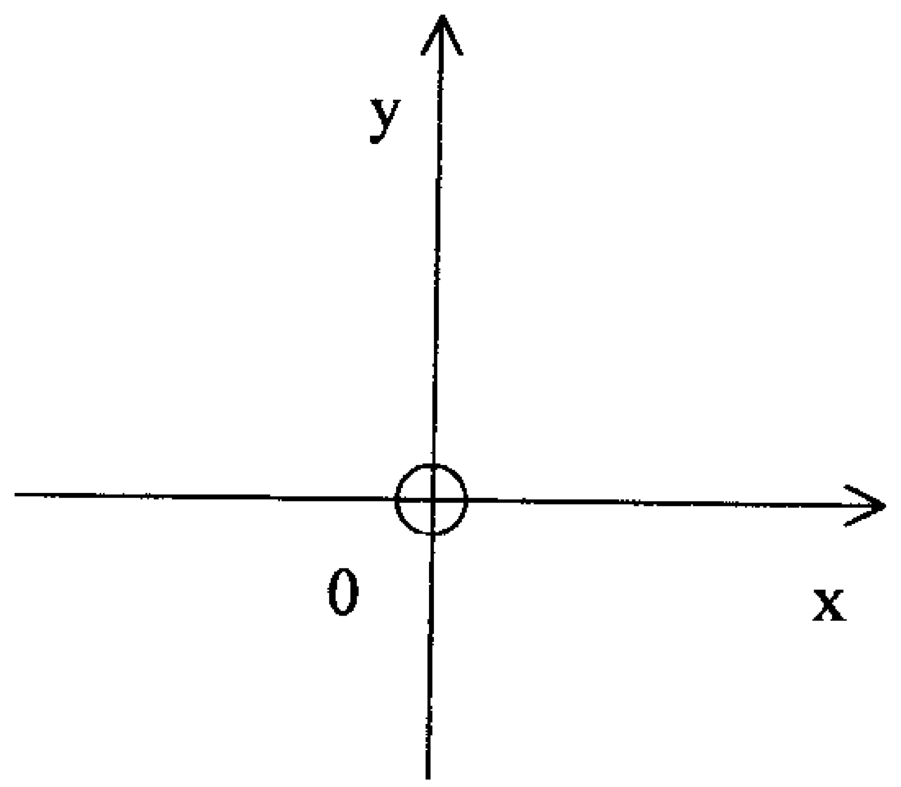
Коли $z_1 = \frac{1}{2}$ ми отримуємо рівняння $\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}$ або $2xy = x^2 + y^2$.

Це рівняння можна перетворити до вигляду: $(x-y)^2 = 0$, або $x - y = 0$, або $x = y$ - це рівняння бісектриси I та II координатних кутів. Але треба ще враховувати, що точка $(0,0)$ не належить області визначення функції.



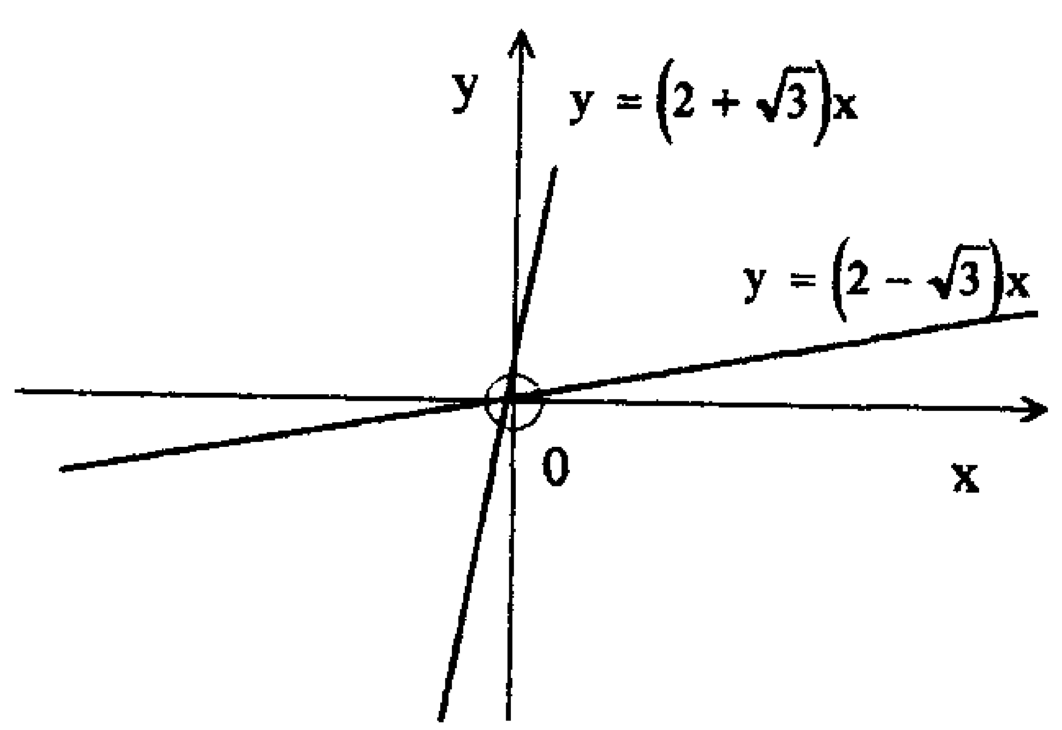
Мал. 1.2. Лінія рівня $z_1 = \frac{1}{2}$.

Коли $z_2 = 0$, маємо рівняння $\dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0$, яке рівносильно тому, що $xy = 0$ (але $x^2 + y^2 \neq 0$). Можливі два випадки: або $x = 0$, або $y = 0$, але не відночас. Значить, лініями рівня у данному випадку будуть координатні вісі за винятком точки їх перетину.



Мал. 1.3. Лінія рівня $z_2 = 0$.

Коли $z_3 = \frac{1}{4}$, ми отримуємо рівняння $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}$ або $4xy = x + y$. Для того, щоб побудувати цю криву, перейдемо до полярної системи координат: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$. Тоді наше рівняння запишеться у вигляді: $\rho^2 = 4\rho^2\cos\varphi\sin\varphi$. Враховуючи, що x та y водночас не дорівнюють нулю, тобто $\rho \neq 0$, можно скоротити на ρ^2.



Мал. 1.4. **Лінія рівня** $z_3 = \frac{1}{4}$.

$\rho = 2\rho\sin 2\varphi$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{12}$, $\varphi_2 = \frac{5\pi}{12}$, $\varphi_3 = \frac{13\pi}{12}$, $\varphi_4 = \frac{17\pi}{12}$. Це рівняння чотирьох променів, початком яких є точка $(0,0)$ і які утворюють з

додатнім напрямом вісі Ox кути $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$. Зрозуміло, що промені $\varphi_1 = \frac{\pi}{12}$, $\varphi_2 = \frac{5\pi}{12}$ та $\varphi_3 = \frac{13\pi}{12}$, $\varphi_4 = \frac{17\pi}{12}$.розташовані на прямих $y = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}x$ та $y = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}x$ відповідно. Таким чином, лініями рівня, які відповідають числу $z_3 = \frac{1}{4}$, будуть дві прямі $y = (2-\sqrt{3})x$ та $y = (2+\sqrt{3})x$ за винятком точки $(0,0)$.

Розглянемо функцію $u = f(M)$ m - змінних та точку M_0, яка може не належати області визначення функції, але буде граничною для цієї області.

Число b називається границею функції $f(M)$ в точці M_0 ,якщо $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall M \in D(f) : 0 < \rho(M, M_0) < \delta, |f(M) - b| < \varepsilon$. Тут $\rho(M, M_0)$ означає відстань між точками M та M_0. Якщо f - функція, двох змінних, така границя функції аназивається подвійною: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) = b$.

Можна також означити границю функції по одній змінній при фиксованому значенні іншої змінної. У зв'язку з цим виникає поняття повторної границі. Якщо існує $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to fix}} f(x,y) = \varphi(y)$ і, крім того, існує $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = b$, тоді говорять, що в точці (x_0, y_0) існує повторна границя функції $f(x,y)$: $b = \lim\limits_{y \to y_0}\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$.

Аналогічно означається $\lim\limits_{x \to x_0}\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$.

Якщо в точці (x_0, y_0) існує подвійна границя функції $f(x,y)$ та $\forall x$ існує $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$, а $\forall y$ існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$, тоді обидві повторні границі існують і дорівнюють подвійній границі.

Приклад 3: Знайти повторні границі функції $f(x,y)$ в точці M_0, або довести, що вони не існують.

а) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{\cos x-1}$; $M_0=(1,1)$;

Знайдемо $\lim\limits_{x\to 1} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-y}{\cos x-1}=\dfrac{1-y}{\cos 1-1}$ - ця границя існує при будь-якому значенні y. Нехай тепер y прямує до 1: $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{1-y}{\cos 1-1}=0$. Таким чином, існує повторна границя: $\lim\limits_{y\to 1}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-y}{\cos x-1}=0$.

Тепер навпаки, спочатку $y\to 1$: $\lim\limits_{y\to 1} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{x-y}{\cos x-1}=\dfrac{x-1}{\cos x-1}$ - ця границя існує при всіх значеннях x, крім $x=2\pi n$, $n\in Z$. Далі: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-y}{\cos x-1}$, тобто повторна границя існує: $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{x-y}{\cos x-1}=0$.

б) $f(x,y)=\sin\dfrac{x}{y}$; $M_0=(0,0)$.

Зрозуміло, що $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{x}{y}$ при будь-яких ненульових y, тобто $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{x}{y}=0$ - одна повторна границя існує. Нехай тепер $x\neq 0$.Доведемо, що при такій умові $\lim\limits_{y\to 0}\sin\dfrac{x}{y}$ не існує. Дійсно, нехай

, $\{y_n'\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\dfrac{x}{2\pi n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n''\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\dfrac{x}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ дві послідовності, які прямують до нуля. Якщо б функція $f(x,y)$ мала границю в точці $(x,0)$, тоді, за означенням границі функції за Гейне, послідовності

$\{f(x,y_n')\}_{n=1}^{\infty}$, $\{f(x,y_n'')\}_{n=1}^{\infty}$ та мали б збігатися до одного числа. Але $f(x,y_n')=\sin 2\pi n=0$, $f(x,y_n'')=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$, тобто $f(x,y_n')\to 0$, а $f(x,y_n'')\to 1$, коли $n\to\infty$. З цього факту випливає, що функція $f(x,y)$ не має границі в точці $(x,0)$ при $x\neq 0$.

Значить, повторна границя $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ не існує.

Приклад 4: Знайти подвійну границю функції $f(x,y)$ в точці M_0, або довести, що вона не існує.

а) $f(x,y)=(1+x)^{\frac{1}{y}}$; $M_0=(0,0)$.

Застосуємо означення границі функції в точці $(0,0)$ за Гейне: число M_0 називається границею функції $f(x,y)$ в точці $(0,0)$, якщо $\forall\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset D(f): x_n\to 0, y_n\to 0, x_n\neq 0, y_n\neq 0 \Rightarrow f(x_n,y_n)\to b$.

Нехай $x_n=y_n$ та $x_n\to 0$, коли $n\to\infty$, тоді $f(x_n,y_n)=(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}\to e$. Якщо тепер $2x_n=y_n$ та $x_n\to 0$, коли $n\to\infty$, тоді $f(x_n,y_n)=(1+x_n)^{\frac{1}{2x_n}}\to\sqrt{e}$. Таким чином, умова означення не виконується, тобто поведінка функції $f(x,y)$ в околі точки $(0,0)$ залежить від того, як x та y прагнуть до 0. Значить, подвійна границя цієї функції в точці $(0,0)$ не існує

б) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$; $M_0=(0,0)$.

Запишемо функцію $f(x,y)$ у вигляді $f(x,y)=xy\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Зрозуміло, що дріб $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ буде обмеженою функцією, тому що

$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}$, коли $(x,y) \ne (0,0)$. Значить, які б послідовності $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, які прагнуть до точки $(0,0)$, ми б не вибирали, послідовність $f(x_n, y_n) = x_n y_n \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2}$ завжди буде добутком нескінченно малої послідовності $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ обмеженої $\left\{\frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ тобто сама буде нескінченно малою. Значить,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Цей результат можна було отримати іншим способом: $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}}$. Зрозуміло, що $\frac{1}{y^2} \to +\infty$ та $\frac{1}{x^2} \to +\infty$, тобто $\frac{1}{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}} \to 0$, коли $x \to 0, y \to 0$.

Функція $u = f(M)$ називається неперервною в точці M_0, якщо границя функції в цій точці існує та дорівнює значенню функції, тобто якщо $\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Приклад 5: Дослідити функцію $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \ne 0 \\ 0, x = y = 0 \end{cases}$

на неперервність в точці $(0,0)$.

З прикладу 4б) відомо, що $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = 0$, тобто $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(0,0)$, значить, функція $f(x,y)$ буде неперервною в точці $(0,0)$.

Приклад 6: Дослідити функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \ne 0 \\ 0, x = y = 0 \end{cases}$$ на неперервність в точці $(0,0)$.

З'ясуємо, чи існує границя функції в точці $(0,0)$. Нехай x та y прагнуть до $(0,0)$ вздовж прямої $y = x$, тоді $f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$, тобто яку б послідовність $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ точок цієї прямої ми не вибирали, $f(x_n, y_n) \to \frac{1}{2}$, коли $n \to \infty$.

Якщо тепер $y = 2x$, тоді $f(x,2x) = \frac{2x^2}{x^2+4x^2} = \frac{2}{5}$, тобто при будь-яких значеннях $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ з прямої $y = 2x$ $f(x_n, y_n) \to \frac{2}{5}$, коли $n \to \infty$. Значить можна стверджувати, що подвійна границя функції в точці $(0,0)$ не існує, тобто функція буде розривною.

Зауважимо, що ця функція буде неперервною по кожній змінній при фіксованому значенні іншої. Дійсно, нехай y - фіксоване. Якщо $y \ne 0$, тоді

$\lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 = f(0,y)$. Якщо $y = 0$, тоді $f(x,0) = 0$, тобто функція $f(x,0)$ неперервна при будь-якому значенні x. Значить, $\forall y$ $f(x,y)$ неперервна в точці $(0,y)$ по змінній x. Цілком аналогічно доводиться, що $\forall x$ $f(x,y)$ неперервна в точці $(x,0)$ по змінній y.

Відмітимо також, що якщо функция $u = f(M)$ неперервна на замкненій обмеженій множині, то вона на ній обмежена та досягає своїх супремуму та інфімуму.

2.Диференційовність функцій багатьох змінних.

Нехай $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ - внутрішня точка області визначення функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, та Δx_k - такий приріст змінної x_k, що $M(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1} \ldots, x_m)$ також належить $D(f)$. Якщо існує $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1},\ldots,x_m) - f(x_1,\ldots,x_m)}{\Delta x}$, тоді ця границя називається частинною похідною функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в точці M позмінній x_k та позначається $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ або $\frac{\partial u}{\partial x_k}$.

Функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ називається диференційовною в точці M, якщо її повний приріст в цій точці має вигляд:

$\Delta u \equiv f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m + \Delta x_m) = A_1\Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m$, де $A_k = \text{const}$, α_k - нескінченно малі при $\Delta x_k \to 0$ функції, які дорівнюють нулю при $\Delta x_k = 0$.

Якщо функція диференційовна в точці M, то в цій точці існують частинні похідні по всім аргументам, причому $\frac{\partial f}{\partial x_k} = A_k$.

Достатньою умовою диференційовності функції в точці M є існування частинних похідних по всім аргументам в деякому околі точки M та їх неперервність в самій точці.

Диференціалом диференційовної функції називається головна лінійна відносно приростів аргументів частина приросту функції:

$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m$, де $dx_k = \Delta x_k$.

Поняття n -ої частинної похідної вводиться індуктивне,

тобто $\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \right)$.

Якщо не всі індекси $i_1, i_2, \ldots, i_n$ однакові, таку похідну називають мішаною.

Функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ називається n разів диференційовною в точці M, якщо всі її частинні похідні $(n-1)$ -го порядку - диференційовні в точці M функції.

Якщо функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ n разів диференційовна в точці M, тоді значення будь-якої мішаної частинної похідної n -го порядку не залежить від порядку, в якому виконується послідовне диференціювання.

Значення $\delta(d^{n-1}u)$ диференціалу від $(n-1)$ - го диференціалу, обчислене при $\delta x_1 = dx_1, \ldots, \delta x_m = dx_m$, називається n - им диференціалом функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ та позначається $d^n u$.

Якщо аргументи функції незалежні, тоді застосовують формальний символ:

$$d^n u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^n u.$$

Приклад 7: Знайти диференціал першого та другого порядку функції $u = \operatorname{arctg} \frac{2(x + \sin x)}{4 - x \sin x}$.

Зрозуміло, що для функції двох змінних

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \text{ а } \quad d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2.$$

Знайдемо усі частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{4(x + \sin y)^2}{(4 - \sin y)^2}} \cdot 2 \frac{4 - x \sin y + x \sin y + \sin^2 y}{(4 - x \sin y)^2} = \frac{2}{4 + x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2(4\cos y-x\sin y\cos y+x^2\cos y+x\cos y\sin y)}{\left(1+\frac{4(x+\sin y)^2}{(4-\sin y)^2}\right)(4-x\sin y)^2}=\frac{2\cos y}{4+\sin^2 y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{4x}{(4+x^2)^2};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\frac{-4\sin y-\sin^3 y-2\cos^2 y\sin y}{(4+\sin^2 y)^2}=-2\sin y\frac{4+\sin^2 y+2\cos^2 y}{(4+\sin^2 y)^2}=$$
$$=-\frac{2\sin y(5+\cos^2 y)}{(4+\sin^2 y)^2};$$

Значить,

$$du=\frac{2}{4+x^2}dx+\frac{2\cos y}{4+\sin^2 y}dy,$$

$$d^2u=-\frac{4x}{(4+x^2)^2}dx^2-\frac{2\sin y(5+\cos^2 y)}{(4+\sin^2 y)^2}dy^2.$$

Розглянемо тепер складну функцію $u=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$

де $\begin{cases}x_1=\varphi_1(t_1,\dots,t_k);\\ \dots\dots\dots\\ x_m=\varphi_m(t_1,\dots,t_k).\end{cases}$

Якщо функції $\varphi_i(t_1,\dots,t_k)$ диференційовні в деякій точці $M_0(t_1^0,\dots,t_k^0)$,а функція $u=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ диференційовна в відповідній точці $N_0(x_1^0,\dots,x_k^0)$, де $x_i^0=\varphi_i(t_1^0,\dots,t_k^0)$, $i=1,2,\dots m$. Тоді складна функція диференційовна в точці M_0 та частинні похідні визначаються формулами:

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1};$$

...

$$\frac{\partial u}{\partial t_k}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_k}$$

Приклад 8: Знайти диференціал функції $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$, якщо x, y, z - незалежні змінні. Позначимо $\frac{x}{y}=p,\frac{y}{z}=q$, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial p}\cdot\frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial p}\cdot\frac{x}{y^2}+\frac{\partial u}{\partial q}\cdot\frac{1}{z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}=-\frac{\partial u}{\partial q}\cdot\frac{y}{z^2}.$$

Значить,

$$du=\frac{\partial u}{\partial p}\cdot\frac{1}{y}dx+\left(\frac{\partial u}{\partial q}\cdot\frac{1}{z}-\frac{\partial u}{\partial p}\cdot\frac{x}{y^2}\right)dy-\frac{\partial u}{\partial q}\frac{y}{z^2}dz.$$

Приклад 9: Знайти похідні $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ функції, яка задана неявно: $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}+1$.

Здиференцюємо даний вираз по змінній x, враховуючи, що $z=z(x,y)$:

$$\frac{z-x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\quad,\qquad \text{звідки}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{x+z}.$$

Тепер здиференцюємо той же вираз по змінній y :

$0=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$, тобто $\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

Значить, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$.

3. Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних.

Якщо $n \geq 1$ - ціле число, функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ задана в деякому околі точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, $(n-1)$ - раз диференційовна в цьому околі та n - раз диференційовна в самій точці M_0. Тоді для будь-якої точки з цього околу вірна формула Тейлора:

$$F(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!} du\Big|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2u\Big|_{M_0} + \ldots + \frac{1}{n!} d^n u\Big|_{M_0} + o(\rho^n),$$

де ρ - це відстань між точками M та M_0, а $o(\rho^n)$ - це нескінченно мала при $\rho \to 0$ функція більш високого порядку мализни, ніж ρ^n.

Додаток $o(\rho^n)$ є залишковим членом у формі Пеано.

Приклад 10: Функцію $f(x,y) = x^y$ розвинути за формулою Тейлора в околі точки $(1{,}1)$ до доданків третього порядку. За допомогою формули обчислити наближено $(1{,}1)^{1{,}02}$.

Формула Тейлора буде мати вигляд:

$$F(x,y)=f(1,1)+\ f(x,y) = f(1,1) + \frac{1}{1!} df\Big|_{(1,1)} + \frac{1}{2!} d^2f\Big|_{(1,1)} + \frac{1}{3!} d^3f\Big|_{(1,1)} + o(\rho^3)$$

Тото нам будуть потрібні всі частинні похідні до третього порядку включно, очислені в точці $(1{,}1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)} = yx^{y-1}\Big|_{(1,1)} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)} = x^y \ln x\Big|_{(1,1)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(1,1)} = y(y-1)x^{y-2}\Big|_{(1,1)} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(1,1)} = x^y \ln^2 x\Big|_{(1,1)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{(1,1)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big|_{(1,1)} = x^{y-1}(1 + y\ln x)\Big|_{(1,1)} = 1,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_{(1,1)} = y(y-1)(y-2)x^{y-3}\Big|_{(1,1)} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\Big|_{(1,1)} = x^y \ln^3 x\Big|_{(1,1)} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\Big|_{(1,1)} = x^{y-1}\ln x(2 + y\ln x)\Big|_{(1,1)} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\Big|_{(1,1)} = x^{y-2}(2y - 1 + y(y-1)\ln x)\Big|_{(1,1)} = 1.$$

Окремо знайдемо $f(1{,}1) = 1$.

Таким чином, маємо формулу Тейлора:

$$x^y = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}\cdot(x-1)(y-1) + \frac{1}{6}\cdot 3(x-1)^2(y-1) + o(\rho^3) =$$

$$= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{(x-1)^2(y-1)}{2} + o(\rho^3).$$

Обчислемо тепер наближено $(1{,}1)^{1{,}02}$:

$$(1{,}1)^{1{,}02} \approx 1 + (1{,}1-1) + (1{,}1-1)(1{,}02-1) + \frac{(1{,}1-1)^2(1{,}02-1)}{2} = 1 + 0{,}1 + 0{,}1\cdot 0{,}02 +$$

$$+ \frac{0{,}1^2 \cdot 0{,}02}{2} = 1{,}1 + 0{,}002 + 0{,}0001 = 1{,}1021.$$

Нехай поверхня S в просторі $OXYZ$ задається рівнянням: $F(x,y,z) = 0$.

Припустимо, що функція $F(x,y,z)$ в околі точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ задовольняє умовам теореми про існування неявної функції та рівняння $F(x,y,z) = 0$ визначає z, як функцію x та y, тобто $z = f(x,y)$, причому $z_0 = f(x_0, y_0)$. Тоді рівняння дотичної площини до поверхні S в точці M_0 має вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0}(z - z_0) = 0.$$

Нормалю до поверхні S називається пряма, перпендикулярна дотичній площині в точці дотику.

З аналітичної геометрії відомо, що рівняння перпендикулярної прямої буде мати вигляд:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

Приклад 11: Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2+y^2+z^2=169$ в точці $M_0(3,4,12)$.

Спочатку запишемо рівняння сфери у вигляді $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-169=0$.

Знайдемо частинні похідні функції $F(x,y,z)$ в точці M_0:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=2x|_{M_0}=6;\ \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=2y|_{M_0};\ \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=2z|_{M_0}=24.$$

Тобто рівняння дотичної площини має вигляд:

$6(x-3)+8(y-4)+24(z-12)=0$ або $3x+4y+12z-169=0$,

$3x+4y+12z-169=0$.

Рівняння нормалі: $\frac{x-3}{6}=\frac{y-4}{8}=\frac{z-12}{24}$ або $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$.

Нехай рівняння $F(x,y,z)=0$ задає сукупність кривих з параметром α.

Обвідною сім'ї кривих називається крива, яка дотикається кривих цієї
однопараметричної сім'ї.

Рівняння обвідної можна одержати, виключивши параметр α із системи

$$\begin{cases}F(x,y,\alpha)=0,\\ \dfrac{\partial F(x,y,\alpha)}{\partial\alpha}=0.\end{cases}$$

Приклад 12: Знайти рівняння обвідної однопараметричної сім'ї:

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{y}{\cos\alpha}=1$$

Запишемо рівняння цієї сім'ї у вигляді:

$$F(x,y,\alpha)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=0.$$

Знайдемо $\frac{\partial F}{\partial\alpha}=-x\sin\alpha+y\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$.

Запишемо систему $\begin{cases}x\cos\alpha+y\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=0\\ x\sin\alpha+y\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=0\end{cases}$ та виключимо з неї α. Для цього перше рівняння помножимо на $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\begin{cases}x\sin\alpha+y\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=\sin^2\alpha,\\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.\end{cases}$$

Додаємо перше рівняння до другого, одержуємо $y\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\cos\alpha\right)=\cos^2\alpha$, або $y=\cos^3\alpha$, тобто $\cos\alpha=y^{\frac{1}{3}}$.

Тепер перше рівняння системи помножимо на $-\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\begin{cases}-x\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+y\cos\alpha=-\cos^2\alpha,\\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.\end{cases}$$

Додаємо перше рівняння до другого, одержуємо $-x\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\sin\alpha\right)=-\sin^2\alpha$, або $x=\sin^3\alpha$, тобто $\sin\alpha=x^{\frac{1}{3}}$. Тоді шукане рівняння обвідної набуває вигляду

$\frac{x}{x^{1/3}}+\frac{y}{y^{1/3}}=1$ або $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ - це є рівняння астероїди.

Нехай функція $u=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ диференційовна в точці $M_0(x_1^0,\dots,x_m^0)$. Для такої функції похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точці M_0 у напрямі, який визначається одиничним вектором $l = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_m)$ - це похідна складної функції

$$u = f\left(x_1^0 + l\cos\alpha_1, x_2^0 + l\cos\alpha_2, \ldots, x_m^0 + l\cos a_m\right)$$

по змінній l при $l = 0$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0}\cos\alpha_1 + \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{M_0}\cos\alpha_2 + \ldots + \left.\frac{\partial u}{\partial x_m}\right|_{M_0}\cos\alpha_m .$$

Градієнтом диференційовної в точці M_0 функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ називається вектор

$$\overline{\text{gradu}} = \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{M_0}, \ldots, \left.\frac{\partial u}{\partial x_m}\right|_{M_0}\right)$$

Таким чином, похідна у напрямі, який визначається вектором $\bar{l}$ дорівнює скалярному добутку векторів $\overline{\text{grad u}}$ та $\bar{l}$, тобто $\frac{\partial u}{\partial l} = (\overline{\text{grad u}}, \bar{l})$

Градієнт функції в точці $\bar{l}$ характерізує напрям та величину максимального зростання функції в точці M_0.

Приклад 13: Знайти похідну функції $u = x + \ln\left(y^2 + z^2\right)$ в точці $M_0(2,1,1)$ у напрямі $\bar{l} = -2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$.

Знайдемо спочатку частинні похідні цієї функції в точці M_0

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{2y}{y^2 + z^2}\right|_{M_0} = 1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{2z}{y^2 + z^2}\right|_{M_0} = 1.$$

Значить, $\overline{\text{grad u}} = (1,1,1)$, $\bar{l} = (-2,1,-1)$ тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 1\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = -2.$$

Приклад 14: Знайти величину на напрям градієнту функції $u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$ в точці $M_0 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right)$.

Знайдемо частинні похідні функції в точці M_0:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \cos(x + 2y) + \left.\frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}}\right|_{M_0} = \frac{3}{2};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 2\cos(x + 2y) + \left.\frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}}\right|_{M_0} = \frac{1}{2};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}}\right|_{M_0} = \frac{\pi}{4}.$$

Значить, $\overline{\text{grad u}} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left|\overline{\text{gradu}}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{16}} = \frac{\sqrt{40 + \pi^2}}{4}$. Напрям вектора $\overline{\text{grad u}}$ визначається кутами α, β, γ, які він утворює з додатніми напрямами вісей координат Ox,0y,0z, відповідно.

$$\cos\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{40 + \pi^2}}{4}} = \frac{6}{\sqrt{40 + \pi^2}}; \quad \cos\beta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{40 + \pi^2}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{40 + \pi^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{40 + \pi^2}}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{40 + \pi^2}}.$$

4. Екстремуми функції багатьох змінних.

Говорять, що функція $u = f(M)$ має в точці M_0 локальний максимум (локальний мінімум), якщо існує такий δ -окіл точки M_0, в межах якого значення $f(M_0)$ буде найбільшим (найменьшим) серед всіх значень функції.

Точки локального максимуму та мінімуму об'єднуються назвою - точки локального екстремуму.

Якщо функція $f(M)$ має в точці M_0 частинні похідні, то необхідою умовою локального екстремуму в цій точці є рівність нулю усіх частинних похідних.

Достатні умови локального екстремуму пов'язані з квадратичною формою другого диференціалу

$$d^2f\Big|_{M_0} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik} dx_i dx_k \text{, де } a_{ik} a_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\Big|_{M_0}$$

Ця квадратична форма називається додатньо визначеною (від'ємно визначеною), якщо при будь-яких значеннях dx_n, які водночас не дорівнюють нулю, форма приймає строго додатні (строго від'ємні) значення.

Для того, щоб визначити, якою буде квадратична форма, застосовують критерій Сільвестра. Для цього виписують матрицю квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1m} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mm} \end{pmatrix}$$

та обчислюють її головні мінори:

$$A_1 = a_{11}, A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Критерій Сільвестра: Для того, щоб квадратична форма з симетричною матрицею A була додатньо визначеною, необхідно та достатньо, щоб всі її головні мінори були додатніми: $A_1 > 0$, $A_2 > 0, \ldots, A_m > 0$.

Для того, щоб ця квадратична форма була від'ємно визначеною, необхідно та достатньо, щоб знаки її головних мінорів чергувались таким чином:

$A_1 < 0$, $A_2 > 0, A_3 < 0, \ldots$

Нехай функція $u = f(M)$ двічі диференційовна в точці M_0, яка є стаціонарною точкою, тобто $du\big|_{M_0} = 0$. Тоді якщо другій диференціал функції в цій точці буде додатньо визначеною (від'ємне визначеною) квадратичною формою змінних dx_1, $dx_2, \ldots dx_m$, тоді в точці M_0 функція $u = f(M)$ має локальний мінімум (локальний максимум). Якщо ж другий диференціал буде знакозмінною квадратичною формою, тоді функція не має локального екстремуму в точці M_0.

Приклад15: Дослідити функцію $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$ на локальний екстремум.

Спочатку знайдемо стаціонарні точки, тобто такі, в яких всі частинні похідні дорівнюють нулю.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y + 6x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 4y$, тобто маємо систему:

$$\begin{cases} 2y - 6x = 0, \\ 2x - 4y = 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що вона має тільки нульовий розв'язок: $(x, y) = (0,0)$.

Знайдемо тепер похідні другого порядку та запишемо другий диференціал:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x} = -6, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4, \ d^2 f\big|_{(0,0)} = -6dx^2 + 4dxdy - 4dy^2 =$$
$$= -2(2dx^2 + (dx - dy)^2 + dy^2)$$

Зрозуміло, що коли dx та dy водночас не дорівнюють нулю, $d^2 f\big|_{(0,0)} < 0$, тобто квадратична форма другого диференціала буде від'ємне визначеною. Значить, точка $(0,0)$ є точкою локального максимуму.

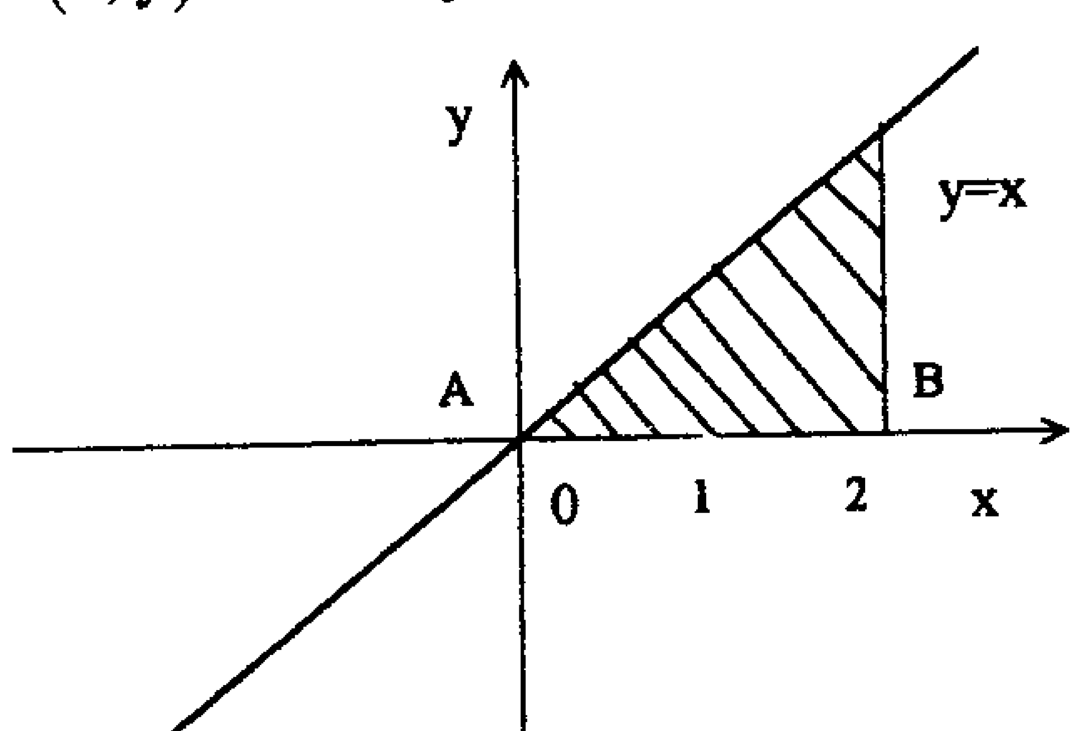
Можна було застосувати критерій Сільвестра. Для цього запишемо матрицю квадратичної форми та обчислимо її головні мінори:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, A_1 = -6 < 0, A_2 = 24 - 4 = 20 > 0.$$

Критерій Сільвестра стверджує, що у такому випадку форма від'ємно визначена, тобто в точці $(0,0)$ - локальний максімум, $f(0,0) = 10$.

Якщо функція багатьох змінних неперервна у деякій замкненій області, вона досягає у цій області найбільшого та найменьшого значень. Причому ці значення функція приймає або в точках локального екстремуму, розташованих в області, або на її межі.

Приклад 16: Знайти найбільше та найменьше значення функції $f(x,y) = x^3 + 6y^2 - 6xy$ в області $D = \{(x,y) : 0 \le y \le x \le 2\}$.



Мал.4.1. Область $D = \{(x,y) : 0 \le y \le x \le 2\}$

Наша область D -це трикутник ABC. З'ясуємо, чи має наша функція точки екстремуму в цьому трикутнику. Для цього знайдемо частинні похідні та зрівняємо їх з нулем:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 12y - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0{,}5 \end{cases}$$

Ми отримали дві подозрілі на екстремум точки: $(0,0)$ та $(1;0{,}5)$.

Розглянемо тепер, як поводить себе функція на межі трикутника:

AB: $y = 0$, $f(x,0) = x^3$ - це зростаюча функція на $[0,2]$, тобто подозрілими точками будут кінці відрізка: $x = 0$ та $x = 2$;

BC: $x = 2$, $f(2,y) = 8 + 6y^2 - 12y$, $f' = 12y - 12 = 0$, $y = 1$ - отримали точку $(2,1)$ на відрізку BC та його кінці $(2,0)$, $(2,2)$;

AC: $y = x$, $f(x,x) = x^3$- зростаюча функція, тобто слід розглядати тількі кінці відрізка.

Таким чином, ми отримали точки, в яких функція може приймати своє найбільше та найменьше значення: $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(2,1)$, $(1;0{,}5)$.

Знайдемо значення функції в цих точках:

$f(0,0) = 0$,

$f(2,0) = 8$,

$f(2,2) = 8$,

$f(2,1) = 2$,

$f(1;0{,}5) = -0{,}5$.

Зрозуміло, що $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = f(2,0) = f(2,2) = 8$,

$$\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = f(1;0{,}5) = -0{,}5.$$

Якщо ми будемо досліджувати на екстремум функцію, аргументи якої зв'зані деякими додатковими умовами, тоді такий екстремум будемо називати умовним. Говорять, що функція $f(u)$ має умовний максімум (умовний мінімум) в точці M_0, якщо координати точки M_0 задовольняють умовам зв'язку та існує такий окіл точки M_0, в межах якого значення функції в точці M_0 буде найбільшим (найменьшим) серед її значень в тих точках околу, координати яких задовольняють умовам зв'язку.

Для дослідження функції на умовний екстремум застосовують метод Лагранжа. Розглянемо його на прикладі.

Приклад 17: Дослідити на екстремум функцію $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при додатковій умові $x+y=2$.

Запишемо рівняння зв'язку у вигляді $x+y-2=0$ та складемо допоміжну функцію Лагранжа

$$\Phi(x,y,\lambda)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda(x+y-2),$$

де λ-поки що невідомий коефіцієнт.

Функцію Φ будемо досліджувати на звичайний локальний екстремум: $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}+\lambda;\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+\lambda;\ \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=x+y-2.$

Маємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases}-\frac{1}{x^2}+\lambda=0\\ -\frac{1}{y^2}+\lambda=0\\ x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ x+y=2\\ \lambda=\frac{1}{x^2}\end{cases}\text{або}\begin{cases}x=-y\\ x+y=2\\ \lambda=\frac{1}{x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1,\\ \lambda=1\end{cases}$$

тому що друга система несумісна

Коли $\lambda=1$, ми одержуємо функцію $\Phi(x,y,1)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+x+y-2$.

Знайдемо другий диференціал цієї функції:

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{2}{x^3}\right|_{(1,1)}=2,\ \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right|_{(1,1)}=\frac{2}{y^3}=2,$$

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=0,\ \text{тобто}\ d^2\Phi\big|_{(1,1)}=2dx^2+2dy^2>0$$

Значить, квадратична форма другого диференціалу додатньо визначена, тобто точка $(1,1)$ є точкою умовного мінімуму функції та $f_{min}(1,1)=2$.

Лабораторна робота №1.

1. Знайти область визначення функції $f(x,y)$ та зобразити її на площині XOY.

2. Побудувати лінії рівня функції $f(x,y)$, які відповідають числам z_1, z_2, z_3.

3. Знайти повторну границю або довести, що вона не існує.

4. Знайти подвійну границю або довести, що вона не існує.

Варіант 1.

1), 2) $f(x,y)=\sqrt{2-x^2-y^2}$, $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=2$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\ln\dfrac{\sin(x+y)^2}{x^2+y^2}$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin x}{\sin y}$.

Варіант 2.

1),2) $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2-3}$, $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-1$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty}\sin(xy)$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin x}{\sin y+2}$.

Варіант 3.

1),2) $f(x,y)=\sqrt{\max\{x,y\}+\min\{x,y\}}$, $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=2$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\sin(x)}{\sin y+2}$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

Варіант 4.

1),2) $f(x,y)=(|x|+|y|)\operatorname{sign}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)$, $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-1$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{|x|}\right)^{|y|}$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(1+\dfrac{1}{|x|}\right)^{|y|}$.

Варіант 5.

1),2) $f(x,y)=\sqrt{1-\max\{|x|,|y|\}}$, $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=2$.

3) $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{\sin(x(y-1))}{e^y-e}$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{\sqrt{|2-x^2-y^2|}}{|1-x|}$.

Варіант 6.

1),2) $f(x,y)=\min\left\{x,\dfrac{x}{y}\right\}$, $z_1=-1$, $z_2=0$, $z_3=1$.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

Варіант 7.

1),2) $f(x,y)=\min\left\{x,\dfrac{y}{x}\right\}$, $z_1=-1$, $z_2=0$, $z_3=1$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

Варіант 8.

1),2) $f(x,y)=\ln\left(\min\{x,y^2\}\right)$, $z_1=-1$, $z_2=0$, $z_3=1$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y\sin\frac{1}{x^2+y^2}$.

Варіант 9.

1),2) $f(x,y)=\max\{\ln x, y\}$, $z_1=-1$, $z_2=0$, $z_3=1$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin y}$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+xy)}{\sin(xy)}$.

Варіант 10.

1),2) $f(x,y)=|\ln x|-|\ln y|$, $z_1=-1$, $z_2=0$, $z_3=1$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin xy}{x+y}$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^y$.

Варіант 11.

1),2) $f(x,y)=\max\left\{x^2, xy\right\}$, $z_1=2$, $z_2=0$, $z_3=1$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to \infty} x^2y$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to \infty}} x^2y$.

Варіант 12.

1),2) $f(x,y)=\ln\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $z_1=-1$, $z_2=0$, $z_3=1$.

3) $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{y\to -1}\frac{x+y}{\ln x}$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\frac{x+y}{\ln x}$.

Лабораторна робота № 2.

1. Знайти повні диференціали вказаного порядку.
2. Знайти вказані похідні складної функції.
3. Знайти вказані похідні неявної функції.
4. Знайти ...

Варіант 1.

1) $u=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{y}$. Знайти d^3u.

2) $z=\frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$, де $u=\operatorname{tg}^2x$; $v=\operatorname{ctg}^2x$. Знайти $\frac{dz}{dx}$.

3) $x+y+z=c^z$. Знайти $\frac{dz}{dx};\frac{dz}{dy}$.

4) Знайти похідну функції $z=x^2-y$ в точці $M(1,1)$ у напрямі l, який утворює кут $a=60^0$ з додатнім напрямом вісі OX.

Варіант 2.

1) $u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$. Знайти d^2u.

2) $z=\frac{x^2-y}{x^2+y}$, де $y=3x+1$. Знайти $\frac{dz}{dx}$

3) $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$. Знайти $\frac{dz}{dx};\frac{dz}{dy}$.

4) Знайти похідну функції $z=x^2-xy+y$ в точці $M(1,1)$ у напрямі l, який утворює кут α з додатнім напрямом вісі OX.

Варіант 3.

1) $u=\operatorname{arctg}\sqrt{x^y}$. Знайти d^2u.

2) $z=x^2y$, де $y=\cos x$. Знайти $\frac{dz}{dx};\frac{dz}{dy}$

3) $x=z\ln\frac{z}{y}$. Знайти dz

4) Знайти похідну функції $u = xyz$ в точці $M(-1,1,1)$ у напрямі $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

Варіант 4.

1) $u = y\dfrac{x}{z}$. Знайти d^2u.

2) $z = \ln\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$, де $y = x\cos\alpha$. Знайти $\dfrac{dz}{dx}$.

3) $x\sin y + y\sin x + z\sin x = \alpha$. Знайти $\dfrac{dz}{dy}$.

4) Знайти похідну функції $z = x^2 - xy + y^2$ в точці $M(1,1)$ у напрямі $l = 6i + 8j$.

Варіант 5.

1) $u = 2^{\arcsin\sqrt{x/y}}$. Знайти d^2u.

2) $z = x^2+y^2$, де $x = \xi + \eta$, $y=\xi+\eta$. Знайти $\dfrac{dz}{d\xi};\dfrac{dz}{d\eta}$.

3) $xy + yz + xz = 1$. Знайти dz.

4) Знайти похідну функції $u = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точці $M(1,1,1)$ у напрямі вектора MN, де $N(3;2;3)$.

Варіант 6.

1) $u = y^{z^x}$. Знайти d^2u.

2) Показати що функція $u=\ln\dfrac{1}{r}$, де $r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ задовільняє рівнянню $\dfrac{d^2u}{dx^2}+\dfrac{d^2u}{dy^2}$.

3) $xe^4 + ye^3 + ze^x = a$. Знайти $\dfrac{dz}{dx}$.

4) Знайти похідну функції $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ в точці $M(1,2,1)$ у напрямі вектора $r = 2i + 4j + 4k$.

Варіант 7.

1) $u = (1+xy)^y$. Знайти d^2u.

2) $z = \ln(x^2+y^2)$, де $x=\xi\eta$, $y = \dfrac{\xi}{\eta}$. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial\xi},\dfrac{\partial z}{\partial\eta}$.

3) $z = x + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{z-x}$. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

4) Знайти величину та напрям градієнту функції $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ в точці $M(x_0; y_0; z_0;)$.

Варіант 8.

1) $u = (x+y)^{zy}$. Знайти d^2u.

2) $u=f(t)$, де $t=xyz$.Знайти du, якщо (x,y,z)- незалежні змінні.

3) $x^2+y^2+z^2=a^2$.. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4) Знайти величину та напрям градієнту функції $u = y\ln(1+x^2) - \operatorname{arctg} z$ в точці $M(0;1;1)$.

Варіант 9.

1) $u = \ln\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{x}}{y}$. Знайти d^2u.

2) $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Знайти du, якщо (x,y,z)- незалежні змінні.

3) $z^3-3xyz=a^3$. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y_2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4) Знайти похідну функції $u=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}$ в точці $M(z_0;y_0;z_0)$ у напрямі вектора $l=6i+3j-6k$.

Варіант 10.

1) $u = (1+zx)^{xy}$. Знайти d^2u.

2) $u=f(\xi;\eta)$, де $\xi=ax, \eta=by$. Знайти du.

3) $z=\sqrt{x^2-y^2}\,tg\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4) Знайти кут між градіэнтами функцій $u=x^2+y^2-z^2$ в точках $A(\xi;0;0)$, $B(0;\xi;0)$.

Варіант 11.

1) $u = \ln\left(x^x y^y z^z\right)$. Знайти d^2u.

2) $u=f(x+y+z;x^2+y^2+z^2)$. Знайти du, якщо (x,y,z)- незалежні змінні.

3) $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$. Знайти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial_2 z}{\partial x \partial y}$.

4) Знайти величину та напрям градієнту функції $u=\ln(3-x^2)+xy^2z$ в точці M(1;3;2).

Варіант 12.

1) $u = x^2y^3$. Знайти d^5u.

2) $u=f(x+y;z)$. Знайти du, якщо (x,y,z)- незалежні змінні.

3) $xyz=x+y+z$. Знайти dz.

3) Знайти величину та напрямок градієнту функції

$u=tgx - x+3\sin y-\sin^3 y + z + ctg\,z$ в точці $M(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}.)$

Лабораторна робота № 3.

1. Обчислити.
2. Знайти рівняння дотичної та нормалі до поверхні в точці М.
3. Знайти рівняння обвідної однопараметричної сім'ї плоских кривих.

Варіант 1.

1) Функцію $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ розвинути за формулою Тейлора в околі точки А (1;-2).

2) $z = \dfrac{x^3 - 3axy + y^3}{a^2}$, M(a;a;-a).

3) $x \cos a + y \sin a = p$, (p = const).

Варіант 2.

1) Функцію $f(x,y) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ розвинути за формулою Тейлора в околі точки А (1;1;1).

2) $z = \sqrt{x^2+y^2-xy}$, M(3;4;-7).

3) $(x-a)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

Варіант 3.

1) Знайти приріст, одержаний функцією $f(x,y) = x^2y + xy^2 - 2xy$ при переході від значень $x = 1$, $y = -1$ до значень $x_1 = 1+h$, $y_1 = -1+k$.

2) $z = arctg\dfrac{y}{x}, M\left(1;1;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3) $y = kx + \dfrac{a}{k}$, (a = const).

Варіант 4.

1) Розвинути f(x +h; y + k; z + l) за степенями h,k,l, якщо

$f(x;y;z)=Ax^2 +By^2 +Cz^2 +2Dxy +2Exz+2Fyz$.

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, M\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};\dfrac{b\sqrt{3}}{3};\dfrac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

3) $y^2 = 2px + p^2$.

Варіант 5.

1) Отримати наближену формулу для виразу $\frac{\cos x}{\cos y}$ з точністю до членів другого порядку, якщо $|x|$ та $|y|$ малі в порівнянні з 1.

2) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, M(1;2;-1).

3) $ax^2 - y^2 = a^2$.

Варіант 6.

1) Спростити вираз $\cos(x + y + z)$, вважаючи x,y,z малими за модулем.

2) $3x^4 - 4y^3z + 4z^2xy - 4z^3x + 1 = 0$, M(1;1;1).

3) $y = ax + \cos a$.

Варіант 7.

1) Отримати наближену формулу для виразу $\operatorname{arctg}\frac{1+x+y}{1-x+y}$ з точністю до членів другого порядку, якщо $|x|$ та $|y|$ малі в порівнянні з 1.

2) $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$, M(1;1;2).

3) $y = 2mx + m^4$.

Варіант 8.

1) Функцію $F(x;y) = \frac{1}{4}[f(x + h; y) + f(x;y + h) + f(x - h; y) + f(x;y - h)]$ розвинути за спепенями h з точністю до h^4.

2) $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$, M(2;3;6).

3) $y^2 = a(x - a)$.

Варіант 9.

1) Функцію $f(x,y) = \ln(1 + x + y)$ розвинути за формулою Тейлора.

2) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$, M(2;2;1).

3) $ax^2 + a^2y = 1$.

Варіант 10.

1) **Розвинути** $f(x+h; y+k)$ за спепенями h,k, якщо $f(x;y) = x^3 + 2y^3 - xy$.

2) $z = y + \ln\frac{x}{z}$, M(1;1;1).

3) $y = a^2(x - a)^2$.

Варіант 11.

1) Знайти приріст, одержаний функцією $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy + 18y - 39x + 4$ при переході від значень x = 5, y = 6 до значень x=5+h, y=6+k.

2) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, $M(x_0;y_0;z_0)$.

3) $(y-a)^2 = (x-a)^3$.

Варіант 12.

1) Знайти приріст, одержаний функцією

$f(x,y) = \frac{xy^3}{4} + yx^3 + \frac{x^2y^2}{2} - 2x + 3y - 4$ при переході від значень x = 1, y = 2 до значень x = 1+ h, y = 2+k.

2) z = xy, M(1;1;1).

3) $x^2 + y^2a = a^3$.

Лабораторна робота № 4.

1. Дослідити функцію f(x,y) на локальний екстремум.

2. Знайти найбільше та найменше значення функції F(x,y) на вказаній множині D.

3. Знайти умовний екстремум.

Варіант 1.

1) $f(x,y) = 1 - \left(1 + x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}$.

2) $f(x,y) = 3xy$; $D = \{(x;y): x^2 + y^2 \le 2\}$.

3) $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$, при $4x^2 + y^2 = 25$.

Варіант 2.

1) $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$.

2) $f(x,y) = \frac{xy}{2}\left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right)$; $D = \left\{(x;y): x \ge 0; y \ge 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \le 1\right\}$. .

3) $f(x,y) = xy$, при $x^2 + y^2 = 8$.

Варіант 3.

1)$f(x,y) = 2xy \cdot e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

2) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4xy + 3$; $D = \{(x;y): 0 \le x \le 4; 0 \le y \le 4\}$.

3)$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, при $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Варіант 4.

1) $f(x,y) = xy + \ln(x^2 + y^2)$.

2) $f(x,y) = x^2 y(4-x-y)$; D обмежена прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

3) $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$, при $4x^2 + y^2 = 25$.

Варіант 5.

1) $f(x,y) = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$.

2) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$; D обмежена прямими $x = 0, y = 0, x = 1; y = 2$.

3) $f(x,y) = 3x^2 + 4xy + y^2$, при $x^2 + y^2 = 1$.

Варіант 6.

1) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

2) $f(x,y) = x^2 - y^2$; $D = \{(x;y): x^2 + y^2 \le 4\}$.

3) $f(x,y) = \frac{x}{3} + \frac{y}{5}$, при $x^2 + y^2 = 1$.

Варіант 7.

1) $f(x,y) = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y - 1$.

2) $f(x,y) = \ln(3x^2 + 4y^2 + 2x + 7)$; $D = \{(x;y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

3) $f(x,y,z) = 2x + y - 2z$, при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

Варіант 8.

1) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

2) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$; $D = \{(x;y): \max\{|x|;|y| \le 1\}\}$.

3) $f(x,y,z) = \sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)}$, при $x + y + z = 2$.

Варіант 9.

1)$f(x,y) = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$.

2) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3$; D - область, обмежена параболою $y = 4 - x^2$ та віссю OX.

3) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, при $x + y + 3 = 0$.

Варіант 10.

1) $f(x,y) = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$.

2) $f(x,y) = e^{x^2+y^2+y}$; $D = \{(x;y): \max\{|x| + |y| \le 1\}\}$.

3) $f(x,y,z) = xy^2$, при $x + 2y = 1$.

Варіант 11.

1) $f(x,y) = 1 - 5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y$.

2) $f(x, y)=x^3 +y^3 -3xy$; D- трикутник з вершинами (0,0), (0,1), (1,0).

3) $f(x,y,z) = \dfrac{x-y-4}{\sqrt{2}}$, при $x^2 + y^2 = 1$.

Варіант 12.

1) $f(x,y)=2x^2 +6xy +5y^2-x +4y -5$.

2) $f(x,y) = e^{xy} - x^2 - xy$; $D = \{(x;y):x^2 +y^2 \le 1\}$.

3) $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, при $x - y = \dfrac{\pi}{4}$.

Перелік рекомендованої літератури

1. **Ильин В.А., Поздняк Э.Г.** Основы математического анализа. Ч.1.- **4 -е изд., перераб. и доп.** - М.: Наука, 1982; ч.2. - 2-е изд., - М.: **Наука.**
2. **Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. - М.: Наука, 1979.**
3. **Фихтенгольц** Г.М. Курс дифференциального и интегрального **исчисления.** Т.2,3.-М.: Наука, 1969.
4. **Кудрявцев** Л.Д. Курс математического анализа. Т.1,2. - М.: **Высшая школа, 1981.**
5. **Никольский** С.М. Курс математического анализа. Т.1,2. - 3-е изд., **перераб. и доп.**-М.: Наука, 1983.
6. **Кудрявцев** Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. **Сборник задач** по математическому анализу. Функции многих **переменных.**/ Под ред. Кудрявцева Л.Д. - М.: Наука, 1994.
7. **Демидович** Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому **анализу. -3-е изд.** - М.: Наука, 1977.