МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.В. Киричевський, Н.М. Д'яченко

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Практикум з розв'язання задач
для студентів денної та заочної форм
навчання спеціальності
6.050100 „Економічна кібернетика"

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №5 від 25.01.05

Запоріжжя 2005

УДК 517.2 (076)
ББК В161.11я73

Киричевський В.В., Д'яченко Н.М. Функції багатьох змінних: Практикум з розв'язання задач для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 6.050100 «Економічна кібернетика».– Запоріжжя: ЗНУ, 2005. – 44 с.

Практикум з розв'язання задач призначений для студентів 1 курсу економічного факультету спеціальності „економічна кібернетика", що вивчають математичний аналіз, і охоплює одну з тем 2 семестру: «Функції багатьох змінних». Подано теоретичний матеріал за вказаною темою з прикладами розв'язку деяких задач, варіанти типових індивідуальних завдань та список рекомендованої літератури.

Рецензент Сніжко Н.В., к.ф.-м.н., доцент

Відповідальний
за випуск Киричевський В.В., д.т.н., професор, зав. кафедрою.

ЗМІСТ

“Математика имеет свои «последние квартеты Бетховина», которые существуют только для посвященных, но в ней существуют и свои «Шубертовы песенки», доступные непосредственно всем»

(Г. Хассе)

ВСТУП

Фахівці з економіки повинні добре володіти математичним апаратом. Фундаментом математики служить математичний аналіз. Дуже багато понять, математичного аналізу знаходять своє застосування в економічній теорії.

Виробничі функції можуть залежать від декількох факторів. Наприклад, попит на деякий товар може залежати від ціни, доходів споживачів, ціни альтернативного товару. Тому такі виробничі функції представляють собою функції багатьох змінних. Вивчення властивостей цих функцій спирається на аналіз їх ліній і поверхонь рівня, їх граничні і диференціальні властивості. Так, аналіз ліній рівня виробничої функцій двох змінних дозволяє розв’язати задачі про оптимальний розподіл ресурсів або про оптимальне споживання і т.п. Відповісти на питання про те, як (кількісно) змінюється значення виробничої функції при зміні одного з факторів виробництво (наприклад, як змінюється попит при зміні доходів населення або при зміні цін) дається за допомогою поняття еластичності функції, яке виражається через часткові похідні цієї функції. Розв’язання задачі про значення об’ємів випуску товарів, за яких підприємство отримає найбільший прибуток, відноситься до задач про екстремум функції багатьох змінних. Наведені приклади свідчать про значення властивостей функції багатьох змінних в економічній теорії.

Даний посібник присвячений вивченню математичної теорії функцій багатьох змінних і застосуванню її при розв’язанні конкретних задач, зокрема задач економіки. Розв’язання задач за цією темою не дуже просто дається студентам. Метою цього посібника є спроба допомогти студентам у подоланні цієї проблеми.

Друга мета даного посібника – видача типового індивідуального завдання для кожного студента, що складається із 12 варіантів. Номер варіанта типового індивідуального завдання визначається як залишок від ділення номера прізвища студента в журналі на число 12. Типове завдання складене так, що дотримується принцип однакової складності для усіх варіантів. Кожний варіант містить завдання з кожної теми різного рівня складності для дотримання принципу диференційованого навчання. Викладач, що веде практичне заняття, вказує на необхідний рівень задач для обов’язкового вирішення, який доступний середньому студенту, а інші завдання студент вирішує для заглиблення своїх знань і підвищення атестаційної оцінки.

“Нельзя быть настоящим математиком, не будучи настоящим поэтом”

(К. Вейерштрасс)

1. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1.1. Метричні простори

Виробничі функції залежать від декількох факторів і тому стають функціями багатьох змінних. Такі функції задаються на множинах, що містяться на площині, в тривимірному просторі, в скінченновимірному просторі. Для того, щоб увести поняття границі послідовності в такому просторі, границі і неперервності функцій багатьох змінних треба знати, як можна задавати відстані в цих просторах. Питання визначення найбільшого і найменшого значень виробничої функції дуже суттєве в економіці. Для вирішення цього питання потрібно знати на якій множині задана функція, а також, чи є вона неперервною на цій множині. Множини в скінченновимірних просторах можуть бути різноманітної природі мати різні властивості. Так, на замкнених, обмежених множинах неперервна функція буде обмеженою і досягати свого найбільшого і найменшого значень, а на відкритій – не обов’язково. Вирішенню деяких з цих питанням буде присвячений цей розділ.

Визначення 1.1. Множина X називається *метричним простором*, якщо будь-яким елементам x і y із X поставлене у відповідність дійсне число $\rho(x,y)$, що носить назву відстані між x та y, що задовольняє аксіомам

1^0 $\rho(x,y)\ge 0\ \forall x,y\in X$; $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2^0 $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \forall x,y\in X$;

3^0 $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \forall x,y,z\in X$ – *аксіома трикутника*.

Таким чином задана функція $\rho(x,y)$ називається *метрикою*. Елемент x метричного простору часто називають точкою цього простору. Метричний простір, що задається на множині X метрикою $\rho(x,y)$ позначається (X,ρ).

Приклад 1.1. Функція $\rho(x,y)=|x-y|$ на множині IR задовольняє аксіомам метрики (перевірити!), тому $IR^1=\left(IR,|x-y|\right)$ - метричний простір.

Приклад 1.2. *Арифметичним* m *-вимірним простором* IR^m називається множина усіх упорядкованих скінченних сукупностей, що складаються із m дійсних чисел $(x_1,x_2,...,x_m)$, на яких уведено операції додавання і множення на скаляр $\lambda\in IR$ за правилами:

$$(x_1,x_2,...,x_m)+(y_1,y_2,...,y_m)\overset{def}{=}(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_m+y_m);$$

$$\lambda(x_1,x_2,...,x_m)\overset{def}{=}(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_m).$$

Сукупність $(x_1,x_2,...,x_m)$ називається точкою, вектором або елементом

IR^m , будемо його позначати $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, а числа $x_i (i = 1,...,m)$ називаються координатами точки $\bar{x}$.

Як відомо із лінійної алгебри, IR^m – є лінійним простором. Уведемо на ньому функції

$$\rho_1(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| ; \quad \rho_2(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2} ; \quad \rho_\infty(\bar{x},\bar{y}) = \max_{i=1,...,m} |x_i - y_i| .$$

Кожна із заданих функцій визначає метрику, оскільки задовольняє аксіомам метрики. Відповідні простори позначаються таким чином:

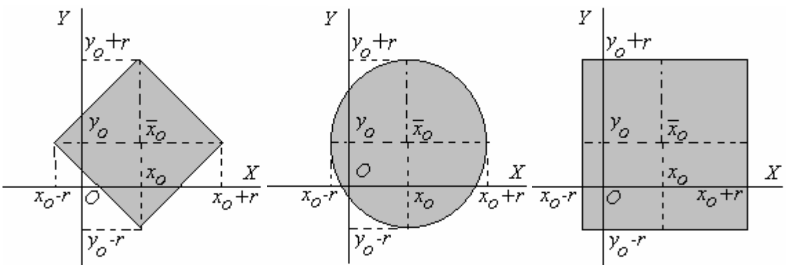
$$IR_1^m \overset{def}{=} \left(IR^m, \rho_1\right); \quad IR_2^m \overset{def}{=} \left(IR^m, \rho_2\right); \quad IR_\infty^m \overset{def}{=} \left(IR^m, \rho_\infty\right).$$

Метричний простір IR_2^m називається *евклідовим* m *-вимірним простором.*

Визначення 1.2. *Відкритою, замкненою кулею і сферою* радіусу r з центром в точці x_0 в метричному просторі (X,ρ) називаються відповідно множини

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$$
$$B_r[x_0] = \{x \in X : \rho(x, x_0) \le \varepsilon\}$$
$$S_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) = \varepsilon\}$$

На рис. 1.1 а, б, в зображені замкнені кулі в просторах IR_1^2 , IR_2^2 і IR_∞^2 відповідно.



а б в

Рис 1.1.

Визначення 1.3. ε *-околом точки* x_0 називається відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$, будемо його позначати $O_\varepsilon(x_0)$. У випадку метричного простору IR_2^m такий ε -окіл називається *кульовим.*

Визначення 1.4. *Прямокутним* ε *-околом точки* $\bar{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_i^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$ в просторі IR_2^m називається множина вигляду

$$V_\varepsilon(x_0) = \left\{(x_1, x_2, ..., x_m) \in IR^m : \left|x_i - x_i^{(0)}\right| < \varepsilon, i = 1,...,m \right\}.$$

Визначення 1.5. Множина M метричного простору (X,ρ) називається *обмеженою*, якщо її можна цілком помістити в деяку кулю $B_r[x_0]$.

Визначення 1.6. Послідовність $\{x_n\}$ елементів метричного простору (X,ρ) називається *збіжною до елемента* x_0 цього простору, якщо

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in IN\forall n\geq IN\ \rho(x_n,x_0)<\varepsilon).$$

Точка x_0 називається *границею послідовності* $\{x_n\}$. Позначення:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,\rho)} x_0;\quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

На мові ε-околів збіжність послідовності до x_0 означає, що для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер, що усі члени послідовності, починаючи з цього номера, будуть міститися в ε-околі точки x_0.

Теорема 1.1 *(критерій збіжності послідовності в* IR_2^m *).* Для того, щоб послідовність в IR_2^m збігалась, необхідно і достатньо, щоб вона *збігалась покоординатно*, тобто

$$\overline{x}_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)},\ldots,x_i^{(n)},\ldots,x_m^{(n)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{IR_2^m} \overline{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots,x_i^{(0)},\ldots,x_m^{(0)}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i^{(0)} \forall i = 1,\ldots,m.$$

Властивості збіжних послідовностей у метричних просторах.

1. Границя послідовності єдина.
2. Якщо послідовність збігається, то вона утворює обмежену множину.

Визначення 1.7. Точка x_0 називається *граничною точкою множини* M *метричного простору* (X,ρ), якщо будь-який її ε-окіл містить хоча б одну точку множини M, відмінну від x_0.

Теорема 1.2. Для того, щоб точка x_0 була граничною точкою множини M, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність $\{x_n\}$ елементів цієї множини, що збігається до x_0.

Визначення 1.8. Множина M, називається *замкненою*, якщо будь-яка її гранична точка належить множині M.

Виходячи з наведеного визначення 1.8 і теореми 1.2, можна сформулювати критерій замкненості множина M метричного простору (X,ρ):

$$M \text{ – замкнена в } (X,\rho) \Leftrightarrow \left(\left. \begin{array}{l} \{x_n\}\subset M \\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,\rho)} x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0\in M \right).$$

Визначення 1.9. Точка x_0 називається *внутрішньою точкою множини*, якщо вона належить множині M разом із деяким своїм ε-околом.

Визначення 1.10. Множина M називається *відкритою*, якщо кожна її точка є внутрішньою.

Властивості відкритих і замкнених множин.

1. Множина є відкритою тоді і лише тоді, коли її доповнення э множиною замкненою.

2. Множина є замкненою тоді і лише тоді, коли її доповнення э множиною відкритою.
3. Будь-яке об’єднання відкритих множин є множиною відкритою.
4. Скінченний перетин відкритих множин є множиною відкритою.
5. Будь-який перетин замкнених множин є множиною замкненою.
6. Скінченне об’єднання замкнених множин є множиною замкненою.

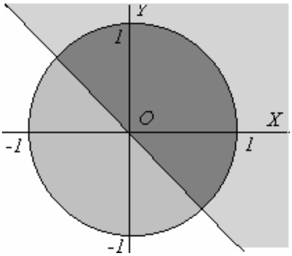


Рис 1.2

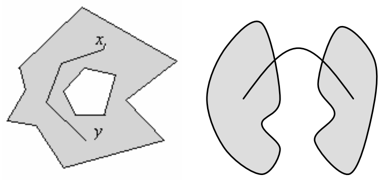
Розглянемо **приклади** деяких множин.

1. Множина $B_r(x_0)$ – є відкритою, а множина $B_r[x_0]$ – є замкненою в будь-якому метричному просторі. Множина $V_\varepsilon(x_0)$ – відкрита в IR_2^m .
2. Множина $M=[0,1]\bigcup[2,3]\bigcup\{4\}$ – замкнена в IR^1.
3. Множина $M=\left\{(x,y)\in IR^2 : x^2+y^2\le 1\wedge x+y\ge 0\right\}$ – замкнена в IR_2^2 (вона зображена на рис 1.2).
4. При цьому множина $M_1=[0,1)\bigcup(2,3]\bigcup\{4\}$ – ні замкнена ні відкрита в IR^1, а $M_2=\left\{(x,y)\in IR^2 : x^2+y^2\le 1\wedge x+y>0\right\}$ – ні замкнена ні відкрита в IR_2^2 .

Параметрично задана лінія в просторі IR^m

$$\begin{cases} x_1=\varphi_1(t) \\ x_2=\varphi_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m=\varphi_m(t) \end{cases},\ t\in[a,b]$$

є неперервною на $[a,b]$, якщо кожна функція $\varphi_i(t), i=1,...m$ неперервна на $[a,b]$.



а б

Рис 1.3.

Визначення 1.11. Множина M називається *зв’язною*, якщо будь-які дві її точки x і y можна сполучити неперервною лінією, яка цілком лежить в середині цієї множини.

На рис 1.3 а зображена зв’язна множина, а на рис. 1.3. б – незв’язна.

Будь-яка відкрита чи замкнена, зв’язна множина називається *областю*.

1.2. Поняття функції багатьох змінних

Якщо відображення f кожній точці $\overline{x}$ множини M метричного простору IR_2^m ставить у відповідність єдине число $y\in IR^1$, то кажуть, що на множині M задана *функція m змінних*, а множину M називають *множиною визначення функції* f і позначається $D(f)$.

Приклад 1.3. Знайти множину визначення функції $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\ln\left(1+\sqrt{x+y}\right)$.

Розв'язання. Множина визначення даної функції двох змінних визначається системою нерівностей

$$\begin{cases}1-x^2-y^2\ge 0\\ 1+\sqrt{x+y}>0\\ x+y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ x+y\ge 0\end{cases}.$$

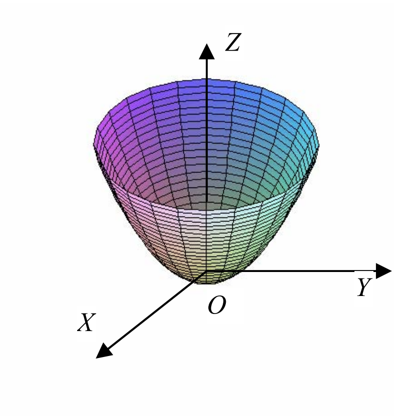


Рис. 1.4.

Таким чином, область визначення задається геометричним, місцем точок, що зображені на рис. 1.2.

У випадку функції двох змінних геометричною інтерпретацією графіка функції є поверхня в тривимірному просторі. На рис 1.4 зображено графік функції $z=x^2+y^2$.

Визначення 1.12. Переріз графіка функції $z=f(x,y)$ площиною $z=z_0$ називається *лінією рівня* цієї функції.

Частіше під лінією рівня розуміють проекцію зазначеного перерізу. В будь-якому випадку її зображують на площині XOY.

Застосуванню ліній рівня в економіці буде присвячено наступний параграф.

У випадку функцій трьох і більше змінних можна аналогічно ввести поняття *поверхні рівня*, як перерізу графіка функції $z=f(\bar{x})$ площиною $z=z_0$.

Приклад 1.4. Лінією рівня функції $z=x^2+y^2$ при $z_0=1$ в проекції на площину XOY буде коло з центром в точці О радіуса 1 (див. рис. 1.5). На рис. 1.4 різні лінії рівня цієї функції – кола, паралельні площині XOY, розташовані в просторі. Вони роблять рисунок більш наглядним. Зокрема, зрозуміло, що при $z_0<0$ ліній рівня не існує.

Наведемо поняття *складної функції багатьох змінних*.

1) Нехай функція g переводить деяку множину $E_1\subset IR^m$ в множину $E\subset IR^n$ за правилом $\bar{x}=g(\bar{t})$, тобто

$$(x_1,x_2,...,x_n)=\left(g_1(t_1,t_2,...,t_m),g_2(t_1,t_2,...,t_m),...,g_n(t_1,t_2,...,t_m)\right),$$

або

$$\begin{cases} x_1 = g_1(t_1, t_2, ..., t_m) \\ x_2 = g_2(t_1, t_2, ..., t_m) \\ ... \\ x_n = g_n(t_1, t_2, ..., t_m) \end{cases}.$$

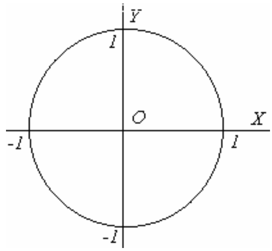


Рис. 1.5.

2) Тепер нехай функція $f(\bar{x})$ переводить $E \subset IR^n$ в IR^1.

3) Отримаємо функцію $\varphi(\bar{t}) = f(g(\bar{t}))$, яка переводить $E_1 \subset IR^m$ в IR^1:

$$\begin{array}{ccccc} IR^m & \xrightarrow{g} & IR^n & \xrightarrow{f} & IR^1 \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ \longrightarrow & & \xrightarrow{\varphi = f \circ g} & & \longrightarrow \end{array}.$$

1.3. Лінії рівня в економічних задачах

Значну частину економічних механізмів ілюструється на рисунках, що зображують лінії рівня функцій двох змінних $z = f(x, y)$. Наприклад, лінії рівня виробничої функції називають *ізоквантами*.

Нехай x і y – два різні фактори виробництва, а функція $z = f(x, y)$ характеризує виробництво продукції, котре дозволяється факторами x і y. На рис. 1.6 лінії рівня $f(x, y) = Q$ зображено суцільними лініями, а штриховими обведена так звана *економічна область,* яка характеризується тим, що частина ізоквант, що відсікається нею, представляють собою графіки спадних функцій, тобто зменшення кількості одного фактора призводить до збільшення іншого, не змінюючи розмірів виробництва. Іншими словами, економічна область – це множина значень факторів, що допускають заміну одного з них іншим. Очевидно, що всі „розумні" значення x і y належать економічній області.

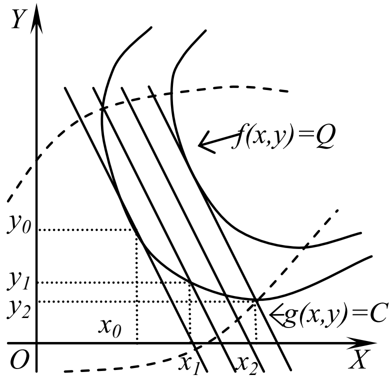


Рис.1.6.

Ізокванти дозволяють геометрично ілюструвати розв'язання **задачі про оптимальний розподіл ресурсів**. Нехай $z = g(x, y)$ – функція витрат, необхідних для забезпечення значень ресурсів x і y (часто можна вважати, що функція витрат лінійна: $g(x, y) = p_x x + p_y y$, де p_x і p_y – ціни факторів x і y). Лінії рівня цієї функції також зображені на рис. 1.6. Комбінація ліній рівня функцій $f(x,y)$ і $g(x,y)$ дозволяє робити висновки про переваги того чи іншого значення факторів x і y. Очевидно, наприклад, що пара (x_1, y_1) має більше переваг, ніж пара (x_2, y_2), оскільки забезпечує більший випуск з меншими витратами. Оптимальними ж значеннями факторів будуть значення (x_0, y_0) – координати точки дотику лінії рівня функції виробництва і функції витрат.

Лінії рівня **функції корисності** (вони називаються *кривими байдужості)* також дозволяють розглядати питання заміщення одного товару іншим і ілюструвати розв'язок *задачі про оптимальне споживання* (споживацького вибору) (див. рис. 1.7).

Лінії рівня витрат на придбання товарів x і y зображені на рис. 1.7. пунктиром. Оптимальне споживання забезпечується значенням (x_0, y_0) – координатами точок дотику кривої байдужості і лінії рівня витрат. У цій точці задана корисність досягається найбільш економічним чином.

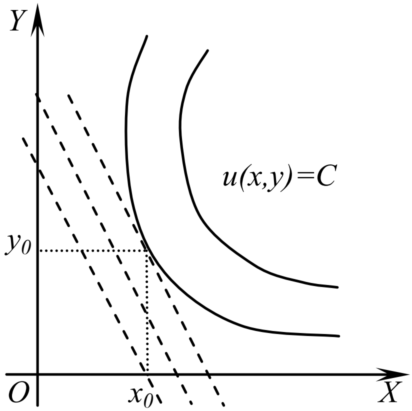


Рис. 1.7.

1.4. Границя функції багатьох змінних

Визначення 1.13 (за Коші 1). Число b називається *границею функції* $f(\overline{x})$ *в точці* $\overline{x}_0 \in IR_2^m$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \overline{x} \in D(f)\ 0 < \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \left| f(\overline{x}) - b \right| < \varepsilon .$$

Позначення: $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = b$ або $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ \dots \\ x_m \to x_m^{(0)}}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$. Ця границя називається *кратною*. У випадку функції двох змінних вона називається *подвійною*.

Це визначення можна переписати в розгорнутому вигляді:

$$\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ \dots \\ x_m \to x_m^{(0)}}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b \quad \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \overline{x} \in D(f)$$

$$0 < \sqrt{\left(x_1 - x_1^{(0)}\right)^2 + \left(x_2 - x_2^{(0)}\right)^2 + \dots + \left(x_m - x_m^{(0)}\right)^2} < \delta \Rightarrow \left| f(x_1, x_2, \dots, x_m) - b \right| < \varepsilon .$$

В термінах околів визначення кратної границі означає той факт, що для будь якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, що, як тільки $\overline{x} \in O_\delta(\overline{x}_0) \setminus \{\overline{x}_0\}$ (тобто $\overline{x}$

належить проколотому кульовому δ-околу), так $\left|f(\bar{x})-b\right|<\varepsilon$.

Наведене визначення еквівалентне наступному.

Визначення 1.14 (за Коші 2). $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_1^{(0)}\\ \dots\\ x_m\to x_m^{(0)}}} f(x_1,x_2,\dots,x_m)=b \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l}\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall\bar{x}\in D(f)\\ 0<\left|x_1-x_1^{(0)}\right|<\delta\wedge 0<\left|x_2-x_2^{(0)}\right|<\delta\wedge\dots\wedge 0<\left|x_m-x_m^{(0)}\right|<\delta\Rightarrow\\ \hfill\left|f(x_1,x_2,\dots,x_m)-b\right|<\varepsilon\end{array}.$$

Або в термінах околів: для будь якого $\varepsilon>0$ можна знайти таке $\delta>0$, що, як тільки $\bar{x}\in V_\delta(\bar{x}_0)\setminus\{\bar{x}_0\}$ (тобто $\bar{x}$ належить проколотому прямокутному δ-околу), так $\left|f(\bar{x})-b\right|<\varepsilon$.

Визначення 1.15 (за Гейне 1).

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})=b \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\{\bar{x}_n\}\in D(f)\setminus\{\bar{x}_0\}\quad \bar{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{IR_2^m} \bar{x}_0 \Rightarrow f(\bar{x}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{IR^1} b.$$

Воно еквівалентне наступному

Визначення 1.16 (за Гейне 2). $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_1^{(0)}\\ \dots\\ x_m\to x_m^{(0)}}} f(x_1,x_2,\dots,x_m)=b \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\{\bar{x}_n\}\in D(f)\setminus\{\bar{x}_0\}\quad x_i^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{IR^1} x_i^{(0)}\forall i=1,\dots,m\Rightarrow f(x_1,x_2,\dots,x_m)\xrightarrow[n\to\infty]{IR^1} b.$$

Теорема 1.3 *(арифметичні операції над границями).*
Якщо функції $f(\bar{x})$ *і* $g(\bar{x})$, що визначені на одній і тій же множині M, в точці $\bar{x}_0\in IR_2^m$ мають границі, що відповідно дорівнюють b і c, то функції $f(\bar{x})\pm g(\bar{x})$, $f(\bar{x})\cdot g(\bar{x})$ і $\dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$) мають в точці $\bar{x}_0$ границі $b\pm c$, $b\cdot c$ і $\dfrac{b}{c}$ відповідно (у випадку частки – накладається додаткова умова: $c\neq 0$).

Приклад 1.5. Чи існують подвійні границі, якщо так, то знайти їх:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ **;** **б)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ **;** **в)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{tg(xy)}{x}$ **;** **г)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}(1+x)^{\frac{1}{y}}$ **.**

Розв'язання. а) Нехай $x'_n=y'_n=\dfrac{1}{n}$, тоді $(x'_n,y'_n)=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{IR_2^m}(0,0)$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x'_ny'_n}{{x'_n}^2+{y'_n}^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n^2}{2/n^2}=\dfrac{1}{2}$. Тепер нехай $x''_n=\dfrac{y''_n}{2}=\dfrac{1}{n}$, тоді

$\left(x_n'', y_n''\right) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{IR_2^m} (0,0)$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n'' y_n''}{x_n''^2 + y_n''^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2/n^2}{5/n^2} = \frac{2}{5}$. Згідно визначеню за Гейне поведінка функції в околі точки $(0,0)$ не повинна залежати від того, за яким напрямком послідовність прагне до цієї точки. В даному прикладі цей факт не здійснюється, тому границя не існує.

б) З оцінки $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ випливає, що $0 \leq \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$, тому отримаємо $0 \leq \frac{|xy^2|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}|y|$. Тепер припустимо, що $x_n \to 0 \wedge y_n \to 0$, тоді за теоремою про двох міліціонерів отримаємо

$$\begin{array}{ccccc} 0 \leq & \frac{|x_n y_n{}^2|}{x_n{}^2 + y_n{}^2} & \leq & \frac{1}{2}|y_n| & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & . \\ 0 & 0 & & 0 & \end{array}$$

Останнє виконується незалежно від напрямку прагнення послідовності $\left(x_n, y_n\right)$ до точки $(0,0\}$. *Висновок:* <u>границя існує і дорівнює 0.</u>

в) Зробимо елементарні перетворення і скористаємось теоремою про арифметичні операції над границями

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{tg(xy)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{tg(xy)}{xy} y = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{tg(xy)}{xy} \lim_{y\to 0} y \text{.}$$

Для першого множника $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{tg(xy)}{xy}$ заміна $t = xy$ приводить до границі $\lim\limits_{t\to 0} \frac{tg(t)}{t} = 1$, а для другого, очевидно, – $\lim\limits_{y\to 0} y = 0$, тому $\underline{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{tg(xy)}{x} = 0}$.

г) У випадку границі $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x)^{\frac{1}{y}}$ розглянемо ті ж самі дві послідовності, що і в прикладі а). Отримаємо:

якщо $x_n' = y_n' = \frac{1}{n}$, то $\lim\limits_{\substack{x_n'\to 0\\ y_n'\to 0}} (1 + x_n')^{\frac{1}{y_n'}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$;

якщо $x_n'' = \frac{y_n''}{2} = \frac{1}{n}$, то $\lim\limits_{\substack{x_n''\to 0\\ y_n''\to 0}} (1 + x_n'')^{\frac{1}{y_n''}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$.

І в цьому прикладі знову приходимо до *висновку* про <u>не існування границі</u>.

Якщо фіксувати усі змінні, окрім однієї, то можна здобути визначення повторної границі. Розглянемо випадок функції двох змінних.

Визначення 1.17. Нехай функція $u = f(x,y)$ задана в деякому проколотому прямокутному околі точки (x_0, y_0)

$$V = \left\{(x,y) \in IR^2 : 0 <| x - x_0) < d_1 \wedge 0 <| y - y_0 |< d_2\right\}.$$

Якщо для будь-якого фіксованого y, що задовольняє умові $0 <| y - y_0 |< d_2$, існує границя функції $u = f(x,y)$ однієї змінної x в точці $x = x_0$, а саме: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y-fix}} f(x,y) = \varphi(y)$, а також, крім того, існує $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = b$, тоді кажуть що існує *повторна границя* функції $u = f(x,y)$ в точці (x_0, y_0). Позначення: $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = b$.

Аналогічно визначається границя $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = b$.

Теорема 1.4. Якщо функція $u = f(x,y)$ задана в деякому проколотому прямокутному околі точки (x_0, y_0)

$$V = \left\{(x,y) \in IR^2 : 0 <| x - x_0) < d_1 \wedge 0 <| y - y_0 |< d_2\right\},$$

1) існує подвійна границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b$,
2) для будь-якого y, що задовольняє умові $0 <| y - y_0 |< d_2$, існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$,

$\Rightarrow$

1) існує повторна границя $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$,
2) крім того повторна границя дорівнює подвійній:
$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b.$$

Наслідок 1.1.
Якщо виконуються дві зазначені умови теореми 1.4 і
3) для будь-якого x, що задовольняє умові $0 <| x - x_0 |< d_1$, існує границя $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \phi(x)$,

$\Rightarrow$

1) існує повторна границя $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$,
2) крім того обидві повторні границі дорівнює подвійній:
$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b$$

Наслідок 1.2. Якщо повторні границі нерівні, то не існує подвійна границя.

Приклад 1.6. Знайти $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, якщо

а) $f(x,y) = \dfrac{x^y}{1 + x^y}, \quad x_0 = \infty; y_0 = +0$ **;**

б) $f(x,y)=\log_x(x+y), \quad x_0=1;\ y_0=0$ **.**

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y-fix, y>0}} \dfrac{x^y}{1+x^y}=1 \Rightarrow \lim\limits_{y\to+0}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^y}{1+x^y}=\underline{1}$;

$$\lim\limits_{\substack{y\to+0 \\ x-fix}}\frac{x^y}{1+x^y}=\frac{1}{1+1}=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}=\underline{\frac{1}{2}}.$$

Звідки, зокрема, отримуємо, що подвійна границя $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to+0}}\dfrac{x^y}{1+x^y}$ <u>не існує</u>.

б) $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ y-fix}}\log_x(x+y)=\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ y-fix}}\dfrac{\ln(x+y)}{\ln x}=\left\|\dfrac{const}{0}\right\|=\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{y\to+0}\lim\limits_{x\to1}\log_x(x+y)=\underline{\infty}$;

$$\lim\limits_{\substack{y\to0 \\ x-fix}}\log_x(x+y)=\lim\limits_{\substack{y\to0 \\ x-fix}}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\frac{\ln x}{\ln x}=1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}\lim\limits_{y\to+0}\log_x(x+y)=\underline{1}$.

Звідки також випливає, що подвійна границя $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ y\to0}}\log_x(x+y)$ <u>не існує</u>.

1.5. Неперервність функції багатьох змінних

Визначення 1.18. Функція $f(\overline{x})$ *називається неперервною в точці* $\overline{x}_0\in IR_2^m$, якщо $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0}f(\overline{x})=f(\overline{x}_0)$.

Читачеві пропонується самостійно записати усі визначенні за Коші і за Гейне та еквівалентні їм, при цьому пам'ятати, що функція повинна бути визначеною в точці $\overline{x}_0$, тому відповідні околи не повинні бути проколотими і точка $\overline{x}_0$ повинна належати множині визначення функції.

Приклад 1.7. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x\neq0\ i\ y\neq0 \\ 0, & x=y=0\end{cases}.$$

Розв'язання. Як було отримано в прикладі 1.5 а, ця функція в точці (0,0) на має границі, тому в цій точці вона розривна. У всіх інших точках (x_0,y_0), де $x_0\neq0$ або $y_0\neq0$, функція $f(x,y)$ неперервна, оскільки

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x_0 y_0}{x_0{}^2 + y_0{}^2} = f(x_0, y_0)\ .$$

Висновок: <u>дана функція за сукупністю змінних</u> x і y <u>неперервна на всій площині, крім точки (0,0)</u>

В той же час ця функція неперервна в точці (0,0) за змінною x і за змінною y. До цього висновку за змінною x приходимо завдяки співвідношенням:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y - fix}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} \dfrac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0 = f(0, y), \textit{якщо } y \neq 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0 = f(0,0), \textit{якщо } y = 0 \end{cases},$$

а за змінною y – аналогічно.

Наведений приклад свідчить про те, що функція, яка неперервна за кожною змінною в деякій точці, не обов'язково буде неперервною за сукупністю змінних в цій точці.

Якщо функція неперервна в кожній точці множини $M \subset IR_2^m$, то кажуть, що вона неперервна на цій множині.

Властивості неперервних функцій.

1^0 *(Арифметичні операції над неперервними функціями.)* Якщо дві функції $f(\bar{x})\ i\ g(\bar{x})$, що визначені на одній і тій же множині $M \subset IR_2^m$, неперервні в точці $\bar{x}_0 \in M$, то функції $f(\bar{x}) \pm g(\bar{x})$, $f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})$ і $f(\bar{x}) / g(\bar{x})$ неперервні в точці $\bar{x}_0$ (у випадку частки $g(\bar{x}_0) \neq 0$).

2^0 *(Неперервність складної функції.)* Якщо функція $g(\bar{t})$, що переводить множину $E_1 \subset IR_2^m$ в множину $E \subset IR_2^n$ неперервна на E_1 (тобто неперервною на E_1 є кожна з функцій координат $g_i(t_1, t_2, ..., t_m), i = 1, ..., n$), а функція $f(\bar{x})$, що переводить $E \subset IR_2^n$ в IR^1, неперервна на E, тоді функція $\varphi(\bar{t}) = f(g(\bar{t}))$, що діє із $E_1 \subset IR_2^m$ в IR^1, є неперервною на $E_1 \subset IR_2^m$.

3^0 *(Теорема Коші.)* Якщо функція $z = f(\bar{x})$ неперервна в зв'язній області $E \subset IR_2^m$, до того ж, $\exists \bar{x}_1 \in E : f(\bar{x}_1) < 0$, і $\exists \bar{x}_2 \in E : f(\bar{x}_2) > 0$, тоді можна знайти таку точку $\bar{x}^* \in E$, що $f(\bar{x}^*) = 0$.

4^0 *(Перша теорема Вейєрштрасса.)* Якщо функція $z = f(\bar{x})$ неперервна в обмеженій замкненій області $E \subset IR_2^m$, то ця функція обмежена в цій області.

5^0 *(Друга теорема Вейєрштрасса.)* Якщо функція $z = f(\bar{x})$ неперервна в обмеженій замкненій області $E \subset IR_2^m$, то ця функція в цій області досягає свого найбільшого і найменшого значень.

Для дослідження виробничої функції на екстремум необхідно, щоб вона була неперервною в економічній області.

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

2.1. Часткові похідні. Диференційованість

Насамперед з диференціальним числення пов'язано багато питань про застосування теорії функцій багатьох змінних в економіці. Розгляду деяких таких питань присвячено цей розділ.

Визначення 2.1. Фіксуємо $i \in \{1,...m\}$. Якщо функція $f(\overline{x})$ задана на області $E \subset IR_2^m$, а $\overline{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_m^{(0)})$ – внутрішня точка E і Δx_i - такий приріст аргументу x_i, що точка $(x_1^{(0)},.., x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_i^{(0)},..., x_m^{(0)})$ залишається всередині множини E, то *частковим приростом цієї функції в точці* $\overline{x}_0$ *за змінною* x_i називається значення

$$\Delta_x f(\overline{x}_0) = f(x_1^{(0)},.., x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)},..., x_m^{(0)}) - f(x_1^{(0)},..., x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)},..., x_m^{(0)})$$

Визначення 2.2. Якщо для функції $f(\overline{x})$, що задана на області $E \subset IR_2^m$, і для точки $\overline{x}_0 \in E$ існує границя $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_x f(\overline{x}_0)}{\Delta x_i}$, то вона називається *частковою похідною функції* $f(\overline{x})$ *в точці* $\overline{x}_0$ *за змінною* x_i. Позначення $\dfrac{\partial f(\overline{x}_0)}{\partial x_i}$ або $f'_{x_i}(\overline{x}_0)$ ($i \in \{1,...m\}$).

Приклад 2.1. Знайти часткові похідні функцій $f(x, y) = e^{erctg\, xy}$, $g(x, y) = x^y$.

Розв'язання. Фіксуємо по черзі змінні y і x, тоді

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{erctg\, xy} \frac{y}{1 + (xy)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{erctg\, xy} \frac{x}{1 + (xy)^2};$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Визначення 2.3. Якщо функція $f(\overline{x})$ задана на області $E \subset IR_2^m$, а $\overline{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_m^{(0)})$ – внутрішня точка E і Δx_i – такі прирости аргументів x_i ($i = 1,..., m$), що $(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2,..., x_m^{(0)} + \Delta x_m) \in E$, а повний приріст функції можна представити у вигляді

$$\Delta f(\overline{x}_0) = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2,..., x_m^{(0)} + \Delta x_m) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_m^{(0)}) =$$
$$= A_i \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_m \Delta x_m + o(\rho), \tag{2.1}$$

де $\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2+\ldots+(\Delta x_m)^2}$, а $\lim\limits_{\rho\to 0} o(\rho)/\rho = 0$, то така функція називається *диференційованою* в точці $\bar{x}_0$, а головна лінійна частина приросту функції в (2.1) називається *диференціалом цієї функції в точці* $\bar{x}_0$, який позначається $df(\bar{x}_0)$, тобто

$$df(\bar{x}_0) = A_i dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_m dx_m , \qquad (2.2)$$

де $dx_i = \Delta x_i \forall i = 1,\ldots,m$

Теорема 2.1 *(необхідна умова диференційованості функції в точці).* Якщо функція $f(\bar{x})$ диференційована в точці $\bar{x}_0$, то вона в цій точці має часткові похідні за кожною із змінних, і у формулі (2.1)

$$A_i = \frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_i} \forall i = 1,\ldots,m .$$

З наведеної теореми випливає, що для диференційованої функції

$$\Delta f(\bar{x}_0) = f'_{x_1}(\bar{x}_0)\Delta x_1 + f'_{x_2}(\bar{x}_0)\Delta x_2 + \ldots + f'_{x_m}(\bar{x}_0)\Delta x_m + o(\rho) , \qquad (2.1\text{а})$$

$$df(\bar{x}_0) = \frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_m}dx_m =$$

$$= f'_{x_1}(\bar{x}_0)dx_1 + f'_{x_2}(\bar{x}_0)dx_2 + \ldots + f'_{x_m}(\bar{x}_0)dx_m . \qquad (2.2\text{а})$$

Приклад 2.2. Замінивши приріст функції диференціалом, наближено обчислити а) $1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3$; б) $0{,}97^{1,05}$.

Розв'язання. а) Розглянемо функцію $f(x,y,z)=(1+x)\cdot(2+y)^2\cdot(3+z)^3$ і знайдемо її повний диференціал в точці $(0,0,0)$ (див. (2.2 а).

$$d f\big|_{(0,0,0)} = f'_x\big|_{(0,0,0)}dx + f'_y\big|_{(0,0,0)}dy + f'_z\big|_{(0,0,0)}dz =$$

$$= (2+y)^2(3+z)^3\Big|_{(0,0,0)}dx + 2(1+x)(2+y)(3+z)^3\Big|_{(0,0,0)}dy +$$

$$+3(1+x)(2+y)^2(3+z)^2\Big|_{(0,0,0)}dz = = 108dx + 108dy + 108dz = 108(dx+dy+dz) .$$

Зрозуміло, що

$$x_0 = 0;\ y_0 = 0;\ z_0 = 0 ,\ \Delta x = 0{,}002;\ \Delta y = 0{,}003;\ \Delta z = 0{,}004 ,$$

$$x_0 + \Delta x = 0{,}002;\ y_0 + \Delta y = 0{,}003;\ z_0 + \Delta z = 0{,}004 .$$

Тому повний приріст функції в точці (x_0, y_0, z_0) , що обчислюється за формулою $\Delta f(x_0,y_0,z_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0)$, в даному випадку дорівнює $\Delta f(1,2,3) = 1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3 - 1\cdot 2^2\cdot 3^3$.

За умовою $\Delta f(0,0,0) \approx d f\big|_{(0,0,0)}$, тобто

$$1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3 - 1\cdot 2^2\cdot 3^3 \approx$$

$$\approx 108(dx+dy+dz)\Big|_{dx=0,002;dy=0,003;dz=0,004} = 0,972 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1,002\cdot 2,003^2\cdot 3,004^3 \approx 1\cdot 2^2\cdot 3^3 + 0,972 = \underline{108,072}$.

б) Зрозуміло, що $x_0 = 0;\ y_0 = 0$, $\Delta x = 0,03;\ \Delta y = 0,05$, $x_0 + \Delta x = 0,03$; $y_0 + \Delta y = 0,05$. Для функції $g(x,y) = (1-x)^{1+y}$ знайдемо диференціал в точці $(0,0)$:

$$dg\Big|_{(0,0)} = g'_x\Big|_{(0,0)}dx + g'_y\Big|_{(0,0)}dy = -(1+y)(1-x)^y\Big|_{(0,0)}dx +$$

$$+(1-x)^{1+y}\ln(1-x)\Big|_{(0,0)}dy = -dx\ .$$

Повний приріст функції в точці $(0,0)$ дорівнює $\Delta g(1,1) = 0,97^{1,05} - 1^1$. За умовою $\Delta g(1,1) \approx d\,g\Big|_{(1,1)}$, тобто

$0,97^{1,05} - 1^1 \approx -dx\Big|_{dx=0,03;dy=0,05} = -0,03$, $\quad 0,97^{1,05} \approx 1 - 0,03 = \underline{0,97}$.

Приклад 2.3. Чи є диференційованою в точці $O(0,0)$ функція $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$?

Розв'язання. Знайдемо спочатку часткові похідні функції в точці $O(0,0)$ за визначенням 2.1:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3 + 0^3} - 0}{\Delta x} = 1\ ,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^3} - 0}{\Delta y} = 1\ .$$

Повний приріст функції в точці $O(0,0)$:

$$\Delta f(0,0) = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3}\ .$$

Згідно до формули (2.1а) повний приріст диференційованої функції повинен допускати представлення у вигляді

$$\Delta f(0,0) = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\rho)\text{, де } \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\ ,$$

тобто $\sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3} = 1\cdot\Delta x + 1\cdot\Delta y + o(\rho)$. Перевіримо, чи насправді

$$\sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3} - \Delta x - \Delta y = o(\rho)\ . \qquad (*)$$

Для цього перевіримо, чи буде границя відношення виразу зліва до $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ при $\rho \to 0$ дорівнювати 0, скориставшись тим, що $\rho \to 0 \Leftrightarrow (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. Розглянемо цю границю:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3} - \Delta x - \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\ . \qquad (**)$$

Для послідовності $(\Delta x_n, \Delta y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{IR_2^m} (0{,}0)$ отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x_n)^3 + (\Delta y_n)^3} - \Delta x_n - \Delta y_n}{\sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{n^3}} - \frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0 .$$

Оскільки за одним з напрямків прагнення $(\Delta x, \Delta y)$ до (0,0) границя не дорівнює 0, то границя (**) не дорівнює 0, тому співвідношення (*) невірне. Значить дана функція не є диференційованою в точці (0,0).

Завдання 2.1. Перевірити, чи існує границя (**).

Теорема 2.2 *(достатня умова диференційованості функції в точці).* Якщо функція $f(\bar{x})$ має часткові похідні за кожною із змінних в деякому околі точки $\bar{x}_0$ і ці часткові похідні неперервні в цій точці, то вона в цій точці диференційована.

Завдання 2.2. З'ясувати, яка саме умова попередньої теореми не виконується для функції, що наведена в прикладі 2.3.

Існування усіх часткових похідних функції в точці ще не гарантує її неперервності в цій точці, але справедлива наступна теорема.

Теорема 2.3. Якщо функція $f(\bar{x})$ диференційована в точці $\bar{x}_0$, то вона в цій точці неперервна.

Теорема 2.4 (*про диференціювання складної функції).* Нехай

1) g переводить $E_1 \subset IR^m$ в $E \subset IR^n$ за правилом $\bar{x} = g(\bar{t})$, тобто $(x_1, x_2, ..., x_n) = \big(g_1(t_1, t_2, ..., t_m), g_2(t_1, t_2, ..., t_m), ..., g_n(t_1, t_2, ..., t_m)\big)$,

2) $\forall j = 1, ..., m$ функції $x_j = g_j(t_1, t_2, ..., t_m)$ диференційовані в точці $\bar{t}_0 = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, ..., t_m^{(0)}) \in E_1$,

3) функція $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційована в точці $\bar{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \in E$, що відповідає $\bar{t}_0$, тобто $x_j^{(0)} = g_j(\bar{t}_0)$, тоді функція $\varphi(\bar{t}) = f(g(\bar{t}))$ диференційована в точці $\bar{t}_0$, а її часткові похідні можуть бути знайдені за формулами

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_i}, \quad i = 1, ..., m \tag{2.3}$$

(усі похідні беруться у відповідних точка $\bar{x}_0$ або $\bar{t}_0$).

Частковий випадок: функція $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційована в точці $\bar{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, функції однієї змінної $x_j = g_j(t)$ диференційовані в точці t_0, тоді складна функція однієї змінної $\varphi(t) = f(g(t))$ диференційована в точці t_0, до того ж її похідна обчислюється за формулою

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{\partial t}+...+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{dx_m}{dt}\,. \qquad (2.4)$$

Форма першого диференціалу функції багатьох змінних інваріантна, оскільки не змінює своєї форми у випадку, коли змінні $x_i\,(i=1,...,n)$ не є незалежними.

Приклад 2.4. Знайти часткові похідні і диференціал першого порядку для функцій

а) $z=f(u,v),\quad u=x+y,\quad v=x^2+y^2$;

б) $z=f(u,v),\quad u=\dfrac{x}{y},\quad v=\dfrac{y}{z}$;

в) $z=arctg(x+y^2),\quad x=4t^2,\quad y=\sin t$.

Розв'язання. а) Для пошуку часткових похідних використаємо формулу (2.3), переписавши її у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x=f'_u u'_x+f'_v v'_x\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=f'_y=f'_u u'_y+f'_v v'_y\,.$$

Отримаємо: $f'_x=f'_u\cdot 1+f'_v\cdot 2x=f'_u+2xf'_v$; $f'_y=f'_u+2yf'_v$, тоді $df=\left(f'_u+2xf'_v\right)dx+\left(f'_u+2yf'_v\right)dy=f'_u(dx+dy)+f'_v(2xdx+2ydy)$.

б) В цьому випадку розв'язуємо аналогічно попередньому

$$f'_x=f'_u\frac{1}{y}\,;\quad f'_y=f'_u\frac{-x}{y^2}+f'_v\frac{1}{z}\,;\quad f'_z=f'_v\frac{-y}{z^2}\,;$$

$$df=f'_u\frac{1}{y}dx+\left(f'_u\frac{-x}{y^2}+f'_v\frac{1}{z}\right)dy+f'_v\frac{-y}{z^2}dz=$$

$$=f'_u\left(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy\right)+f'_v\left(\frac{1}{z}dy-\frac{y}{z^2}dz\right).$$

в) *1 спосіб*. Використовуємо формулу (2.4):

$$\frac{dz}{dt}=z'_t=z'_x x'_t+z'_y y'_t=$$

$$=\left.\frac{1}{1+(x+y^2)^2}\right|_{x=4t^2,\quad y=\sin t}8t+\left.\frac{2y}{1+(x+y^2)^2}\right|_{x=4t^2,\quad y=\sin t}(-\cos t)=$$

$$=\frac{8t}{1+(4t^2+\sin^2 t)^2}-\frac{2\sin t\cos t}{1+(4t^2+\sin^2 t)^2}\,.$$

Складна функція залежить від однієї змінної, тому її диференціал дорівнює

$$\underline{dz=\frac{dz}{dt}dt\;=\frac{1}{1+(4t^2+\sin^2 t)^2}(8t-\sin 2t)dt}\,.$$

2 спосіб. Підставимо замість x і y їх вирази через незалежну змінну t , після чого і знайдемо від отриманої функції похідну:

$$z'_t = \left(arctg(4t^2 + \sin^2 t)\right)'_t = \frac{1}{1 + (4t^2 + \sin^2 t)^2}(8t - 2\sin t \cos t)\,.$$

Диференціал буде мати той же вигляд, як отримано у 1 способі.

Визначення 2.4. *Часткові похідні вищих порядків* визначаються індуктивно

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} ... \partial x_{i_1}} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} ... \partial x_{i_1}} \right).$$

Якщо не усі індекси співпадають, то таку похідну називають мішаною.

Наприклад, для функції двох змінних:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Теорема 2.5 (*теорема Шварца*). Якщо однойменні мішані похідні функції $f(\overline{x})$ існують в деякому околі точки $\overline{x}_0$ і неперервні в цій точці, то вони в цій точці співпадають.

Визначення 2.5. Функцію $f(\overline{x})$ будемо називати *n раз диференційованою в точці* $\overline{x}_0$, якщо усі її часткові похідні $(n-1)$-го порядку диференційовані в цій точці.

Визначення 2.6. Якщо функція $f(\overline{x})$ n раз диференційована в точці $\overline{x}_0$, а змінні $x_i (i = 1,...,m)$ або незалежні або n раз диференційовані в цій точці, то *n-й диференціал* визначається формулою

$$d^n f\Big|_{\overline{x}_0} \overset{def}{=} d(d^{n-1} f)\Big|_{\overline{x}_0}\,.$$

Якщо аргументи функції незалежні, то використовують формальний символ для обчислення n-го диференціалу

$$d^n f = = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f\,. \tag{2.5}$$

Форма вищих диференціалів функції багатьох змінних неінваріантна, оскільки змінює свою форму у випадку, коли змінні $x_i (i = 1,...,m)$ не є незалежними.

Приклад 2.5. Знайти часткові похідні і диференціали першого і другого порядку від функцій $f(x, y) = e^{erctg\, xy}$, $g(x, y) = x^y$.

Розв'язання. В прикладі 2.1 були знайдені часткові похідні першого порядку для цих функцій, тому їх перші диференціали дорівнюють:

$$df = f'_x dx + f'_y dy = e^{erctg\, xy} \frac{y}{1 + (xy)^2} dx + e^{erctg\, xy} \frac{x}{1 + (xy)^2} dx =$$

$$= \frac{e^{erctg\, xy}}{1 + (xy)^2}(ydx + xdy)\,; \qquad dg = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dx\,.$$

Знайдемо другі часткові похідні і другий диференціал:

$$f''_{xx}=\left(e^{erctg\,xy}\frac{y}{1+(xy)^2}\right)'_x=\frac{y}{1+(xy)^2}\left(e^{erctg\,xy}\right)'_x+e^{erctg\,xy}\left(\frac{y}{1+(xy)^2}\right)'_x=$$

$$=\frac{y}{1+(xy)^2}e^{erctg\,xy}\frac{y}{1+(xy)^2}+e^{erctg\,xy}y\frac{-2xy^2}{\left(1+(xy)^2\right)^2}=\frac{e^{erctg\,xy}y^2}{1+(xy)^2}(1-2xy);$$

$$f''_{yy}=\left(e^{erctg\,xy}\frac{x}{1+(xy)^2}\right)'_y=\frac{e^{erctg\,xy}x^2}{\left(1+(xy)^2\right)^2}(1-2xy);$$

$$f''_{xy}=f''_{yx}=\left(e^{erctg\,xy}\frac{x}{1+(xy)^2}\right)'_x=$$

$$=\frac{x}{1+(xy)^2}e^{erctg\,xy}\frac{y}{1+(xy)^2}+e^{erctg\,xy}\frac{\left(1+(xy)^2\right)-xy^2 2x}{\left(1+(xy)^2\right)^2}=e^{erctg\,xy}\frac{1+xy-(xy)^2}{\left(1+(xy)^2\right)^2}.$$

Згідно до формули (2.5) $d^2f=f''_{xx}dx^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{yy}dy^2$, тому

$$d^2f=\frac{e^{erctg\,xy}}{1+(xy)^2}\left(y^2(1-2xy)\,dx^2+2\left(1+xy-(xy)^2\right)dxdy+x^2(1-2xy)\,dy^2\right).$$

Для другої функції:

$g''_{xx}=\left(yx^{y-1}\right)'_x=y(y-1)x^{y-2}$, $g''_{xy}=\left(yx^{y-1}\right)'_y=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$,

$g''_{xy}=\left(x^y\ln x\right)'_y=x^y(\ln x)^2$,

$$d^2g=y(y-1)x^y dx^2+2(x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x)dxdy+x^y(\ln x)^2dy^2.$$

Приклад 2.6. Довести, що функція $u=\frac{1}{r}$, де $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, задовольняє при $r\neq 0$ рівнянню Лапласа $\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$.

Розв'язання. Використаємо формулу для часткової похідної складної функції.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\left.\frac{-1}{r^2}\right|_{r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}=$$

$$=\left.\frac{-(x-a)}{r^3}\right|_{r=\sqrt{\ldots}}.$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\left[-(x-a)'_x r^{-3}-(x-a)(r^{-3})'_x\right]_{r=\sqrt{\ldots}}=$$

$$=\left.\left[-r^{-3}-(x-a)(-3)r^{-4}\frac{2(x-a)}{2r}\right]\right|_{r=\sqrt{\ldots}}=\left[-r^{-3}+3(x-a)^2r^{-5}\right]_{r=\sqrt{\ldots}}.$$

Аналогічний вигляд будуть мати другі похідні за іншими змінними, тому

$$\Delta u=\left[-3r^{-3}+3\left((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right)r^{-5}\right]_{r=\sqrt{\dots}}=\left[-3r^{-3}+3r^2r^{-5}\right]_{r=\sqrt{\dots}}=0$$

Що і треба було довести.

2.2. Економічна інтерпретація часткових похідних. Еластичність виробничої функції

Наведемо спочатку економічну інтерпретацію часткових похідних. Нехай задана виробнича функція $z=f(x,y)$, що виражає, наприклад, витрати виробництва від кількості x і y двох видів продукції, що випускається. Припустимо, що фактор x змінився на Δx, тоді виробнича функція зміниться на $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$. Тоді $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ виражає середній приріст виробничої функції на одиницю приросту фактору x. Перейдемо до границі при $\Delta x\to 0$, отримаємо граничні витрати виробництва на одиницю продукції x:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Аналогічно за фактором y: $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\frac{\partial z}{\partial y}$.

Визначення 2.7. Еластичність виробничої функції $z=f(x,y)$ відносно факторів виробництва x (y) визначається формулою:

$$E_x(z)=\frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}\qquad\left(E_y(z)=\frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

і вказує наближено процентний приріст виробничої функції, що відповідає приросту фактора x (y) на 1% за умови, що фактор y (x) не змінюється.

Якщо виробнича функція задає залежність виробництва z від n виробничих факторів у вигляді $z=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$, то диференціальні характеристики такої функції – $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ – граничні ефективності фактора x_i і – $E_{x_i}(z)=\frac{x_i}{z}\frac{\partial z}{\partial x_i}$ – еластичність виробництва z відносно фактору x_i ($i=1,\dots,m$) та інше.

Приклад 2.7. Для виробництва деякого товару визначена функція $f(x,y)=xy^3-3x^2y^2+2y^4-120y$, де x, y – фактори виробництва. Знайти: **а)** закон зміни виробничої функції; **б)** еластичність функції за кожним фактором**; в)** коефіцієнти еластичності за факторами $x=1$, $y=1$.

Розв'язання. а) Щоб визначити зміни виробничої функції за факторами x і y, необхідно знайти часткові похідні від виробничої функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 - 6xy^2 ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 - 6x^2 y + 8y^3 - 120 .$$

б) Тепер обчислюємо еластичність функції за кожним фактором згідно визначенню:

$$E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}\left(y^3 - 6xy^2\right) = \frac{x\left(y^3 - 6xy^2\right)}{xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4 - 120y} ;$$

$$E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}\left(3xy^2 - 6x^2y + 8y^3 - 120\right) = \frac{x\left(3xy^2 - 6x^2y + 8y^3 - 120\right)}{xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4 - 120y} .$$

в) Обчислимо коефіцієнти еластичності за факторами $x = 1$, $y = 1$:

$$E_x(z) = \frac{1\cdot(1-6)}{1-3+2-120} \approx 0{,}04 ; \quad E_y(z) = \frac{1\cdot(3-6+8-120)}{-120} \approx 0{,}96 .$$

Таким чином, при збільшенні фактора x на 1% (за умови, що фактор y не змінюється) буде мати місце відносне збільшення даної виробничої функції приблизно на 0,04%. При збільшенні фактора y на 1% (за умови, що фактор x не змінюється) буде мати місце відносне збільшення даної виробничої функції приблизно на 0,96%.

Зауважимо, що *від'ємне значення коефіцієнту еластичності* показує на зменшення виробничої функції при збільшенні відповідного фактору.

3. **ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ**

3.1 Геометричний зміст диференційованості

Визначення 3.1. Площина Π, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхні називається *дотичною площиною* в цій точці, якщо кут між цією площиною і січною, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і будь-яку точку $M(x, y, z)$ поверхні, прагне до нуля, коли M прагне до M_0 (див. рис. 3.1).

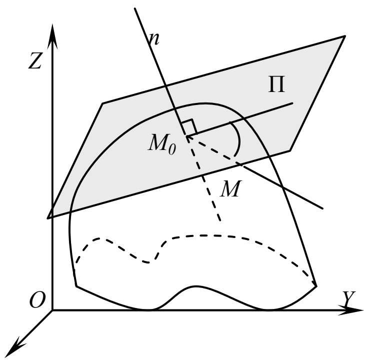


Рис. 3.1.

Теорема 3.1. Функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці (x_0, y_0) тоді і лише тоді, коли графік поверхні, який визначається цією функцією, має в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ($z_0 = f(x_0, y_0)$) дотичну площину. Рівняння цієї площини Π визначається формулою

$$z-z_0=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\,, \tag{3.1}$$

а *рівняння нормалі* n до неї в точці M_0 – формулою

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}\,. \tag{3.2}$$

Приклад 3.1. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=arctg\dfrac{x}{y}$ в точці $M_0\left(1{,}1,\dfrac{\pi}{4}\right)$

Розв'язання. Знайдемо спочатку часткові похідні цієї функції в даній точці:

$$z'_x\big|_{M_0}=\frac{1}{1+(x/y)^2}\frac{1}{y}\bigg|_{M_0}=\frac{1}{2}\,;\quad z'_x\big|_{M_0}=\frac{1}{1+(x/y)^2}\frac{-x}{y^2}\bigg|_{M_0}=-\frac{1}{2}\,.$$

Рівняння дотичної площини і нормалі відповідно будуть мати вигляд згідно до формул (3.1) і (3.2)

$$z-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)\;\Rightarrow\;\underline{x-y-2z+\frac{\pi}{2}=0}\,;$$

$$\frac{x-1}{1/2}=\frac{y-1}{1/2}=\frac{z-\pi/4}{-1}\;\Rightarrow\;\underline{x-1=y-1=\frac{z-\pi/4}{-2}}\,.$$

3.2. Похідна за напрямком. Градієнт

Часткові похідні функції $u=f(x,y,z)$ за x, за y, за z виражають „швидкість зміни функції" в напрямку координатних осей. Наприклад, коли точка рухається лише у напрямку осі абсцис, то f'_x виражає швидкість руху цієї точки в напрямку цієї осі. Але в багатьох фізичних явищах необхідно знати швидкість зміни функції (наприклад, температур) у напрямку прямої l. У відповіді на це питання нам допоможе **похідна за напрямком**.

Нехай функція $u=f(x,y,z)$ визначена у деякій відкритій області, точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ належить цій області, а пряма l, що проходить через цю точку задає деякий напрямок. Нехай $M(x,y,z)\in l$, тоді M_0M – довжина відрізка, що сполучає точки M_0 *і* M, і яка береться із знаком „+", якщо напрямок M_0M співпадає із напрямком прямої l і „–" – в протилежному випадку. Границя $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M_0)-f(M)}{M_0M}$ називається *похідною від функції* f *за напрямком* l і позначається $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\dfrac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial l}$.

Формула для обчислення похідної за напрямком від диференційованої функції:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma\,, \qquad (3.3)$$

де $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ – напрямні косинуси напрямку l. Вектор

$$\overline{grad}\ f(M_0)=\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0},\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\right) \qquad (3.4)$$

називається *градієнтом* функції f в точці M_0. Він вказує напрямок найшвидшого росту функції в цій точці.

Згідно до формул (3.3) і (3.4) перепишемо формулу похідної за напрямком через скалярний добуток градієнта функції f в точці M_0 на одиничний вектор $\bar{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ напрямку l:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\overline{grad}\ f(M_0)\cdot\bar{e}\,. \qquad (3.5)$$

Приклад 3.2. Знайти кут між градієнтами функції $u=x^2+y^2-z^2$ в точках $A(\varepsilon,0,0)$ і $B(0,\varepsilon,0)$.

Розв'язання. Для використання (3.4) знайдемо часткові похідні: $u'_x=2x$; $u'_y=2y$; $u'_z=-2z$, тоді

$$\overline{grad}\ f(A)=(2\varepsilon,0,0);\quad \overline{grad}\ f(B)=(0,2\varepsilon,0).$$

Ці вектори розташовані паралельно осям OX I OY, тому <u>кут між ними дорівнює 90^{o}.</u>

Приклад 3.3. Знайти похідну функції $z=x^2-y^2$ в точці $M(1,1)$, в напрямку l, що складає кут 60^{o} з додатнім напрямком осі OX.

Розв'язання. Знайдемо спочатку часткові похідні і градієнт в точці *M*: $z'_x=2x$; $z'_y=-2y$; $\overline{grad}\ z(M)=(2,-2)$. Одиничний вектор напрямку, що складає кут 60^{o} з додатнім напрямком осі OX, має координати $\bar{e}=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Згідно до формули (3.5) $\frac{\partial z(A)}{\partial l}=(2,-2)\cdot\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\underline{1-\sqrt{3}}$.

Приклад 3.4. Знайти градієнт функції $z=\ln(xy^2+1)$ в точці $A(1,1)$ і похідну в цій точці за напрямком вектора $\bar{a}=(-3,-4)$.

Розв'язання. $z'_x=\frac{y^2}{xy^2+1}$; $z'_y=\frac{2xy}{xy^2+1}$; $\underline{\overline{grad}\ z(A)=\left(\frac{1}{2},1\right)}$;

$$\overline{e}=\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}=\frac{(-3,-4)}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}=\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right);$$

$$\frac{\partial z(A)}{\partial e}=\left(\frac{1}{2},1\right)\cdot\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}-1\cdot\frac{4}{5}=-\frac{11}{10}=\underline{-1{,}1}\,.$$

3.3. Локальний екстремуми функції багатьох змінних

Загальні теоретичні відомості про локальниу екстремум.

Визначення 3.2. Точка $\overline{x}_0$ називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(\overline{x})$, якщо існує δ-окіл цієї точки, в межах якого значення функції $f(\overline{x}_0)$ – найбільше (найменше) серед усіх інших значень функції, тобто

$\overline{x}_0$ – loc max (min) функції $f(\overline{x})$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow}\quad \exists\delta>0\forall\overline{x}\in O_\delta(\overline{x}_0)\ f(\overline{x})\le f(\overline{x}_0)\ \left(f(\overline{x})\ge f(\overline{x}_0)\right).$$

Визначення 3.3. Точками локального екстремуму називаються точки локального максимуму і мінімуму.

Теорема 3.2 *(необхідна умова локального екстремуму).* Якщо функція $f(\overline{x})$ в точці $\overline{x}_0$ має локальний екстремум, і в цій точці функція має скінченні часткові похідні, то всі ці часткові похідні дорівнюють нулю, тобто

$$\frac{\partial f(\overline{x}_0)}{\partial x_i}=0\quad \forall i=1,...,m\,. \tag{3.6}$$

Іншими словами обертання в нуль усіх часткових похідних функції в точці є необхідною умовою локального екстремуму.

Точки, в яких виконується необхідна умова екстремуму, тобто умова (3.6) є лише *підозрілими на екстремум* точками (*стаціонарними або критичними*). Для того, щоб впевнитися в тому, що ці точки дійсно є точками екстремуму, необхідно ще перевірити достатню умову екстремуму. Для цього в припущенні про двічи диференційованість функції в цій точці потрібно побудувати другий диференціал функції

$$d^2 f(\overline{x}_0)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}dx_i dx_j\ \text{, де } a_{ij}=\frac{\partial^2 f(\overline{x}_0)}{\partial x_i\partial x_j}\quad (i,j=1,...,m)\,.$$

Він представляє собою квадратичну форму.

Кажуть, що квадратична форма додатньо (від’ємно) визначена якщо для всіх значень dx_k, які водночас не дорівнюють нулю, вона приймає строго додатні (від’ємні) значення (k=1*,…,m)*.

Для відповіді на питання про *знак квадратичної форми* застосовують критерій Сильвестра. Для цього спочатку утворюють матрицю квадратичної форми і обчислюють її головні мінори:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix};$$

$$A_1=a_{11};\quad A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\quad A_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \dots; A_m=\det A.$$

Теорема 3.3 *(критерій Сильвестра).* Для того, щоб квадратична форма була додатньо (від'ємно) визначеною необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори її матриці були додатні (знакопочережні, починаючи з додатного знаку), тобто

для додатньо визначеної: $A_1>0;\, A_2>0;\, A_3>0; \dots; A_m>0;$ (3.7)

для від'ємно визначеної: $A_1>0;\, A_2<0;\, A_3>0;\, A_4<0; \dots$. (3.8)

Теорема 3.4 *(достатня умова локального екстремуму).* Якщо двічи диференційована функція $f(\bar{x})$ в стаціонарній точці $\bar{x}_0$ (тобто в такій точці, що $df(\bar{x}_0)=0$) має другий диференціал, який є

а) додатньо визначеною квадратичною формою, то $\bar{x}_0$ – точка *мінімуму*,

б) від'ємно визначеною квадратичною формою, то $\bar{x}_0$ – точка *максимуму*,

в) знакозмінною квадратичною формою, то в точці $\bar{x}_0$ *відсутній екстремум*.

Зауваження 3.1. До точок, підозрілих на екстремум належать також і ті, в яких часткові похідні першого порядку не існують, тоді для з'ясування того, чи буде в них екстремум використовують визначення 3.2 і 3.3.

Частковий випадок локального екстремуму функції двох змінних. Якщо функція $z=f(x,y)$ двічи диференційована в точці (x_0,y_0), і в цій точці

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0, \tag{3.9}$$

то за умови $\Delta=AC-B^2\neq 0$, де $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$, в точці (x_0,y_0) маємо

а) *мінімум*, якщо $A>0 \wedge \Delta>0$,

б) *максимум*, якщо $A<0 \wedge \Delta>0$,

в) *відсутність екстремуму*, якщо $\Delta<0$.

Якщо $\Delta=0$, то приходимо до висновку про екстремум, виходячи з визначень 3.2. і 3.3..

Приклад 3.5. Дослідити на екстремум наступні функції

а) $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$; б) $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$;

в) $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

Розв'язання. а) Знаходимо стаціонарні точки з умови (3.9), розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ z'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y^3 = 0 \\ x = 2y^3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 2y^3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Отримаємо стаціонарні точки: $M_1(0,0); M_2(1,1); M_3(-1,-1)$.

Знаходимо другі часткові похідні:

$$z''_{xx} = 12x^2 - 2; \quad z''_{xy} = -2; \quad z''_{yy} = 12y^2 - 2,$$

звідки маємо:

$$A_1 = -2; B_1 = -2; C_1 = -2; \Delta_1 = 0.$$

Так як $\Delta_1 = 0$, то з'ясовуємо, чи буде ця точка точкою екстремуму за визначеннями 3.2 і 3.3. Нехай $y = x$, тоді $z(x,x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2)$. Якщо $0 < x < \sqrt{2}$, то $z(x,x) < 0 = z(0,0)$. Нехай тепер $y = -x$, тоді $z(x,-x) = 2x^4 > 0 = z(0,0)\ \forall x > 0$. З отриманого приходимо до висновку, що в будь-якому околі радіусу, меншого за $\sqrt{2}$, значення функції можуть бути, як більшими за значення в точці (0,0), так і меншими. *Загальний висновок*: в точці $\underline{M_1(0,0) - \textit{немає extr}}$.

Тепер розглянемо інші дві точки:

$A_{2,3} = 10; B_{2,3} = -2; C_{2,3} = 10; \Delta_{2,3} = 96; \quad A_{2,3} > 0; \Delta_{2,3} > 0 \Rightarrow \underline{M_{2,3}(\pm1,\pm1) - \min}$.

б) Часткові похідні цієї функції $z'_x = \dfrac{-2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$; $z'_y = \dfrac{-2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$ ніде не обертаються в нуль, а в точці (0,0) не існують, тому будемо досліджувати цю точку на екстремум за визначеннями 3.2 і 3.3. Маємо

$z(0,0) = 1, \quad z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} < 1 = z(0,0)\forall(x,y) \in IR^2 \Rightarrow \underline{(0,0) - \max}$.

в) Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} u'_x = 3x^2 + 12y = 0 \\ u'_y = 2y + 12x = 0 \\ u'_z = 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2/4 \\ -x^2/4 + 6x = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2/4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 24 \end{array}\right. \\ z = -1 \end{cases}.$$

Отримаємо стаціонарні точки: $M_1(0,0,-1); \quad M_2(24,-144,-1)$.

Знаходимо другі часткові похідні:

$$u''_{xx} = 6x; \quad u''_{yy} = u''_{zz} = 2; \quad u''_{xy} = 12; \quad u''_{xz} = u''_{yx} = 0,$$

для використання теореми 3.4 і критерію Сильвестра обчислюємо головні мінори матриці квадратичної форми другого диференціалу досліджуваної функції:

$$A_1 = u''_{xx} = 6x\,; \quad A_2 = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 144\,;$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6x & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 24x - 288\,.$$

Розглянемо спочатку точку $M_2(24,-144,-1)$, для неї $A_1 = 144 > 0$; $A_2 = 144 > 0$; $A_3 = 288 > 0 \;\Rightarrow \underline{M_2(24,-144,-1) - \min}$.

В точці $M_1(0,0,-1)$ маємо $A_1 = 0$, тому досліджуємо цю точку на екстремум за визначенням: $u(M_1) = -1$, якщо $x = z, y = z, -1 < z < 0$, то $u(z,z,z) - u(M_1) = z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z+1)(z^2 + z + 1) > 0$, а якщо $x = z, y = z, -2 < z < -1$, то $u(z,z,z) - u(M_1) = (z+1)(z^2 + z + 1) < 0$. Значить у будь-якому околі точки M_1 радіусом, меншим за 1, значення функції можуть бути, як більшими за значення в точці M_1, так і меншими. *Висновок*: в точці $\underline{M_1(0,0,-1) - \textit{немає extr}}$.

3.4. Умовний екстремум

Іноді практика вимагає знаходити екстремуми функції за якихось умов. Наприклад, необхідно знайти максимум функції прибутку фірми при випуску декількох видів товарів за умови, що є певна квота на загальний об’єм виробництва.

В деяких випадках можна дати *геометричну інтерпретацію* поставленої задачі. Наприклад, якщо на функцію $z = f(x,y)$ накласти обмеження $\varphi(x,y) = 0$, то це буде означати, що поверхню $z = f(x,y)$ перетинає циліндрична поверхня $\varphi(x,y) = 0$, в результаті чого отримуємо криву в просторі, на якій треба знайти екстремум.

Метод розв’язання задачі на умовний екстремум. Задача визначення умовного екстремуму функції $f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ при наявності ряду співвідношень $\varphi_k(\overline{x}) = 0, k = 1,...,n, n < m$ зводиться до знаходження звичайного екстремуму для *функції Лагранжа*

$$L(\overline{x}) = f(\overline{x}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k(\overline{x})\,, \tag{3.10}$$

де $\lambda_k (k = 1,...,n)$ – константи. Тут припускається, що усі, включені до розгляду функції, є двічи диференційованими. Таким чином, питання про існування і характер умовного екстремуму в найпростішому випадку розв'язується на основі дослідження знаку другого диференціалу $d^2L(\bar{x})$ в стаціонарній точці $\bar{x}_0$ функції $L(\bar{x})$ за умови, що змінні $dx_1,...,dx_n$ пов'язані співвідношеннями $d\varphi_k(\bar{x}_0)=0\ \forall k=1,...,n$, тобто

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi_k(\bar{x}_0)}{\partial x_i}dx_i=0 \qquad \forall k=1,...,m\,. \tag{3.11}$$

Приклад 3.6. Знайти точки умовного екстремуму функції
$u=x-2y+2z;\quad x^2+y^2+z^2=1$;

Розв'язання. Будуємо функцію Лагранжа
$L(x,y,z)=x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$.
Досліджуємо її на екстремум

$$\begin{cases}L'_x=1+2\lambda x=0\\ L'_y=-2+2\lambda y=0\\ L'_z=2+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1/2\lambda\\ y=1/\lambda\\ z=-1/\lambda\\ 1/4\lambda^2+1/\lambda^2+1/\lambda^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\mp1/3\\ y=\pm2/3\\ z=\mp2/3\\ \lambda=\pm3/2\end{cases}.$$

Стаціонарні точки умовного екстремуму: $M_1\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ при $\lambda=-\frac{3}{2}$ і $M_1\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ при $\lambda=\frac{3}{2}$. Дослідимо першу з них на виконання достатньої умови екстремуму

$$L''_{xx}=L''_{yy}=L''_{zz}=2\lambda;\quad L''_{xy}=L''_{xz}=L''_{yz}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2L(M_1)=-3(dx^2+dy^2+dz^2)<0\Rightarrow \underline{M_1\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)-\textit{умовний}\quad \max}\,.$$

Аналогічно отримаємо, що $\underline{M_2\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)-\textit{умовний}\quad \min}$.

Зауважимо, що в даному випадку формулою (3.11) ми не скористалися, оскільки вона не внесла б суттєвих змін у висновки. Дійсно, ця формула в даному прикладі придбала б вигляд $\left(2xdx+2ydy+2zdz\right)|_{M_{1,2}}=0\Leftrightarrow dx=2dy-2dz$. Підстановка в другий диференціал функції Лагранжа цього виразу не змінила б його знаку.

3.5. Абсолютний екстремум

Іноді практика вимагає знаходити екстремуми функції за якихось обмежень у формі нерівностей. Наприклад, необхідно знайти максимум функції попиту при обмеженні часу, обмеженні доходів споживачів і т.п. При розв'язанні таких задач ми спираємось на наступне твердження, яке є наслідком теорем Вейєрштрасса (див. властивості неперервних функцій).

Твердження 3.1. Функція $f(\bar{x})$, що диференційована в обмеженій і замкненій області, досягає свого найбільшого і найменшого значень в цій області або в стаціонарних точках, або в межових точках області.

Наведене дає можливість сформулювати **алгоритм пошуку абсолютного екстремуму**:

1) знаходимо стаціонарні точки функції $f(\bar{x})$ і ті точки, в яких часткові похідні не існують;
2) відкидаємо з розгляду ті точки, що не попали до області;
3) *1 спосіб* пошуку стаціонарних точок на межі області: записуємо функції Лагранжа з врахуванням умов, що описують рівняння межі області, і знаходимо їх критичні точки, серед яких відкидаємо ті, що не належать межі області;
   2 спосіб пошуку стаціонарних точок на межі області:
   а) якщо це можливо, виражаємо деякі змінні з рівнянь межі, роблячи їх залежними від інших незалежних змінних;
   б) підставляємо вирази для залежних змінних у вираз для функції $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, отримуємо нову функцію, яка виражається через незалежні змінні;
   в) для нової функції знаходимо стаціонарні точки, серед яких відкидаємо ті, що не належать межі області;
4) додаємо до розгляду крайові точки перетину кривих (поверхонь) області;
5) знаходимо значення функції у всіх знайдених стаціонарних точках області, межі і в крайових точках, щоб обрати серед них найбільше і най менше значення.

Приклад 3.7. Визначити найбільше і найменше значення наступних функцій у вказаних областях:

а) $z = \frac{1}{2}x^2 - xy + y$ в замкненій області, що обмежена параболою $y = \frac{x^2}{3}$ і прямою $y = 3$;

б) $z = x + y$ в замкненому крузі $x^2 + y^2 \le 1$.

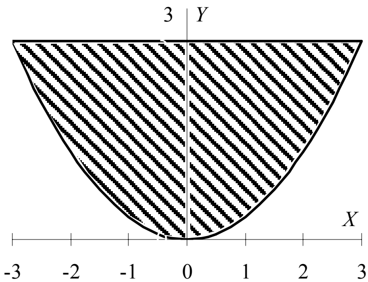


Рис. 3.2.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки в середині області

$$\begin{cases} z'_x = x - y = 0 \\ z'_y = -x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Маємо першу точку $M_1(1{,}1)$, яка належить області D (див. на рис. 3.2).

Тепер розглянемо криву $y = x^2/3$. Будемо діяти за другим способом кроку 3 алгоритму. Підставляємо в рівняння функції рівняння кривої межі:

$$u = z\Big|_{y=\frac{x^2}{3}} = \frac{1}{2}x^2 - x\cdot\frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{6},$$

знаходимо стаціонарні точки отриманої функції: $u'_x = -x^2 + \frac{5x}{3} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{5}{3}$, що відповідають таким точкам на кривій $y = \frac{x^2}{3}$: $M_2(0{,}0);\ M_3\left(\frac{5}{3};\frac{25}{27}\right)$, які належать даній області D.

Розглядаємо далі пряму $y = 3$:

$$u = z\Big|_{y=3} = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3; \quad u'_x = x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3,$$

на цій прямій $y = 3$ отримаємо наступну точку $M_4(3{,}3) \in D$.

До додаткового розгляду включаються кутову точку області, що не потрапила до розгляду: $M_5(-3{,}3)$.

Переходимо до 5 кроку: знаходимо значення функції в отриманих чотирьох точках, щоб серед них знайти найбільше і найменше:

$$z(M_1) = \frac{1}{2};\ z(M_2) = 0; \quad z(M_3) = \frac{5^3}{2\cdot 3^4} = \frac{125}{162},$$

$$\underline{z(M_4) = -\frac{3}{2} = \min_D z}; \quad \underline{z(M_5) = \frac{33}{2} = \max_D z}.$$

б) Оскільки $\begin{cases} z'_x = 1 \neq 0 \\ z'_y = 1 \neq 0 \end{cases}$, то стаціонарних точок всередині області немає. На межі, тобто на колі $x^2 + y^2 = 1$, розв'яжемо задачу за допомогою функції Лагранжа: $L(x.y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$:

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = -1/2\lambda \\ 1/4\lambda^2 + 1/4\lambda^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 1/\sqrt{2} \\ y = \mp 1/\sqrt{2} \\ \lambda = \pm 1/\sqrt{2} \end{cases}.$$

Обидві точки $M_{1,2}\left(\pm 1/\sqrt{2};\pm 1/\sqrt{2}\right)$ належать колу, а значить і кругу D.

Тепер визначимось з найбільшим і найменшим значеннями:

$$z(M_1) = \underline{\sqrt{2} = \max_D z};\ z(M_2) = \underline{-\sqrt{2} = \min_D z}.$$

3.6. Задачі оптимізації в економіці (локальної, умовної і абсолютної)

До задач оптимізації відносяться задачі, в яких вимагається знайти максимум чи мінімум якоїсь функції. Якщо на функцію не накладено жодної умови (обмеження), то це задача *локальної оптимізації*. Якщо умова виражається рівнянням або рівняннями, то це задача *умовної оптимізації*. Якщо обмеження виражаються нерівностями, які в просторі IR^m представляють собою деяку не порожню область, то це задача *абсолютної оптимізації*.

Почнемо з задачі *локальної оптимізації*.

Приклад 3.7. Фірма виробляє 2 види товарів G_1 і G_2 і продає їх за ціною 600 грош. од. і 500 грош. од. відповідно. Об'єм виробництва товарів – Q_1 і Q_2. Функція витрат має вигляд $C = 5Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + 3Q_2^2$. Потрібно знайти такі значення Q_1 і Q_2, за яких прибуток, що отримує фірма, максимальний, і знайти цей прибуток.

Розв'язання. Сумарний доход від продажу товарів G_1 і G_2:

$$R = 600Q_1 + 500Q_2 .$$

Прибуток Π представляє собою різницю між доходом R і затратами C, тому

$$\Pi = R - C = 600Q_1 + 500Q_2 - \left(5Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + 3Q_2^2\right),$$

тобто $$\Pi(Q_1,Q_2) == 600Q_1 + 500Q_2 - 5Q_1^2 - 4Q_1Q_2 - 3Q_2^2 .$$

Це і є та цільова функція, максимум якої потрібно знайти. Знаходимо стаціонарні її точки:

$$\begin{cases} \Pi'_{Q_1} = 600 - 10Q_1 - 4Q_2 = 0 \\ \Pi'_{Q_2} = 500 - 4Q_2 - 6Q_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 25 \\ Q_2 = 87.5 \end{cases} .$$

Такою точкою стає $M(25;87.5)$. Визначаємо, чи буде вона точкою екстремуму за допомогою других часткових похідних:

$$A = \Pi''_{Q_1Q_1}(M) = -10; B = \Pi''_{Q_1Q_2}(M) = -6; C = \Pi''_{Q_2Q_2}(M) = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = -10 \cdot (-4) - (-6)^2 = 4 \Rightarrow A < 0; \Delta > 0 \Rightarrow \underline{M(25;87,5) - loc\max} .$$

Нарешті знайдемо значення цільової функції в точці максимуму:

$$\Pi(M) = \Pi(25;87,5) == 600 \cdot 25 + 500 \cdot 87,5 - 5 \cdot 25^2 - 4 \cdot 25 \cdot 87,5 - 3 \cdot 87,5^2 ==23906,25.$$

Відповідь: При Q_1=25 од. і Q_2=87,5 од. фірма отримає найбільший прибуток, який складатиме 23906,25 грош. од..

Тепер розглянемо задачу *умовної оптимізації*. Нехай корисність задається як $u(x,y) = x^{1/4}y^{3/4}$, де x і y – кількість товару A і B, які купує споживач, а значення цієї функції чисельно виражають міру задоволеності покупці. Потрібно знайти такі значення x і y, за яких споживач отримує найбільшу задоволеність, тобто знайти найбільшу корисність.

Наведена функція не має максимуму при скінченних значеннях змінних. Чим більше значення приймає кожна із змінних x і y, тим більше значення отримує функція $u(x,y)$. В дійсності ж необмежене споживання неможливе. Стримуючим фактором може бути, наприклад, сімейний бюджет.

Наприклад, при ціні на товар A і B відповідно 2 і 3 грош. од. загальна сума, що виділяється на їх придбання покупцем складає 100 грош. од.

Таким чином задача може бути сформульованою так.

Приклад 3.8. Знайти максимальну корисність $u(x,y)=x^{1/4}y^{3/4}$ за умови (обмеженні) $2x+3y=100$. Зміст цього обмеження полягає у наступному: якщо перший товар придбати в кількості x за ціною 2 грош. од., а другий – в кількості y за ціною 3 грош. од., то загальна вартість покупки повинна складати 100 грош. од..

Розв'язання. Будуємо функцію Лагранжа

$$L(x,y)=x^{1/4}y^{3/4}+\lambda(2x+3y-100),$$

знаходимо її стаціонарні точки

$$\begin{cases} L'_x=\dfrac{y^{3/4}}{4x^{3/4}}+2\lambda=0 \\ L'_y=\dfrac{3x^{1/4}}{4y^{1/4}}+3\lambda=0 \\ 2x+3y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=(8\lambda)^{4/3}x \\ y=\dfrac{x}{(4\lambda)^4} \\ 2x+3y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 2x+3y=100 \\ \lambda=-1/8^{3/4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12{,}5 \\ y=25 \\ \lambda=-1/8^{3/4} \end{cases}.$$

Такою точкою стає точка $M(12{,}5;25)$. Перевіримо цю точку на максимум:

$$\begin{cases} L''_{xx}=-\dfrac{3y^{3/4}}{16x^{7/4}};\ L''_{yy}=-\dfrac{3x^{1/4}}{16y^{5/4}};\ L''_{xy}=\dfrac{3}{16x^{3/4}y^{1/4}} \Rightarrow \\ 2dx+3dy=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2L(M)==-\dfrac{3\cdot 2^{7/4}}{16\cdot 25}\left(dx^2-dxdy+\dfrac{1}{4}dy^2\right) \Rightarrow d^2L(M)==-\dfrac{2^{7/4}}{8\cdot 15}dx^2. \\ dy=-2/3dx \end{cases}$$

Відповідь: споживач отримує найбільшу задоволеність за даних обмежень при придбанні 12,5 од. товару A і 25 од. товару B.

Нарешті розглянемо економічну задачу *абсолютної оптимізації*.

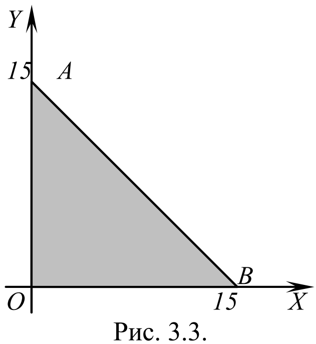


Рис. 3.3.

Приклад 3.9. Фірма-монополіст виробляє 2 види товарів G_1 і G_2 в кількості Q_1 і Q_2 відповідно. Функція витрат має вигляд

$$C=10Q_1+Q_1Q_2+10Q_2,$$

а криві попиту кожного товару

$$P_1=50-Q_1+Q_2;$$

$$P_2=30+2Q_1-Q_2,$$

де P_1 і P_2 – ціни одиниці відповідно товарів G_1 і G_2. Крім того, фірма не повинна виробити в загальній кількості товару більш, ніж 15 одиниць. Потрібно знайти максимальний прибуток, який може бути досягнутий при такому обмеженні.

Розв'язання. З умови випливає, що область D обмежень задається нерівностями $Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0, Q_1 + Q_2 \leq 15$ (див. рис 3.3).

Спочатку будуємо цільову функцію прибутку $\Pi = R - C$, де R – дохід, C – витрати. Дохід від продажу відповідно товарів G_1 і G_2 складатиме:

$$R_1 = P_1 Q_1 = (50 - Q_1 + Q_2)Q_1 = 50Q_1 - Q_1^2 + Q_1 Q_2;$$

$$R_2 = P_2 Q_2 = (30 + 2Q_1 - Q_2)Q_2 = 30Q_2 + 2Q_1 Q_2 - Q_2^2,$$

а загальний доход –

$$R = R_1 + R_2 = 50Q_1 + 30Q_2 - Q_1^2 - Q_2^2 + 3Q_1 Q_2,$$

а тому функція прибутку –

$$\begin{aligned} \Pi(Q_1, Q_2) = R - C = 50Q_1 + 30Q_2 - Q_1^2 - Q_2^2 + 3Q_1 Q_2 - \\ - (10Q_1 + Q_1 Q_2 + 10Q_2) = 40Q_1 + 20Q_2 - Q_1^2 - Q_2^2 + 2Q_1 Q_2 \end{aligned}.$$

Знайдемо стаціонарні точки всередині області:

$$\begin{cases} \Pi'_{Q_1} = 40 - 2Q_1 + 2Q_2 = 0 \\ \Pi'_{Q_1} = 20 - 2Q_2 + 2Q_1 = 0 \end{cases}.$$

Ця система не має розв'язків, тому стаціонарних точок всередині області немає. Тепер знайдемо стац. точки на межі

АО: $Q_1 = 0; u_1 = \Pi(0, Q_2) = 20Q_2 - Q_2^2 \Rightarrow u_1' = 20 - 2Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_1(0,10) \in D$;

ВО: $Q_2 = 0; u_2 = \Pi(Q_1.0) = 40Q_1 - Q_1^2 \Rightarrow u_1' = 40 - 2Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_2(20,0) \notin D$ – не розглядаємо;

АВ: $Q_2 = 15 - Q_1$;

$$\begin{aligned} u_3 = \Pi(Q_1, 15 - Q_1) = 40Q_1 + 20(15 - Q_1) - Q_1^2 - (15 - Q_1)^2 + 2Q_1(15 - Q_1) = \\ = 300 + 80Q_1 - 4Q_1^2 \Rightarrow u_3' = 80 - 8Q_2 = 0 \Rightarrow Q_1 = 10 \Rightarrow M_3(10,5) \in D \end{aligned}$$

Додаємо до розгляду кутові точки: $M_4(0,0), M_5(15,0), M_6(0,15)$. Знаходимо найбільше значення серед усіх включених до розгляду точок:

$\Pi(M_1) = 100; \Pi(M_4) = 0; \Pi(M_5) = 375; \Pi(M_6) = 165;$

$\underline{\Pi(M_3) = 475 = \max \Pi}$.

Відповідь: Найбільший прибуток, який дорівнює 475 грош. од., фірма отримає, якщо виробить 10 од. товару G_1 і 5 од. товару G_2.

Хотілося б зауважити, що задачі абсолютної оптимізації окремо вивчаються в розділі *„Математичне програмування"*. Методик розв'язання таких задач дуже багато. Тут ми вивчили тільки одну з них.

ТИПОВЕ ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

1) Знайти повторну границю або довести, що вона не існує *(дод. завд.)*
2) Знайти подвійну границю або довести, що вона не існує *(дод. завд.)*
3) Знайти часткові похідні даних функцій за кожною із незалежних змінних ($x, y, z, u, v, t, \varphi, \phi$ – змінні):
4) Знайти похідну складної функції
5) Дана функція $z = f(x, y)$ і дві точки $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$. Потрібно

а) знайти значення z функції в точці B;

б) обчислити наближене значення $\overline{z_1}$ функції в точці B, виходячи із значення z_0 функції в точці A, заміняючи приріст функції при переході від точки A до точки B диференціалом;

в) написати рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $C(x_0, y_0, z_0)$ і перевірити, чи лежить точка $D(x_0, y_0, \overline{z_1})$ в цій площині

6) Дослідити функцію на локальний екстремум.
7) Знайти найбільше і найменше значення функції в замкненій множині.
8) Для даної функції $z = f(x, y)$ знайти 1) $\overline{grad\ z(A)}$; 2) похідну в точці A за напрямком $\overline{a}$.
9) Дана виробнича функція $z = f(x, y)$, де x – витрати живого труда, y – витрати уречевленого труда. Знайти коефіцієнти еластичності $E_x(z)\ i\ E_y(z)$ в точці (1,1) та пояснити їх економічний зміст.
10) (*Спільне для всіх варіантів, додаткове завдання.*) Знайти умовний екстремум функції $u = x + y + z$ за умов $xyz = 8, \quad xy / z = 8$.

Варіант 1	**Варіант 2**	**Варіант 3**
1. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(x+y)^2}{x^2+y^2}$	1. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to \infty}\sin xy$	1. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to \infty}\dfrac{\sin(x)}{\sin y+2}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin x}{\sin y}$	2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to \infty}}\dfrac{\sin(x)}{\sin y+2}$	2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to \infty}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}$
3. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$	3. $z=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$	3. $z=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$
4. $u=e^{x-3y}$, де $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t^3\end{cases}, \quad \dfrac{du}{dt}-?$	4. $u=z^2+y^3+zy$, де $\begin{cases}z=\sin t\\ y=e^t\end{cases}, \quad \dfrac{du}{dt}-?$	4. $u=\arcsin(x-y)$, де $\begin{cases}x=3t\\ y=4t^3\end{cases}, \quad \dfrac{du}{dt}-?$
5. $z=x^2+2xy+3y^2$; $A(2;1)$, $B(1{,}96;1{,}04)$	5. $z=2xy+2y^2-2x$; $A(1;2)$, $B(0{,}97;2{,}03)$	5. $z=2x^2+y^2+3y$; $A(2;2)$, $B(2{,}03;-2{,}04)$
6. $z=x^3+8y^2-6xy+5$	6. $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$	6. $z=1+6x-x^2-y^2-xy$
7. $z=x^2-xy+y^2-4x$ в трикутнику, що обмежений прямими $x=0; y=0; 2x+3y=12$	7. $z=x^2+3y^2+x-y$ в трикутнику, що обмежений прямими $x=1; y=1; x+y=1$	7. $z=x^3+y^3-3xy$ в прямокутнику $0\le x\le 2$ $0\le y\le 3$

8. $z=3x^2+2xy$; $A(1;2)$, $\bar{a}=4\bar{i}+3\bar{j}$ 9. $z=xy^2-3y\ln(3xy-1)$	8. $z=2x^2+3xy+y^2$; $A(2;1)$, $\bar{a}=3\bar{i}-4\bar{j}$ 9. $z=y^3\ln(2xy)+2y^2$	8. $z=\ln(x^2+3y^2)$; $A(1;1)$, $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}$ 9. $z=5\ln(xy^4)+2x^3y^2$
Варіант 4 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lvert x\rvert}\right)^{\lvert y\rvert}$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(1+\frac{1}{\lvert x\rvert}\right)^{\lvert y\rvert}$ 3. $z=\ln tg\frac{x}{y}$ 4. $u=\ln(e^x+e^y)$, де $y=x^3$, $\frac{du}{dx}-?$ 5. $z=2x^2+3xy+3y^2$; $A(1;2)$, $B(0{,}96;1{,}95$ 6. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$ 7. $z=xy-2x-y$ в прямокутнику $0\le x\le 3$ $0\le y\le 4$ 8. $z=x^2+3xy^2$; $A(2;1)$, $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}$ 9. $z=\frac{y-2x}{x^3}-4xy^2+y^5$	**Варіант 5** 1. $\lim\limits_{x\to1}\lim\limits_{y\to1}\frac{\sin(x(y-1))}{e^y-e}$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to1}}\frac{\sqrt{12-x^2-y^2}}{\lvert 1-x\rvert}$ 3. $z=arctg\frac{v+w}{v-w}$ 4. $z=x^2\ln y$, де $\begin{cases}x=u/v\\ y=3u-2v\end{cases}$, $\frac{\partial z}{\partial u}-?\frac{\partial z}{\partial v}-?$ 5. $z=x^2+y^2+2x+y-1$; $A(2;4)$, $B(1{,}98;3{,}91)$ 6. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$ 7. $z=x^2+4xy-2y^2-6x$ в трикутнику, що обмежений прямими $x=0;\ y=0;\ x+y=3$ 8. $z=x^2+y^2+2xy^2$; $A(3;1)$, $\bar{a}=-\bar{i}+\bar{j}$ 9. $z=3xy^2+\sqrt{xy^2-1}$	**Варіант 6** 1. $\lim\limits_{x\to2}\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin(xy)}{y}$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to2}}\frac{\sin(xy)}{y}$ 3. $z=xy\ln(x+y)$ 4. $z=x^2y-y^2x$, де $\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\sin v\end{cases}$, $\frac{\partial z}{\partial u}-?\frac{\partial z}{\partial v}-?$ 5. $z=x^2+2xy+y^2$; $A(-3;4)$, $B(-2{,}94;4{,}05)$ 6 $z=3x^3+3y^3-9xy+10$ 7. $z=2x+y-xy$ в квадраті $\begin{matrix}0\le x\le 4\\ 0\le y\le 4\end{matrix}$ 8. $z=xe^y$; $A(2;0)$, $\bar{a}=5\bar{i}+12\bar{j}$ 9. $z=\sqrt[3]{xy}-2(y+x)^2$
Варіант 7 1. $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$ 3. $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$ 4. $u=\arcsin x/z$, де $z=\sqrt{x^2+1}$, $\frac{du}{dx}-?$ 5. $z=9xy+2y^2+y$; $A(3;1)$, $B(2{,}94;1{,}07)$ 6. $z=4(x-y)-x^2-y^2$	**Варіант 8** 1. $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}y\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}y\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ 3. $u=x^{y^z}$ 4. $u=tg(3t+2x^2-y)$, де $\begin{cases}x=1/t\\ y=\sqrt{t}\end{cases}$, $\frac{du}{dt}-?$ 5. $z=x^2+y^2-4x+2y$; $A(3;2)$, $B(2{,}99;2{,}05)$ 6 $z=6(x-y)-3x^2-3y^2$	**Варіант 9** 1. $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(1+x)}{\sin y}$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{\ln(1+xy)}{\sin xy}$ 3. $z=(1+\log_y x)^3$ 4. $u=\arccos(x+y)$, де $\begin{cases}x=3t\\ y=4t^3\end{cases}$, $\frac{du}{dt}-?$ 5. $z=2xy-2x+y$; $A(2;1)$, $B(1{,}93;1{,}05)$ 6. $z=x^3+y^3-3xy$

7. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямокутнику, що обмежений прямими $x = 0;\ y = 0;\ x = 1;\ y = 2$ 8. $z = arctg(x^2 y^2)$; $A(1;-1),\ \bar{a} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$ 9. $z = x^2 y^3 - \frac{3x-2}{y^2} - x^2$	7. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ в прямокутнику $0 \le x \le 2$ $-1 \le y \le 1$ 8. $z = arctg(x / y)$ $A(2;-2),\ \bar{a} = -\bar{i} - 2\bar{j}$ 9. $z = 2x^2 + \frac{(y-x)^2}{x^2} - y^2$	7. $z = x^2 - xy + y^2 + +yx$ в трикутнику, що обмежений прямими $x = 0;\ y = 0;\ x + y = -3$ 8. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$; $A(1;1),\ \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$ 9. $z = 8y^2 x^3 - \frac{(2-y)^3}{x^2}$
<u>Варіант 10</u> 1. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin xy}{x+y}$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^y$ 3. $z = \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\left(x^2 + y^2\right)$ 4. $u = arctg(xy)$, де $y = e^x$, $\frac{du}{dx} - ?$ 5. $z = x^2 + y^2 - 2x + 2y$; $A(1;2),\ B(1{,}08;1{,}94)$ 6. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$ 7. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в трикутнику, що обмежений прямими $x = 3;\ y = 0;\ y = x + 1$ 8. $z = \arcsin(x / y)$; $A(3;5),\ \bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$ 9. $z = x^2\sqrt{y} + 3(x-2)^2 y^4$	**<u>Варіант 11</u>** 1. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to \infty} x^2 y$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to \infty}} x^2 y$ 3. $z = \ln\left[yx^2 + xy^2 + \sqrt{1+\left(yx^2+xy^2\right)^2}\right]$ 4. $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, де $\begin{cases} y = a\sin x \\ z = \cos x \end{cases}$, $\frac{du}{dx} - ?$ 5. $z = x^2 + 3xy + y^2$; $A(1;2),\ B(1{,}03;1{,}97)$ 6. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$ 7. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ в трикутнику, що обмежений прямими $x = -1;\ y = -1;\ x + y = 1$ 8. $z = 2x^2 + xy$; $A(-1;2),\ \bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ 9. $z = 2x^2 y + xy + \frac{x^3}{y+1}$	**<u>Варіант 12</u>** 1. $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{y\to -1}\frac{x+y}{\ln y}$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\frac{x+y}{\ln x}$ 3. $z = \sqrt{1 - \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2}} + \arcsin\frac{x+y}{xy}$ 4. $u = (x^2 + y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$, де $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$, $\frac{du}{dt} - ?$ 5. $z = xy + y^2 - 2x$; $A(2;1),\ B(2{,}03;0{,}96)$ 6. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$ 7. $z = 1 + xy^2$ в прямокутнику $0 \le x \le 1$ $-1 \le y \le 2$ 8. $z = arctg(y / x)$; $A(-1;1),\ \bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$ 9. $z = \sqrt{3y - 2x^2} + x^3 y$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Толок В.О., Киричевський В.В., Волкова Т.Д. Курс математики для економістів. – К.: Наук. думка, 2002. – Ч.2. – 413с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. – Ч.2. – М.: Дрофа, 2003.
3. Овчинников П.П., Яремчик Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Ч.1.2. – К.: Техніка, 2000
4. Высшая математика для экономистов / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.:ЮНИТИ, 2002. – 471 с.
5. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемних Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, изд-во ДИС, 1007. – 368 с.
6. Колесников А.Н. Краткий курс математиков для экономистов.: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 208с.
7. Солодовников А.С., Бабейцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: Учебник: А 3 ч. – Ч. 2. – М. : Финансы и статистика, 1998. – 224 с.
8. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ.-М.:Наука,1979.-720 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.-М.:Наука.-Т.1.-1966.-608 с.,Т.2.-1966.-800 с.,Т.3.-1969.-656 с.
10. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.-М.:Наука,1985.-383 с.
11. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.-М.:Наука,1990.-624 с.
12. Толок В.О., Киричевський В.В., Волкова Т.Д. Математика для вступників до вузів. Навчальний посібник. – Запоріжжя: Просвіта; К.: Наукова думка, 2000. – 656 с.

Додаток А

Витяг з робочої програми курсу математичного аналізу для спеціальності „Економічна кібернетика”

СТРУКТУРА І ЗМІСТ КУРСУ

№ п п	Зміст теми (лекційні заняття)	К-сть го-дин	Зміст практичних, семінарських, лабораторних занять	К-сть год.	Перелік контрол. заходів СР	Література
5	<u>Функції багатьох змінних.</u> • Означення функцій багатьох змінних. Границі функції багатьох змінних в точці. Неперервність функції багатьох змінних в точці • Частинні похідні і диференціал першого порядку. Умови диференційованості. • Теореми про скінченний приріст. Диференціювання складних функцій. • Частинні похідні вищих порядків та незалежність їх від порядку диференціювання. • Диференціали вищих порядків. • Дослідження функції багатьох змінних на локальний екстремум. Необхідні та достатні умови екстремуму. • Умовний екстремум. Абсолютний екстремум • *Застосування властивостей функцій багатьох змінних в задачах економіки*	**<u>10</u>** 1 1 1 1 1 2 1 2	• Кратні і повторні границі функції багатьох змінних. • Частинні похідні першого порядку. Диференціювання складних функцій багатьох змінних. • Частинні похідні і диференціали вищих порядків. • Дослідження на локальний, умовний та абсолютний екстремуми. Самостійна робота.	**<u>6</u>** 1 1 1 2 1	1 с.р., колоквіум	**1-11**

Додаток Б

Питання, що виносяться на самостійне вивчення

1. Метричні простори. Приклади. Збіжність послідовності в метричному просторі. Внутрішня і гранична точка множини в метричному просторі. Відкриті, замкнені і зв'язні множини в метричному просторі. Поняття області в метричному просторі.
2. Лінії рівня в економічних задачах. Ізокванти і їх використання в задачах про оптимальний розподіл ресурсів і про оптимальне споживання.

Питання, що виносяться на іспит

1. Поняття функції багатьох змінних, область визначення, множина значень. Поверхні рівня.
2. Границі і неперервність функції багатьох змінних. Властивості неперервної функції в замкненій області.
3. Диференційованість функції багатьох змінних. Теореми про середнє. Необхідні й достатні умови диференційованості функції багатьох змінних.
4. Диференціювання складної функції багатьох змінних. Диференціал першого порядку та його інваріантність.
5. Частинні похідні вищих порядків. Теорема Шварта про незалежність їх від порядку диференціювання.
6. Диференціали вищих порядків.
7. Формула Тейлора функцій багатьох змінних та її застосування.
8. Локальний і тотальний екстремум функції багатьох змінних. Необхідні умови існування локального екстремуму.
9. Достатні умови існування локального екстремуму.
10. Умовний екстремум. Абсолютний екстремум. Найбільше і найменше значення диференційованої функції в замкненій області.
11. *Застосування властивостей функцій багатьох змінних в задачах економіки*

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Киричевський Віктор Володимирович

Д’яченко Наталія Миколаївна

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Практикум з розв’язання задач
для студентів денної та заочної форм
навчання спеціальності
6.050100 „Економічна кібернетика”

Відповідальний за випуск	Киричевський В.В., д.т.н., професор, зав. кафедрою
Рецензент	Сніжко Н.В., к.ф.-м.н., доцент
Коректор	Д’яченко Н.М., к.ф.-м.н., доцент