

**ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**Н.М. Д'яченко, І.В. Красікова,
О.О. Тітова, Ю.М. Стреляєв**

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Збірник завдань до самостійної роботи
для студентів освітнього ступеня «бакалавр»
напрямів підготовки «Прикладна математика», «Математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №__ від _____ 2015 р.

Запоріжжя
2015

УДК 517: 378.147.88 (076)

ББК: 22.161я73

Д'яченко Н.М. Математичний аналіз: збірник завдань до самостійної роботи для студентів освітнього ступеня «бакалавр» напрямів підготовки «Прикладна математика», «Математика». / Н.М. Д'яченко, І.В. Красікова, О.О. Тітова, Ю.М.Стреляєв. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 76 с.

Збірник завдань до самостійної роботи укладено відповідно до навчальних та робочих програм дисциплін «Математичний аналіз» для напряму підготовки «Прикладна математика», «Математичний аналіз І», «Математичний аналіз II» напряму підготовки «Математика». Він охоплює всі теми курсу: «Елементи теорії дійсних чисел. Теорія границь», «Неперервність функції. Диференціальне числення функції однієї змінної», «Інтегральне числення функції однієї змінної», «Числові та функціональні ряди», «Функції багатьох змінних», «Інтегральне числення функції багатьох змінних».

Збірник містить варіанти завдань, список рекомендованої літератури та інформаційні джерела. В додатках наведено деякі важливі теореми, формули, методи і факти, а також графіки деяких кривих та поверхонь.

Рецензент С.М. Гребенюк

Відповідальний за випуск Н.М. Д'яченко

ВСТУП

МЕТА виконання студентами завдань з дисципліни «Математичний аналіз» полягає у наступному:

1) перевірка отриманих знань, умінь і навичок студентів при вивченні відповідних тем, виявлення у студентів недоліків, щоб стимулювати їх самостійну роботу, а також надання можливості викладачеві покращити якість знань студентів на заняттях, консультаціях при індивідуальній роботі зі студентами;

2) контроль за тим, як студент на прикладах математичних понять та методів *засвоїв* сутність наукового підходу, *навчився* засобами дослідження та розв'язання математично формалізованих задач *аналізувати* отримані результати стосовно

- дослідження функції однієї та багатьох змінних на неперервність, диференційованість, монотонність, інтегровність та інше;
- знаходження невизначених, визначених, кратних, криволінійних та поверхневих інтегралів;
- дослідження основних властивостей числових та функціональних послідовностей і рядів;
- основних областей застосування відомих понять та фактів теорії диференціального та інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних, теорії рядів, зокрема в геометрії, векторному аналізі, в фізиці, техніці та інших галузях.

Завдання до самостійної роботи складено згідно з ОПХ і ОПП вищої школи за професійним спрямуванням (анотації програм навчальних дисциплін для напряму підготовки «Прикладна математика», «Математика»).

Технологія виконання та захисту завдань:

Завдання розв'язуються студентами самостійно вдома та подаються на перевірку не пізніше передостаннього тижня, на який припадає вивчення відповідної теми. У разі необхідності допрацьовуються. Захист виконаного завдання відбувається у строки, призначені викладачем після завершення вивчення теми.

Критерії оцінювання виконання завдань:

Результат виконання і захисту студентом кожного виконаного завдання оцінюється за такою шкалою:

10 балів – всі завдання роботи повністю виконані без помилок і захищені, що відповідає виявленню студентом всебічного системного і глибокого знання програмного матеріалу; засвоєнню ним основної і додаткової літератури; чіткому володінню понятійним апаратом, методами, методиками та інструментами, передбаченими програмою дисципліни; вмінню використовувати їх для розв'язання як типових, так і нетипових практичних ситуацій; виявленню творчих здібностей в розумінні, викладі та використанні навчально-програмного матеріалу;

9 балів – вірно виконані і захищені 85-90% наданих задач;

8 балів – вірно виконані і захищені 75-84% наданих задач;

7 балів – вірно виконані і захищені 65-74% наданих задач;

6 балів – вірно виконані і захищені 55-64% наданих задач;

5 балів – вірно виконані і захищені 45-54% наданих задач;

4 балів – вірно виконані і захищені 31-44% наданих задач;

0-6 балів - більше 30% всіх завдань роботи виконано не вірно; відповідає виявленню значних прогалин у знаннях основного програмного матеріалу; не досить упевненому володінню окремими поняттями, методиками та інструментами, про що свідчать принципові помилки під час їх використання.

Завдання вважається *зарахованим*, якщо студент отримав не менше 6 балів. В іншому разі, студенту повертається робота на доопрацювання.

Структура пакету завдань:

Пакет складається із 6 завдань по 13 варіантів в кожному. Номер варіанта завдання визначається як залишок від ділення номера прізвища студента в журналі на число 13. Кожне завдання складене так, що дотримується принцип однакової складності для усіх варіантів. Кожен варіант містить завдання з усіх питань теми різного рівня складності для дотримання принципу диференційованого навчання.

“Все доказуемое не должно быть принимаемо в науке на веру без доказательства” (Р. Дедекинд)

ЗАВДАННЯ №1

«ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ»

1. Визначити потужність множини.
2. Знайти $\inf M, \sup M$. З'ясувати, чи має множина максимальний та мінімальний елементи.
3. Знайти $\sup_{x \in R} f(x), \inf_{x \in R} f(x)$.
4. Довести тотожність за допомогою принципу математичної індукції.
5. Довести нерівність за допомогою принципу математичної індукції.
6. Дослідити послідовність на обмеженість.
7. Дослідити послідовність на монотонність.
8. Довести, користуючись означенням.
9. Знайти множину граничних точок послідовності $\{x_n\}$ та $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.
10. Довести, що послідовність $\{x_n\}$ фундаментальна.
11. Знайти границю послідовності $\{x_n\}$.
12. Знайти область визначення функції.
13. Довести, користуючись означенням границі функції.
- 14.-18. Обчислити границі функцій.
19. Знайти односторонні границі функції $f(x)$ в точці x_0 .

ВАРІАНТ 1

| | |
|---|--|
| 1. Множина усіх парабол $y = ax^2 + bx + c$ | 2. $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+1} \right]$ |
| 3. $f(x) = \text{th } x$ | 4. $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$ |
| 5. $(2n-1)!! < n^n, n > 1$ | 6. а) $x_n = \frac{2n^2-1}{n^2+2}$, б) $x_n = n^{\cos \pi n}$ |
| 7. $x_n = \frac{20n}{n^2+1}$ | 8. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n^2}{4+5n^2} = -\frac{3}{5}$, |
| 8. б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4\sqrt{n} - n) = -\infty$ | 9. $x_n = \cos \frac{\pi n}{4}$ |
| 10. $x_n = \frac{n+1}{3n-2}$ | 11. $x_n = \frac{n \sin(2n+1)!}{n\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ |
| 12. $y = \arcsin \sqrt{\frac{4x-3}{x+2}}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$ |

| | |
|--|---|
| 14. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$, | 15. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$, |
| 16. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$, | 17. $\lim_{x \rightarrow 0} (6 - 5 \sec x)^{\operatorname{ctg} 2x}$, |
| 18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+4+\dots+(3x-2)}{\sqrt{5x^4+x+1}}$, $x \in N$ | 19. $f(x) = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \frac{x}{x^3+8}$, $x_0 = -2$ |

ВАРІАНТ 2

| | |
|--|---|
| 1. Множина усіх точок, що належать колу | |
| 2. $M = \bigcup_{n \in N} \left(-\frac{1+n}{n}; n \right)$ | 3. $f(x) = \sin x^2$ |
| 4. $\frac{1}{a \cdot (a+1)} + \frac{1}{(a+1) \cdot (a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$ ($a > 0$) | |
| 5. $n! > n^{n/2}$, $n > 1$ | 6. а) $x_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+4}}$, б) $x_n = n^3 - 2n$ |
| 7. $x_n = \frac{n+5}{3n+8}$ | 8. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+1}{n^2+4} = 6$, |
| 8. б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3+12} = +\infty$ | 9. $x_n = \sin \frac{\pi n}{3}$ |
| 10. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{4} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$ | 11. $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ |
| 12. $y = 7^{\operatorname{tg} x} + \arccos \frac{x^2-1}{8}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{3x+2}{2x} = \frac{8}{5}$ |
| 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10}-1}{3x^5-x^3-2}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{x^2} + 2\sqrt{x})}{2 - \sqrt{\sqrt{x}+4}}$, |
| 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - e^{-7x} + 2x}{\sin^2 3x - \operatorname{arctg} x}$ | 17. $\lim_{x \rightarrow \pi/8} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right)^{\operatorname{tg} 4x}$ |
| 18. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(e^{x-2} - 2^{x^2-4})}{x^3 - 8}$ | 19. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x^2-4}$, $x_0 = 2$ |

ВАРІАНТ 3

| | |
|---|--|
| 1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ | 2. $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}; \frac{2}{n} \right)$ |
| 3. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ | 4. $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ |
| 5. $n! > 2^{n-1}, n > 2$ | 6. а) $x_n = \frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$, б) $x_n = n^{\sin \frac{\pi n}{2}}$ |
| 7. $x_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2}$ | 8. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{3n^2 + 1} = \frac{4}{3}$, |
| 8. б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - n^2 = -\infty$ | 9. $x_n = \frac{4n+4}{3n-1} \cos \pi n$ |
| 10. $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ | 11. $x_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n(2n-1)(n+4)}$ |
| 12. $y = \log_{\frac{1}{3}} \cos \frac{2\pi}{x} + \lg \log_3(1-2x)$ | 13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{5x^2 + 1} = \frac{1}{5}$ |
| 14. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$, | 15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\sqrt{2x^2 - 3x - 5} - \sqrt{1+x})}{\ln(x-1) - \ln(x+1) + \ln 2}$, |
| 16. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$, | 17. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2-x}{x} \right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$, |
| 18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{5x}}{\sin 7x - 2x}$ | 19. $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{x+1}}}$, $x_0 = -1$ |

ВАРІАНТ 4

| | |
|--|--|
| 1. Множина усіх паралелограмів на площині | 2. $M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{-1}{n+1}; \frac{n}{n+1} \right]$ |
| 3. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x > 0, \\ \sin x, & x \leq 0 \end{cases}$ | 4. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ |
| 5. $(2n)! < [n(n+1)]^n, n > 1$ | 6. а) $x_n = \frac{n^2 + 4n + 8}{(n+3)^2},$ |
| 6. б) $x_n = \frac{n^2}{n+3}$ | 7. $x_n = 3^n - 4n$ |
| 8. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{3-10n} = -\frac{1}{2},$ | 8. б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^2 - 10} = +\infty$ |
| 9. $x_n = n^3 \sin \frac{\pi n}{2}$ | 10. $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ |
| 11. $x_n = \left(\frac{n^2 + n + 12}{n^2 + n + 11} \right)^{n^2 + n}$ | 12. $y = \sqrt{x^2 - 4 x + 5} + \sqrt{4 - x - 3x^2}$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1-4x}{x^2+1} = 3$ | 14. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12},$ |
| 15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 5} - \sqrt[3]{3x^4 + 2}}{1 + 3 + 5 + \dots + (2x-1)}, x \in \mathbb{N},$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x-4}}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}},$ |
| 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \left(\pi \left(1 + \frac{x}{2} \right) \right)}{\ln(x+1)},$ | 18. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$ |
| 19. $f(x) = (1+ x)^{\frac{1}{x}}, x_0 = 0$ | |

ВАРІАНТ 5

| | |
|--|--|
| 1. Множина усіх комплексних чисел | 2. $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}; \sqrt{n} \right]$ |
| 3. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$ | 4. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ |
| 5. $\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$ | 6. а) $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$, б) $x_n = (n+1)^{\cos 3\pi n}$ |
| 7. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$ | 8. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27-4n}{2+n} = -4$, |
| 8. б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n^3 = +\infty$ | 9. $x_n = \sin \frac{\pi n}{4}$ |
| 10. $x_n = \cos 1 + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \dots + \frac{\cos n}{n^2}$ | 11. $x_n = \frac{n^3 + 3^n + n}{2n^2 + 3^{n+2}}$ |
| 12. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{14-x}}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-2x}{3x+1} = -\frac{2}{3}$ |
| 14. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$, | 15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-2x+3x^2} - (1+x)}{\sqrt[3]{x}}$, |
| 16. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}$, | 17. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x - \sin a}{x-a} \right)^{\frac{x^2}{a^2}}$, |
| 18. $\lim_{x \rightarrow 2} (2e^{x-2} - 1)^{\frac{3x+2}{x-2}}$. | 19. $f(x) = \frac{1}{x+2^{1/(4-x)}}$, $x_0 = 4$ |

ВАРІАНТ 6

| | |
|---|--|
| 1. Множина кіл на площині з раціональним радіусом | 2. $M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{-1}{n+1}; \frac{n+1}{n} \right]$ |
| 3. $f(x) = \begin{cases} -e^x, & x \geq 0, \\ \cos \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ | 4. $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$ |
| 5. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, n > 1$ | 6. а) $x_n = \frac{n^3+1}{n(n^2+n)-1}$, б) $x_n = n^2 + (-1)^n n^2$ |
| 7. $x_n = (-1)^n + 1$ | 8. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+5} = 1$, |
| 8. б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+3} - n) = -\infty$ | 9. $x_n = \left(2 \cos \frac{2\pi n}{3} \right)^n$ |
| 10. $x_n = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{100} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{10^{n-1}}$ | 11. $x_n = \frac{n2^n + 3^n}{2^{n+5} - 3^{n-1}}$ |
| 12. $y = \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 5}}{\sqrt{3x - 2 - x^2}}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{x^2+2} = -1$ |
| 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$, | 15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$, |
| 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$, | 17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 + \ln^2 x} - 1}{1 + \cos \pi x}$, |
| 18. $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$. | 19. $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ |

ВАРІАНТ 7

| | |
|--|---|
| 1. Множина усіх кругів на площині | 2. $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1-n}{n}; \frac{n}{n+1} \right)$ |
| 3. $f(x) = e^{- x }$ | 4. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 =$ $= n(n^2 - 1)(3n + 2) / 12$ |
| 5. $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$, $n > 2$ | 6. а) $x_n = \frac{(-1)^n n - 1}{\sqrt{n^2 + 3}}$, |
| 6. б) $x_n = \sqrt{n^3 + n^2 + 1} - \sqrt{n^3 - n^2 + 1}$ | 7. $x_n = \ln(n + 7) - \ln n$ |
| 8. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n^2}{1 + 6n^2} = -\frac{1}{3}$, | б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n}{\sqrt{n + 1}} = -\infty$ |
| 9. $x_n = \frac{n^2 \sin \pi n / 2}{n + 7}$ | 10. $x_n = \sin 1! + \frac{\sin 2!}{3} + \frac{\sin 3!}{3^2} + \dots + \frac{\sin n!}{3^{n-1}}$ |
| 11. $x_n = \frac{10^n + n^{10} - n(n+1)!}{(n+2)!}$ | 12. $y = \frac{x+1}{2x-1} + \log(\arccos x) + \sqrt{3x-1}$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 5x + 4) = 4$ | 14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+\dots+(2x-1)}{x+3} - x \right), x \in \mathbb{N}$ |
| 15. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin \frac{5x}{2} \cos x}$, | 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x}}$, |
| 17. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)^2}{e^{\sin \pi x} - e^{-\sin 3\pi x}}$, | 18. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \pi x)^{\frac{1}{x \sin \pi x}}$ |
| 19. $f(x) = x + [x^2]$, $x_0 = -10$ | |

ВАРІАНТ 8

| | |
|--|---|
| 1. Множина усіх трикутників на площині | 2. $M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0; \frac{n+1}{n} \right]$ |
| 3. $f(x) = \ln(\pi + \operatorname{arctg} x)$ | 4. $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ |
| 5. $\sqrt[n]{n+1} < \sqrt[n-1]{n}$, $n > 2$ | 6. а) $x_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$, |
| 6. б) $x_n = 4^n - 3^n$ | 7. $x_n = \frac{4^n}{n!}$ |
| 8. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{7n+1} = \frac{3}{7}$, | 8. б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n)^n = \infty$ |
| 9. $x_n = \frac{(1 + \cos \pi n) \sqrt{n}}{\ln 2n}$ | 10. $x_n = \frac{\operatorname{arctg} 1}{1 \cdot 2} - \frac{\operatorname{arctg} 2}{2 \cdot 3} + \dots +$ $+ (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{arctg} n}{n(n+1)}$ |
| 11. $x_n = \frac{\sqrt[n]{n+1} + n \ln n^2}{\sqrt{2n^3 + 1}} - 1$ | 12. $y = \frac{\sqrt{8 - x }}{x(x^2 - 4)}$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 1} (2\sqrt{3} - x\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x+x^5} - x \right)$, |
| 15. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$, | 16. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x^2 - a^2} - 1}{\operatorname{tg} \left(\ln \frac{x}{a} \right)}$, |
| 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{5x} - 9^{-2x}}{\sin x - \operatorname{tg} x^3}$, | 18. $\lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{2x-7}{x+1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$ |
| 19. $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$, $x_0 = \pi$ | |

ВАРІАНТ 9

| | |
|--|--|
| 1. Множина усіх скінченних підмножин множини раціональних чисел | 2. $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}; 1 \right]$ |
| 3. $f(x) = \sin x + \cos x$ | 4. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1) \cdot n = (n-1)n(n+1)/3$ |
| 5. $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, n > 1$ | 6. а) $x_n = \frac{2n + (-1)^n}{4n-1}$. б) $x_n = \frac{3^n}{n^3}$ |
| 7. $x_n = \sin \frac{\pi n}{2}$ | 8. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-3}{16n+1} = \frac{3}{16}$, |
| 8. б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n-1000} = +\infty$ | 9. $x_n = 7^{n \cos \pi n}$ |
| 10. $x_n = \frac{\sin 1}{1!} + \frac{\sin^2 2}{2!} + \dots + \frac{\sin^n n}{n!}$ | 11. $x_n = \frac{n! \sqrt{n+5} + 5^n (n-1)}{(n-1)! \sqrt{2n^3 + 7}}$ |
| 12. $y = \arcsin \frac{1}{x^2} - \arccos \frac{x}{3}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 2}{-2x^2 + 3x + 4} = -2$ |
| 14. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$, | 15. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{16}} - \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4} + x} - \sqrt{2x}}$, |
| 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1-2x)}{4 \operatorname{arctg} 3x}$, | 17. $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{e^{\sin^2 6x} - e^{\sin^2 3x}}{\log_3 \cos 6x}$, |
| 18. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x3^x - 7}{1 + x7^x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ | 19. $f(x) = \frac{1}{x - [x]}, x_0 = 2$ |

ВАРІАНТ 10

| | |
|--|---|
| 1. Множина усіх двоелементних підмножин відрізка $[0, 1]$ | 2. $M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{n}{n+1}; \frac{n+1}{n} \right]$ |
| 3. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ | 4. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ |
| 5. $(n!)^2 < \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right)^n, n > 1$ | 6. а) $x_n = \frac{\sqrt{2n^3 - 1}}{(n+6)\sqrt{n+9}}$, б) $x_n = n^{\cos \frac{\pi n}{2}}$ |
| 7. $x_n = n^3 - 3n^2$ | 8. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2n^2}{2 - 4n^2} = -\frac{1}{2}$, |
| 8. б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + (-1)^n n^2 \right) = \infty$ | 9. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + \cos \pi n}{2}$ |
| 10. $x_n = \frac{\cos \pi}{1^3} + \frac{\cos 2\pi}{2^3} + \dots + \frac{\cos n\pi}{n^3}$ | 11. $x_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2} - \frac{n}{3}$ |
| 12. $y = \log_{\frac{x-4}{x+4}} \frac{x+3}{x-3}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{x^2+4} = \frac{6}{5}$ |
| 14. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$, | 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$, |
| 16. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin \pi x}$, | 17. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{e^{\sin x} - e^{\sin 4x}}$, |
| 18. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$ | 19. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x}}, x_0 = 0$ |

ВАРІАНТ 11

| | |
|--|--|
| 1. Множина всіх алгебраїчних многочленів ступеня не вище n з раціональними коефіцієнтами | 2. $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n^2}; n^2 \right)$ |
| 3. $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$ | 4. $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (2n - 1)^2 = n(4n^2 - 1) / 3$ |
| 5. $2^{n-1}n! < n^n, n > 2$ | 6. а) $x_n = \frac{4n^2 + 1}{5n^2 - 2}$; б) $x_n = n^{\cos \frac{3\pi n}{2}}$. |
| 7. $x_n = \frac{n}{4n^2 - 3}$. | 8. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4n^2}{4 - 7n^2} = -\frac{4}{7}$; |
| 8. б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n} + n^2) = +\infty$ | 9. $x_n = \sin \frac{2\pi n}{3}$, |
| 10. $x_n = \frac{1}{n + 2}$, | 11. $x_n = \frac{n\sqrt{2n-1} - \sqrt[3]{4n^3+1}}{n\sqrt{3n+1} + \sqrt{n^3}}$. |
| 12. $y = \arccos \sqrt{\frac{x+7}{x+9}}$, | 13. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 2) = -2$. |
| 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{21} - 1}{x^3 + 4x^2 + 2x - 7}$, | 15. $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt{x-2} - 5}{\sqrt[3]{x-3}}$, |
| 16. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin 2x + \cos 4x}{\ln(\operatorname{ctg} x)}$, | 17. $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - 2\cos x)^{\frac{1}{x^4}}$, |
| 18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt[3]{x^2 + 3x - 1}}{\sqrt{7x^5 + 5x + 2}}$. | 19. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 - 1}, x_0 = -1$ |

ВАРІАНТ 12

| | |
|--|---|
| 1. Множина всіх алгебраїчних многочленів ступеня n з дійсними коефіцієнтами | |
| 2. $M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[-1; \frac{1}{n} \right]$ | 3. $f(x) = \operatorname{arctg}(\cos x)$ |
| 4. $1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (n(n+1)/2)^2$ | |
| 5. $3^n n! > n^n$, $n > 2$ | 6. а) $x_n = \frac{3n+1}{\sqrt{n^3-4}}$; б) $x_n = n^4 - n^2$. |
| 7. $x_n = \frac{3n-2}{4n+3}$. | 8. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-2}{3n^2+31} = \frac{4}{3}$, |
| 8. б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2-1} = +\infty$. | 9. $x_n = \cos \frac{\pi n}{3}$. |
| 10. $x_n = \frac{\sin 1!}{3} + \frac{\sin 2!}{9} + \dots + \frac{\sin n!}{3^n}$. | 11. $x_n = \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{\sqrt{2n^4+3}}$ |
| 12. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \arcsin \frac{x^3-1}{x}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-2}{2x+1} = 1$ |
| 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{27}-1}{3x^4-x^2-2}$, | 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{x^3} + 2\sqrt{x^3})}{2 - \sqrt{\sqrt{x^3} + 4}}$, |
| 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - e^{-4x^3} + 5x^3}{\sin^3 3x - \operatorname{arctg} x^3}$, | 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right)^{\frac{1}{2^x-1}}$, |
| 18. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin(3^{x-3} - 5^{x^2-9})}{x^2-9}$. | 19. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{3x^2-12}$, $x_0 = 2$ |

ВАРІАНТ 13

| | |
|--|---|
| 1. Множина усіх відрізків на числовій прямій | 2. $M = [0,1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n+2}; \frac{1}{2} \right)$ |
| 3. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ | 5. $(2n-1)! < n^{2n-1}, n > 1$ |
| 4. $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n = (-1)^{n-1} \cdot n(n+1) / 2$ | |
| 6. а) $x_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 1}$; б) $x_n = n + n \cos \pi n$ | 7. $x_n = \frac{(-1)^n - 1}{2} \cdot n$ |
| 8. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n-2} - n^2 = -\infty$ | 9. $x_n = \left(\cos \frac{2\pi n}{3} \right)^2$ |
| 10. $x_n = -\frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \dots + \cos \pi n \frac{1}{5^n}$ | 11. $x_n = \frac{n^2 3^n + 4^n}{3^{n+5} - 4^{n-1}}$ |
| 12. $y = \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 6}}{\sqrt{x - 3}}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 2x^2}{x^2 - 3} = -2$ |
| 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 - 4x + 1)^2}{x^{131} - 1}$, | 15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$, |
| 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos^3 x}}{x \operatorname{tg} 3x}$, | 17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 + \ln^3 x} - 1}{\sin \pi x}$, |
| 18. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{a^x - a^3}{\sin \pi x}$. | 19. $f(x) = 4^{(\operatorname{tg} x)^3}, x_0 = \frac{\pi}{2}$. |

Вказівка. В деяких прикладах потрібно скористатися такими нерівностями

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3; \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n > 1.$$

ЗАВДАННЯ №2
«НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ»

1. Дослідити функцію на неперервність та побудувати ескіз графіка. Дати класифікацію точок розриву функції.
2. Дослідити функцію $f(x)$ на рівномірну неперервність на множині X .
3. Знайти похідну функції.
4. Знайти за означенням $f'(a)$, (значення a задано) або довести, що похідна не існує.
5. Знайти похідну функції, що задана параметрично.
6. Знайти похідну функції, що задана неявно.
7. Знайти диференціал функції. Якщо задана точка, обчислити диференціал в точці.
8. Знайти похідну n -го порядку.
9. Знайти диференціал вказаного порядку.
10. Довести нерівність за допомогою похідної.
11. Обчислити границі за правилом Лопітала.
12. Розвинути функцію за формулою Маклорена.
13. Знайти границі за допомогою формули Маклорена.
14. Побудувати графіки функцій.

ВАРІАНТ 1

| | |
|--|---|
| 1. $y = e^{\frac{1}{x+4}}$ | 2. $f(x) = \sin \sqrt{x}$, $X = [1; +\infty)$ |
| 3. $f(x) = \operatorname{arctg} \left(1 + (\cos x)^{\sin x} \right)$. | 4. $f(x) = (x-2)^2(x-3)(x-4)$, $a = 4$. |
| 5. $\begin{cases} x = \ln \sin t / 2, \\ y = \ln \sin t \end{cases} \quad (0 < t < \pi)$. | 6. $5x^2 + 5y^2 - 30x + 10y + 9 = 0$; $y < -1$. |
| 7. $\ln \left(\sqrt{1 + 2 \sin x} + \sqrt{2 \sin x - 1} \right)$. | 8. $y = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 4}$. |
| 9. $y = \arcsin x$; $n = 9$; $x = 0$. | 10. $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$; $x > 0$. |
| 11. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}$, | 11. б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$, |
| 11. в) $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}$, | 11. г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)$, |
| 11. д) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{1/x}$. | 12. $\sin(\sin x)$ до x^5 . |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - 2 \operatorname{sh} x}{(e^x - 1 - x)x}$. | 14. а) $y = \frac{x^5}{(x^2 - 1)^2}$, |
| 14. б) $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$. | |

ВАРІАНТ 2

| | |
|---|--|
| 1. $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$ | 2. $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}, X = (0; \pi]$ |
| 3. $f(x) = \cos 2^x \cdot \ln(1 + (\arctg x)^{\sin x})$. | 4. $f(x) = x^3(x-2)(x-3)\dots(x-10), a = 0$. |
| 5. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$. | 6. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 4y - 7 = 0;$ $x < 2y - 1$. |
| 7. $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. | 8. $y = \frac{1}{x^2(x-1)}$. |
| 9. $y = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x; n = 10; x = \pi / 6$ | 10. $\arctg x \leq x; x \geq 0$. |
| 11. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 9x - 4}{3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$, | 11. б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right)$, |
| 11. в) $\lim_{x \rightarrow \pi/2-0} (\pi - 2x)^{\cos x}$, | 11. г) $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln^3 \left(\frac{1}{x} \right)$, |
| 11. д) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ctg x}$. | 12. $\ln(3 \cos x)$ до x^6 . |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + x^2 / 2}{\operatorname{ch} 3x + \cos 3x - 2}$. | 14. а) $y = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^4$, б) $y = \sqrt[3]{x(3-x)^2} - x$. |

ВАРІАНТ 3

| | |
|--|---|
| 1. $y = \cos \frac{\pi}{2-x}$ | 2. $f(x) = x^2, X = (-1; 1)$ |
| 3. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot e^{\arcsin \ln \sqrt{3}}$. | 4. $f(x) = 2^{10} + e^{\arctg x^4}, a = \pi / 4$. |
| 5. $\begin{cases} x = r \sin t + \sin rt, \\ y = r \cos t + \cos rt. \end{cases}$ | 6. $5xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0; y < 2;$ $x_0 = 11 / 12$. |
| 7. $\frac{x^2 2^x}{x^x}; x_1 = 2; x_2 = 1$. | 8. $y = \ln(1 - 4x^2)$. |
| 9. $y = (\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x - 1})^2; n = 16; x = 0$. | 10. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, x > 0$. |
| 11. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - x^x}$, | 11. б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$, |
| 11. в) $\lim_{x \rightarrow \pi/2-0} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$, | 11. г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\pi - 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$, |
| 11. д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{50} - 50x + 49}{x^{100} - 100x + 99}$. | 12. $\ln \frac{\sin x}{x}$ до x^6 . |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x})x}{\arctg x - \arcsin x}$. | 14. а) $y = \frac{20x^2}{(x-1)^3}$, б) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$. |

ВАРІАНТ 4

| | |
|---|---|
| 1. $y = \frac{1}{x^2 - 9}$ | 2. $f(x) = \sqrt[3]{x}, X = [0; 2]$ |
| 3. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{e^x}{e^{2x} + 1}} \cdot (\arctg x)^{1+x^2}$. | 4. $f(x) = x \cdot \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right), a = 0$. |
| 5. $x = \frac{1+t^4}{1+2t^2+t^4}, y = \frac{2t^2}{1+2t^2+t^4}$ | 6. $xy + \ln y = 1; y > 0; x_0 = 0$. |
| 7. $\arctg \frac{\ln x}{x}; x_1 = \frac{1}{e}; x_2 = e$. | 8. $y = \frac{x}{\sqrt{ax+b}}$. |
| 9. $y = \frac{7x+1}{(3x-2)^2}; n = 10; x = 1$. | 10. $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}; x \in R$ |
| 11. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x^3) - 3(1-x^2)}{(1-x^3)(1-x^2)}$, | 11. б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{7/6} - x^{6/7} \ln^2 x)$, |
| 11. в) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln(\operatorname{sh} x)}}$, | 11. г) $\lim_{x \rightarrow +0} \sin x \ln(\operatorname{ctg} x)$, |
| 11. д) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln(\operatorname{tg} x)}$. | 12. $\ln \frac{e^x - 1}{x}$ до x^4 . |
| 14. а) $y = 32x^2(x^2 - 1)^3$, | 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$. |
| | 14. б) $y = \frac{x}{2} - \arccos \frac{2x}{1+x^2}$. |

ВАРІАНТ 5

| | |
|--|---|
| 1. $y = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \operatorname{tg} x + 1, & x > 0. \end{cases}$ | 2. $f(x) = \sin x^2, X = (-3; 3]$ |
| 3. $f(x) = e^x \cdot \arctg(x \cdot \sin(x^{\sqrt{x}}))$. | 4. $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+e^x}, a = 0$. |
| 5. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = r \cos t + \cos rt \end{cases} (-1 < t < 1)$. | 6. $e^y + xy = e; y > 0; x_0 = 0$. |
| 7. x^{x^2} . | 8. $y = (3x^2 + 8x + 1) \ln(x + 1)$. |
| 9. $y = \arctg \sqrt{x}; n = 10; x = 1$. | 10. $e^x \geq 1 + \ln(1 + x), x > -1$. |
| 11. а) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x^a - a^a}$, | 11. б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\alpha}{1-x^\alpha} - \frac{\beta}{1-x^\beta} \right); \alpha \cdot \beta \neq 0$, |
| 11. в) $\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\ln x}$, | 11. г) $\lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$, |
| 11. д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x}$. | 12. $\ln(4 \cos^2 x)$ до x^4 . |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$. | 14. а) $y = \frac{x^5 - 8}{x^4}$, б) $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ |

ВАРІАНТ 6

| | | |
|---|---|--|
| 1. $y = \begin{cases} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$ | 2. $f(x) = x^2, x \in R$ | |
| 3. $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2} \cdot \arcsin(x^{x+1})$. | 4. $f(x) = x \cdot 10^{\sqrt{x}}, a = 1$. | |
| 5. $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ | 6. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. | |
| 7. $5\operatorname{sh}^7 \frac{x}{35} + 7\operatorname{sh}^5 \frac{x}{35}$. | 8. $y = x^2 \sin 2x$. | 9. $y = \frac{x+1}{\sqrt{1-x}}; n = 20; x = 0$. |
| 10. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x; 0 < x < \pi/2$. | 11. а) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$, | |
| 11. б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)} \right)$, | 11. в) $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$, | |
| 11. г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \sin x}{x + \sin x}$, | 11. д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - 1}{\ln x}$. | 12. $\ln(5 \cos^3 x)$ до x^4 . |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x}}$. | 14. а) $y = \frac{(x-5)^3}{(x-7)^2}$, б) $y = \frac{x}{\ln x}$. | |

ВАРІАНТ 7

| | |
|--|--|
| 1. $y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{1-x}, & x > 1. \end{cases}$ | 2. $f(x) = \cos \frac{1}{x}, X = (0;1)$ |
| 3. $f(x) = \sqrt[4]{1+x^4} \cdot \ln \left(\operatorname{arctg} \left(x^{4^x} \right) \right)$. | 4. $f(x) = x(x-1)^{10}(x-2)(x-3)(x-5); a = 1$. |
| 5. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$ | 6. $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0; y > -5; x_0 = 0$ |
| 7. $\frac{(2x-1)^2 \cdot \sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}}; x = 0$. | 8. $y = \frac{x}{x^2 - 4x - 12}$. |
| 9. $y = (2x^2 + 1)\operatorname{sh}^2 x; n = 10; x = 0$. | 10. $1 - 2 \ln x \leq 1/x^2; x > 0$. |
| 11. а) $\lim_{\phi \rightarrow \pi/4} \frac{\sin^2 \phi - 0,5 \operatorname{tg} \phi}{1 + \cos 4\phi}$, | 11. б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right)$, |
| 11. в) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$, | 11. г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x$, |
| 11. д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$. | 12. e^{3x+x^2} до x^5 . |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$. | 14. а) $y = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x}$, б) $y = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}$. |

ВАРІАНТ 8

| | |
|---|---|
| 1. $y = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 4 - 2x, & 1 < x < 2,5, \\ 2x - 7, & 2,5 \leq x < +\infty. \end{cases}$ | 2. $f(x) = \sqrt{x}, X = (0; +\infty)$ |
| 3. $f(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x^x}{2 + \cos^2 x}\right)$. | 4. $f(x) = (2x^3 - 3x + \sqrt{x} - 1)/x; a = 1/4$. |
| 5. $\begin{cases} x = 1 + \sin t \cdot \cos 2t, \\ y = 1 - \sin 2t \cdot \operatorname{ctg} t. \end{cases}$ | 6. $y^5 + y^2 + y - x = 0$. |
| 7. $\ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}$. | 8. $y = \ln(x-1)^{2x}$. |
| 9. $y = \sin^2 x; n = 10; x = \pi/6$. | 10. $e^x \geq e \cdot x; x \in R$ |
| 11. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-3x}}$, | 11. б) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{\cos x} \right)$, |
| 11. в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$, | 11. г) $\lim_{x \rightarrow +0} (-\ln x)^x$, |
| | 11. д) $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sqrt[5]{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}}{2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3}$. |
| 12. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до x^{13} . | 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln \cos x}$. |
| | 14. а) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$, б) $y = (x^2 - 2)e^{-2x}$. |

ВАРІАНТ 9

| | | |
|--|--|---|
| 1. $y = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0, \\ (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x, & x > 2. \end{cases}$ | 2. $f(x) = e^x;$ $x \in R$ | 3. $f(x) = \frac{\sin(x^{\sqrt{x}})}{\ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)}$. |
| 4. $f(x) = \sin x ; a_1 = \pi; a_2 = -\pi$. | 5. $\begin{cases} x = 1 - \ln^2 t, \\ y = 3e^t. \end{cases}$ | 6. $\sin \frac{x}{y} + \cos \frac{y}{x} = 1$. |
| 7. $y^2 - y = 6x^2; x_1 = 1; x_2 = 2$. | 8. $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$. | |
| 9. $y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}; n = 10; x = 0$. | 10. $\operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}; x \in R$ | |
| 11. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arcsin} x^2}{x \cos x - \sin x}$, | 11. б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 2x + 1}{x^{30} - 2^x + 1}$, | |
| 11. в) $\lim_{x \rightarrow +0} (-\ln x)^{2x}$, | 11. г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a a^x; a > 0; a \neq 1$, | |
| 11. д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\operatorname{arcsin} x - \ln(1+x)}$. | 12. $\cos^2(\sin x)$ до x^4 . | |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x + \operatorname{arcsin} x - 3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$. | 14. а) $y = \frac{1+x^2}{1+(x-2)^2}$, б) $y = \ln \left \frac{1-x}{1+x} \right + \frac{6}{x+1}$. | |

ВАРІАНТ 10

| | | |
|--|--|---|
| 1. $y = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ | 2. $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}, X = (0; +\infty)$ | |
| 3. $f(x) = \frac{1}{\cos(x - \arctg(x^{\ln x}))}$. | 4. $f(x) = (x^2 + x + 1)^{3/4}; a = 1.$ | |
| 5. $\begin{cases} x = a(\ln \operatorname{ctg}(t/2) - \cos t), \\ y = a \sin t. \end{cases}$ | 6. $x^2 - y^2 + 5x - 7y + 5 = 0; y > -3,5.$ | |
| 7. $4xy + \frac{x}{x+y} = 0; x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{4}.$ | 8. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$ | |
| 9. $y = \sin^3 x; n = 15; x = \pi/4.$ | 10. $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$ | |
| 11. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \arctg x} - \frac{1}{x^2} \right)$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\operatorname{tg} x}$ | 11. в) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(2m+1)x}{\cos(2n+1)x}; n, m \in \mathbb{Z}.$ |
| 11. г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 3^x)^{1/x}$, | д) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}$, | 12. $\sqrt[3]{\cos x^3}$ до x^{12} . |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - x \operatorname{ctg} x}{x \sin x}$. | 14. а) $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x} - e^{1/x}$, | |
| 14. б) $y = \frac{x}{2} + 2 \arctg x.$ | | |

ВАРІАНТ 11

| | |
|---|--|
| 1. $y = \frac{1 - e^{x/(x+1)}}{\sin \pi x}$. | 2. $f(x) = \sin x^2, X = [0; \sqrt{\pi}).$ |
| 3. $f(x) = \operatorname{ctg}^2 \left(\sin x \cdot \sqrt{\ln(1 + (e+x)^x)} \right).$ | 4. $f(x) = \sin(\sin x); a = 0.$ |
| 5. $\begin{cases} x = a(\sin(t/2) + 0,5 \sin t \cos^2 t), \\ y = -\pi/2 \cos^3 t. \end{cases}$ | 6. $(2a-x)y^2 = x^2; y < 0.$ |
| 7. $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0;$ $x_1 = 1; x_2 = 3.$ | 8. $y = x \ln \frac{3+x}{3-x}.$ |
| 9. $y = \arctg x; n = 5; x = 0.$ | 10. $\operatorname{tg} x < x + \frac{x^3}{3}; 0 < x < \frac{\pi}{2}.$ |
| 11. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} 3x - 6 \operatorname{tg} x}{3 \arctg x - \arctg 3x}$, | 11. б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^3 - x - 2x}}{\sqrt[5]{x^2 - 1}}$, |
| 11. в) $\lim_{x \rightarrow +0} (x^x - 1) \ln x,$ | 11. г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2},$ |
| 11. д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x^2}$. | 12. $\cos(\sin x)$ до x^4 . |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x) - x)x}{\operatorname{sh} 2x - 2 \operatorname{sh} x}$. | 14. а) $y = \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}$, б) $y = \sin x - \ln \sin x.$ |

ВАРІАНТ 12

| | |
|---|--|
| 1. $y = \frac{\sin(x-3)}{x^2-9}$. | 2. $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{2x}$, $X = (0; 2\pi]$ |
| 3. $f(x) = (e \cdot x)^{\arctg \sqrt{1+\ln(1+x^2)}}$. | 4. $f(x) = \sin^2 x \cdot \sin x^2$; $a = 0$. |
| 5. $\begin{cases} x = a/3(2\cos t + \cos 2t), \\ y = a/3(2\sin t - \sin 2t). \end{cases}$ | 6. $\arctg(y/x) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. |
| 7. $x = (t-1)^2(t-2)$; $y = (t-1)^2(t-3)$; $t_1 = 4$; $t_2 = 0$. | 8. $y = \frac{3-2x^2}{2x^2+3x-2}$. |
| 9. $y = \ln \frac{3+2x}{3-2x}$; $n = 10$; $x = 0$. | 10. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$; $x > 0$. |
| 11. а) $\lim_{x \rightarrow a} \arcsin \frac{x-a}{a} \cdot \operatorname{ctg}(x-a)$, | 11. б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$, |
| 11. в) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$, | 11. г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x/x)^{1/x^2}$, |
| 11. д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$. | 12. $\operatorname{tg} x$ до x^5 . |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos x - \cos x}{\sin x - \arcsin x}$. | 14. а) $y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$, б) $y = \sqrt[4]{x^4 - 4x^3}$. |

ВАРІАНТ 13

| | |
|--|---|
| 1. $y = \begin{cases} x \operatorname{arccotg} \frac{1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$ | 2. $f(x) = x^2$, $X = (0; 100]$ |
| 3. $f(x) = \arctg \left(1 + (\cos x)^{\sin x} \right)$ | 4. $f(x) = (x-2)^2(x-3)(x-4)$, $a = 4$ |
| 5. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$ | 6. $5xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$; $y < 2$; $x_0 = 11/12$ |
| 7. $\frac{x^2 2^x}{x^x}$; $x_1 = 2$; $x_2 = 1$ | 8. $y = \arcsin x$ |
| 9. $y = e^{-x^2}$; $n = 5$; $x = 0$. | 10. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$; $0 < x < \pi/2$ |
| 11. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{tg} 3x - 6\operatorname{tg} x}{3\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 3x}$ | 11. б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right)$ |
| 11. в) $\lim_{x \rightarrow a} \arcsin \frac{x-a}{a} \cdot \operatorname{ctg}(x-a)$ | 11. г) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{1/\ln(e^x-1)}$ |
| 11. д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos x + \arcsin x - 3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$ | 12. $\cos^2(\sin x)$ до x^4 |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos x + \arcsin x - 3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$ | 14. а) $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x} - e^{1/x}$ б) $y = \frac{x}{2} + 2\operatorname{arctg} x$ |

ЗАВДАННЯ №3
«ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»

1. Знайти область визначення функції $f(x, y)$ і зобразити її на координатній площині
2. Знайти повторну границю або довести, що вона не існує.
3. Знайти подвійну границю або довести, що вона не існує.
4. Знайти частинні похідні даних функцій за кожною із незалежних змінних ($x, y, z, u, v, t, \phi, \varphi$ – змінні):
5. Знайти другий диференціал складеної функції $f(x, y)$, де x і y – задані функції змінних u і v .
6. Дана функція $z = f(x, y)$ і дві точки $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$. Потрібно
 - а) знайти значення z функції в точці B ;
 - б) обчислити наближене значення \bar{z}_1 функції в точці B , виходячи із значення z_0 функції в точці A , заміняючи приріст функції при переході від точки A до точки B диференціалом;
 - в) написати рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $C(x_0, y_0, z_0)$ і перевірити, чи лежить точка $D(x_1, y_1, \bar{z}_1)$ в цій площині
7. Знайти повні диференціали указанного порядку.
8. Знайти частинні похідні першого і другого порядку за x і y від функції, що задана неявно.
9. Дослідити функцію на локальний екстремум.
10. Знайти умовний екстремум функції.
11. Знайти найбільше і найменше значення функції в замкненій множині.
12. Для даної функції $z = f(x, y)$ знайти 1) $\text{grad } z(A)$; 2) похідну в точці A за напрямом \bar{a} .
13. Розв'язати задачу.
14. Знайти розклад функції за формулою Тейлора в околі заданої точки A .

ВАРІАНТ 1

| | | |
|--|---|---|
| 1. $z = \frac{\sqrt{y^2 - 2x + 4}}{2y}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(x + y)^2}{x^2 + y^2}$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin x}{\sin y}$ |
| 4. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ | 5. $\begin{cases} x = uv, \\ y = v^3. \end{cases}$ | 6. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$; $A(2;1), B(1,96;1,04)$ |
| 7. $u = e^{ax+by}$, $d^3u - ?$ | 8. $x + y + z = c^z$ | 9. $z = x^3 + 8y^2 - 6xy + 5$ |
| 10. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ при $x^2 + y^2 = 1$ | 11. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в трикутнику, що обмежений прямими $x = 0$; $y = 0$; $2x + 3y = 12$ | 12. $z = 3x^2 + 2xy$; $A(1;2)$, $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$ |
| 13. Знайти кут між градієнтами функцій $u = \frac{yz^2}{x^2}$, $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, в точці $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ | | 14. $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, $A(-2;1)$ |

ВАРІАНТ 2

| | | |
|---|--|---|
| 1. $z = \ln(9 - y^2 - x^2) + \sqrt{\ln x}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow \infty} \sin xy$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \infty}} \frac{\sin(x)}{\sin y + 2}$ |
| 4. $z = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ | 5. $\begin{cases} x = \sin uv, \\ y = e^v. \end{cases}$ | 6. $z = 2xy + 2y^2 - 2x;$ $A(1;2), B(0,97;2,03)$ |
| 7. $u = \cos(x + y), d^2u - ?$ | 8. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ | 9. $z = 5 + x^3 - 6xy + 8y^3$ |
| 10. $f(x, y) = 2x^2 + 12xy + y^2$ при $x^2 + 4y^2 = 25$ | 11. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в трикутнику, що обмежений прямими $x = 1; y = 1; x + y = 1$ | 12. $z = 2x^2 + 3xy + y^2;$ $A(2;1), \bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$ |
| 13. Знайти кут між градієнтами функцій $u = x^2yz^3, v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$, в точці $M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ | 14. $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy,$ $A(1; -2)$ | |

ВАРІАНТ 3

| | | |
|---|--|--|
| 1. $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \sqrt{x-y}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{\sin y + 2}$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \infty}} \frac{\sin(xy)}{xy}$ |
| 4. $z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$ | 5. $\begin{cases} x = 3uv, \\ y = 4u^3. \end{cases}$ | 6. $z = 2x^2 + y^2 + 3y;$ $A(2;2), B(2,03;2,04)$ |
| 7. $u = \sin(x^2 + y^2), d^2u - ?$ | 8. $x = z \ln \frac{z}{y}$ | 9. $z = 5x^2 + y^2 + 2x^3 + xy^2,$ |
| 10. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ при $x^2/16 + y^2/9 + z^2/4 = 1$ | 11. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в трикутнику $x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$ | 12. $z = \ln(x^2 + 3y^2);$ $A(1;1), \bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$ |
| 13. Знайти кут між градієнтами функцій $u = \frac{z^3}{xy^2}, v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, в точці $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ | 14. $f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy +$ $+ y^2 + 10x + 5y, A(2; -1)$ | |

ВАРІАНТ 4

| | | |
|---|---|--|
| 1. $z = \frac{e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}}{\sqrt{x+y}}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{ x }\right)^{ y }$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(1 + \frac{1}{ x }\right)^{ y }$ |
| 4. $z = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{y}\right)$ | 5. $\begin{cases} x = v^3, \\ y = u - v. \end{cases}$ | 6. $z = 2x^2 + 3xy + 3y^2;$ $A(1;2), B(0,96;1,95)$ |
| 7. $u = x^2 + y^2 - xy - 2x + y + 7,$ $d^2u - ?$ | 8. $x \sin y + y \sin x + z \sin x = a$ | 9. $z = x^3 + y^2 - 6xy -$ $- 39x + 18y + 20$ |
| 10. $f(x, y) = 5 - 3x - 4y$ при $x^2 + y^2 = 25$ | 11. $z = x^2 + y^2 + 2a^2$ в трикутнику $2x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ | 12. $z = x^2 + 3xy^2;$ $A(2;1), \bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$ |
| 13. Знайти похідну функції $z = x^2 - xy + y^2$ в точці $M(1,1)$ у напрямку вектора $\bar{e} = 6\bar{i} + 8\bar{j}$. | 14. $f(x, y, z) = (x + y + z)^2,$ $A(1;1;-2)$ | |

ВАРІАНТ 5

| | | |
|---|---|---|
| 1. $z = \ln y + \ln \sin x$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sin(x(y-1))}{e^y - e}$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\arcsin x^2}{y}$ |
| 4. $z = \operatorname{arctg} \frac{v+w}{v-w}$ | 5. $\begin{cases} x = u/v, \\ y = 3u - 2v. \end{cases}$ | 6. $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1;$ $A(2;4), B(1,98;3,91)$ |
| 7. $u = x^3 + y^3 - 3xy(x-y),$ $d^3u - ?$ | 8. $xy + xz + yz = 1$ | 9. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$ |
| 10. $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ при $x^2 + y^2 = 1$ | 11. $z = x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x$ в трикутнику, що обмежений прямими $x = 0; y = 0; x + y = 3$ | 12. $z = x^2 + y^2 + 2xy^2;$ $A(3;1), \bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$ |
| 13. Знайти похідну функції $u = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ в точці $M(1,1,1)$ у напрямку вектора \overline{MN} , де $N(3,2,3)$. | 14. $f(x, y, z) = x^2 + 3z^2 - 2yz - 3,$ $A(0;1;2)$ | |

ВАРІАНТ 6

| | | |
|---|---|--|
| 1. $z = \arcsin(x - y)$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{y}$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \infty}} x^2 y$ |
| 4. $z = xy \ln(x + y)$ | 5. $\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v. \end{cases}$ | 6. $z = x^2 + 2xy + y^2;$ $A(-3;4), B(-2,94;4,05)$ |
| 7. $u = \ln(x^x y^y z^z), d^2u - ?$ | 8. $xe^y - ye^x + ze^x = a$ | 9. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$ |
| 10. $f(x, y) = x/3 + y/5$ при $x^2 + y^2 = 1$ | 11. $z = xy(2-x)(2-y)$ $D: 0 \leq y \leq 2x \leq 4$ | 12. $z = xe^y;$ $A(2;0), \bar{a} = 5\bar{i} + 12\bar{j}$ |
| 13. Знайти похідну функції $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точці $M(1,2,1)$ у напрямку вектора $\bar{r} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}$. | 14. $f(x, y, z) = xyz,$ $A(1;2;3)$ | |

ВАРІАНТ 7

| | | |
|---|--|---|
| 1. $z = \sqrt{y^2 - x^2}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{xy+1} - 1}$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{y}$ |
| 4. $u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$ | 5. $\begin{cases} x = u/v, \\ y = v/u. \end{cases}$ | 6. $z = 9xy + 2y^2 + y;$ $A(3;1), B(2,94;1,07)$ |
| 7. $u = \ln(x + y), d^3u - ?$ | 8. $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$ | 9. $z = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$ |
| 10. $f(x, y, z) = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ | 11. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в трикутнику $x = 0; y = 0; x + y = 3$ | 12. $z = \operatorname{arctg}(x^2 y^2);$ $A(1;-1), \bar{a} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$ |
| 13. Знайти кут між градієнтами функцій $u(x, y, z)$ і $v(x, y, z)$ в точці M | 14. $f(x, y) = \sin x \cos y,$ $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ до членів другого порядку включно | |

ВАРІАНТ 8

| | | |
|---|---|--|
| 1. $z = \ln x + \ln \cos y$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} y \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ |
| 4. $u = x^{y^z}$ | 5. $\begin{cases} x = uv, \\ y = \sqrt{v}. \end{cases}$ | 6. $z = x^2 + y^2 - 4x + 2y;$ $A(3;2), B(2,99;2,05)$ |
| 7. $u = \cos x \cdot \operatorname{ch} y, d^3u - ?$ | 8. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ | 9. $z = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y$ |
| 10. $f(x, y) = x/4 + y/5$ при $x^2 + y^2 = 16$ | 11. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ в прямокутнику $0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$ | 12. $z = \operatorname{arctg}(x/y)$ $A(2; -2), \bar{a} = -\bar{i} - 2\bar{j}$ |
| 13. Знайти величину і напрямок градієнта функції $u = xyz$ у точці $M(z, 1, 1)$ | 14. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, A(1; 1)$, до членів другого порядку включно | |

ВАРІАНТ 9

| | | |
|---|--|---|
| 1. $z = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 + y^2} - 6}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin y}$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1+xy)}{\sin xy}$ |
| 4. $z = (1 + \log_y x)^3$ | 5. $\begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 + v^2. \end{cases}$ | 6. $z = 2xy - 2x + y;$ $A(2; 1), B(1,93; 1,05)$ |
| 7. $u = xyz, d^3u - ?$ | 8. $z^3 - 3xyz = a^3$ | 9. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$ |
| 10. $f(x, y) = 1 - 4x - 8y$ при $x^2 - 8y^2 = 8$ | 11. $z = x^2 - xy + y^2 + 4x$ в трикутнику $x = 0; y = 0; x + y = -3$ | 12. $z = \ln(5x^2 + 4y^2);$ $A(1; 1), \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$ |
| 13. Знайти похідну функції $u = x/2 + y/3 + z/6$ у напрямку $\bar{e} = 6\bar{i} + 3\bar{j} - 6\bar{k}$ у точці $M(x_o, y_o, z_o)$ | 14. $f(x, y) = \sqrt{x+y}, A(2; 2)$ до членів другого порядку включно | |

ВАРІАНТ 10

| | | |
|---|---|--|
| 1. $z = \ln(x^2 - 2y + 4) + \sqrt{x}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin xy}{x + y}$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x^y$ |
| 4. $z = \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x^2 + y^2)$ | 5. $\begin{cases} x = u + v, \\ y = e^u. \end{cases}$ | 6. $z = x^2 + y^2 - 2x + 2y;$ $A(1; 2), B(1,08; 1,94)$ |
| 7. $u = e^{ax+by+cz}, d^3u - ?$ | 8. $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$ | 9. $z = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y$ |
| 10. $f(x, y, z) = x - y + 2z$ при $x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$ | 11. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в трикутнику, що обмежений прямими $x = 3; y = 0; y = x + 1$ | 12. $z = \arcsin(x/y);$ $A(3; 5), \bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$ |
| 13. Знайти кут між градієнтами функцій $u = \frac{x^2}{yz^2}, v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, в точці $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ | | 14. $f(x, y) = x\sqrt{1+y}, A(0; 0)$ до членів другого порядку включно |

ВАРІАНТ 11

| | | |
|--|--|--|
| 1. $z = \sqrt{9 - y^2 - x^2} + \sqrt{xy}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow \infty} x^2 y$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1} - 1}$ |
| 4. $z = \ln \left[yx^2 + xy^2 + \sqrt{1 + (yx^2 + xy^2)^2} \right]$ | 5. $\begin{cases} x = u \sin v, \\ y = uv \end{cases}$ | 6. $z = x^2 + 3xy + y^2;$ $A(1;2), B(1,03;1,97)$ |
| 7. $u = x^2 y^3, d^5 u - ?$ | 8. $xyz = x + y + z$ | 9. $z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ |
| 10. $f(x, y) = (x - y - 4) / \sqrt{2}$ при $x^2 + y^2 = 1$ | 11. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ в трикутнику, що обмежений прямими $x = -1; y = -1; x + y = 1$ | 12. $z = 2x^2 + xy;$ $A(-1;2), \bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ |
| 13. Знайти кут між градієнтами функцій $u = \frac{yz^2}{x}, v = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z}$, в точці $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ | 14. $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$, $A(2;1)$, до членів другого порядку включно. | |

ВАРІАНТ 12

| | | |
|---|---|--|
| 1. $z = \arccos(x + 2y)$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{y \rightarrow -1} \frac{x + y}{\ln x}$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\ln x}$ |
| 4. $z = \sqrt{1 - \frac{(x + y)^2}{x^2 y^2}} + \arcsin \frac{x + y}{xy}$ | 5. $\begin{cases} x = \sin(u + v), \\ y = \cos(u - v). \end{cases}$ | 6. $z = xy + y^2 - 2x;$ $A(2;1), B(2,03;0,96)$ |
| 7. $u = x^2 yz, d^4 u - ?$ | 8. $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$ | 9. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ |
| 10. $f(x, y) = 1/x + 1/y$ при $x + y = 2$ | 11. $z = 1 + xy^2$ в прямокутнику $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2$ | 12. $z = \operatorname{arctg}(y/x);$ $A(-1;1), \bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$ |
| 13. Знайти величину і напрямок градієнта функції $u = \operatorname{tg} x - x + 3 \sin y - \sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z$ у точці $M\left(\pi/4, \pi/3, \pi/2\right)$ | 14. $f(x, y) = \ln(1 + x + y), A(0;0)$ до членів другого порядку включно | |

ВАРІАНТ 13

| | | |
|--|---|---|
| 1. $z = \frac{\ln(2x)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y}{\cos x - 1}$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x)^{\frac{1}{y}}$ |
|--|---|---|

| | | |
|---|--|--|
| 4. $z = \operatorname{arctg} \frac{v+w}{vw}$ | 5. $\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u^2 - v^2. \end{cases}$ | 6. $z = x^2 y + y^2 - 2x;$ $A(2;1), B(2,03;0,96)$ |
| 7. $u = \ln(x^x y^y z^z), d^2 u - ?$ | 8. $xyz = x^2 + y^2 + z^2$ | 9. $z = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y$ |
| 10. $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 8.$ | 11. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ в трикутнику, що обмежений прямими $x = -1; y = -1; x + y = 1$ | 12. $z = \operatorname{arctg}(y/x);$ $A(-1;1), \bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$ |
| 13. Знайти кут між градієнтами функцій $u = \frac{z}{x^3 y^2}, v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{z\sqrt{6}},$ в точці $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ | 14. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1+y}, A(0;0)$ до членів другого порядку включно | |

ЗАВДАННЯ № 4
«ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ»

1. – 9. Обчислити невизначені інтеграли
10. Обчислити визначенні інтеграли.
11. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій.
12. Обчислити довжину дуги кривої.
13. Дослідити функцію на інтегровність на відрізку $[0,1]$.
- 14, 15. Обчислити невластний інтеграл.
- 16, 17. Дослідити невластний інтеграл на збіжність.

ВАРІАНТ 1

| | | |
|---|---|--|
| 1. $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} dx}{\sin^2 x}$ | 2. $\int e^{-x^4} x^3 dx$ | 3. $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$ |
| 4. $\int \frac{(x^2 - 5) dx}{(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 9)}$ | 5. $\int e^{4x} \cos 4x dx$ | 6. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}$ |
| 7. $\int \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx$ | 8. $\int x^{-2/3} (1 + x^{1/3})^{-3} dx$ | 9. $\int \frac{3 \operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x} dx$ |
| 10. а) $\int_{\arcsin \frac{1}{\sqrt{37}}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6 \operatorname{tg} x dx}{3 \sin 2x + 5 \cos^2 x}$ | 10. б) $\int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ | 10. в) $\int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx$ |
| 10. г) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ | 11. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}, y + x^2 = 0,$ $x = 1.$ | 12. а) $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t,$ $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi,$ $c^2 = a^2 - b^2$ (еволюта еліпса) |

| | | |
|---|--|---|
| 12. б) $\rho = \frac{a}{\cos^4 \frac{\varphi}{4}}$ (ДОВЖИНА ПЕТЛІ) | 13. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ | 14. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{x+1}}$ |
| 15. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}} dx$ | 16. $\int_0^{\pi} \frac{\ln x dx}{\sqrt{\sin x}}$ | 17. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (\ln x)^n}$ |

ВАРІАНТ 2

| | | |
|--|--|--|
| 1. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{1+e^{4x}}}$ | 2. $\int 2^{x^2} x dx$ | 3. $\int x^2 \operatorname{arctg} 4x dx$ |
| 4. $\int \frac{(x+1)dx}{x(x^4+6x^2+8)}$ | 5. $\int e^{5x} \sin 5x dx$ | 6. $\int \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx$ |
| 7. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ | 8. $\int x^{1/2} (1+x^{1/3})^{-2} dx$ | 9. $\int \frac{3}{2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x} dx$ |
| 10. а) $\int_{\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}}^0 \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 50}{2 \operatorname{tg} x + 7} dx$ | 10. б) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$ | 10. в) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2} dx$ |
| 10. г) $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$ | 11. $y = \frac{10}{x^2+4}, y = \frac{x^2+5x+4}{x^2+4}$. | 12. а) $x = \int_0^t \cos \varphi^2 d\varphi,$ $y = \int_0^t \sin \varphi^2 d\varphi,$ $0 \leq t \leq t_0$ (кЛОТОІДА) |
| 12. б) $\rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ | 13. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } \exists n \in N : x = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{якщо } \forall n \in N : x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$ | 14. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+x}}$ |
| 15. $\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^3-1}$ | 16. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{\arcsin x}$ | 17. $\int_0^{+\infty} \cos\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ |

ВАРІАНТ 3

| | | |
|--|--|--|
| 1. $\int \frac{\ln(\arccos x) dx}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}$ | 2. $\int e^{x^2-2} x dx$ | 3. $\int x^3 \sin 5x dx$ |
| 4. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)^2}$ | 5. $\int x^2 e^x \sin x dx$ | 6. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}$ |
| 7. $\int \frac{(x^3 + 2x^2 + x - 1) dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$ | 8. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(x-4)}}$ | 9. $\int \frac{7}{2 \operatorname{sh} x - 4 \operatorname{ch} x} dx$ |

| | | |
|---|--|--|
| 10. а) $\int_{\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}}^{\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}} \frac{(2 \operatorname{tg} x + 5) dx}{(5 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}$ | 10. б) $\int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ | 10. в) $\int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^4 x \cos^8 x dx$ |
| 10. г) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ | 11. $y = 4^{-x}$, $y = -\log_4 x$, $y = 0, x = 0$. | 12. а) $x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$, $y = a \sin t, 0 < t_0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (трактриса). |
| 12. б) $\rho = a(1 - \sin \varphi)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}$ | 13. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ | 14. $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-2x+\sqrt{x}}}$ |
| 15. $\int_1^{+\infty} \frac{x^5 dx}{(x^3+1)^4}$ | 16. $\int_0^1 \frac{\ln x dx}{\sqrt{x(1-x)^3}}$ | 17. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x} \right) dx$ |

ВАРІАНТ 4

| | | |
|---|--|--|
| 1. $\int \frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^3} dx$ | 2. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$ | 3. $\int \operatorname{arctg}(7x+2) dx$ |
| 4. $\int \frac{(3x^3+2x^2+1) dx}{x(x+1)^2(x^2+4)}$ | 5. $\int e^{3x} \sin x dx$ | 6. $\int \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}} dx$ |
| 7. $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx$ | 8. $\int x^{1/2} (1+x^{1/3})^{-2} dx$ | 9. $\int \frac{\operatorname{ch} x + 2}{2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x} dx$ |
| 10. а) $\int_{-\operatorname{arctg} \frac{1}{3}}^0 \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1} dx$ | 10. б) $\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1} dx$ | 10. в) $\int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$ |
| 10. г) $\int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$ | 11. $y = 2x^2 e^x, y = -x^3 e^x$. | 12. а) $x = \sin^4 t$, $y = \cos^2 t, 0 \leq t \leq \pi/2$ |
| 12. б) $\rho = \frac{a}{\sin^3(\varphi/3)}$ (довжина петлі) | 13. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$ | 14. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{ x^2-1 }}$ |
| 15. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$ | 16. $\int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+x} dx$ | 17. $\int_0^{+\infty} x^{-2} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{1+x^2} dx$ |

ВАРІАНТ 5

| | | |
|---|--|--|
| 1. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | 2. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$ | 3. $\int x \arcsin x dx$ |
| 4. $\int \frac{(x^4-1)dx}{(x^2+9)(x^3+x^2)}$ | 5. $\int e^{3x} \cos x dx$ | 6. $\int x^2 \sqrt[3]{(x+1)^2} dx$ |
| 7. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$ | 8. $\int x^{1/4} (1+x^{1/3})^{-2} dx$ | 9. $\int \frac{\operatorname{sh} x + 2}{2 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x} dx$ |
| 10. а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx$ | 10. б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx$ | 10. в) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^4\left(\frac{x}{2}\right) \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) dx$ |
| 10. г) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$ | 11. $x = y^2(y-1), x=0.$ | 12. а) $x = t - \frac{\operatorname{sh} 2t}{2},$ $y = 2 \operatorname{ch} t, 0 \leq t \leq t_0$ |
| 12. б) $\rho = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2},$ $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ | 13. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } \exists n \in N : x = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{якщо } \forall n \in N : x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$ | 14. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+x}}$ |
| 15. $\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^3-1}$ | 16. $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$ | 17. $\int_0^{+\infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}$ |

ВАРІАНТ 6

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\int \frac{\ln(\arcsin x)}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} dx$ | 2. $\int e^{3x^2-5} x dx$ | 3. $\int x^2 e^{2x} dx$ |
| 4. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^4 + x^3 + 2x^2} dx$ | 5. $\int e^x \sin 2x dx$ | 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+2)^5(x-1)^3}}$ |
| 7. $\int \frac{(x^3 - 2x^2 + 1)dx}{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}$ | 8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}$ | 9. $\int \frac{\operatorname{sh} x - 2}{2 \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} dx$ |
| 10. а) $\int_{-\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}}^0 \frac{(11 - 3 \operatorname{tg} x) dx}{\operatorname{tg} x + 3}$ | 10. б) $\int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx$ | 10. в) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1 + x^2} dx$ |
| 10. г) $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$ | 11. $y = 3^x, y = 9,$ $y = \frac{9}{4}(3^{-x} + 1) + \frac{8}{3}.$ | 12. а) $x = a(\operatorname{sh} t - t),$ $y = a(\operatorname{ch} t - 1),$ $0 \leq y \leq 7a, x \geq 0$ |

| | | |
|--|--|--|
| <p>12. б) $\rho = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$,</p> <p>$\varphi \leq \frac{\pi}{2}, p > 0$</p> | <p>13. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ для } x = 0 \vee \\ x = \frac{2}{\pi(2n+1)}, \\ \text{tg } \frac{1}{x}, \text{ у іншому} \\ \text{випадку} \end{cases}$</p> <p>$n \in \mathbb{N}$</p> | <p>14. $\int_0^{\pi} \text{tg } x \, dx$</p> |
| <p>15. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$</p> | <p>16. $\int_0^1 x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx, \alpha > 0$</p> | <p>17. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^2 \sin^2 x}$</p> |

ВАРІАНТ 7

| | | |
|--|---|--|
| <p>1. $\int e^{2x^2+2x-1} (2x+1) dx$</p> | <p>2. $\int \frac{3x^2 dx}{x^6 - 25}$</p> | <p>3. $\int 2^{-x} x dx$</p> |
| <p>4. $\int \frac{(3x^2 + 4x - 1) dx}{(x^2 + 4x + 29)^2}$</p> | <p>5. $\int e^x \cos 2x dx$</p> | <p>6. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}$</p> |
| <p>7. $\int \frac{(x^2 + 4x) dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$</p> | <p>8. $\int \sqrt[3]{x + 2x^3} dx$</p> | <p>9. $\int \frac{\text{sh } x}{2 \text{sh } x + \text{ch } x} dx$</p> |
| <p>10. а) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$</p> | <p>10. б) $\int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^4 x dx$</p> | <p>10. в) $\int_0^{\pi/4} \frac{(7 + 3 \text{tg } x) dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2}$</p> |
| <p>10. г) $\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}$</p> | <p>11. $x^2 + y^2 = 2,$ $y^2 = 2x - 1, x \geq \frac{1}{2}.$</p> | <p>12. а) $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t,$ $y = (t^2 - 2) \cos t - 2t \sin t,$ $0 \leq t \leq \pi$</p> |
| <p>12. б) $\rho = a\varphi^3, 0 \leq \varphi \leq 4$</p> | <p>13. $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$ (ціла частина)</p> | <p>14. $\int_0^{\pi} \frac{ \cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$</p> |
| <p>15. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}$</p> | <p>16. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$</p> | <p>17. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^5) dx}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$</p> |

ВАРІАНТ 8

| | | |
|--|---|---|
| <p>1. $\int e^{2x^2 + \ln x} dx$</p> | <p>2. $\int \frac{\sin 2x}{3 + \sin^2 x} dx$</p> | <p>3. $\int \text{arctg } 2x dx$</p> |
| <p>4. $\int \frac{(x+2) dx}{(x-1)^2 x(x^2+4)}$</p> | <p>5. $\int e^{2x} \cos 3x dx$</p> | <p>6. $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx$</p> |
| <p>7. $\int \frac{(x^3 - x - 1) dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$</p> | <p>8. $\int \sqrt[3]{x - x^3} dx$</p> | <p>9. $\int \frac{\text{th } x}{2 \text{sh } x + \text{ch } x} dx$</p> |

| | | |
|--|--|--|
| 10. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 11 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx$ | 10. б) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 2x \cos^6 2x dx$ | 10. в) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx$ |
| 10. г) $\int_0^1 (x+1) \ln^2(x+1) dx$ | 11. $y = x^2$, $y = x^2 + x - 1$, $y = \frac{\sqrt{5x}}{2}$, $y \leq x^2$. | 12. а) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq t_0 \leq \frac{\pi}{2}$ |
| 12. б) $\rho = a\varphi^4$, $0 \leq \varphi \leq 3$. | 13. $f(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\}$ (дробова частина) | 14. $\int_0^e \frac{dx}{e^x - 1}$ |
| 15. $\int_0^{+\infty} \frac{(x^2 + 12) dx}{(x^2 + 1)^2}$ | 16. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}} dx$ | 17. $\int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{4}{x^2}} \right) dx$ |

ВАРІАНТ 9

| | | |
|--|--|---|
| 1. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} + \operatorname{ctg} x}{\cos^2 x} dx$ | 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ | 3. $\int x^2 \ln x dx$ |
| 4. $\int \frac{(x^4 - 1) dx}{(x^2 + 9)(x^3 + x^2)}$ | 6. $\int e^{2x} \sin 3x dx$ | 7. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{2x + 1}}$ |
| 8. $\int x^2 \sqrt{x^2 + 4} dx$ | 9. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2 - x^3}}$ | 11. $\int \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2 \operatorname{sh} x - 5 \operatorname{ch} x} dx$ |
| 10. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx$ | 10. б) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx$ | 10. в) $\int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8 - x^2)^3}}$ |
| 10. г) $\int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$ | 11. $y = 2 - 4x^2 + 4x^3 - x^4$, $y = 0$, $x = x_1$, $x = x_2$, де x_1 і x_2 – точки максимуму функції. | 12. а) $x = 2t^3(1 - t^2)$, $y = t^4 \cdot \sqrt{15}$ (довжина петлі) |
| 12. б) $\rho = a \cos^5 \frac{\varphi}{5}$ | 13. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ | 14. $\int_{-1}^0 e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^3}$ |
| 15. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1-x) dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$ | 16. $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}$ | 17. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ |

ВАРІАНТ 10

| | | |
|---|---|--|
| 1. $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x dx$ | 2. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ | 3. $\int (x+2) \cos 3x dx$ |
| 4. $\int \frac{20 dx}{(x+4)(x^2 + 4x + 20)}$ | 5. $\int e^{2x+1} \sin x dx$ | 6. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$ |
| 7. $\int \frac{(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$ | 8. $\int x^{-1/2} (1 + x^{1/4})^{-10} dx$ | 9. $\int \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2 \operatorname{sh} x - 5 \operatorname{ch} x} dx$ |

| | | |
|---|---|---|
| 10. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx$ | 10. б) $\int \frac{\sqrt[8]{x + 1/x}}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} dx$ | 10. в) $\int_0^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$ |
| 10. г) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}}$ | 11. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$. | 12. а) $x = \sqrt{3}t^2 / 2$, $y = t \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)$ (ДОВЖИНА ПЕТЛІ) |
| 12. б) Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$, яка знаходиться всередині кола $\rho = 1$ | 13. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ | 14. $\int_0^1 \frac{e^x}{x^3} dx$ |
| 15. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)^2}$ | 16. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$ | 17. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{(x - \cos(\pi/x))^2} dx$ |

ВАРІАНТ 11

| | | |
|--|---|--|
| 1. $\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 18}$ | 2. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$ | 3. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln(x+1) dx$ |
| 4. $\int \frac{(x+5) dx}{(x+2)^2 (x^4 - 1)}$ | 5. $\int e^{2x+1} \cos x dx$ | 6. $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ |
| 7. $\int \frac{(1-x+x^2) dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$ | 8. $\int \frac{dx}{x \sqrt[6]{x^6 + 1}}$ | 9. $\int \frac{\operatorname{sh} x - 1}{2 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x} dx$ |
| 10. а) $\int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + 4} dx$ | 10. б) $\int_0^{\frac{\sqrt{8}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$ | 10. в) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^2 \sin^2 x \cos^2 x dx$ |
| 10. г) $\int_0^{1/3} \frac{12x - \operatorname{arctg} 3x}{1+9x^2} dx$ | 11. $y = \sin 2x$, $y = 2x$, $0 \leq x \leq \pi$. | 12. а) $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$ |
| 12. б) Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho = e^{a\varphi}$, яка знаходиться всередині кола $\rho = 1$, ($a > 0$) | 13. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \left(\frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{x} \right), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ | 14. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}$ |
| 15. $\int_0^1 x \ln x dx$ | 16. $\int_0^{\pi} \frac{\ln(\sin x)}{x \sqrt{\sin x}} dx$ | 17. $\int_1^{+\infty} \frac{1 + \arcsin(1/x)}{1 + x \sqrt{x}} dx$ |

ВАРІАНТ 12

| | | |
|--|-------------------------------------|---|
| 1. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4 - e^{2x}}}$ | 2. $\int \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} dx$ | 3. $\int \arccos(3x - 2) dx$ |
| 4. $\int \frac{(2x^3 + 3) dx}{(4x^2 - 1)(x^2 + 6x)}$ | 5. $\int e^{4x} \sin 4x dx$ | 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-7)^7 (x-5)^5}}$ |

| | | |
|---|---|--|
| 7. $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 2} dx$ | 8. $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}$ | 9. $\int \frac{3 \operatorname{sh} x}{2 \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} dx$ |
| 10. а) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{4 + 3 \cos 2x}$ | 10. б) $\int_1^4 \frac{1/\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx$ | 10. в) $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx$ |
| 10. г) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ | 11. $y = \log_a x $, $y = 0$, $x = 1/a$, $x = a$, $a > 1$. | 12. а) $x = a(\cos \phi + \phi \sin \phi)$, $y = a(\sin \phi - \phi \cos \phi)$, $0 \leq \phi \leq \phi_0$ (евольвента круга) |
| 12. б) Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $\rho = 5\phi$, яка знаходиться всередині кола $\rho = 10\pi$ | 13. $f(x) = \begin{cases} \ln \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ | 14. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$ |
| 15. $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x dx}{(x^2 + 1)^2}$ | 16. $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sh} x dx}{e^{x^2} - \cos x}$ | 17. $\int_2^{+\infty} \left(\cos \frac{1}{x} - 1 \right) dx$ |

ВАРІАНТ 13

| | | |
|--|---|--|
| 1. $\int e^x \sin(e^x) dx$ | 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ | 3. $\int (x^2 - 5) \cos 4x dx$ |
| 4. $\int \frac{x-1}{x^2 + 6x + 8} dx$ | 5. $\int e^x \cos 5x dx$ | 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^6 (x+2)^4}}$ |
| 7. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$ | 8. $\int x^{-2/3} (1 + x^{1/3})^{-3} dx$ | 9. $\int \frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{2 \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x} dx$ |
| 10. а) $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx$ | 10. б) $\int_0^{\sin^{-1}} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | 10. в) $\int_{\pi/4}^{\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{4 \cos^2 x - \sin 2x + 1} dx$ |
| 10. г) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ | 11. $y = 3^x$, $y = 9$, $y = \frac{9}{4}(3^{-x} + 1) + \frac{8}{3}$. | 12. а) $x = t^2$, $y = t \left(\frac{1}{3} - t^2 \right)$ (довжина петлі) |
| 12. б) $\rho = a \sin^3 \frac{\phi}{3}$ | 13. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}, & x \neq 0 \text{ i } x \neq \frac{1}{\pi n}, \\ 0, & \text{у іншому випадку,} \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$ | 14. $\int_{-1}^1 \frac{\ln(2 + \sqrt[3]{x}) dx}{\sqrt[3]{x}}$ |
| 15. $\int_1^{+\infty} \frac{2-x^2}{x\sqrt[3]{x^2-1}} dx$ | 16. $\int_0^1 \ln 1 - 4 \sin^2 x dx$ | 17. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} dx$ |

ЗАВДАННЯ № 5
«ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ»

1. Знайти суму числового ряду.
- 2 – 6. Дослідити числові ряди на збіжність.
- 7 – 10. Дослідити числові ряди на абсолютну та умовну збіжність.
11. Визначити область збіжності (абсолютної і умовної) функціонального ряду.
12. Дослідити функціональні послідовності на рівномірну збіжність на вказаних множинах X_1, X_2 .
13. Дослідити функціональний ряд на рівномірну збіжність на заданій множині X .
14. Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями x . Вказати область розвинення.
15. Побудувати розклад функції в ряд Маклорена, використавши ряд Маклорена для її похідної. Знайти радіус збіжності ряду.
- 16 – 17. Знайти радіус і область збіжності степеневого ряду.
18. Побудувати розклад функції в ряд Фур'є функцію $f(x)$, указати проміжки, в яких сума ряду дорівнює функції $f(x)$, і знайти суму ряду у вказаній точці x_0 .
19. Побудувати розклад функції в ряд Фур'є за синусами і за косинусами на вказаних проміжках.

ВАРІАНТ 1

| | | |
|--|--|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5};$ | 2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot (n-1)!};$ | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n \cdot (n+1)^3;$ |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \cdot \ln^2(2n+1)};$ | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2 \cdot \sin^2 n};$ | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \operatorname{arctg}^{2n} \left(\frac{\pi}{4n}\right);$ |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{\sqrt{n^3}};$ | 8. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln(2n)};$ | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2};$ |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}.$ | 11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^n$ | 12. $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4},$ $X_1 = [0,1];$ $X_2 = [1;+\infty)$ |
| 13. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5n-6},$ $X = [0,1]$ | 14. $f(x) = \frac{9}{20-x-x^2}$ | 15. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{3-4x^2}{6+2x^2}$ |
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot x^n$ | 18. $f(x) = \operatorname{ch} x,$ $-\pi \leq x \leq \pi, x_0 = \pi$ |

$$19. f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases} \text{ на } (0, \pi)$$

ВАРІАНТ 2

| | | |
|--|--|--|
| 1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5};$ | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$ | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2};$ |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(2n+1)};$ | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{3+(-1)^n}{4}}{2^n + n};$ | 6. $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \left(\frac{n-2}{2n+1} \right)^{3n};$ |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{(n+1) \cdot 3^n};$ | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n+1) \cdot 2^{2n}};$ | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln(n+1)};$ |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n}.$ | 11. $\sum_{n=3}^{\infty} n^2 \left(\frac{2x-3}{2x} \right)^n$ | 12. $f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{n}{x},$ $X_1 = (0, a);$ $X_2 = (0; +\infty), a > 0$ |
| 13. $\sum_{n=3}^{\infty} x^2 e^{-nx},$ $X = [0, +\infty)$ | 14. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$ | 15. $f(x) = \ln(x^3 + \sqrt{x^6 + 9})$ |
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (n^3 + 2)(x+1)^{2n}$ | 18. $f(x) = \begin{cases} a, & 0 < x < \pi, \\ 0, & -\pi \leq x < 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$ |
| | 19. $f(x) = x \text{ на } (0, \pi)$ | |

ВАРІАНТ 3

| | | |
|---|--|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8};$ | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n^3 + 1)}{(n+1)!};$ | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n;$ |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot \ln^2(2n+3)};$ | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}};$ | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n};$ |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n^2 + n};$ | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \cos \frac{\pi}{6n};$ | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \frac{\pi}{3\sqrt{n}} \cdot \sqrt[3]{3n + \ln n}};$ |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}.$ | 11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$ | 12. $f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3 + x^3},$ $X_1 = [0, 1]; X_2 = [0; +\infty)$ |
| 13. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{8n-12},$ $X = [0, 1]$ | 14. $f(x) = \ln(1 - x - 6x^2)$ | 15. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{x+6}$ |

| | | |
|--|--|--|
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n x^n}{n \cdot 2^n}$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) \cdot x^n, a > 0$ | 18. $f(x) = \operatorname{sh} x,$ $-\pi \leq x \leq \pi, x_0 = \pi$ |
| | 19. $f(x) = x + 2$ на $(0, \pi)$ | |

ВАРІАНТ 4

| | | |
|---|--|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8};$ | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n};$ | 3. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5) \cdot \ln^2(4n-7)};$ |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot 2 \cdot n!}{(2n)!};$ | 5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}};$ | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n+2}}{5^n};$ |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \sqrt[4]{2n+3}};$ | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!};$ | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n};$ |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}.$ | 11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 4} \cdot \left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^n$ | 12. $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n},$ $X_1 = (0, 2);$ $X_2 = [0; +\infty)$ |
| 13. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5n-6}, X = [0, 1]$ | 14. $f(x) = 2x \cos^2 \frac{x}{2} - x$ | 15. $f(x) = x \cdot \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 9})$ |
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n}$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}} (3+x)^n$ | 18. $f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi < x < 0, \\ 3x, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$ $x_0 = \pi$ |
| | 19. $f(x) = \cos 2x$ на $(0, \pi)$ | |

ВАРІАНТ 5

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3};$ | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n};$ | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2};$ |
| 4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(3n+1)};$ | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 \cdot \left(2 + \sin \frac{\pi n}{2}\right)};$ | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n};$ |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1) \cdot 2^{2n}};$ | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{3n+2};$ | 9. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln(n+1)};$ |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin 3^n}{3^n}.$ | 11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^{1/5}}$ | 12. $f_n(x) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{n}\right),$ $X_1 = (0; +\infty);$ $X_2 = (a; +\infty), a > 0$ |
| 13. $\sum_{n=3}^{\infty} x^2 e^{-nx}, X = [0, +\infty)$ | 14. $f(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{x} - 2$ | 15. $f(x) = (x^2 - 1) \arcsin(2x^2)$ |

| | | |
|--|--|--|
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} (x-1)^n$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}$ | 18. $f(x) = \pi + x,$ $-\pi \leq x \leq \pi,$ $x_0 = -\pi$ |
| 19. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$ на $(0, \pi)$ | | |

ВАРІАНТ 6

| | | |
|--|--|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 28n - 45};$ | 2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot (n-1)!};$ | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n \cdot (n+1)^3;$ |
| 4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3) \cdot \ln^2 n};$ | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \ln n}{n^2-3};$ | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n} \cdot \frac{1}{2^n};$ |
| 7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}};$ | 8. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot \ln n};$ | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n^2}{n^4 - n^2 + 1};$ |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}.$ | 11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} (x^2 - 4x + 6)^n$ | 12. $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+2n+x},$ $X_1 = [0, 2];$ $X_2 = [1; +\infty)$ |
| 13. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{8n-12}, X = [0, 1]$ | 14. $f(x) = \ln(1-x-6x^2)$ | 15. $f(x) = x^2 \arccos(2x)$ |
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n \ln^2(n+1)}$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} x^n$ | 18. $f(x) = x + \operatorname{sgn} x$ $-\pi \leq x \leq \pi, x_0 = \pi$ |
| | 19. $f(x) = \sin x$ на $(0, \pi)$ | |

ВАРІАНТ 7

| | | |
|--|---|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48};$ | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!};$ | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2};$ |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot \ln(2n)};$ | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg \frac{1+(-1)^n}{2} n}{n^3+2};$ | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot 3^n}{(2n+1)^n};$ |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^3}{2^n};$ | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!};$ | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3\sqrt{n}}}{\sqrt{4n+1}};$ |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{\ln(n+2)}.$ | 11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$ | 12. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2},$ $X_1 = [-2, 2];$ $X_2 = \mathbb{R}$ |
| 13. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{8n^3-12}},$ $X = [0, 1]$ | 14. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$ | 15. $f(x) = x \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+2})$ |

| | | |
|---|---|--|
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3)}{3n^2+4} x^{2n+1}$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x+2)^n$ | 18. $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq -\pi/2, \\ 0, & -\pi/2 < x < \pi/2, \\ 1, & \pi/2 \leq x < \pi, \end{cases}$ $x_0 = \pi$ |
| | 19. $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$ на $[0,1]$ | |

ВАРІАНТ 8

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5}$; | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$; | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{5^n}$; |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2n+1}) \cdot \ln^2(\sqrt{3n+1})}$; | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{2}}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$; | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^2}$; |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n^2}{n!}$; | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \cos \frac{\pi}{2^n}$; | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{\ln(n+3)}$; |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin \frac{\pi}{3\sqrt{n}}}{\sqrt{4n-1}}$. | 11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{n+1} \cdot \frac{1}{(3x^2+8x+6)^n}$ | 12. $f_n(x) = n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n^x}$, $X_1 = (1; 2)$; $X_2 = (2; +\infty)$ |
| 13. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x}{4+n^3x^2}$, $X = [0, 2]$ | 14. $f(x) = \ln(1+x-6x^2)$ | 15. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-x^2}{2+x^2}$ |
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot (x-1)^n$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{x-1}{3}\right)^n$ | 18. $f(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x < 0, \\ b, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$ $x_0 = 0$ |
| | 19. $f(x) = 1 - x$ на $(-\pi, 0)$ | |

ВАРІАНТ 9

| | | |
|--|--|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}$; | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$; | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n \cdot (n-1)^2$; |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot \ln^2(\sqrt{5n+1})}$; | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$; | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot e^{-n}$; |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$; | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \frac{\pi}{6n}$; | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln(3n)}$; |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin^2 n}$ | 11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n+3} \cdot \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^n$ | 12. $f_n(x) = \frac{x}{n+x}$, $X_1 = [0, a]$; $0 < a < +\infty$ $X_2 = [0; +\infty)$ |

| | | |
|---|--|---|
| 13. $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+nx^3} \right)^3$ $X = [0, +\infty)$ | 14. $f(x) = (x-1)\sin 5x$ | 15. $f(x) = \ln(x^3 + \sqrt{x^6 + 9})$ |
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot (x+1)^n$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{4n}}{n^2}$ | 18. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$ $x_0 = -\pi$ |
| | 19. $f(x) = e^x$ на $(0, \pi)$ | |

ВАРІАНТ 10

| | | |
|---|--|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}$; | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^{n^2}$; |
| 4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1) \cdot \ln^2 n}$; | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^3+5}$; | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$; |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n-1)^3}$; | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+3)}{\ln(n+4)}$; | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$; |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos \frac{2}{\sqrt{n+4}}}$; | 11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{2^n(n^2+1)} (25x^2+1)^n$ | 12. $f_n(x) = \frac{(n+x)^2}{x^2+n^2-nx}$, $X_1 = [0, 2)$; $X_2 = (2; +\infty)$ |
| 13. $\sum_{n=3}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{3x}{x^3+n^3}$, $X = [0, +\infty)$ | 14. $f(x) = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{x^2}$ | 15. $f(x) = \ln(x^3 + \sqrt{x^6 + 64})$ |
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^n x^n$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$ | 18. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & -\pi \leq x < 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$ |
| 19. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ на $(0, 2)$ | | |

ВАРІАНТ 11

| | | |
|--|---|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12}$; | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n^3+1)}{(n+1)!}$; | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \cdot \left(\frac{2n-1}{3n+4} \right)^n$; |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n \cdot \ln^2(n+7)}$; | 5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$; | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$; |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 7n}{n^2}$; | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln(n+2)}$; | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$; |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \cdot \sqrt[3]{2n+\ln n}}$; | 11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1+x^n}{1-x^n}$ | 12. $f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{1}{nx} \right)$, $X_1 = (0, 2)$; $X_2 = (2; +\infty)$ |

| | | |
|---|--|---|
| 13. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{7n-13}, X=[0,1]$ | 14. $f(x) = \frac{6}{8+2x-x^2}$ | 15. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1/2}{x-1/2}$ |
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x-2)^n}{4^{n+2}}$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n (x+2)^n$ | 18. $f(x) = e^{2 x },$ $-\pi \leq x \leq \pi, x_0 = \pi$ |
| 19. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & a \leq x < \pi \end{cases}$ на $(0, \pi)$ | | |

ВАРІАНТ 12

| | | |
|---|--|---|
| 1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2};$ | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot (n+1)!};$ | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n};$ |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \cdot \ln^2(5n+2)};$ | 5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3-3n}};$ | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sin^n \frac{\pi}{2n};$ |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n \cdot 2^n};$ | 8. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n)};$ | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin n}{n^{3/2}};$ |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^3}{(n+1)!};$ | 11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{\ln^n(x+2)}$ | 12. $f_n(x) = \cos \frac{1}{nx},$ $X_1 = (0, \pi); X_2 = (\pi; +\infty)$ |
| 13. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^3}, X=[0, +\infty)$ | 14. $f(x) = \frac{6}{6+x-x^2}$ | 15. $f(x) = \ln(1-x-12x^2)$ |
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$ | 18. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq \pi, \\ \sin x, & -\pi < x < 0, \end{cases}$ $x_0 = \pi$ |
| | 19. $f(x) = e^{2x}$ на $(0, \ln 2)$ | |

ВАРІАНТ 13

| | | |
|---|--|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2+4n-3};$ | 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(2n)};$ | 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \sqrt[3]{3n+1}};$ |
| 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot (n+1)!}{(2n)!};$ | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \cdot \sin \frac{2}{3^n};$ | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2) \cdot \ln^2(\sqrt{2n})};$ |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1} \right)^{n^3};$ | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \cdot \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right);$ | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n!};$ |
| 10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{5n+1}};$ | 11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n n^3}{n^2+2} \cdot \frac{1}{(3x^2+10x+9)^n}$ | 12. $f_n(x) = \frac{nt}{1+n+t},$ $X_1 = [0;1], X_2 = [0; +\infty)$ |

| | | |
|--|---|--|
| 13. $\sum_{n=3}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 + n^3},$ $X = \square$ | 14. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$ | 15. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ |
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n$ | 18. $f(x) = \begin{cases} 5x, & -\pi < x < 0, \\ -x, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$ $x_0 = \pi$ |
| 19. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ на $(0,2)$ | | |

ЗАВДАННЯ №6

«ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»

- 1, 2. Змінити порядок інтегрування.
3. Обчислити подвійний інтеграл.
4. Обчислити подвійний інтеграл за допомогою нових змінних.
5. Знайти об'єм тіла за допомогою подвійного інтеграла.
6. Знайти координати центра мас пластини.
- 7, 8. Обчислити потрійний інтеграл.
9. Знайти об'єм тіла, що задається поверхнями, які його обмежують.
10. Тіло задається поверхнями, які його обмежують, $\gamma(x, y, z)$ – густина. Знайти масу тіла.
- 11, 12. Обчислити криволінійний інтеграл.
13. Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти функцію u , попередньо впевнившись в тому, що наданий вираз є її повним диференціалом.
14. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл, зімкнувши, якщо це необхідно, криву відрізком прямої.
15. Обчислити поверхневий інтеграл I роду.
16. Обчислити інтеграл за зовнішньою стороною поверхні S за допомогою формули Остроградського-Гаусса.
17. Обчислити за допомогою формули Стокса інтеграл вздовж кривої L , яка утворюється перетином зазначених поверхонь. Напрямок обходу обрати так, щоб спостерігач, якого вісь Oz пронизує з ніг до голови, бачив його таким, що проходить проти руху годинникової стрілки.
18. Знайти течію векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ через частину поверхні P , що міститься в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю Oz).
19. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ вздовж контуру L (у напрямку зростання параметра t).

ВАРІАНТ 1

| | |
|---|--|
| 1. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f(x, y) dy$ | 2. $\int_0^4 dy \int_{\frac{3y}{4}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx$ |
| 3. $\iint_D (\cos 2x + \sin y) dx dy$; $D: x = 0, y = 0, 4x + 4y - \pi = 0$ | 4. $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$; $D: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = R^2$ |
| 5. Тіло обмежене поверхнями $6x - 9y + 5z = 0, 3x - 2y = 0, 4x - y = 0,$ $x + y = 5, z = 0$ | 6. Однорідна пластина обмежена лініями $y^2 = x, 3y^2 = x, y = \frac{x}{3}$ |
| 7. $\iiint_V 2y^2 e^{-xy} dx dy dz$; $x = 0, y = 1, y = x, z = 0, z = 1$ | 8. $\iiint_V x dx dy dz$; $V: y = 10x, y = 0, x = 1, z = xy, z = 0$ |
| 9. $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2$ | 10. $64(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4, y = 0,$ $z = 0 (y \geq 0, z \geq 0), \gamma = \frac{5}{4}(x^2 + y^2)$ |
| 11. $\int_{(0,0)}^{(3,6)} 4x \sin^2 y dx + y \cos^2 2x dy$ вздовж прямої лінії | 12. $\int_L xy ds$ вздовж контуру прямокутника, обмеженого прямими $x = 0, y = 0, x = 4, y = 2$ |
| 13. $du = (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$ | |
| 14. $\int_L e^{-x} \operatorname{sh} y dx + e^{-x} \operatorname{ch} y dy$, де L – контур, що обмежує область $-a \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq x + a, a > 0$, який пробігається у додатному напрямку | 15. $\iint_S (x^2 + y^2 + z - 0,5) ds$, де S – частина параболоїда $2z = 2 - x^2 - y^2, z \geq 0$. |
| 16. $\iiint_S (x + y) dy dz + y dx dy$, $S: z = 8 - x^2 - y^2, z = x^2 + y^2$ | 17. $\int_L yz dx - xz dy + xy dz$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ |
| 18. $\vec{a} = 7x \vec{i} + (5\pi y + 2) \vec{j} + 4\pi z \vec{k}$, $P: x + \frac{y}{2} + 4z = 1$ | 19. $\vec{a} = y \vec{i} - x \vec{j} + z^2 \vec{k}$, $L: x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, z = \sin t$ |

ВАРІАНТ 2

| | |
|--|--|
| 1. $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$ | 2. $\int_{-3}^0 dx \int_{-x}^3 f(x, y) dy + \int_0^3 dx \int_x^3 f(x, y) dy$ |
| 3. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{ax-x^2}}$; $D: x=0, y^2=a^2-ax$ | 4. $\iint_D \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx dy$; D – частина круга $x^2+y^2 \leq 1$, що лежить в I квадранті |
| 5. Тіло обмежене еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ | 6. Однорідна пластина обмежена лініями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x=0, y=0$ ($x \geq 0, y \geq 0$) |
| 7. $\iiint_V x^2 z \operatorname{sh}(xyz) dx dy dz$; $x=2, y=\pi, z=1, x=0, y=0, z=0$ | 8. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8}\right)^4}$; $V: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1, x=0, y=0, z=0$ |
| 9. $y=5\sqrt{x}, y=\frac{5x}{3}, z=5+\frac{5\sqrt{x}}{3}, z=0$ | |
| 10. $x^2+y^2+z^2=4,$ $x^2+y^2=1$ ($x^2+y^2 \leq 1$), $x=0$ ($x \geq 0$), $\gamma=4 z $ | 11. $\int_L \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, $L: \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ від точки $(a, 0)$ до точки $(0, a)$ |
| 12. $\int_L \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}$ вздовж відрізка прямої $y=\frac{x}{2}-2$ від точки $(0, -2)$ до точки $(4, 0)$ | 13. $du = \left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2} - 3\right) dx + \left(\frac{2x^2y}{1+x^2y^2} - 5\right) dy$ |
| 14. $\oint_L x^2 y^3 dx - x^3 y^2 dy$, де L – еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ з додатним напрямом обходу | 15. $\iint_S (xy + yz + zx) ds$, $S = \{(x, y, z) : z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 2ax\}$ |
| 16. $\iiint_S (x+y) dy dz + (y+z) dz dx + (z+x) dx dy$ $S: y=2x, y=4x, x=1, z=y^2, z=0$ | 17. $\oint_L 4 dx + 3x dy + 3xz dz$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 3 \end{cases}$ |
| 18. $\vec{a} = 2\pi x \vec{i} + (7y+2) \vec{j} + 7\pi z \vec{k}$, $P: x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ | 19. $\vec{a} = -x^2 y^3 \vec{i} + \vec{j} + z \vec{k}$, $L: x = \sqrt[3]{4} \cos t, y = \sqrt[3]{4} \sin t, z = 3$ |

ВАРІАНТ 3

| | |
|---|---|
| 1. $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x, y) dy$ | |
| 2. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y) dx$ | 3. $\iint_D \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}$; $D: y = x \operatorname{tg}(x), y = x$ |
| 4. $\iint_D x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$; $D: (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x \geq 0$ – петлюстка лемніскати | 5. Тіло обмежене круговим циліндром радіуса r , віссю якого служить вісь ординат, координатними площинами і площиною $\frac{x}{r} + \frac{y}{a} = 1$ |
| 6. Однорідна пластина обмежена лініями $y^2 = x, 3y^2 = x, y = \frac{x}{3}$ | 7. $\iiint_V y^2 \operatorname{ch}(2xy) dx dy dz$; $x = 0, y = -2, y = 4x, z = 0, z = 2$ |
| 8. $\iiint_V 15(y^2 + z^2) dx dy dz$; $V: z = x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ | 9. $x^2 + y^2 = 2, y = \sqrt{x}, y = 0,$ $z = 0, z = 15x$ |
| 10. $x^2 + y^2 = 1, 2z = x^2 + y^2, x = 0, y = 0,$ $z = 0 (x \geq 0, y \geq 0), \gamma = 10x$ | 11. $\int_L \frac{x dx}{y} + \frac{y dy}{y-a}$ вздовж дуги циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ від точки $t = \frac{\pi}{6}$ до точки $t = \frac{\pi}{3}$ |
| 12. $\int_L y ds$ вздовж відрізка прямої від точки $(0, 0)$ до точки $(1, 2)$ | 13. $du = -(0,5 \cos 2y + y \sin 2x) dx +$ $+(x \sin 2y + \cos^2 x + 1) dy$ |
| 14. $\oint_L y dx - xy dy$, де L – контур, що обмежує область $0 \leq x \leq 2,$ $0 \leq y \leq -x + \sqrt{2x}$, яка пробігається у додатному напрямку | 15. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) ds$, де S – межа тіла $V = \{(x, y, z): \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ |
| 16. $\iiint_S (3x - y - z) dy dz + 3y dz dx + 2z dx dy$, $S: z = x^2 + y^2, z = 2y$ | 17. $\oint_L (x + y) dx - x dy + 6 dz$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 2 \end{cases}$ |
| 18. $\vec{a} = 9\pi x \vec{i} + \vec{j} - 3z \vec{k}, P: \frac{x}{3} + y + z = 1$ | 19. $\vec{a} = (y - z) \vec{i} + (z - x) \vec{j} + (x - y) \vec{k},$ $L: x = 4 \cos t, y = 4 \sin t, z = 1 - \cos t$ |

ВАРІАНТ 4

| | |
|---|--|
| 1. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f(x, y) dx$ | |
| 2. $\int_3^7 dx \int_{\frac{9}{x}}^3 f(x, y) dy + \int_7^9 dx \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x, y) dy$ | 3. $\iint_D x \cdot y dx dy;$ $D: x + y = 2, x^2 + y^2 = 2y$ |
| 4. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} (c > 1); D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | 5. Вивести «шкільну» формулу для обчислення об'єму конуса (висота H , радіус основи R) за допомогою подвійного інтеграла |
| 6. Однорідна пластина обмежена лініями $x = \sqrt{2y - y^2}, x = 0$ | 7. $\iiint_V 8y^2 z e^{2xyz} dx dy dz;$ $x = 0, y = 0, z = 0, x = -1, y = 2, z = 1$ |
| 8. $\iiint_V (3x + 4y) dx dy dz; V: y = x, y = 0, x = 1, z = 5(x^2 + y^2), z = 0$ | 9. $x + y = 2, y = \sqrt{x}, z = 12y, z = 0$ |
| 10. $x^2 + y^2 = \frac{16}{49} z^2, x^2 + y^2 = \frac{4}{7} z,$ $x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \geq 0), \gamma = 80 \cdot y \cdot z$ | 11. $\int_L (x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy$ у додатному напрямку вздовж еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ |
| 12. $\int_L x ds$ вздовж параболи $y = x^2$ від точки $(2, 4)$ до точки $(1, 1)$ | 13. $du = (y^2 e^{xy^2} + 3)dx + (2xye^{xy^2} - 1)dy$ |
| 14. $\int_L e^x(1 - \cos y) dx + e^x(y + \sin y) dy,$ де L – квадрат $ x + y = a$ з від'ємним напрямом обходу | 15. $\iint_S (xy + yz + xz) ds$ де S – частина конуса $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$, розташована всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2ax$. |
| 16. $\iiint_S (z + y)dy dz + (x - 2y + z)dz dx + x dx dy,$ $S: x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2, z = 0$ | 17. $\int_L y dx - 2x dy + z^2 dz,$ $L: \begin{cases} z = 4(x^2 + y^2) + 2, \\ z = 6 \end{cases}$ |
| 18. $\vec{a} = (2x + 1)\vec{i} - y\vec{j} + 3\pi z\vec{k},$ $P: \frac{x}{3} + y + 2z = 1$ | 19. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k},$ $L: x = \cos t, y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t$ |

ВАРІАНТ 5

| | |
|---|---|
| 1. $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x, y) dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y) dy$ | |
| 2. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ | 3. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$; D – трикутник з вершинами $(-1;1)$, $(1;3)$, $(2;-4)$ |
| 4. $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$; $D: x^2 + y^2 \leq ax$ | 5. Тіло обмежене поверхнями $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $z = 0$ |
| 6. Однорідна пластина обмежена лініями $y = x^2$, $y = 3x^2$, $y = 3x$ | 7. $\iiint_V x^2 \operatorname{sh}(3xy) dx dy dz$; $x = 1$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 2$, $z = 36$ |
| 8. $\iiint_V (1 + 2x^3) dx dy dz$; $V: y = 9x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$ | 9. $x = 20\sqrt{2y}$, $x = 5\sqrt{2y}$, $z = 0$, $y + z = \frac{1}{2}$ |
| 10. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4z^2$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$), $\gamma = 20z$ | 11. $\int_L (x - y) dx + dy$ вздовж верхньої половини кола $x^2 + y^2 = R^2$ від точки $(R, 0)$ до точки $(-R, 0)$ |
| 12. $\int_{AB} \frac{y ds}{\sqrt{x}}$, де AB – дуга півкубічної параболу $y^2 = \frac{4x^3}{9}$ від точки $A(3, 2\sqrt{3})$ до точки $B\left(8, \frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$ | 13. $du = (e^{x+y} - \cos x)dx + (e^{x+y} + \sin y)dy$ |
| 14. $\oint_L y^2 dx - x^2 dy$, де L – контур, що обмежує область $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sin x$, яка пробігається у додатному напрямку | 15. $\iint_S (x + y + z) ds$, де S – частина конуса $x^2 = y^2 + z^2$, розташована всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2ax$. |
| 16. $\iiint_S (2y - 15x) dy dz + (z - y) dz dx + (3y - x) dx dy$, $S: z = 3x^2 + y^2 + 1$, $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $z = 0$ | 17. $\oint_L 3z dx - 2y dy + 2y dz$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 2x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$ |
| 18. $\vec{a} = 7x \vec{i} + 9\pi y \vec{j} + \vec{k}$, $P: x + \frac{y}{3} + z = 1$ | 19. $\vec{a} = (y - z) \vec{i} + (z - x) \vec{j} + (x - y) \vec{k}$, $L: x = \cos t$, $y = \cos t$, $z = 2(1 - \cos t)$ |

ВАРІАНТ 6

| | |
|--|--|
| 1. $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x, y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy$ | |
| 2. $\int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx$ | 3. $\iint_D \frac{x+2y}{2x+y} dx dy;$ $D: y \leq 1+x, y \leq 1-x, y \geq 0$ |
| 4. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy;$ $D: x^2 + (y+2)^2 \leq 4$ | 5. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2, x^2 + y^2 \leq 2az$ |
| 6. Однорідна пластина обмежена лініями $y = 4x + 4, y^2 = -2x + 1$ | 7. $\iiint_V y^2 z \cos(xyz) dx dy dz;$ $x = 1, y = \pi, x = 0, y = 0, z = 0$ |
| 8. $\iiint_V (27 + 54y^3) dx dy dz;$ $V: y = x, y = 0, x = 1, z = \sqrt{xy}, z = 0$ | 9. $x = \frac{5}{2}\sqrt{y}, x = \frac{5}{6}y, z = 0, z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y})$ |
| 10. $36(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 1, x = 0,$ $z = 0 (y \geq 0, z \geq 0), \gamma = \frac{5}{6}(x^2 + y^2)$ | 11. $\int_L y dx + x dy$ вздовж контуру трикутника, обмеженого осями координат і прямою $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, який пробігається у від'ємному напрямку |
| 12. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds,$ де L – коло $x^2 + y^2 = ax$ | 13. $du =$ $= \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 2x \right) dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 6y \right) dy$ |
| 14. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dx +$ $+ y \left(xy + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right) dy,$ де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$ | 15. $\iint_S (3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2) ds$, де S – частина конуса $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, що лежить між площинами $y = 0, y = b$ |
| 16. $\iiint_S (-2x) dy dz + z dz dx + (x + y) dx dy,$ $S: x^2 + y^2 = 2y, z = x^2 + y^2, z = 0$ | 17. $\int_L y dx - 2x dy + z^2 dz,$ $L: \begin{cases} z = 4(x^2 + y^2) + 2, \\ z = 6 \end{cases}$ |
| 18. $\bar{a} = \bar{i} + 5y \bar{j} + 11\pi z \bar{k}, P: x + y + \frac{z}{3} = 1$ | 19. $\bar{a} = 2y \bar{i} - 3x \bar{j} + x \bar{k}, L: x = 2 \cos t,$ $y = 2 \sin t, z = 2 - 2 \cos t - 2 \sin t$ |

ВАРІАНТ 7

| | |
|--|---|
| 1. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$ | |
| 2. $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy +$ $+ \int_2^4 dx \int_0^{10-x} f(x, y) dy + \int_4^7 dx \int_{x-4}^{10-x} f(x, y) dy$ | 3. $\iint_D (x - y^2) dx dy$; D – трикутник з вершинами $(1;0)$, $(-1;2)$, $(3;4)$ |
| 4. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$; $D: x^2 + (y+2)^2 \leq 4$ | 5. $x^2 \leq ay \leq bx$, $x^2 + y^2 \leq hz \leq 2x^2 + 2y^2$ |
| 6. Однорідна пластина обмежена лініями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$ ($x \geq 0$) | 7. $\iiint_V y^2 \cos\left(\frac{\pi}{4} yz\right) dx dy dz$; $x = 1$, $y = -1$, $y = \frac{x}{2}$, $z = 0$, $z = -\pi^2$ |
| 8. $\iiint_V y dx dy dz$; $V: y = 15x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = xy$, $z = 0$ | 9. $x^2 + y^2 = 2$, $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $z = 0$, $z = 30y$ |
| 10. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4$ ($x^2 + y^2 \leq 4$), $\gamma = 2 z $ | 11. $\int_L -y dx + x dy$ вздовж контуру трикутника $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y = 6$, який пробігається у додатному напрямі |
| 12. $\int_L \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$, де L – перший оберт гвинтової лінії $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt \end{cases}$ | 13. $du = \left(\frac{y}{x} + \ln y + 2x\right) dx +$ $+ \left(\ln x + \frac{x}{y} + 1\right) dy$ |
| 14. $\int_L (e^{-x} \cos y - y^2) dx +$ $+ (e^{-x} \sin y - x^2) dy$, де L – праве ($x \geq a$) півколо $x^2 + y^2 = 2ax$ від точки $(a, 0)$ до точки $(a, -a)$ | 15. $\iint_S xyz ds$, $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$ $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ |
| 16. $\iiint_S (2x + y) dy dz + (y + 2xy) dx dy$, $S: z = 2 - 4(x^2 + y^2)$, $z = 4(x^2 + y^2)$ | 17. $\oint_L y dx - x dy + 2z dz$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2/4, \\ z = 2 \end{cases}$ |
| 18. $\vec{a} = x \vec{i} + (\pi z - 1) \vec{k}$, $P: 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ | 19. $\vec{a} = 2z \vec{i} - x \vec{j} + y \vec{k}$, $L: x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 1$ |

ВАРІАНТ 8

| | |
|---|---|
| 1. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx$ | 2. $\int_{-2}^6 dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x, y) dy$ |
| 3. $\iint_D \sqrt{a^2 + x^2} dx dy$; $D: y^2 - x^2 = a^2, x = a, x = 0, y \geq 0$ | 4. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 - 9} dx dy$; $D: 9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ |
| 5. Тіло обмежене сферою $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ і циліндром $x^2 + y^2 = ax$ (задача Вівіані) | 6. Однорідна пластина обмежена лініями $y = x^2, y = 2x^2, x = 1, x = 2$ |
| 7. $\iiint_V y^2 z \operatorname{ch} \frac{xyz}{2} dx dy dz$; $x = 2, y = -1, z = 2, x = 0, y = 0, z = 0$ | 8. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3}\right)^5}$; $V: \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ |
| 9. $x + y = 2, x = \sqrt{y}, z = \frac{12x}{5}, z = 0$ | 10. $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 8z,$ $x = 0, y = 0, z = 0 (x \geq 0, y \geq 0), \gamma = 5x$ |
| 11. $\int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ (початок координат не лежить всередині контуру інтегрування) | 12. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, де L – коло $x^2 + y^2 = 2ay$ |
| 13. $du = \left(\frac{1}{y-1} - \frac{y}{(x-1)^2} - 1 \right) dx + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{(y-1)^2} + 2y \right) dy$ | 14. $\int_L x^2 y dx - y^2 x dy$, де L – верхня ($y \geq 0$) частина правої петлі ($x \geq 0$) лемніскати $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ від точки $(0,0)$ до точки $(a,0)$ |
| 15. $\iint_S xyz ds$, де S – частина конуса $z^2 = 2xy, z \geq 0$, розташована всередині циліндра $x^2 + y^2 = a^2$. | 16. $\iiint_S (4y - 3z) dy dz + (3x + 2z) dz dx + (x + y + z) dx dy$, $S: x^2 + y^2 = 1, z = 4 - x - y, z = 0$ |
| 17. $\oint_L y dx + x dy + 3z^2 dz$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 1 (z > 0) \end{cases}$ | 18. $\vec{a} = 5\pi x \vec{i} + (9y + 1) \vec{j} + 4\pi z \vec{k}$, $P: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ |
| 19. $\vec{a} = y \vec{i} - x \vec{j} + z \vec{k}$, $L: x = \cos t, y = \sin t, z = 3$ | 19. $\vec{a} = y \vec{i} - x \vec{j} + z \vec{k}$, $L: x = \cos t, y = \sin t, z = 3$ |

ВАРІАНТ 9

| | |
|--|---|
| 1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f(x, y) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\cos y} f(x, y) dx$ | 2. $\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy$ |
| 3. $\iint_D \sqrt{xy-y^2} dx dy$; D – трапеція з вершинами (1;1), (5;1), (10;2), (2;2) | 4. $\int_0^a dy \int_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ |
| 5. Тіло обмежене гіперболічним параболоїдом $z = x^2 - y^2$ і площинами $x = 3, z = 0$ | 6. Однорідна пластина обмежена лініями $y = \sqrt{2x - x^2}, y = 0$ |
| 7. $\iiint_V x^2 e^{-xy} dx dy dz$; $x = -2, y = 0, z = 1, y = \frac{x}{4}, z = 0$ | 8. $\iiint_V (3x^2 + y^2) dx dy dz$; $V: z = 10y,$ $x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ |
| 9. $y = 17\sqrt{2x}, y = 2\sqrt{2x}, z = 0, x + z = \frac{1}{2}$ | 10. $x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2, x^2 + y^2 = \frac{2}{5}z,$ $x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), \gamma = 28xz$ |
| 11. $\int_L xy dx$ вздовж дуги синусоїди $y = \sin x$ від $x = \pi$ до $x = 0$ | 12. $\int_L (x^3 + y^3) ds$, де L – лемніската $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy, x \geq 0, y \geq 0$ |
| 13. $du = \left(\frac{\cos x \cos y}{\sin^2 x} + \sin x \right) dx +$ $+ \left(\frac{\sin y}{\sin x} - \cos y \right) dy$ | 14. $\int_L \frac{3x^4}{4a^2} dy - \frac{xy^3}{b^2} dx$, де L – еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ з додатним напрямком оббігу |
| 15. $\iint_S (xyz)^2 ds$, $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, a \leq z \leq b\}$ | 16. $\iiint_S x dy dz - 2y dz dx + 3z dx dy$, $S: z = x^2 + y^2, z = 2x$ |
| 17. $\oint_L (2 - xy) dx - yz dy - xz dz$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ | 18. $\bar{a} = 2\bar{i} + y\bar{j} + \frac{3\pi}{2}z\bar{k}$, $P: \frac{x}{3} + y + \frac{z}{4} = 1$ |
| 19. $\bar{a} = x\bar{i} + z^2\bar{j} + y\bar{k}$, $L: x = \cos t, y = 2\sin t, z = 2\cos t - 2\sin t - 1$ | |

ВАРІАНТ 10

| | |
|--|---|
| 1. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx$ | 2. $\int_{-2}^2 dx \int_0^{\frac{x+2}{2}} f(x, y) dy + \int_2^{\frac{10}{3}} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x, y) dy$ |
| 3. $\iint_D e^{x+y} dx dy$; $D: y = e^x, x = 0, y = 2$ | 4. $\iint_D x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$; $D: (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x \leq 0$ – пелюстка лемніскати |
| 5. Тіло обмежене поверхнями $z = 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ | 6. Однорідна пластина обмежена кривою $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$ (петля) |
| 7. $\iiint_V 2x^2 y e^{xyz} dx dy dz$; $x = 1, y = 1, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ | 8. $\iiint_V (30z + 15x) dx dy dz$; $V: z = x^2 + 3y^2, z = 0, y = x, y = 0, x = 1$ |
| 9. $y = \frac{5}{3}\sqrt{x}, 9y = 5x, z = 0, 9z = 5(3 + \sqrt{x})$ | 10. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2,$ $x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), \gamma = 6z$ |
| 11. $\int_L x dy$ вздовж контуру трикутника, утвореного прямими $y = x, x = 2, y = 0$ (у додатному напрямку) | 12. $\int_L \frac{\sin 2\varphi}{\rho} ds$, де L – коло з центром в точці $A(0, 2)$ радіуса 2 |
| 13. $du = \left(-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{(x+y)^2}\right) dx + \left(\frac{1}{y} + \frac{x^2}{(x+y)^2}\right) dy$ | |
| 14. $\int_L x^3 y^3 dx + (x - y)^3 dy$, де L – ламана ABC , де $A(2, 1), B(0, 3), C(-2, 1)$ | 15. $\iint_S x^2 \cdot \sqrt{1 + 4z} ds$, $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 = z, 0 \leq z \leq b^2\}$ |
| 16. $\iiint_S 7x dy dz + z dz dx + (x - y + 5z) dx dy$, $S: z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2, y = x,$ $y = 2x, x = 1$ | 17. $\iiint_L 2yz dx + xz dy + y^2 dz$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 (z > 0) \end{cases}$ |
| 18. $\vec{a} = 9\pi x \vec{i} + (5y + 1) \vec{j} + 2\pi z \vec{k}$, $P: 3x + y + \frac{z}{9} = 1$ | 19. $\vec{a} = 3y \vec{i} - 3x \vec{j} + x \vec{k}$, $L: x = 3\cos t, y = 3\sin t,$ $z = 3 - 3\cos t - 3\sin t$ |

ВАРІАНТ 11

| | |
|--|---|
| 1. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x, y) dx$ | 2. $\int_0^a dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy$ |
| 3. $\iint_D dx dy$; $D: y = 2 - x, y^2 = 4x + 4$ | 4. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$; $D: x^2 + y^2 = ax, x^2 + y^2 = 2ax, y \geq 0$ |
| 5. Тіло обмежене поверхнями $z^2 = xy, x + y = a,$ $x + y = b$ ($0 < a < b$) | 6. Пластина обмежена лініями $y = x, y = -x, x = 1$ з густиною, яка в кожній точці дорівнює відстані від цієї точки до початку координат |
| 7. $\iiint_V x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} xy\right) dx dy dz$; $x = 2, y = x, y = 0, z = 0, z = \pi$ | 8. $\iiint_V (4 + 8z^3) dx dy dz$; $V: y = x, y = 0, x = 1, z = \sqrt{xy}, z = 0$ |
| 9. $x^2 + y^2 = 8, y = \sqrt{2x}, y = 0,$ $z = 0, 11z = 15x$ | 10. $25(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4, x = 0,$ $z = 0$ ($x \geq 0, z \geq 0$), $\gamma = 2(x^2 + y^2)$ |
| 11. $\int_L y dx - x dy$ де L – верхня дуга еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ від точки $(a, 0)$ до точки $(-a, 0)$ | 12. $\int_L xy ds$, де L – контур чотирикутника з вершинами $A(0, 0), B(1, 2), C(2, 3), D(3, 2)$ |
| 13. $du = (y^2 e^{xy^2} + 3) dx + (2xy e^{xy^2} - 1) dy$ | 14. $\int_L y dx - x dy$, де L – контур, що обмежує область $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq a \sin 2\varphi$, та пробігається у від'ємному напрямку |
| 15. $\iint_S xy^2 z ds$, $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 = R^2,$ | 16. $\iiint_S 17x dy dz + 7y dz dx + 11z dx dy$, $S: z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), y = x^2,$ $y = x$ |
| 17. $\oint_L -y dx + 2dy + dz$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 1 \end{cases}$ | 18. $\vec{a} = 7\pi x \vec{i} + (x - 2y) \vec{j} + (7z + 2) \vec{k}$, $P: x + y + \frac{z}{2} = 1$ |
| 19. $\vec{a} = -x^2 y^3 \vec{i} + 2 \vec{j} + xz \vec{k}$, $L: x = \sqrt{2} \cos t, y = \sqrt{2} \sin t, z = 1$ | |

ВАРІАНТ 12

| | |
|---|---|
| 1. $\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx$ | 2. $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy$ |
| 3. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy$ | 4. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$; D – область, обмежена колом $x^2+y^2=a^2$ і кардіоїдою $x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ (область не містить початку координат) |
| 5. Тіло обмежене поверхнями $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$ | 6. Однорідна пластина обмежена верхньою половиною еліпса, що спирається на велику вісь |
| 7. $\iiint_V x^2 z \operatorname{sh}(xyz) dx dy dz$; $x=2, y=0, y=x, z=xy, z=0$ | 8. $\iiint_V 21xz dx dy dz$; $V: x=2, y=0, y=x, z=xy, z=0$ |
| 9. $x+y=4, y=\sqrt{2x}, z=3y, z=0$ | 10. $x^2+y^2+z^2=9, x^2+y^2=4$ ($x^2+y^2 \leq 4$), $y=0$ ($y \geq 0$), $\gamma= z $ |
| 11. $\int_L \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$, де L – верхня дуга кола $x^2+y^2=a^2$, яка пробігається проти руху годинникової стрілки | 12. $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} ds$, де L – частина спіралі Архімеда $\rho=2\varphi$, що знаходиться всередині круга радіуса R ($R \leq \pi$) з центром в початку координат (в полярному полюсі) |
| 13. $du = \frac{1-y}{x^2 y} dx + \frac{1-2x}{xy^2} dy$ | 14. $\int_L y^{5/3} dx - x^{5/3} dy$, де L – додатно орієнтована крива $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ |
| 15. $\iint_S z^3 \cdot (x+2y+3) ds$, $S = \{(x, y, z): x^2+z^2=4R^2, x^2+y^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ | 16. $\iiint_S (x+y+z) dy dz + (2y-x) dz dx + (3z+y) dx dy$, $S: z=x^2+y^2, y=x, y=2x, x=1, z=0$ |
| 17. $\oint_L 4x dx - yz dy + x dz$, $L: \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y+z=1 \end{cases}$ | 18. $\bar{a} = \pi y \bar{j} + (4-2z) \bar{k}$, $P: 2x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ |
| 19. $\bar{a} = 6z \bar{i} - x \bar{j}$, $L: x=3\cos t, y=3\sin t, z=3$ | |

ВАРІАНТ 13

| | |
|--|--|
| 1. $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy +$ $+ \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$ | 2. $\int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx$ |
| 3. $\iint_D (3x + y) dx dy;$ $D: x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \frac{2}{3}x + 3$ | 4. $\int_0^a dy \int_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ |
| 5. Тіло обмежене поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \geq a x (a > 0)$ | 6. Однорідна пластина обмежена синусоїдою $y = \sin x$, віссю Ox і прямою $x = \frac{\pi}{4}$ |
| 7. $\iiint_V x^2 \operatorname{sh}(xy) dx dy dz;$ $x = 2, y = \frac{x}{2}, y = 0, z = 0, z = 1$ | 8. $\iiint_V xyz dx dy dz;$ $V: y = x, y = 0, x = 3, z = xy, z = 0$ |
| 9. $6x = 5\sqrt{y}, 18x = 5y, z = 0,$ $18z = 5(3 + \sqrt{y})$ | 10. $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 6z, x = 0, y = 0,$ $z = 0 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), \gamma = 90^\circ$ |
| 11. $\int_L (2a - y) dx + (y - a) dy$, де L – перша (від початку координат) арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ | 12. $\int_L xy ds$, де L – контур прямокутника $A(0,0), B(4,0), C(4,2), D(0,2)$ |
| 13. $du = (y^2 e^{xy^2} + 3) dx +$ $+ (2xy e^{xy^2} - 1) dy$ | 14. $\int_L (xy + x + y) dy - (xy + x - y) dx$, де L – частина кола $x^2 + y^2 = ax (x \leq \frac{a}{2})$ від точки $(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ до точки $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ |
| 15. $\iint_S (z - R)^3 ds,$ $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz,$ $x \leq 0, y \leq 0, z \geq R\}$ | 16. $\iiint_S y dy dz + (x + 2y) dz dx + x dx dy,$ $S: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$ |
| 17. $\int_L y dx + 3x dy + z^2 dz,$ $L: \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1, \\ z = 3 \end{cases}$ | 18. $\vec{a} = (3\pi - 1)\vec{i} + (9\pi y + 1)\vec{j} + 6\pi z\vec{k},$ $P: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{9} = 1$ |
| 19. $\vec{a} = z\vec{i} + y^2\vec{j} - x\vec{k}, L: x = \sqrt{2}\cos t, y = 2\sin t, z = \sqrt{2}\cos t$ | |

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА та ІНФОРМАЦІЙНІ ДЖЕРЕЛА

Методичне забезпечення

1. Д'яченко Н.М. Електронний конспект лекцій з математичного аналізу/ - http://sites.znu.edu.ua/bank/public_files/2009/10/matanaliz/05_metod_SAM_rab.htm. - 572 с.
2. Д'яченко Н.М. Вступ до теорії множин і теорії дійсних чисел: Практикум з розв'язання задач для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 6.080101 «Математика» і 6.080202 „Прикладна математика” / Н.М. Д'яченко, А.В. Савранська.– Запоріжжя: ЗНУ, 2006. – 44 с.
3. Границя послідовності. Границя функції. Неперервність. Навчально-методичний посібник для студентів I курсу математичного факультету / Укл. В.В. Киричевський¹, М.І. Клименко, Ю.М. Стреляєв. – Запоріжжя: ЗНУ, 2005. – 50 с.
4. Математичний аналіз I: диференціальне числення функції однієї змінної: Конспект лекцій для студентів напрямів підготовки «Математика», «Прикладна математика», «Інформатика», «Програмна інженерія» / Укл. С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко, М.І. Клименко, І.В. Красікова, О.О. Тітова, В.В.Леонтєва. – Запоріжжя: ЗНУ, 2011. – 89 с.
5. Математичний аналіз I: диференціальне числення функції однієї змінної: Практикум з розв'язання задач для студентів напрямів підготовки «Математика», «Прикладна математика», «Інформатика», «Програмна інженерія» / Укл. С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко, М.І. Клименко, І.В. Красікова, О.О. Тітова, В.В.Леонтєва. – Запоріжжя: ЗНУ, 2011. – 120 с.
6. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: частина 1 навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / Укл. С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко, М.І. Клименко, І.В. Красікова, О.О. Тітова, В.В.Леонтєва. – Запоріжжя: ЗНУ, 2014. – 231 с.
7. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: частина 2: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / Укл. С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко, М.І. Клименко, І.В. Красікова, О.О. Тітова, В.В.Леонтєва. – Запоріжжя: ЗНУ, 2013. – 499 с.
8. Шашков К.В. Ряди. Частина I. Числові ряди: Навч.-метод. посібник для студентів спец. 7.080101 «Математика» / К.В. Шашков. – Запоріжжя: ЗНУ, 2007. – 74 с.
9. Красікова І.В. Методичні вказівки та завдання до лабораторних робіт з теми “Функції багатьох змінних” / І.В. Красікова, А.В. Савранська. – Запоріжжя, ЗДУ, 2003. – 36с.
10. Основи тензорного аналізу. Навчально-методичний посібник для студентів математичного факультету / Укл.: В.В. Киричевський, В.І Кудря. Ю.М. Стреляєв. – Запоріжжя: ЗНУ, 2005. – 88 с.

Основна література

1. Ильин В.А. Математический анализ / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х. Сендов. – М.:Наука,1979.–720 с.

2. *Фихтенгольц Г.М.*¹ Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / *Г.М. Фихтенгольц.* – Т.1. – М.:Физматлит, 1969. – 607 с.
3. *Фихтенгольц Г.М.*² Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / *Г.М. Фихтенгольц.* – Т.1. – М.:Физматлит, 2003. – 680 с.
4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / *Г.М. Фихтенгольц.* – Т.2. – М.: Наука, 1966. – 800с.
5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / *Г.М. Фихтенгольц.* – Т.3. – М.: Наука, 1966. – 656с.
6. *Демидович Б.П.*¹ Сборник задач и упражнений по математическому анализу / *Б.П.Демидович.* – М.:Наука,1990. – 624 с.
7. *Виноградова И.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу / *И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничих.* // Под общ. ред. *В.А. Садовничихого.*– М.: Факториал, 1996.–477 с.

Додаткова література

1. *Марон И.А.*¹ Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной / *И.А. Марон.* – М.: Наука, 1973. – 400с.
2. Задачник по курсу математического анализа. Ч. 1. / Под ред. *Н.Я. Виленкина*¹. – М.: Просвещение, 1971. – 343с.
3. *Дороговцев А.Я.* Избранные задачи по математическому анализу. / *А.Я. Дороговцев.* – К.: Вища школа, 1982. – 104с.
4. *Бутузов В.Ф.* Математический анализ в вопросах и задачах. / Под ред. *В.Ф. Бутузова / В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин.* – М.: Физматлит, 2001. – 480с.
5. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / *Б.П. Демидович.* – М.: Астрель, 2003. – 558с.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. /Под ред. *Б.П. Демидовича.* – М.: Наука, 1978. – 480с.
7. *Давыдов Н.А.*²Сборник задач по математическому анализу. / *Н.А.Давыдов, П.П.Коровкин, Б.Н.Никольский* – М.: Просвещение, 1973. – 256с.
8. *Берман Г.Н.*² Сборник задач по курсу математического анализа / *Г.Н.Берман* – М.:Наука,1985.–383 с.
9. *Дюженкова Л.І.*, Математичний аналіз у задачах і прикладах / *Л.І.Дюженкова, Т.В.Колесник, М.Я.Лященко, Г.О.Михалін, М.І. Шкіль*– Ч. 1. – К.: Вища школа, 2002. – 462с.
10. *Ляшко И.И.*² Математический анализ: Введение в анализ, производная, интеграл. Справочное пособие по математическому анализу: В 5 т. / *И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Л.Г. Гай, Г.П. Головчак.* – Т.1 – М.: Едиториал УРСС, 2001. – 360 с.
11. *Натансон И.П.*³ Теория функций вещественной переменной / *И.П.Натансон* – М.: Наука, 1974. – 480 с.
12. *Коши Г.А.Л.*¹ Дифференциальное и интегральное исчисление / *Г.А.Л.Коши.* – СПб: Императорская Академия Наук, 1831. – 245 с.

¹ <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>

² <http://techlibrary.ru/>

³ <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>

13. *Лопиталь Г.Ф.*¹ Анализ бесконечно малых / *Г.Ф. Лопиталь*. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1935. – 431 с.
14. *Эйлер Л.*¹ Интегральное исчисление, том 1. / *Л.Эйлер*. – М.: ГИ Физматлит, 1956. – 415 с.
15. Задачи и упражнения по математическому анализу: учеб. пособие: В 2 кн. / *И.А. Виноградова* [и др.]. – Кн. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. – М.: Высшая школа, 2002 - 724 с.
16. *Никольский С.М.* Курс математического анализа / *С.М. Никольский*. – Т.1. – 1990. – 528 с.; Т.2. – 1991. – 543 с.
17. *Давидов М.О.* Курс математичного аналізу / *М.О. Давидов*. – Ч.1. Функції однієї змінної. – К.:Вища шк. – 1990.–380 с.
18. *Шунда Н.М.* Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Диференціальне числення / *Н.М.Шунда, А.А. Томусяк*. – К.:Вища шк.,1993. – 375 с.
19. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: В 2 т. / *Л.Д. Кудрявцев*. – Т.1. – М.:Высш.шк.,1988. – 712 с.
20. *Кудрявцев Л. Д.*². Краткий курс математического анализа. В. 2 т. / *Л. Д. Кудрявцев*. – Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. – М.: Физматлит, 2005. - 400 с.
21. *Кудрявцев Л.Д.*² Сборник задач по математическому анализу. – Т.1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость *Л.Д.Кудрявцев, А.Д.Кутасов, В.И.Чехов, М.И.Щабунин*. // Ред.. *Л.Д.Кутасова*. – М.: Физматлит, 2003. -496 с.
22. *Кудрявцев Л.Д.*¹ Сборник задач по математическому анализу. Т.2 Интегралы. Ряды / *Л.Д.Кудрявцев, А.Д.Кутасов и др.* –М.: Наука,1986. – 528с.х
23. *Каплан И.А.*⁴. Практические занятия по высшей математике: В 5 ч. / *И.А. Каплан*. Харьков: Изд-во Харьковского гос. университета, 1967. – Ч. 1. – 947 с.; 1974. – Ч. 2. – 368 с.; Ч.3 – 374 с.
24. Математический анализ: учебник для студ. вузов, обучающихся по спец. "Математика", "Прикладная математика" и "Информатика": В 2 ч. / *В. А. Ильин* [и др.]; ред. А. Н. Тихонов. – Ч. 1. – М.: Издательство Проспект, 2007. - 660 с.
25. *Ильин В.А.*¹. Основы математического анализа: В 2 ч. / *В.А.Ильин, Э.Г. Позняк*. – М.: Физматлит.–Ч.1.–2005.–648 с.; Ч.2.–2002.–464 с.
26. *Ильин В.А.*¹. Основы математического анализа: В 2 ч. / *В.А.Ильин, Э.Г. Позняк*. – М.: Наука. – Ч.1. – 1982. – 616 с.; Ч.2. – 1980. – 447 с
27. *Зорич В.А.*¹ Математический анализ: В 2 ч. / *В.А. Зорич*. – Ч.1.–М.: Фазис. – 1997. – 554 с.
28. *Ляшко І.І.* Математичний аналіз: У 2 ч. / *І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук*. –Ч.1.– К.:Вища шк.–1992.–494 с.
29. *Райхмист Р.Б.* Графики функций / *Р.Б. Райхмист*.–М.:Высш.шк.,1991.–160 с.
30. *Запорожец Г.И.*¹ Руководство к решению задач по математическому анализу / *Г.И. Запорожец*.– М.:Высш.шк.,1966.–460 с.
31. *Очан Ю.С.* Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций / *Ю.С. Очан* // Под ред. М.Ф.Бокштейна – М.: Просвящение, 1981. – 271 с.

⁴ <http://techlibrary.ru/>

32. Гливенко В.И.⁵ Интеграл Стильтьеса. / В.И.Гливенко – Л.: ОНТИ, 1936 – 216 с.
33. Данко Л.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. / Л.Е.Данко, А.Г. Попов. – М.: Высшая школа, 1974. – 416 с.
34. Математический анализ в примерах и задачах / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Л.Г. Гай, Г.П. Головчак. – К.:Вища шк. – Ч.1. Введение в анализ, производная, интеграл. – 1974. – 679 с.; Ч.2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. – 1977. – 671 с.

Інформаційні ресурси

1. http://sites.znu.edu.ua/bank/index.php?action=url/view&url_id=3809
2. http://sites.znu.edu.ua/bank/public_files/2009/10/matanaliz/metod_Dif_ischesl.pdf
3. http://sites.znu.edu.ua/bank/public_files/2009/10/matanaliz/Dyach_Savr_2005_1.pdf
4. http://sites.znu.edu.ua/bank/public_files/2009/10/matanaliz/Methodichka_Lim_Strelyaev_2005.pdf
5. http://sites.znu.edu.ua/bank/public_files/2009/10/matanaliz/Int_K_Dyach.pdf
6. http://kma-znu.ucoz.ru/index/uchebnaja_literatura/0-49
7. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>
8. http://www.newlibrary.ru/genre/nauka/matematika/matematiceskii_analiz/
9. <http://www.twirpx.com/files/mathematics/algebra/analysis/>
10. <http://techlibrary.ru/>
11. http://sites.znu.edu.ua/bank/public_files/2009/10/matanaliz/05_metod_SAM_rab.htm

⁵ <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>

ДОДАТОК А. ДЕЯКІ ВАЖЛИВІ ТЕОРЕМИ, ФОРМУЛИ, МЕТОДИ І ФАКТИ

Деякі тригонометричні формули

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}, & \operatorname{ctg} x &= \frac{\cos x}{\sin x}, & \sec x &= \frac{1}{\cos x}, \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1, & 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}, & 1 + \operatorname{ctg}^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Функції кратних кутів

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, & \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x, & \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, & \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x, & \operatorname{ctg} 2x &= \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}. \end{aligned}$$

Функції суми і різниці кутів

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, & \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, & \operatorname{ctg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}. \end{aligned}$$

Формули пониження степеня

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), & \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \\ \sin^3 x &= \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x), & \cos^3 x &= \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x), \\ \sin^4 x &= \frac{1}{8}(\cos 4x - 4 \cos 2x + 3), & \cos^4 x &= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3). \end{aligned}$$

Сума й різниця тригонометричних функцій

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, & \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, & \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \\ \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}, & \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y &= \pm \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \cdot \sin y}. \end{aligned}$$

Добуток тригонометричних функцій

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)], & \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)], \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]. \end{aligned}$$

Зв'язок між оберненими тригонометричними функціями

$$\begin{aligned} \arcsin x &= -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \\ \operatorname{arctg} x &= -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Гіперболічні функції

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Деякі формули

Основна тотожність: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1), \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1), \quad \operatorname{ch} 2x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$$

| | |
|--|--|
| Дві істотні границі й наслідки з них | Еквівалентні нескінченно малі функції |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$ | $\sin x \sim x, \operatorname{tg} x \sim x \quad (x \rightarrow 0);$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$ | $\arcsin x \sim x, \operatorname{arctg} x \sim x \quad (x \rightarrow 0);$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$ | $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (x \rightarrow 0);$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e;$ | |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$ | $e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x \quad (x \rightarrow 0);$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$ | $a^x - 1 \sim x \ln a \quad (x \rightarrow 0).$ |

Таблиця похідних

| | |
|--|--|
| $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, x > 0, \alpha \in \mathbb{R};$ | $C' = 0, (x)' = 1, (x^2)' = 2x, (x^3)' = 3x^2;$ |
| $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0;$ | $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0; (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, x \neq 0;$ |
| $(a^x)' = a^x \ln a, 0 < a \neq 1;$ | $(e^x)' = e^x;$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0;$ | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, x > 0, 0 < a \neq 1;$ |
| $(\sin x)' = \cos x;$ | $(\cos x)' = -\sin x;$ |
| $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z};$ | $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z};$ |
| $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$ | $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$ |
| $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$ | $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, x \neq 0;$ |
| $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$ | $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$ |
| $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1;$ | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1;$ |
| $(x)' = \operatorname{sgn} x \quad \text{при} \quad x \neq 0;$ | $[x]' = 0 \quad \text{при} \quad x \notin \mathbb{Z}.$ |

Таблиця похідних вищих порядків

| | |
|---|---|
| $P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \Rightarrow (P_m(x))^{(n)} = \begin{cases} a_m m!, & n = m; \\ 0, & n > m; \end{cases}$ | |
| $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) \cdot x^{\alpha-n},$ $x > 0, \alpha \in \mathbb{R};$ | $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, x \neq 0;$ |
| $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a, 0 < a \neq 1;$ | $(e^x)^{(n)} = e^x;$ |
| $(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n \cdot \ln a}, 0 < a \neq 1, x > 0;$ | $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}, x > 0;$ |
| $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$ | $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ |

Таблиця розкладів елементарних функцій за формулою
Маклорена із залишковим членом у формі Пеано

| | |
|---|---|
| $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$ | |
| $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$ | $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$ |
| $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$ | $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$ |
| $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$ | |
| $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n);$ | $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$ |
| $\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! \cdot (2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$ | |
| $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n});$ | |

Деякі скінченні суми та добутки

| | |
|---|---|
| $x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ | $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}, x \neq 2^k \pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$ $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$ | $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}},$ $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$ |

Розширена таблиця основних інтегралів. Нехай $a > 0$

| № пп | $\int f(x)dx = F(x) + C$ | № пп | $\int f(x)dx = F(x) + C$ |
|---------|--|---------|--|
| 1. | $\forall \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ $x \in (0; +\infty),$ | | |
| | $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0), (0; +\infty),$ | 2. | $\int \frac{dx}{x-a} = \ln x-a + C$ на кожному з проміжків $(-\infty; a), (a; +\infty),$ |
| 3. | $\int e^x dx = e^x + C, x \in \mathbb{R},$ | 4. | $\forall a > 0, a \neq 1 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, x \in \mathbb{R},$ |
| 5. | $\int \sin x dx = -\cos x + C, x \in \mathbb{R},$ | 6. | $\int \cos x dx = \sin x + C, x \in \mathbb{R},$ |
| 7. | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ на кожному з проміжків $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n), n \in \mathbb{Z},$ | 8. | $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ на кожному з проміжків $(\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z},$ |
| 9. | $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C, x \in \mathbb{R},$ | 10. | $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C, x \in \mathbb{R},$ |
| 11. | $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, x \in \mathbb{R},$ | 12. | $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0), (0; +\infty),$ |
| 13. | $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + C, \end{cases} x \in \mathbb{R}$ | 14. | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \\ -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C, \end{cases} x \in (-1; 1)$ |

$$15. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

на кожному з проміжків $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$,

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

(для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$; для знака плюс $x \in \square$),

$$17. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (|x| \leq a), \quad x \in [-a; a],$$

$$18. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

(для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty; -a]$, $[a; +\infty)$; для знака плюс $x \in \square$).

Рекурентна формула обчислення інтеграла $K_\lambda = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^\lambda}$:

$$K_\lambda = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^\lambda} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{2\lambda - 3}{2(\lambda - 1)} K_{\lambda-1} + \frac{x}{2(\lambda - 1)(x^2 + a^2)^{\lambda-1}} \right] \quad (\lambda \in \square),$$

де $K_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

Інтегрування частинами. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на X , тоді

1) з існування на X невизначеного інтеграла $\int u(x)d(v(x))$ випливає існування інтеграла $\int v(x)d(u(x))$, 2) має місце формула

$$\int u(x)d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x))$$

Основні класи функцій, що інтегруються частинами

| Клас | Види інтегралів | Перша функція-множник | Друга функція-множник під інтегралом | Заміни | Зауваження |
|------|---|---|--|---|---|
| А | $\int P_n(x)f(x)dx$ та інтеграли, що зводяться до них | $P_n(x)$ – многочлен, $\deg P_n = n$ | $f(x) = \left[\begin{array}{l} \sin(bx), \\ \cos(bx), \\ e^{bx}, a^{bx}, \\ \frac{1}{\cos^2(bx)}, \\ \frac{1}{\sin^2(bx)}, \\ \text{і т.п.} \end{array} \right]$ | $u = P_n(x),$ $dv = f(x)dx.$ | Формула інтегрування частинами застосовується n разів |
| Б | $\int g(x)P_n[\varphi(x)]dx$ або $\int g(x)\varphi[f(x)]dx$ та інтеграли, що зводяться до них | $g(x)$ – дробово-лінійна функція, зокрема многочлен | $\varphi(x) = \left[\begin{array}{l} \arcsin(bx), \\ \arccos(bx), \\ \operatorname{arctg}(bx), \\ \operatorname{arcctg}(bx), \\ \ln(bx), \dots \end{array} \right]$ $P_n(x)$ – многочлен, $\deg P_n = n$ | $u = P_n[\varphi(x)],$ $dv = g(x)dx,$ відповідно $u = \varphi[f(x)],$ $dv = g(x)dx$ (або методом підстановки $t = \varphi(x),$ відповідно $t = \varphi[f(x)]$) | У першому випадку інтегрувати частинами n разів |
| В | $\int e^{ax} \cos bxdx,$ $\int e^{ax} \sin bxdx$ та інтеграли, що зводяться до них | | | Двічі $u = e^{ax},$ $dv = \cos bx dx$ ($dv = \sin bx dx$) або двічі $u = \cos bx$ ($u = \sin bx$), $dv = e^{ax} dx$ | Двічі інтегрувати частинами. Див. приклад 2.5, 3) |

| | |
|----|---|
| | Деякі інтеграли, що не подаються в елементарних функціях |
| 1) | інтеграл Пуассона (інтеграл помилок) $\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, |
| 2) | інтеграли Френеля $\int \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) dx$, $\int \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) dx$, |
| 3) | інтегральний логарифм $\int \frac{dx}{\ln x}$, $x > 0, x \neq 1$, |
| 4) | інтегральні косинус і синус $\int \frac{\cos x}{x} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ |

Інтегрування підстановкою. Якщо функція $t = \varphi(x)$ визначена й диференційовна на множині X і має множину визначення $T = \varphi(X)$, а для функції $g(t)$ на множині T існує первісна $G(t)$, тобто $\int g(t)dt = G(t) + C$, тоді на X функція $g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ має первісну, що дорівнює $G(\varphi(x))$, тобто

$$\int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = G(\varphi(x)) + C$$

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x) dx$ в загальному випадку знаходиться універсальною тригонометричною підстановкою: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Окремі випадки:

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ заміна $t = \cos x$,

2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ заміна $t = \sin x$,

3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ заміна $t = \operatorname{tg} x$.

Інтеграл типу $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right) dx$ знаходиться підстановкою $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}$.

Для **інтеграла типу** $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ універсальними є підстановки Ейлера:

перша підстановка Ейлера $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} + t$, якщо $a > 0$;

друга підстановка Ейлера $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} + xt$, якщо $c > 0$;

третя підстановка Ейлера $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$.

Окремі випадки:

Інтеграл типу $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, де $\deg P(x) = n$ знаходиться поданням його сумою

$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, де $Q(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами такий, що $\deg Q(x) = n - 1$, а λ – невизначений коефіцієнт.

Інтеграл типу $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $k \in \mathbb{Z}$ знаходиться заміною $t = \frac{1}{x-\alpha}$.

Інтеграл типу $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + pq + q)^\lambda \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ знаходиться за допомогою заміни Абеля

$$t = \left(\sqrt{ax^2 + bx + c}\right)' = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} \text{ та інших.}$$

Біноміальний диференціал $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, $m, n, p \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$ знаходиться за допомогою замін І. Ньютона–П.Л. Чебишева:

1) якщо $p \in \mathbb{Z}$, λ – спільний знаменник дробів m, n , тоді $t = \sqrt[\lambda]{x}$;

2) якщо $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, v – знаменник дробу p , тоді $t = \sqrt[v]{a + bx^n}$;

3) якщо $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Q}$, v – знаменник дробу p , тоді $t = \sqrt[n]{ax^{-n} + b}$.

Основна теорема інтегрального числення, **формула Ньютона-Лейбніца**). Якщо $f(x)$ – неперервна на $[a, b]$, а $F(x)$ – одна з її первісних, то має місце формула

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Заміна змінної під знаком визначеного інтеграла.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ – неперервна на } [a, b]; \\ x = \varphi(t) \text{ – неперервно диференційовна на } [\alpha, \beta]; \\ \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \\ \varphi[\alpha, \beta] = [a, b] \text{ (образ відрізка } [\alpha, \beta] \text{ збігається з відрізком } [a, b]); \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Інтегрування частинами під знаком визначеного інтеграла. Якщо $u(x)$ і $v(x)$ – неперервно диференційовні на $[a, b]$, тоді виконується формула:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

Формули обчислення інтеграла від $\sin^n x$ і $\cos^n x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

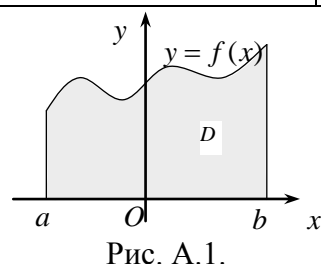
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot D_n, \quad D_n = \begin{cases} 1, & n \text{ – непарне,} \\ \frac{\pi}{2}, & n \text{ – парне,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Q}$$

Формули для обчислення довжин кривих:

| | |
|--|---|
| гладка крива задана параметрично: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$ ($\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на $[t_0, T]$) | $ L = \int_{t_0}^T \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \int_{t_0}^T \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt;$ |
| гладка крива задана явно: $y = f(x)$ – неперервно диференційовна на $[a, b]$ | $ L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx;$ |
| гладка крива задана в полярній системі координат: $\rho = \rho(\varphi)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha, \beta]$ | $ L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$ |

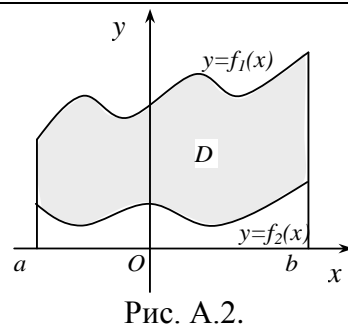
Геометричний зміст визначеного інтеграла Рімана. Визначений інтеграл Рімана від неперервної невід’ємної на $[a, b]$ функції $f(x)$ – це площа криволінійної трапеції D , утвореної графіком цієї функції, віссю абсцис і прямими $x = a$, $x = b$ (рис. А.1), тобто

$$S(D) = \int_a^b f(x)dx$$



Площа плоскої фігури D , що обмежена на **декартовій площині** графіками неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, де $f_2(x) \leq f_1(x)$, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ (рис. А.2), обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$



Криволінійний сектор OAB (рис. А.3), обмежений графіком неперервної функції $\rho = \rho(\varphi)$ у полярній системі координат і двома півпрямими $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), є кватральною областю, площа якого дорівнює

$$S(D) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

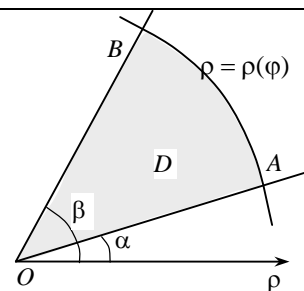


Рис. А.3.

Якщо тіло T утворене обертанням криволінійної трапеції $D = \{(x, y) \in \square^2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$ (тут $f(x)$ – неперервна функція на $[a, b]$) навколо осі Ox , то це тіло T є кубовним, а його об'єм дорівнює

$$V_x = V(T) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox плоскої фігури D , що обмежена на декартовій площині графіками неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, де $0 \leq f_2(x) \leq f_1(x)$, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ (фігуру D див на рис. А.2), обчислюється за формулою

$$V_x = \pi \int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x)) dx$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції $D = \{(x, y) \in \square^2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$, де $f(x)$ – однозначна неперервна функція на $[a, b]$, дорівнює

$$V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Формули для обчислення площ поверхонь обертання навколо осі абсцис гладких кривих ($y \geq 0$):

| | |
|--|---|
| загальний випадок: $\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} s \in [0, L]$ ($x(s)$ і $y(s)$ – неперервно диференційовні на $[0, L]$, s – параметр довжини дуги) | $P_x = 2\pi \cdot \int_0^{ L } y(s) ds ;$ |
| гладка крива задана параметрично: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_0, T]$ ($x(t)$ і $y(t)$ – неперервно диференційовні на $[t_0, T]$) | $P_x = 2\pi \cdot \int_{t_0}^T y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt ;$ |
| гладка крива задана явно: $y = f(x)$ – неперервно диференційовна на $[a, b]$ | $P_x = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx ;$ |
| гладка крива задана в полярній системі координат: $\rho = \rho(\varphi)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha, \beta]$ | $P_\rho = 2\pi \cdot \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2} d\varphi$ |

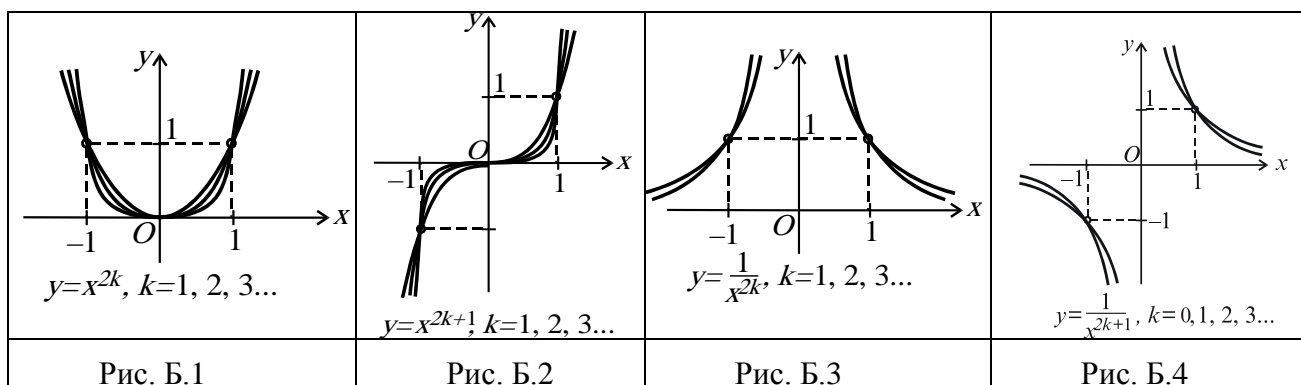
Збіжність невластних інтегралів від степеневих функцій:

| | | | |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ (а > 0) | збігається при $\lambda > 1$, | $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ | збігається при $\lambda < 1$, |
| | розбігається при $\lambda \leq 1$, | | розбігається при $\lambda \geq 1$ |

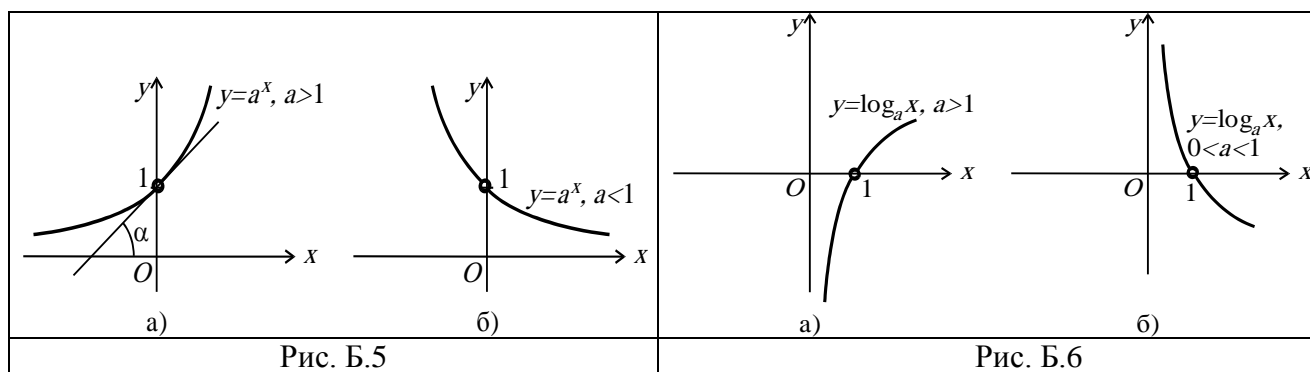
ДОДАТОК Б. ГРАФІКИ ДЕЯКИХ КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ

Графіки елементарних функцій [16]

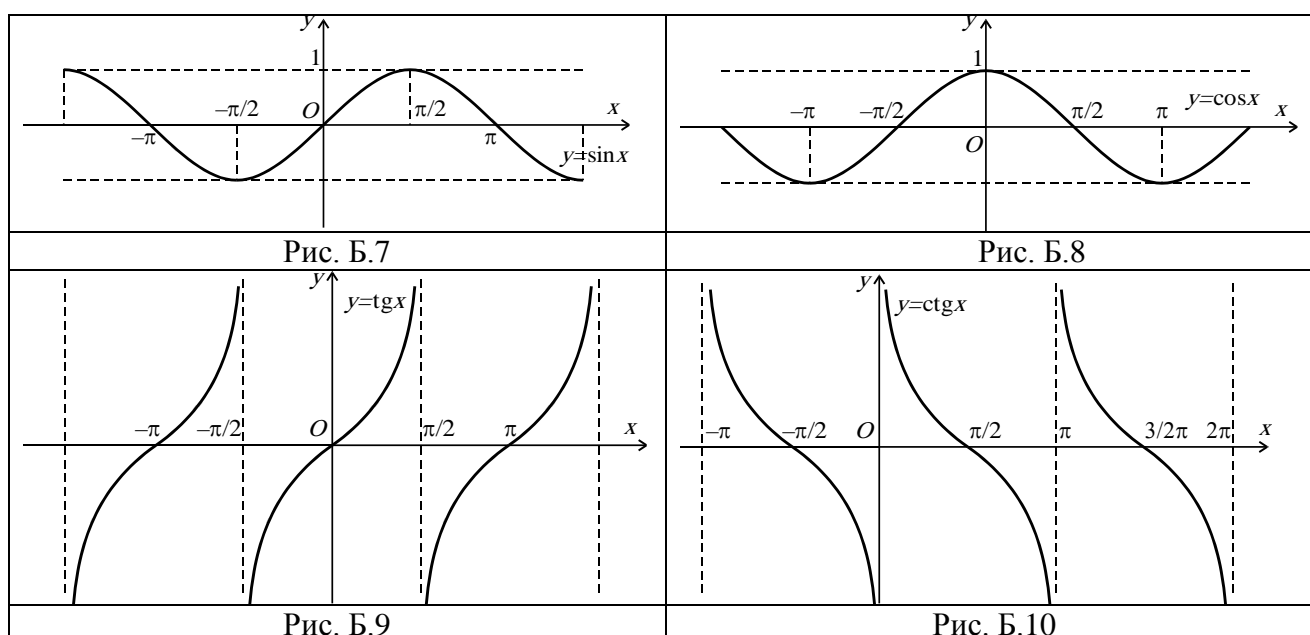
Графіки деяких степеневих функцій наведені на рис. Б.1 – Б.4.



Графіки показникових і логарифмічних функцій для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ наведено на рис. Б.5 а, б і рис. Б.6 а, б відповідно.



Графіки тригонометричних функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ б $y = \operatorname{ctg} x$ зображено на рис. Б.7 – Б.10.



Графіки обернених до тригонометричних функцій $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ зображено на рис. Б.11 – Б.14

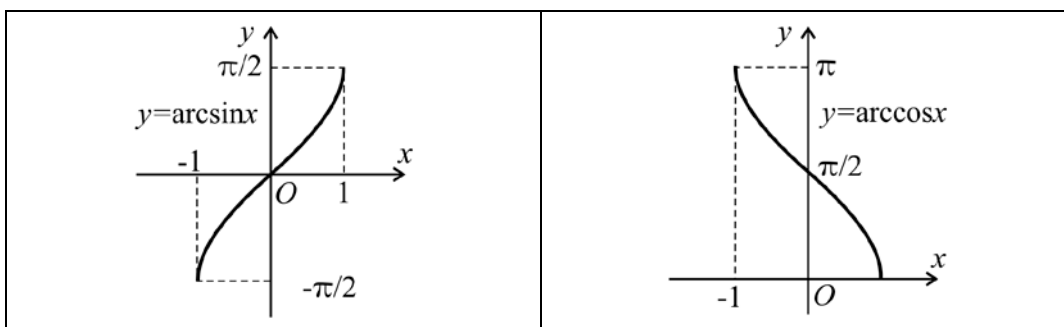


Рис. Б.11

Рис. Б.12

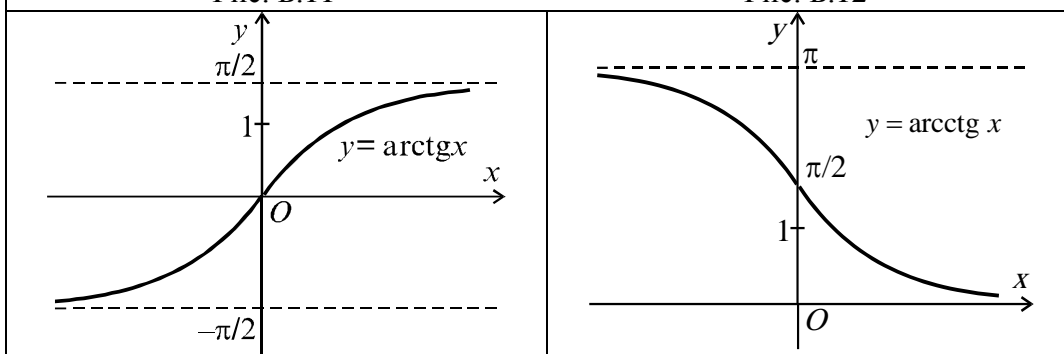


Рис. Б.13

Рис. Б.14

Графіки гіперболічних функцій $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$ зображено на рис. Б.15 – Б.18

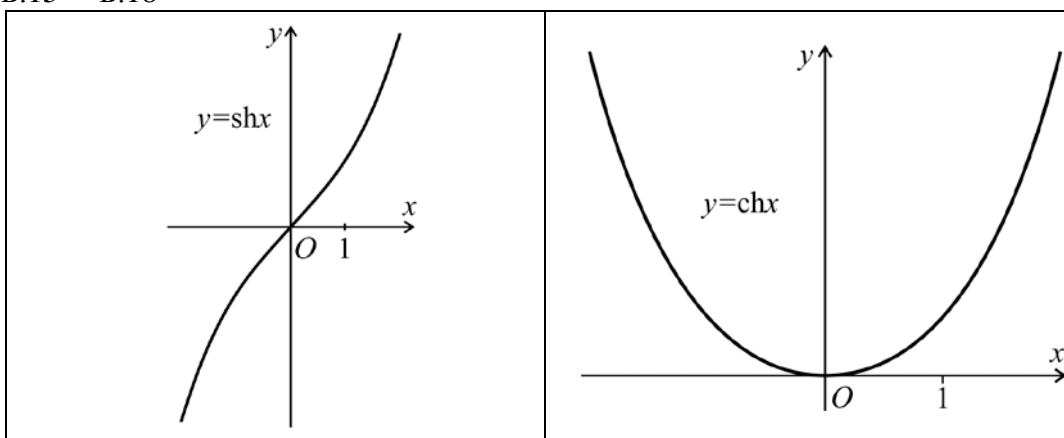


Рис. Б.15

Рис. Б.16

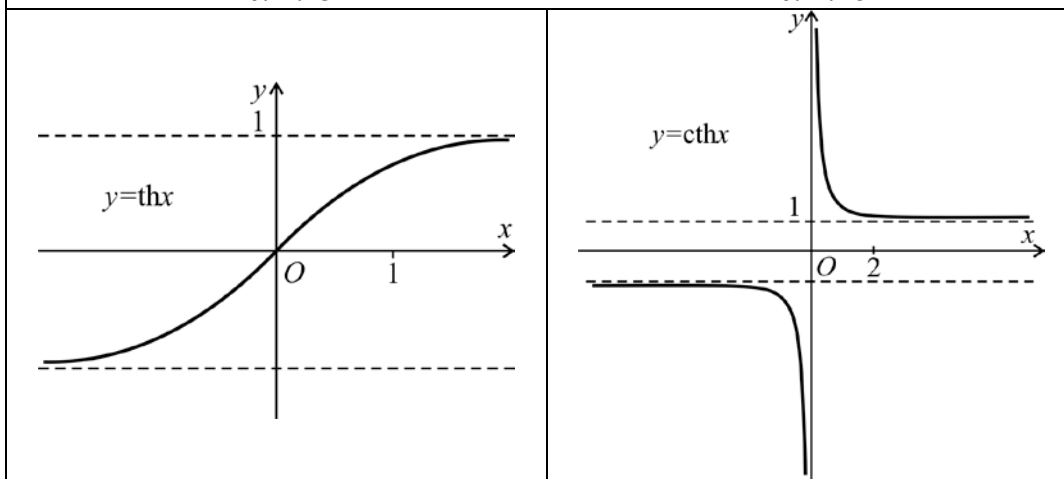


Рис. Б.17

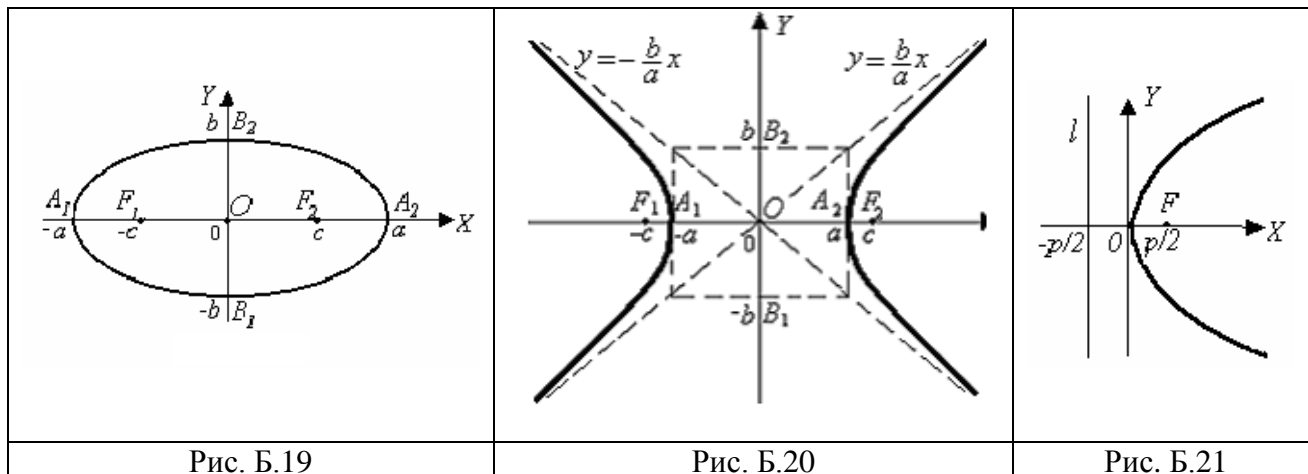
Рис. Б.18

Криві другого порядку

1. Еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Рис. Б.19).

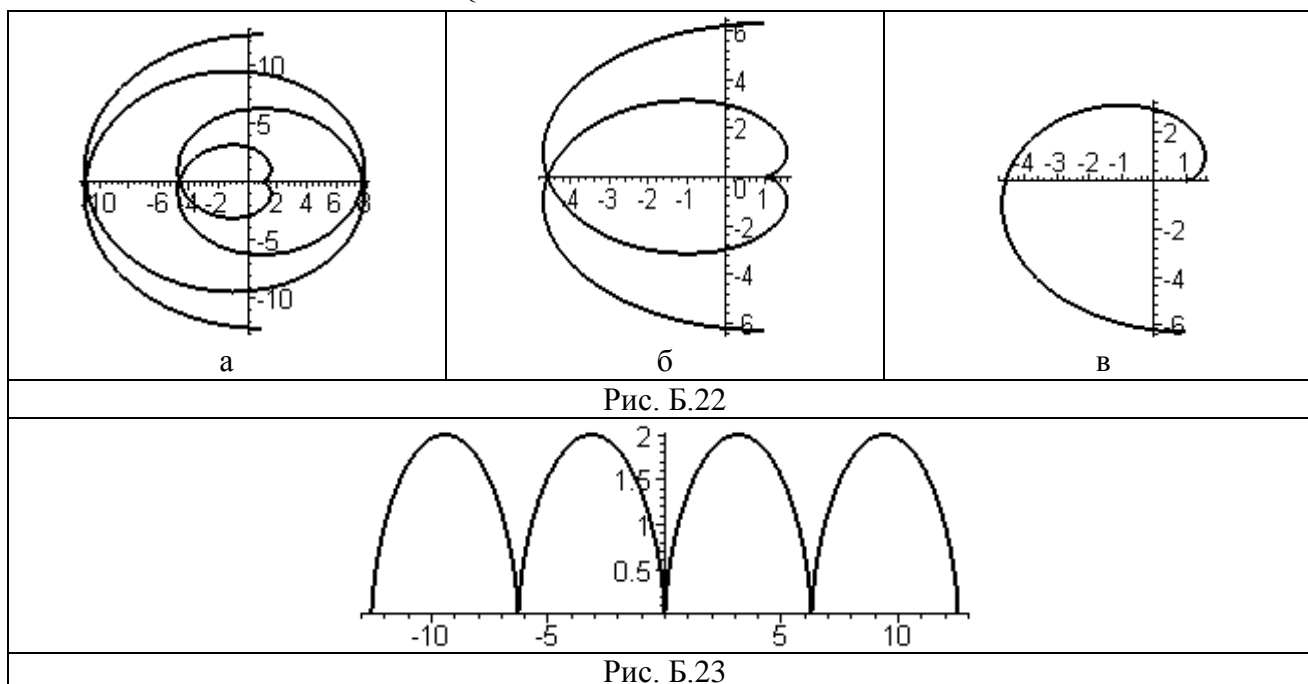
2. Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Рис. Б.20).

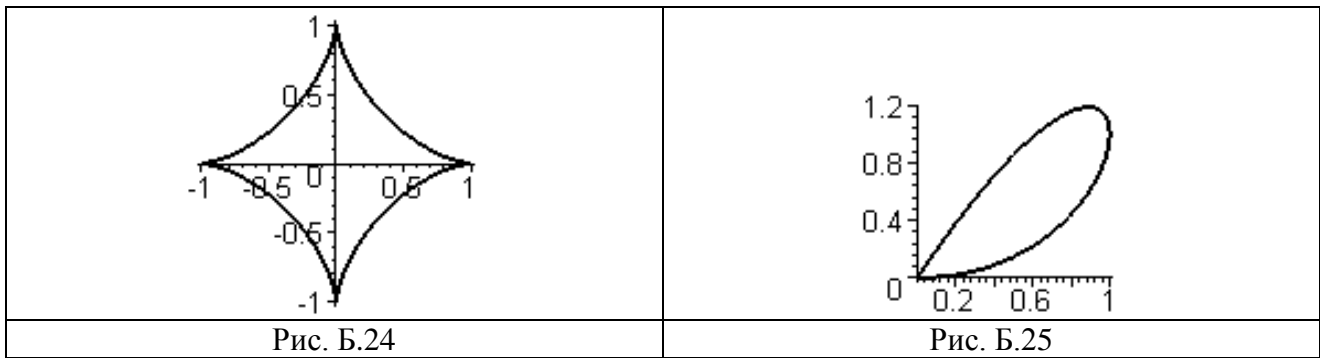
3. Парабола $y^2 = 2px$ (Рис. Б.21).



Графіки деяких кривих, що задані параметрично:

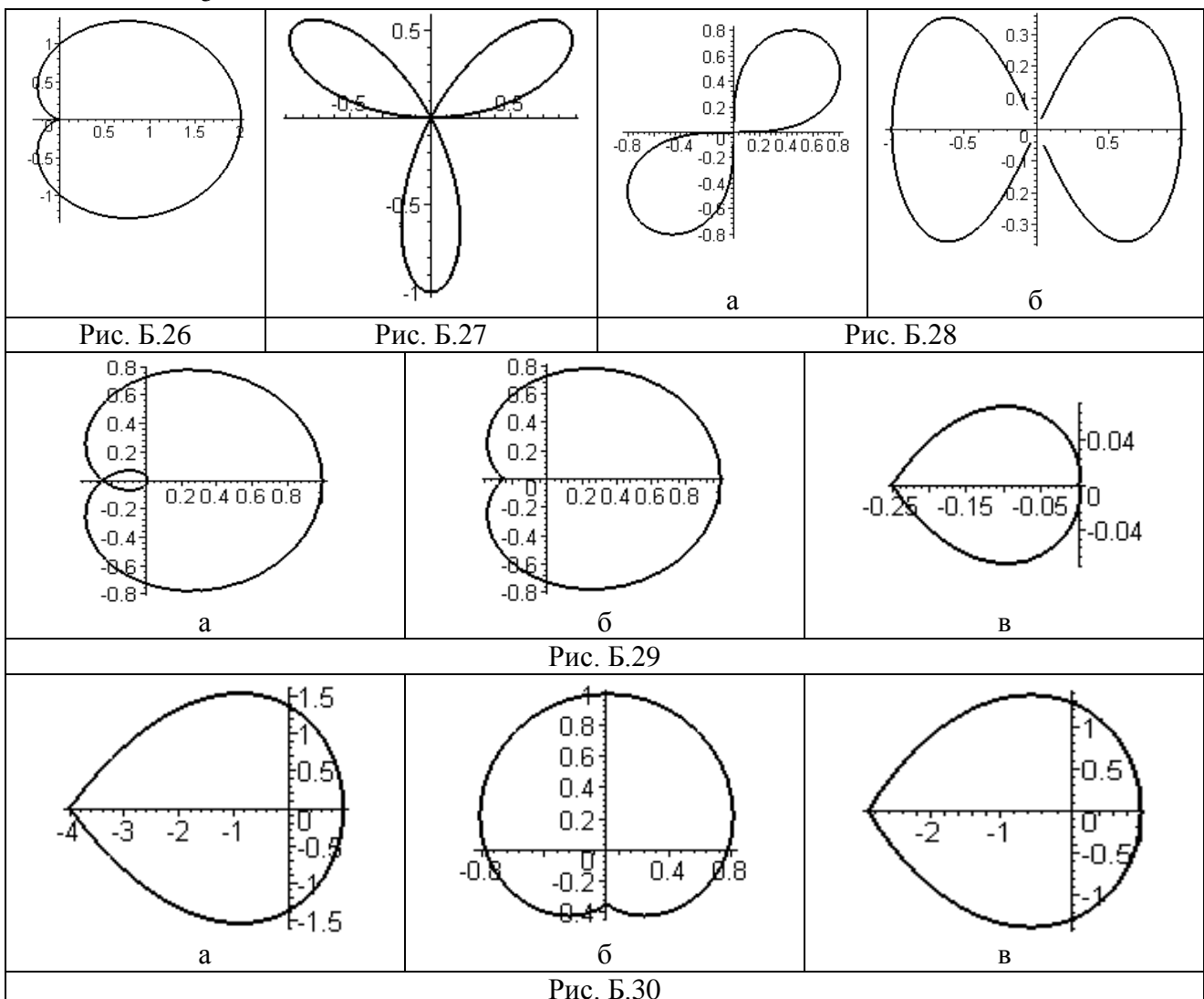
- 1) На рис. Б.22 зображено графік розгортки кола $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ при а) $-4\pi \leq t \leq 4\pi$, б) $-2\pi \leq t \leq 2\pi$, в) $0 \leq t \leq 2\pi$;
- 2) на рис. Б.23 – графік циклоїди $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ при $-4\pi \leq t \leq 4\pi$;
- 3) на рис. Б.24 – графік астроїди $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^3 t \end{cases}$ при $0 \leq t \leq 2\pi$;
- 4) на рис. Б.25 – графік кривої $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3 \end{cases}$ при $0 \leq t \leq 2$.





Графіки деяких кривих, що задані в полярній системі координат

- 1) На рис. Б.26 зображено графік кардіоїди $\rho = 1 + \cos \varphi$;
 - 2) на рис. Б.27 – графік трилисника $\rho = \sin 3\varphi$;
 - 3) на рис. Б.28 – графіки лемніскат а) $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$, б) $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$;
 - 4) на рис. Б.29 – графік кривої $\rho = \cos^4 \frac{\varphi}{4}$ при а) $-2\pi \leq \varphi \leq 2\pi$; б) $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, в) $\pi \leq \varphi \leq 3\pi$;
 - 5) на рис. Б.30 – графіки кривих а) $\rho = \frac{1}{\cos^4 \frac{\varphi}{4}}$ при $-\pi \leq \varphi \leq \pi$; б) $\rho = \sin^5 \frac{\varphi}{5}$ при $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{2}$;
- в) $\rho = \frac{1}{\cos^5 \frac{\varphi}{5}}$ при $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.



Поверхні другого порядку [16]

1. Еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. Б.31)
2. Однополосний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. Б.32)/
3. Двуполосний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (рис. Б.33).

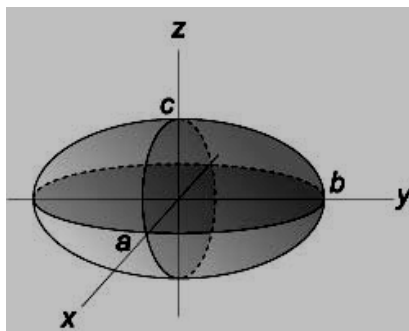


Рис. Б.31

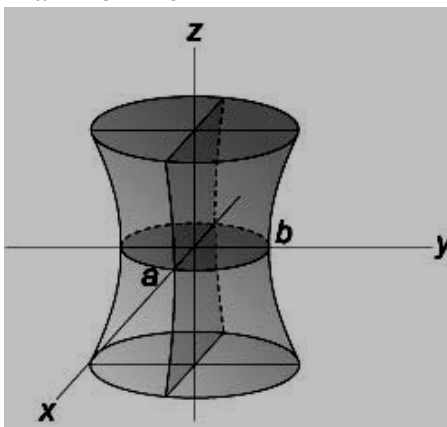


Рис. Б.32

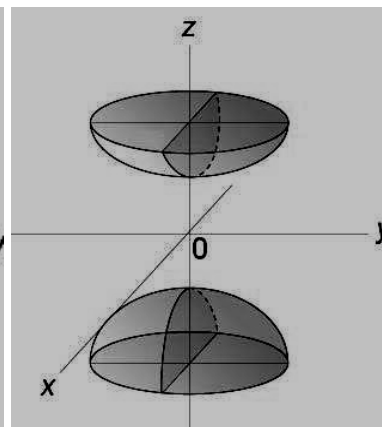


Рис. Б.33

4. Конічна поверхня $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (рис. Б.34).
5. Еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ (рис. Б.35).
6. Гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ (рис. Б.36).

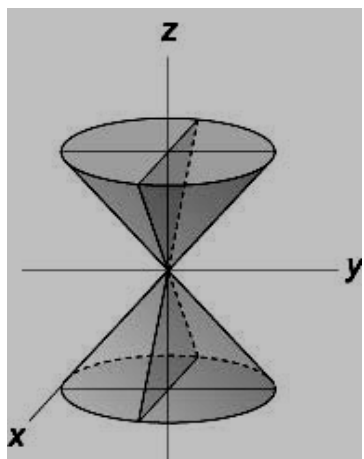


Рис. Б.34

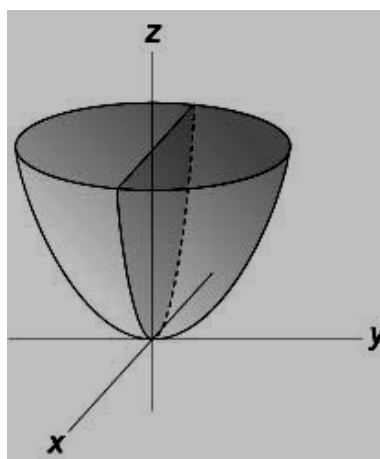


Рис. Б.35

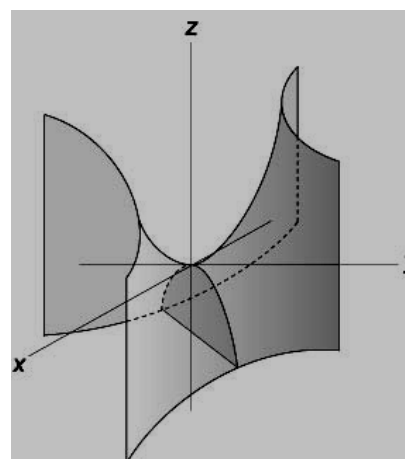


Рис. Б.36

7. Еліптичний циліндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. Б.37).
8. Гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. Б.38).
9. Параболічний циліндр $\frac{x^2}{a^2} - y = 0$ (рис. Б.39).

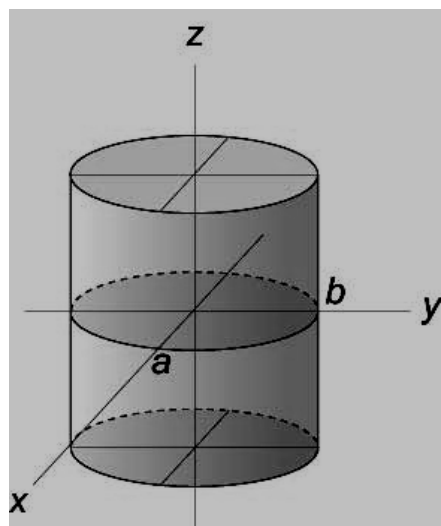


Рис. Б.37

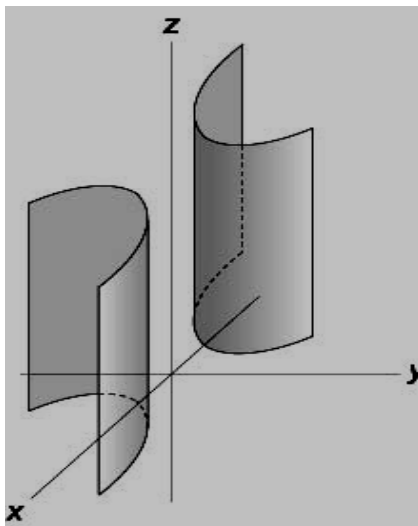


Рис. Б.38

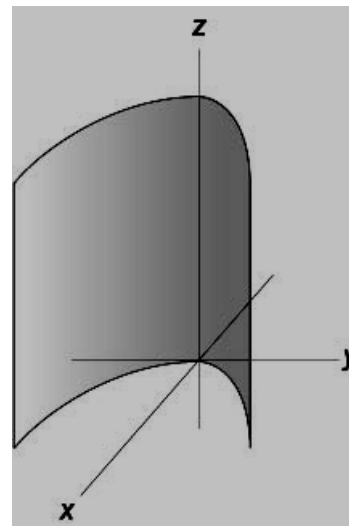


Рис. Б.39

ЗМІСТ

| | | |
|---|--|----|
| ВСТУП | | 3 |
| ЗАВДАННЯ № 1 | <i>«Елементи теорії дійсних чисел. Теорія границь»</i> | 5 |
| ЗАВДАННЯ № 2 | <i>«Неперервність функції. Диференціальне числення функції однієї змінної»</i> | 18 |
| ЗАВДАННЯ № 3 | <i>«Функції багатьох змінних»</i> | 25 |
| ЗАВДАННЯ № 4 | <i>«Інтегральне числення функції однієї змінної»</i> | 30 |
| ЗАВДАННЯ №5 | <i>«Числові та функціональні ряди»</i> | 38 |
| ЗАВДАННЯ № 6 | <i>«Інтегральне числення функції багатьох змінних»</i> | 45 |
| <i>РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА та ІНФОРМАЦІЙНІ ДЖЕРЕЛА</i> | | 59 |
| ДОДАТОК А | <i>Деякі важливі теореми, формули, методи і факти</i> | 63 |
| ДОДАТОК Б | <i>Графіки деяких кривих та поверхонь</i> | 70 |

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ
(українською мовою)

Д'яченко Наталія Миколаївна
Красікова Ірина Володимирівна
Тітова Ольга Олександрівна
Стреляєв Юрій Михайлович

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Збірник завдань до самостійної роботи
для студентів освітнього ступеня рівня «бакалавр»
напрямів підготовки «Прикладна математика», «Математика»

Рецензент *С.М. Гребенюк*
Відповідальний за випуск *Н.М. Д'яченко*
Коректор *Н.М. Д'яченко*