17 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

17.1 Інтеграл Рімана на m- вимірному проміжку

🗀**Означення** (m-вимірного проміжку). Множина

$$\mathrm{I}=\left\{\overline{x}=\left(x_1,x_2,...,x_j,...,x_m\right)\in\mathbb{R}^m : a_j\le x_j\le b_j,\ j=\overline{1,m}\right\}$$

називається *m- вимірним проміжком*.

Приклади. 1. Якщо m=1 то одновимірним проміжком являється відрізок числової прямої $[a_1,b_1]$.

2. Якщо m=2, то двовимірним проміжком являється прямокутник на декартовій площині, координати якого задовольняють нерівностям:

$$\begin{array}{l} a_1\le x_1\le b_1 \\ a_2\le x_2\le b_2 \end{array},$$

тобто в цьому випадку

$$I=\left[a_1,b_1\right]\times\left[a_2,b_2\right].$$

2. Якщо m=3, то двовимірним проміжком являється прямий паралелепіпед в декартовому просторі, координати якого задовольняють нерівностям:

$$\begin{array}{l} a_1\le x_1\le b_1, \\ a_2\le x_2\le b_2, \\ a_3\le x_3\le b_3. \end{array}$$

Тобто в цьому випадку

$$I=\left[a_1,b_1\right]\times\left[a_2,b_2\right]\times\left[a_3,b_3\right].$$

3. Якщо хочуть зазначити, що проміжок визначається точками $\overline{a}=\left(a_1,...,a_m\right)$, $\overline{b}=\left(b_1,...,b_m\right)$, то його позначають в такий спосіб:

$I_{\left[\overline{a},\overline{b}\right]}$ або $\left[\overline{a},\overline{b}\right]$.

🗀**Означення.** *Мірою або об'ємом проміжку* $I=I_{\left[\overline{a},\overline{b}\right]}$ (тут $\overline{a}=\left(a_1,...,a_m\right)$, $\overline{b}=\left(b_1,...,b_m\right)$) називається число $\prod\limits_{j=1}^{m}\left(b_j-a_j\right)$. Позначення: $\left|I\right|=V\left(I\right)=\mu\left(I\right)=\prod\limits_{j=1}^{m}\left(b_j-a_j\right)$.

Властивості міри проміжку.

1. $\mathrm{I}_{\left[\lambda\overline{a},\lambda\overline{b}\right]}=\lambda^m\mathrm{I}_{\left[\overline{a},\overline{b}\right]}$.

2. Якщо проміжок I розбито на скінченну кількість проміжків, які попарно не мають спільних внутрішніх точок, тобто

$$I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j, \quad \left(I_j\right)^o \bigcap \left(I_i\right)^o = \varnothing \ \forall i \neq j,$$

тоді

$$|I| = \sum_{j=1}^{n} |I_j|.$$

3. Якщо проміжок I покрито за допомогою скінченної кількості проміжків, тобто $\mathrm{I} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{I}_j$, тоді для їх міри здійснюється нерівність

$$|I| \leq \sum_{j=1}^{n} |I_j|.$$

ПОВТОРЕННЯ. Розглянемо випадок функції однієї змінної.
Нехай $f(x)$ – задана на $[a,b]$,
розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$ скінченною кількістю точок
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$,
позначимо розбиття $R = \{x_k\}$.
Розглянемо точки $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $\quad k = \overline{1,n}$, $P = \{\alpha_k\}$ - проміжні точки.
Розглянемо $\sigma = \sigma(f, R, P) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k$ - інтегральна сума, тут
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $d = \max_{k=\overline{1,n}}\left(x_k - x_{k-1}\right)$ - діаметр розбиття.

🗁**Означення 1** *(на мові границь)***.** Якщо для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a,b]$, для будь-якого розбиття R відрізка $[a,b]$ і для будь якого набору проміжних точок P відрізків розбиття, існує скінченна границя I інтегральних сум $\sigma(f, R, P) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k$ при діаметрі розбиття d, що прагне до нуля, тобто $I = \lim_{d \to 0} \sigma(f, R)$, яка не залежить від вибору розбиття R і набору проміжних точок P, то така функція називається *інтегрованою за Ріманом* на відрізку $[a,b]$, а значення границі – *визначеним інтегралом Рімана*, що позначається $I = \int_a^b f(x)dx$.

🗁**Означення 2** *(на мові $\varepsilon - \delta$)***.** Якщо
$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \ \ R = \{x_k\} \forall P = \{\alpha_k\} \quad d < \delta \Rightarrow |I - \delta| < \varepsilon$,

то число I називається границею інтегральних сум і позначається $I = \lim\limits_{d \to 0} \sigma$. Якщо таке число I існує, то функція $f(x)$ називається *інтегрованою за Ріманом* на відрізку $[a,b]$, а значення границі I – *визначеним інтегралом Рімана.*

Кратний інтеграл є узагальненням визначеного інтеграла Рімана функції однієї змінної.

Кожен з відрізків $\left[a_j, b_j\right]$ ($j = \overline{1,m}$), що утворює проміжок I, розбивається на відрізки, а розбиття проміжку I утворюється із проміжків, кожен з яких є декартовим добутком відрізків утворенних розбиттів.

Позначимо через $R = \left\{I_j\right\}_{j=1}^{n}$ множину проміжків розбиття, $\overline{\alpha}_j \in I_j$ - проміжні, відмічені точки, $P = \left\{\overline{\alpha}_j\right\}$ - множина відмічених точок.

Якщо A - довільна множина в $\mathbb{R}_2^m$, то $d(A) = \sup\left\{\rho\left(x, y\right) : x, y \in A\right\}$ - діаметр множини A. Діаметром розбиття $d = d\left(R\right)$ називається максимальний серед усіх діаметрів проміжків розбиття, тобто

$$d = d\left(R\right) = \max_j d\left(I_j\right).$$

🗁**Означення.** Інтегральною сумою функції $f\left(\overline{x}\right)$, що відповідає розбиттю $R = \left\{I_j\right\}_{j=1}^{n}$ проміжку I з відміченими точками $P = \left\{\overline{\alpha}_j\right\}$ називається значення наступної суми

$$\sigma = \sigma\left(f, R, P\right) = \sum_{j=1}^{n} f\left(\overline{\alpha}_j\right) \cdot \left|I_j\right|.$$

🗁**Означення.** Число $J = \lim\limits_{d \to 0} \sigma$ називається границею інтегральних сум при діаметрі розбиття, що прагне до нуля, $d \to 0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall R\ \forall P \qquad d < \delta \Rightarrow \left|\sigma - J\right| < \varepsilon.$$

Якщо існує $J = \lim\limits_{d \to 0} \sigma$, тоді функція $f\left(\overline{x}\right)$ називається *інтегровною за Ріманом на проміжку I. Позначення:* $f\left(\overline{x}\right) \in \Re\left(I\right)$. Число J називається *інтегралом Рімана на проміжку I.* Позначення: $J = \int\limits_I f\left(\overline{x}\right) d\overline{x}$.

Ще раз підкреслимо, що значення границі $J = \lim\limits_{d \to 0} \sigma$ (згідно до визначення) не повинно залежати від способу розбиття і вибору відмічених точок.

17 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Окремі випадки кратний інтегралів:

m=1 $\quad J = \int\limits_{I=[a,b]} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ - визначений інтеграл Рімана,

m=2 $\quad J = \iint\limits_I f(x,y)\,dxdy$ - подвійний інтеграл,

m=3 $\quad J = \iiint\limits_I f(x,y,z)\,dxdydz$ - потрійний інтеграл.

Теорема (*необхідна умова інтегровності функції на проміжку*). $f(\overline{x}) \in \Re(I) \quad \Rightarrow \quad f(\overline{x})$ – обмежена на I.

Доведення. Пп.: припустимо супротивне, що $f(\overline{x})$ - необмежена. Розглянемо розбиття $R = \{I_j\}_{j=1}^n$ проміжку I і формально випишемо інтегральну суму

$$\sigma = \sigma(f,R,P) = \sum_{j=1}^n f(\overline{\alpha}_j)\cdot|I_j|,$$

що відповідає множині відмічених точок $P = \{\overline{\alpha}_j\}$, які будемо обирати наступним чином. Оскільки функція $f(\overline{x})$ -необмежена, то вона необмежена хоча б на одному із проміжків розбиття $I_{j_0} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \forall M > 0 \exists \overline{\alpha}_{J_0} \in I_{j_0} : \left| f(\overline{\alpha}_{j_0}) \right| \cdot \left| I_{j_0} \right| > M + \left| \sigma^* \right|,$$

де $\sigma^* = \sum\limits_{j \neq j_0} f(\overline{\alpha}_j)|I_j|$. Тоді

$$|\sigma| = \left| \sigma^* + f(\overline{\alpha}_{j_0}) \cdot |I_{j_0}| \right| \geq \left| \left| f(\overline{\alpha}_{j_0}) \right| |I_{j_0}| - |\sigma^*| \right| > M + |\sigma^*| - |\sigma^*| = M .$$

Висновок: границя інтегральних сум не існує, тому функція $f(\overline{x})$ неінтегровна на I. $\quad \not\to \quad$ ■

17.2 Критерії Дарбу інтегровності функції багатьох змінних на проміжку

Введемо позначення:

$$m_j = \inf_{\overline{x} \in I_j} f(\overline{x}), \quad M_j = \sup_{\overline{x} \in I_j} f(\overline{x}).$$

Тут $R = \{I_j\}_{j=1}^n$ - розбиття проміжку I.

17 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Визначимо нижню та верхню інтегральні суми Дарбу функції $f(\overline{x})$ на проміжку I, що відповідає розбиттю $R = \left\{I_j\right\}_{j=1}^{n}$ відповідно:

$$\underline{S} = \underline{S}(f, R) = \sum_{j=1}^{n} m_j \left|I_j\right|,$$

$$\overline{S} = \overline{S}(f, R) = \sum_{j=1}^{n} M_j \left|I_j\right|.$$

Властивості інтегральних сум Дарбу.

Вл. 1. $\boxed{\underline{S}(f, R) = \inf_P \sigma(f, R, P) \le \sup_P \sigma(f, R, P) = \overline{S}(f, R)}$.

Ця властивість є наслідком визначення сум Дарбу.

Вл. 2. Якщо R_1 є подрібненням розбиття R, то має місце нерівність

$\boxed{\underline{S}(f, R) \le \underline{S}(f, R_1) \le \overline{S}(f, R_1) \le \overline{S}(f, R)}$.

Доведення здійснюється аналогічно одновимірному випадку.

Вл. 3. Будь-яка нижня сума для розбиття R_1 не більша за будь-яку верхню суму Дарбу для іншого розбиття R_2:

$\boxed{\underline{S}(f, R_1) \le \overline{S}(f, R_2)}$.

Доведення. Введемо до розгляду розбиття R_3, яке є подрібненням як розбиття R_1, так і розбиття R_2, і інтегральні суми Дарбу, що йому відповідають $\underline{S}_3$ *і* $\overline{S}_3$. Тоді згідно до вл. 2 отримаємо

$\underline{S}_1 \le \underline{S}_3 \le \overline{S}_3 \le \overline{S_2}$. ■

Вл.4. $\forall \varepsilon > 0\ \forall R\ \exists P_1 : \overline{S}(f, R) - \sigma(f, R, P_1) < \varepsilon$,

$\forall \varepsilon > 0\ \forall R\ \exists P_2 : \sigma(f, R, P_2) - \underline{S}(f, R) < \varepsilon$.

Доведення здійснюється аналогічно одновимірному випадку.

Розглянемо множину $\left\{\overline{S}(f, R) : R\right\}$.Вона обмежена знизу, наприклад, значенням суми $\underline{S}\left(f, R^*\right)$, де R^* - фіксоване розбиття,

$\Rightarrow \exists \inf\left\{\overline{S}(f, R) : R\right\} = \underline{J}$ - *верхній інтеграл Дарбу.*

Аналогічно $\exists \sup\left\{\underline{S}(f, R) : R\right\} = \overline{J}$ - *нижній інтеграл Дарбу.*

Теорема (*критерій Дарбу* інтегрованості функції на проміжку). Функція $f(\overline{x})$ - інтегровна на проміжку I тоді і тільки тоді, коли $\lim_{d \to 0}\left(\overline{S} - \underline{S}\right) = 0$, тобто

$$f(\bar{x}) \in \Re(I) \quad \Rightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall R \;\; d < \delta \;\Rightarrow\; \overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R) < \varepsilon).$$

Доведення здійснюється аналогічно одновимірному випадку.

Наслідок. Обмежена функція $f(\bar{x})$ - інтегровна на проміжку I тоді і тільки тоді, коли $\underline{J} = \overline{J}$, крім того, $\underline{J} = \overline{J} = J = \int\limits_I f(\bar{x})dx$.

17.3 Класи інтегровних функцій на проміжку

Теорема. Неперервні функції на проміжку інтегровні на ньому.

Доведення здійснюється за допомогою наслідку із теореми Кантора аналогічно випадку функції однієї змінної.

🗁**Означення.** Множина A *має лебегову міру нуль* (позначення: $\mu A = 0$), якщо її можна покрита не більше, ніж зчисленною кількістю проміжків, сумарним об’ємом, меншим наперед заданою ε. Тобто

$$\mu A = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \{I_j\}_{j \in M} \left(\overline{\overline{M}} \le a\right) : A \subset \bigcup_{j \in M} \mathrm{I}_j \wedge \sum_{j \in M} \left|I_j\right| < \varepsilon .$$

Зауваження. Безпосередньо із означення випливає таке: якщо множина A має лебегову міру нуль, то будь-яка її підмножина B матиме теж міру нуль, тобто

$$\left.\begin{matrix} \mu A = 0 \\ \forall B \subset A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mu B = 0 .$$

Ця властивість міри Лебега називається неперервністю міри Лебега.

Приклади.

1) A - скінченна $\Rightarrow \mu A = 0$.

Дійсно,

$$\left.\begin{matrix} \overline{\overline{A}} = n \Rightarrow A = \{a_j\}_{j=1}^{n} \\ a_j \in I_j : \left|I_j\right| < \dfrac{\varepsilon}{n} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \supset \bigcup_{j=1}^{n} I_j \wedge \sum_{j=1}^{n} \left|I_j\right| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

2) A - зчисленна $\Rightarrow \mu A = 0$.

Дійсно,

$$\left.\begin{matrix} A = \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \\ a_j \in I_j : \left|I_j\right| < \dfrac{\varepsilon}{2^j} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \wedge \sum_{j=1}^{\infty} \left|I_j\right| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \frac{\varepsilon/2}{1 - 1/2} = \varepsilon .$$

Наприклад, множина $\mathbb{Q}^m$ – зчисленна $\Rightarrow \mu \mathbb{Q}^m = 0$.

3) Якщо $I^{(m-1)} - (m-1)$ - вимірний проміжок, а функція $\varphi(\overline{x})$ - неперервна на $I^{(m-1)}$, тоді множина $G = \left\{(\overline{x}, \overline{y}) : y = \varphi(\overline{x}) \wedge \overline{x} \in I^{(m-1)}\right\}$ в $\mathbb{R}^m$, що являється графіком функції $\varphi(\overline{x})$, має лебегову міру нуль, тобто $\mu G = 0$.

Доведення. Згідно до наслідку з теореми Кантора проміжок $I^{(m-1)}$ можна розбити на скінченну кількість проміжків $\left\{I_j^{(m-1)}\right\}_{j=1}^{n}$, на кожному з яких коливання функції $\varphi(\overline{x})$ буде меншим за $\varepsilon^* < \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}}$.

Припустимо, що $\mu_{(m-1)}\left(I_j^{(m-1)}\right) < \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}}$.

Обираємо, довільні точки $\overline{x}_j$ із проміжку розбиття $I_j^{(m-1)}$. Розглянемо множину $I_j^{(m-1)} \times \left[\varphi\left(\overline{x}_j\right) - \varepsilon^*, \varphi\left(\overline{x}_j\right) + \varepsilon^*\right]$. Вона гарантовано покриває ділянку графіку функції $\varphi(\overline{x})$, що розташовується над проміжком $I_j^{(m-1)}$. Множини $I_j^{(m-1)} \times \left[\varphi\left(\overline{x}_j\right) - \varepsilon^*, \varphi\left(\overline{x}_j\right) + \varepsilon^*\right]$ є проміжками в $\mathbb{R}^m$ об'єму (міри)

$$\mu_m\left(I_j^{(m-1)} \times \left[\varphi\left(\overline{x}_j\right) - \varepsilon^*, \varphi\left(\overline{x}_j\right) + \varepsilon^*\right]\right) = \mu_{m-1}\left(I_j^{(m-1)}\right) \cdot 2\varepsilon^* < \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}} = \frac{\varepsilon}{n}.$$

Такі проміжки покривають графік функції $\varphi(\overline{x})$, тобто множину G і мають сумарний об'єм, менший за ε. ■

Зауваження. Множена із приклада покрита скінченною кількістю проміжків загального об'єму, меншого за ε. Це відповідає жордановій міри нуль.

Теорема (*критерії Лебега інтегровності функції на проміжку*). Обмежена функції $f(\overline{x})$ на проміжку I інтегрована тоді і тільки тоді, коли множена A її точок розриву має міру Лебега нуль, тобто $\mu A = 0$.

Доведення тереми входить в курс «Теорія міри та інтегралу».

Якщо деяка властивість виконується у всіх точках, окрім точок лебегової міри нуль, то кажуть що ця властивість виконується *майже скрізь*. Тому останню теорему можна сформулювати в такий спосіб:

обмежена функція інтегрована на проміжку I тоді і тільки тоді, коли вона на ньому неперервна майже скрізь.

17.4 Інтеграл по множині

17.4.1 Допустимі множини.

🗀**Означення.** Множина A із m- вимірного простору називається *допустимою*, якщо множина її межових точок має лебегову міру нуль. Тобто

$$A\subset\mathbb{R}^m \text{ - допустима } \overset{def}{\Leftrightarrow} \mu\left(\partial A\right)=0 .$$

Приклад 1. Якщо область D обмежена графіками функцій $y=\varphi\left(\overline{x}\right)$, $y=\psi\left(\overline{x}\right)$, неперервними на $\mathrm{I}^{(m-1)}$, тоді D являється допустимою множиною в $\mathbb{R}^m$ (згідно до прикладу 3 із 17.3).

Зокрема, якщо $m=2$, функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ - неперервні на $[a,b]$, а також $f_1(x)\geq f_2(x)$ на $[a,b]$, то множина $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leq x\leq b\wedge f_2(x)\leq y\leq f_1(x)\}$ (рис. 17.1) має межу лебегової міри нуль. Отже вона є допустимою.

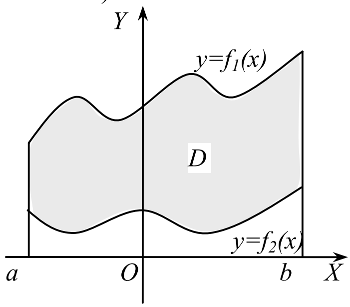


Рис. 17.1

Приклад 2. Тетраедр, куля, призма, куб, паралелепіпед є множинами допустимими, оскільки множина їх межових точок утворюється із скінченої кількості неперервних поверхонь.

Лема.

$$E_1,E_2\subset\mathbb{R}^m \Rightarrow \begin{cases} 1)\partial E_1,\partial E_2 - \textit{замкнена} \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}_2^m, \\ 2)\ \partial\left(E_1\bigcup E_2\right)\subset\partial E_1\bigcup\partial E_2, \\ \partial\left(E_1\bigcap E_2\right)\subset\partial E_1\bigcup\partial E_2, \\ \partial\left(E_1\setminus E_2\right)\subset\partial E_1\bigcup\partial E_2. \end{cases}$$

Наслідок. Якщо E_1 и E_2- допустимі множини, тоді їх об'єднання, перетин і різниця також будуть множинами допустимими.

►Доведення отримаємо із імплікації

$$\mu\left(\partial E_1\right)=\mu\left(\partial E_2\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \mu\left(\partial E_1\bigcup\partial E_2\right)=0 ,$$

леми і властивості неперервності міри Лебега.◄

🗀**Означення.** *Характеристичною функцією* множини E називається функція вигляду:

$$\chi_E\left(\overline{x}\right)=\begin{cases}1,\overline{x}\in E,\\ 0,\overline{x}\notin E.\end{cases}.$$

Задамо функцію

$$f\chi_E\left(\overline{x}\right)=\begin{cases} f\left(\overline{x}\right), \overline{x}\in E, \\ 0, \overline{x}\notin E. \end{cases}$$

Нехай $f\left(\overline{x}\right)$ - задана на допустимій множині E . Розглянемо проміжок I , для якого $I\supset E$.

🗀**Означення.** Нехай E - допустима множина, тоді *інтегралом по допустимій множині* E називається інтеграл по проміжку I , що покриває E , тобто

$$\int\limits_E f\left(\overline{x}\right)d\overline{x}\overset{def}{=}\int\limits_{I\supset E} f\chi_E\left(\overline{x}\right)d\overline{x} .$$

Лема (*коректність визначення*). Нехай E - допустима множина, тоді

$$\left(I_1\supset E, I_2\supset E\right)\Rightarrow\int\limits_{I_1} f\chi_E\left(\overline{x}\right)d\overline{x}=\int\limits_{I_2} f\chi_E\left(\overline{x}\right)d\overline{x} .$$

Це означає, що у означенні інтегралу по множині E байдуже, який проміжок обирати в якості того, що покриває множину E .

Доведення. Розглянемо допоміжний проміжок $I=I_1\bigcap I_2\supset E$, тоді

$$\int\limits_I f\chi_E\left(\overline{x}\right)d\overline{x}=\lim_{d\to 0}\sum_k f\left(\overline{\alpha}_k\right)\left|I_k^*\right|,$$

де $\left\{I_k^*\right\}$ - розбиття проміжку *I*.

Подовжимо розбиття $\left\{I_k^*\right\}$ на проміжки I_1 і I_2 із збереженням значення діаметра розбиття. Відмічені точки, що не належать $\left\{I_k^*\right\}$, оберемо довільним чином, а ті, що належать $\left\{I_k^*\right\}$ збережемо тими ж. Тоді на проміжках, що не належать $\left\{I_k^*\right\}$, функція $f\chi_E\left(\overline{x}\right)$ приймає значення нуль, тому інтегральна сума для проміжків I_1 і I_2 буде співпадати із значенням інтегральних сум для проміжку *I*, а тому і значення границь інтегральних сум будуть однаковими. Отримаємо:

$$\int\limits_I f\chi_E\left(\overline{x}\right)d\overline{x}=\int\limits_{I_1} f\chi_E\left(\overline{x}\right)d\overline{x}=\int\limits_{I_2} f\chi_E\left(\overline{x}\right)d\overline{x} . \ \blacksquare$$

17.4.2 Критерій Лебега інтегрованості функції на допустимій множині.

Теорема (*критерій Лебега інтегровності функції на допустимій множині*). Функція $f\left(\overline{x}\right)$, обмежена на допустимій множині E , інтегровна на цій множині тоді і тільки тоді, коли множина її точок розриву на множині E має лебегову міру нуль. Тобто

$\left.\begin{array}{l} f-обм.\,на\ E \\ f\in\Re(E)\end{array}\right\}\Leftrightarrow \mu A=0$, де A - множина точок розриву $f\left(\overline{x}\right)$ на E.

Доведення. Нехай I - проміжок, що покриває допустиму множину E, B - множина точок розриву $f\left(\overline{x}\right)$ на I, ∂E - межа E. Тоді $B\subset A\bigcup\partial E$, $A\subset B\bigcup\partial E$.

Необхідність.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\overline{x}\right)\in\Re(E) \\ f\left(\overline{x}\right)-обм.\quad на\quad E\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} f\left(\overline{x}\right)\in\Re(I) \\ f\left(\overline{x}\right)-обм.\quad на\quad I\end{array}\right\}\Rightarrow \mu B=0,$$

E - допустима $\Rightarrow \mu\left(\partial A\right)=0$.

Маємо: $\left.\begin{array}{l} A\subset B\bigcup\partial E \\ \mu\left(\partial A\right)=0 \\ \mu B=0\end{array}\right\}\Rightarrow \mu A=0$.

Достатність.

$$\left.\begin{array}{l} \mu A=0 \\ B\subseteq A\bigcup\partial E \\ f\left(\overline{x}\right)-обм.\quad на\quad I\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} \mu B=0 \\ f\left(\overline{x}\right)-обм.\quad на\quad I\end{array}\right\}\Rightarrow f\left(\overline{x}\right)\in\Re(I)\Rightarrow f\left(\overline{x}\right)\in\Re(E). \quad\blacksquare$$

17.4.3 Міра (об'єм) допустимої множини.

🗁**Означення.** *Жордановою мірою (об'ємом) допустимої множини* E називається інтеграл по цій множині від одиничної функції:

$$\mu E=V\left(E\right)=\int\limits_E 1d\overline{x}.$$

ПОВТОРЕННЯ.

Плоска область D називається квадровною, якщо

$$\sup\left\{S\left(B\right):B\subset D,B-многокутник\right\}=\inf\left\{S\left(A\right):A\supset D,A-многокутник\right\}\overset{def}{=}S(D);$$

тіло D в $\mathbb{R}^3$ - кубовне, якщо

$$\sup\left\{V\left(B\right):B\subset D,B-многогранник\right\}=\inf\left\{V\left(A\right):A\supset D,A-многогранник\right\}\overset{def}{=}V\left(D\right);$$

спільне значення між $\sup$ і $\inf$ називається площею плоскої області D (об'ємом тіла D).

За наданим вище означенням

$$\mu E=V\left(E\right)=\int\limits_E 1d\overline{x}.$$

Встановимо зв'язок між цим означенням і наданим раніше.

Функція $f\left(\overline{x}\right)\equiv 1$ на E являється неперервною, тому множина A її точок розриву є порожньою, тому $\mu A=0$, звідки $f\left(\overline{x}\right)\equiv 1$ - інтегровна на E. Отже, за критерієм Дарбу

$$\overline{\int_I} \chi_E(\overline{x}) d\overline{x} = \underline{\int_I} \chi_E(\overline{x}) d\overline{x} .$$

З'ясуємо геометричний зміст верхнього інтегралу Дарбу. За означенням

$$\overline{\int_I} \chi_E(\overline{x}) d\overline{x} = \inf_R \overline{S}(\chi_E, R) .$$

Значення верхньої суми Дарбу $\overline{S}(\chi_E, R) = \sum_{k=1}^{n} M_k |I_k|$ дорівнює значенню сум об'ємів тих проміжків, які мають спільні точки з множиною E. Об'єднання цих проміжків є многокутником (многогранником), що описано навколо E (цей многокутником (многогранником) має сторони, паралельні осям координат).

Для нижньої суми Дарбу її значення дорівнює сумі площ проміжків розбиття, які цілком лежать всередині множини E, тобто дорівнює площі вписаного в E многокутника. Оскільки нижня сума Дарбу дорівнює верхніх сумі Дарбу, тобто

$$\inf_R \overline{S}(\chi_E, R) = \sup_R \underline{S}(\chi_E, R) ,$$

то можна довести, що визначення площі (об'єму), надане раніше, співпадає з визначенням через кратний інтеграл.

17.5 Загальні властивості кратних інтегралів

Надалі будемо припускати, що E, E_1, E_2 - допустимі множини.

Вл. 1 (*властивість лінійності*). $f, g \in \Re(E) \Rightarrow \alpha f \pm \beta g \in \Re(E)$, крім того

$$\int_E \left(\alpha f(\overline{x}) + \beta g(\overline{x})\right) d\overline{x} = \alpha \int_E f(\overline{x}) d\overline{x} + \beta \int_E g(\overline{x}) d\overline{x} .$$

► Перевіримо спочатку інтегровність:

$$\left.\begin{array}{l} A - \textit{множина точок розриву } f(\overline{x}) \textit{ на } E \\ B - \textit{множина точок розриву } g(\overline{x}) \textit{ на } E \\ C - \textit{множина точок розриву функції } \alpha f(\overline{x}) + \beta g(\overline{x}) \textit{ на } E \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} C \subset A \bigcup B \\ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu A = 0 \left(f(\overline{x}) \in \Re(E)\right) \\ \mu B = 0 \left(g(\overline{x}) \in \Re(E)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(A \bigcup B) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mu C = 0 \Rightarrow \alpha f(\overline{x}) + \beta g(\overline{x}) \in \Re(E) .$$

Тепер можна доводити рівність:

$$\int_E \left(\alpha f(\overline{x}) + \beta g(\overline{x})\right) d\overline{x} = \int_{I \supset E} \left(\alpha f(\overline{x}) + \beta g(\overline{x})\right) \chi_E(\overline{x}) d\overline{x} ,$$

$$\sigma_{(\alpha\cdot f(\overline{x})+\beta\cdot g(\overline{x}))\chi_E(\overline{x})} = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha\cdot f\chi_E(\varsigma_k)+\beta\cdot g\chi_E(\varsigma_k)\right)|I_k| =$$
$$= \alpha\cdot\sum_{k=1}^{n} f\chi_E(\varsigma_k)|I_k| + \beta\cdot\sum_{k=1}^{n} g\chi_E(\varsigma_k)|I_k| = \alpha\cdot\sigma_{f\chi_E(\overline{x})}+\beta\cdot\sigma_{g\chi_E(\overline{x})}.$$

Оскільки $f, g, \alpha f \pm \beta g \in \Re(E)$, то існують границі інтегральних сум в останній нерівності при $d \to 0$; здійснимо в ній граничний перехід:

$$\int_I \left(\alpha\cdot f\chi_E(\overline{x})+\beta\cdot g\chi_E(\overline{x})\right)d\overline{x} = \alpha\int_I f\chi_E(\overline{x})\,d\overline{x}+\beta\int_I g\chi_E(\overline{x})\,d\overline{x},$$

$$\|\qquad\qquad\qquad\|\qquad\qquad\qquad\|$$

$$\int_E \left(\alpha\cdot f(\overline{x})+\beta\cdot g(\overline{x})\right)d\overline{x} = \alpha\int_E f(\overline{x})\,d\overline{x}+\beta\int_E g(\overline{x})\,d\overline{x}. \;\blacktriangleleft$$

Вл. 2. $\left.\begin{array}{l} f(\overline{x})\in\Re(E) \\ f(\overline{x}) \overset{м.с.}{\underset{E}{=}} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_E f(\overline{x})\,d\overline{x} = 0.$

► $f(\overline{x})\in\Re(E) \Rightarrow f\chi_E(\overline{x})\in\Re(E)$, тому границя інтегральних сум функції $f\chi_E(\overline{x})$ не залежить від вибору проміжних точок. Оскільки $f(\overline{x}) \overset{м.с.}{\underset{E}{=}} 0 \;\Rightarrow\; f\chi_E(\overline{x}) \overset{м.с.}{\underset{E}{=}} 0$, то можна обрати ті точки в якості проміжних, значення функції в яких дорівнює нулю.

$$\sigma_{f(\overline{x})\chi_E(\overline{x})} = \sum_k f\chi_E(\overline{\alpha}_k)|I_k| = 0 \xrightarrow[d\to 0]{} 0 \;\Rightarrow\; \int_I f(\overline{x})\chi_E(\overline{x})\,d\overline{x} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\int_E f(\overline{x})\,d\overline{x} = 0. \;\blacktriangleleft$$

Наслідок із вл. 2. $\left.\begin{array}{l} f(\overline{x}), g(\overline{x})\in\Re(E) \\ f(\overline{x}) \overset{м.с.}{\underset{E}{=}} g(\overline{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow \int_E f(\overline{x})\,d\overline{x} = \int_E g(\overline{x})\,d\overline{x}.$

► Оскільки $f, g\in\Re(E) \Rightarrow f+g\in\Re(E)$, то

$$\varphi(\overline{x}) = f(\overline{x}) - g(\overline{x}) = 0 \Rightarrow \int_E \varphi(\overline{x})\,d\overline{x} = 0$$

$$\|$$

$$\int_E f(\overline{x})\,d\overline{x} - \int_E g(\overline{x})\,d\overline{x} = 0. \;\blacktriangleleft$$

Вл. 3 (*адитивність інтегралу*). Нехай E_1 і E_2 - допустимі множини, тоді здійснюються наступні імплікації:

$$\exists\int_{E_1\cup E_2} f(\overline{x})\,d\overline{x} \overset{1\ вл.}{\Leftrightarrow} \left(\exists\int_{E_1} f(\overline{x})\,d\overline{x} \wedge \exists\int_{E_2} f(\overline{x})\,d\overline{x}\right) \overset{2\ вл.}{\Rightarrow} \exists\int_{E_1\cap E_2} f(\overline{x})\,d\overline{x}.$$

Крім того

$$\mu\left(E_1 \cap E_2\right)=0 \Rightarrow \underbrace{\int\limits_{E_1 \cup E_2} f\left(\overline{x}\right) d\overline{x}}_{\exists} \underset{\Rightarrow}{=} \underbrace{\int\limits_{E_1} f\left(\overline{x}\right) d\overline{x}}_{\exists} \underset{\wedge}{+} \underbrace{\int\limits_{E_2} f\left(\overline{x}\right) d\overline{x}}_{\exists} .$$

► $\boxed{\overset{1\text{вл.}}{\Rightarrow}}$ Введемо позначення:

$A_1 -$ *множина точок розриву* $f\left(\overline{x}\right)$ *на* E_1,

$A_2 -$ *множина точок розриву* $f\left(\overline{x}\right)$ *на* E_2,

$B -$ *множина точок розриву* $f\left(\overline{x}\right)$ *на* $E_1 \cup E_2$,

$C -$ *множина точок розриву* $f\left(\overline{x}\right)$ *на* $E_1 \cap E_2$.

Тоді отримаємо:

$$\left.\begin{matrix} \mu\left(B\right)=0 \\ A_1 \subset B \\ A_2 \subset B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \mu A_1 = 0 \Rightarrow f\left(\overline{x}\right) \in \Re\left(E_1\right), \\ \mu A_2 = 0 \Rightarrow f\left(\overline{x}\right) \in \Re\left(E_2\right). \end{cases}$$

$$\boxed{\overset{1\text{вл.}}{\Leftarrow}} \quad \left.\begin{matrix} \begin{cases} \mu A_1 = 0 \\ \mu A_2 = 0 \end{cases} \\ B \subseteq A_1 \cup A_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mu B = 0 \Rightarrow f\left(\overline{x}\right) \in \Re\left(E_1 \cup E_2\right).$$

$$\boxed{\overset{2\text{вл.}}{\Rightarrow}} \quad \left.\begin{matrix} \mu A_1 = 0 \\ \mu A_2 = 0 \\ C \subseteq A_1 \cup A_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mu C = 0 \Rightarrow f\left(\overline{x}\right) \in \Re\left(E_1 \cap E_2\right).$$

Доведемо $\boxed{\text{рівність}}$. Оскільки

$$\chi_{E_1 \cup E_2}\left(\overline{x}\right)=\chi_{E_1}\left(\overline{x}\right)+\chi_{E_1}\left(\overline{x}\right)-\chi_{E_1 \cap E_2}\left(\overline{x}\right),$$

то

$$f\chi_{E_1 \cup E_2}\left(\overline{x}\right)=f\chi_{E_1}\left(\overline{x}\right)+f\chi_{E_1}\left(\overline{x}\right)-f\chi_{E_1 \cap E_2}\left(\overline{x}\right).$$

Маючи на увазі те, що $\mu\left(E_1 \cap E_2\right)=0$, одержимо $f\chi_{E_1 \cap E_2}\left(\overline{x}\right) \overset{м.с.}{\underset{I}{=}} 0$. Із цього, із властивості лінійності, наслідку із другої властивості, отримаємо

$$\int\limits_I f\chi_{E_1 \cup E_2}\left(\overline{x}\right) d\overline{x} = \int\limits_I f\chi_{E_1}\left(\overline{x}\right) d\overline{x} + \int\limits_I f\chi_{E_1}\left(\overline{x}\right) d\overline{x} - \underbrace{\int\limits_I f\chi_{E_1 \cap E_2}\left(\overline{x}\right) d\overline{x}}_{=0},$$

$$\int\limits_{E_1 \cup E_2} f\left(\overline{x}\right) d\overline{x} = \int\limits_{E_1} f\left(\overline{x}\right) d\overline{x} + \int\limits_{E_2} f\left(\overline{x}\right) d\overline{x}. \quad ◄$$

Вл. 4. $f \in \Re\left(E\right) \Rightarrow \left|f\right| \in \Re\left(E\right) \quad \wedge \quad \left|\int\limits_E f\left(\overline{x}\right) d\overline{x}\right| \le \int\limits_E \left|f\left(\overline{x}\right)\right| d\overline{x}$.

► Якщо $A -$ *множина точок розриву* $f\left(\overline{x}\right)$ *на* E,

$B -$ *множина точок розриву* $\left|f\left(\overline{x}\right)\right|$ *на* E, тоді $A \supset B$. Тому

$$\left.\begin{array}{r} f \in \Re(E) \Rightarrow \mu A = 0 \\ A \supset B \end{array}\right\} \Rightarrow \mu B = 0 \Rightarrow |f| \in \Re(E).$$

Доведемо нерівність. Оскільки

$$\left|\sigma_{f\chi_E(\bar{x})}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} f\chi_E(\varsigma_k)|I_k|\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|f\chi_E(\varsigma_k)\right||I_k| = \sigma_{|f|\chi_E(\bar{x})},$$

то здійснивши граничний перехід при $d \to 0$ в останній нерівності, отримаємо

$$\left|\int_I f\chi_E(\bar{x})\,d\bar{x}\right| \le \int_I \left|f\chi_E(\bar{x})\right| d\bar{x} \;\Leftrightarrow\; \left|\int_E f(\bar{x})\,d\bar{x}\right| \le \int_E \left|f(\bar{x})\right| d\bar{x}. \quad ◄$$

Вл. 4. $\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) \in \Re(E) \\ f(\bar{x}) \ge 0 \ \forall \bar{x} \in E \end{array}\right\} \Rightarrow \int_E f(\bar{x})\,d\bar{x} \ge 0.$

Вл. 5. $\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}), g(\bar{x}) \in \Re(E) \\ f(\bar{x}) \ge g(\bar{x}) \ \forall \bar{x} \in E \end{array}\right\} \Rightarrow \int_E f(\bar{x})\,d\bar{x} \ge \int_E g(\bar{x})\,d\bar{x}.$

Вл. 6. $\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) \in \Re(E) \\ E - доп.\ мн. \\ m \le f(\bar{x}) \le M \ \forall \bar{x} \in E \end{array}\right\} \Rightarrow m \cdot \mu E \le \int_E f(\bar{x})\,d\bar{x} \le M \cdot \mu E.$

Вл. 7. $\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) \in \Re(E) \\ m = \inf\limits_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}) \\ M = \sup\limits_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \gamma \in [m, M] : \int_E f(\bar{x})\,d\bar{x} = \gamma \cdot \mu E.$

Властивості 4-7 доводяться аналогічно одновимірному випадку. Властивості 6-7 – це різні формулювання *теореми про середнє*.

Вл. 8 (*неперервний випадок теореми про середнє*).

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) - \text{непер. на } E \\ E - \text{доп. зв'язна мн.} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi \in E : \int_E f(\bar{x})\,d\bar{x} = f(\xi) \cdot \mu E.$$

Доведення здійснюється аналогічно одновимірному випадку з використанням теореми Коші про проходження неперервної на зв'язній множині функції через нуль при зміні знаку.

Вл. 9 *(узагальнена теорема про середнє).*

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}), g(\bar{x}) \in \Re(E) \\ m = \inf\limits_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}) \\ M = \sup\limits_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}) \\ g(\bar{x}) \ge 0 \ \forall \bar{x} \in E \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) \in \Re(E), \\ \exists \gamma \in [m, M] : \int_E f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})\,d\bar{x} = \gamma \cdot \int_E g(\bar{x})\,d\bar{x}. \end{array}\right.$$

Вл. 10 (*неперервний випадок узагальненої теореми про середнє*).

$$\left.\begin{array}{l} f(\overline{x}), g(\overline{x}) - \textit{непер. на } E \\ E - \textit{доп. зв'язна мн.} \\ g(\overline{x}) \geq 0 \ \forall \overline{x} \in E \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi \in E : \int\limits_E f(\overline{x}) \cdot g(\overline{x}) d\overline{x} = f(\xi) \cdot \int\limits_E g(\overline{x}) d\overline{x}.$$

Доведення вл. 9, 10 аналогічне одновимірному випадку.

Вл. 11. $\left.\begin{array}{l} \int\limits_E f(\overline{x}) d\overline{x} = 0 \\ f(\overline{x}) \geq 0 \forall \overline{x} \in E \end{array}\right\} \Rightarrow f(\overline{x}) \overset{м.\ \ с.}{\underset{E}{=}} 0.$

► Нехай $E = I$ і $\int\limits_I f(\overline{x}) d\overline{x} = 0$, тоді

$f(\overline{x}) \in \Re(\mathrm{I}) \Rightarrow f(\overline{x}) - \textit{майже скрізь неперервна на } I.$

Доведення проведемо від супротивного. Нехай

$\exists \overline{\xi} \in I$ -точка неперервності функції $f(\overline{x})$, в якій $f(\overline{\xi}) = \beta > 0$, тоді $\exists V_\delta(\overline{\xi}) : f(\overline{x}) > \alpha > 0 \ \forall \overline{x} \in V_\delta(\overline{\xi})$. Звідси

$$\int\limits_I f(\overline{x}) d\overline{x} = \int\limits_{V_\delta(\overline{\xi})} f(\overline{x}) d\overline{x} + \int\limits_{I \setminus V_\delta(\overline{\xi})} f(\overline{x}) d\overline{x} > \alpha \cdot \mu\left(V_\delta(\overline{\xi})\right) + 0 = \alpha \cdot 4\delta^2 > 0, \ \not\to \ ◄$$

17.6 Зведення кратного інтегралу до повторного.

17.6.1 Теорема Фубіні.

Нехай $X -$ проміжок в $\mathbb{R}^m$, $Y -$ проміжок в $\mathbb{R}^n$, $X \times Y -$ проміжок в $\mathbb{R}^{m+n}$.

Теорема (*теорема Фубіні*).

$$\left.\begin{array}{l} f(\overline{x}, \overline{y}) \in \Re(X \times Y) \\ \overline{x} \in X, \overline{y} \in Y \end{array}\right\} \Rightarrow \int\limits_{X \times Y} f(\overline{x}, \overline{y}) d\overline{x} d\overline{y} = \int\limits_X d\overline{x} \left(\int\limits_Y f(\overline{x}, \overline{y}) d\overline{y} \right) = \int\limits_Y d\overline{y} \left(\int\limits_X f(\overline{x}, \overline{y}) d\overline{x} \right).$$

Пояснення. Перший інтеграл – це інтеграл за проміжком $X \times Y$. Другий и третій – це повторні інтеграли, які обчислюються таким чином. Розглянемо $\overline{x} \in X -$ довільне фіксоване. Розглянемо $F(\overline{x}) = \int\limits_Y f(\overline{x}, \overline{y}) d\overline{y}$. Значення функції $F(\overline{x})$ у випадку, коли існує інтеграл $\int\limits_Y f(\overline{x}, \overline{y}) d\overline{y}$, обирається як значення цього інтегралу; якщо ж не існує інтеграл $\int\limits_Y f(\overline{x}, \overline{y}) d\overline{y}$, то значення функції $F(\overline{x})$ обирається будь-яким поміж $\underline{\int\limits_Y} f(\overline{x}, \overline{y}) d\overline{y} = \underline{J}(\overline{x})$ і $\overline{\int\limits_Y} f(\overline{x}, \overline{y}) d\overline{y} = \overline{J}(\overline{x})$, тобто

$F(\overline{x}) \in \left[\underline{J}(\overline{x}), \overline{J}(\overline{x})\right]$.

В теоремі доводиться,

по-перше, що $F(\overline{x}) \in \Re(X)$,

по-друге, $\mu\left\{\overline{x} \in X : \underline{J}(\overline{x}) \neq \overline{J}(\overline{x})\right\} = 0$.

Після обчислення значення функції $F(\overline{x})$ в усіх точках $\overline{x}$ проміжку X обчислюємо $\int\limits_X F(\overline{x})d\overline{x}$, який і позначено як $\int\limits_X d\overline{x}\int\limits_Y f(\overline{x},\overline{y})d\overline{y}$.

Ідея доведення. Окрім зазначеного вище, розглядаються також інтегральні суми для усіх 3-х інтегралів. Оскільки $f(\overline{x},\overline{y}) \in \Re(X\times Y)$, то значення границь інтегральних сум не залежать від способу розбиття і вибору проміжних точок. Отже, цей вибір робимо зручним для нас способом. Розбиття обираємо як декартовий добуток розбиттів проміжків X і Y. Проміжні точки обираємо теж як «декартовий добуток» виборів на проміжках X і Y. Будемо мати:

$$\sigma_{X\times Y} = \sum_{i,j} f(\overline{x}_i,\overline{y}_j)\left|X_i\times Y_j\right| = \sum_i |X_i| \sum_j f(\overline{x}_i,\overline{y}_j)\left|Y_j\right| = \sigma_2 = \sum_j \left|Y_j\right| \sum_i f(\overline{x}_i,\overline{y}_j)|X_i| = \sigma_3 \ .$$

Це дограничний вигляд теореми Фубіні.

Проведемо зазначені обґрунтування.

По-перше, доведемо, що $F(\overline{x}) \in \Re(X)$. Зауважимо спочатку, що

$$f(\overline{x},\overline{y}) \in \Re(X\times Y) \quad \Rightarrow \quad \lim_{d\to 0}\underline{S}(f,\mathrm{P}) = \lim_{d\to 0}\overline{S}(f,\mathrm{P}) = \int\limits_{X\times Y} f(\overline{x},\overline{y})d\overline{x}d\overline{y} \ . \qquad (*)$$

Розглянемо ланцюг нерівностей:

$$\underline{S}(f,\mathrm{P}) = \sum_{i,j}\inf_{(\overline{x},\overline{y})\in X_i\times Y_j} f(\overline{x},\overline{y})\left|X_i\times Y_j\right| \le \left\|\inf_{(\overline{x},\overline{y})\in X_i\times Y_j} f(\overline{x},\overline{y}) \le \inf_{\overline{x}\in X_i}\left(\inf_{\overline{y}\in Y_j} f(\overline{x},\overline{y})\right)\right\| \le$$

$$\le \sum_i \inf_{\overline{x}\in X_i}\left(\sum_j \inf_{\overline{y}\in Y_j} f(\overline{x},\overline{y})\left|Y_j\right|\right)\cdot\left|X_i\right| \le \sum_i \inf_{\overline{x}\in X_i}\left(\underline{\int\limits_{Y}} f(\overline{x},\overline{y})d\overline{y}\right)\cdot\left|X_i\right| \le$$

$$\le \sum_i \inf_{\overline{x}\in X_i} F(\overline{x})\cdot\left|X_i\right| \le \sum_i \sup_{\overline{x}\in X_i} F(\overline{x})\cdot\left|X_i\right| \le$$

$$\le \sum_i \sup_{\overline{x}\in X_i} \overline{\int\limits_Y} f(\overline{x},\overline{y})d\overline{y}\left|X_i\right| \le \sum_i \sup_{\overline{x}\in X_i}\left(\sum_j \sup_{\overline{y}\in Y_j} f(\overline{x},\overline{y})\left|Y_j\right|\right)\cdot\left|X_i\right| \le$$

$$\le \sum_{i,j}\sup_{(\overline{x},\overline{y})\in X_i\times Y_j} f(\overline{x},\overline{y})\cdot\left|X_i\times Y_j\right| = \overline{S}(f,\mathrm{P}).$$

Здійснюємо граничний перехід під знаком виписаної нерівності (*). Тоді із (*) випливає, що значення границь усіх сум виписаного ланцюга однакові при $d\to 0$

Тоді

$$\lim_{d\to 0}\sum_i \inf_{\overline{x}\in X_i} F(\overline{x})\cdot|X_i| = \lim_{d\to 0}\sum_i \sup_{\overline{x}\in X_i} F(\overline{x})\cdot|X_i|,$$

тобто

$$\overline{\int_X} F(\overline{x})\,d\overline{x} = \underline{\int_X} F(\overline{x})\,d\overline{x}.$$

Це означає, що функція $F(\overline{x})$ - інтегрована на X.

По-друге, доведемо, що $\mu\left\{\overline{x}\in X : \underline{J}(\overline{x}) \neq \overline{J}(\overline{x})\right\} = 0$. З ланцюга нерівностей, зокрема, також випливає, що

$$\lim_{d\to 0}\sum_i \inf_{\overline{x}\in X_i}\left(\underline{\int_Y} f(\overline{x},\overline{y})\,d\overline{y}\right)\cdot|X_i| = \lim_{d\to 0}\sum_i \sup_{\overline{x}\in X_i}\overline{\int_Y} f(\overline{x},\overline{y})\,d\overline{y}\,|X_i|.$$

Це говорить про те, що

$$\int_X\left(\overline{\int_Y} f(\overline{x},\overline{y})\,d\overline{y} - \underline{\int_{y}} f(\overline{x},\overline{y})\,d\overline{y}\right)d\overline{x} = 0 \Rightarrow \overline{\int_Y} f(\overline{x},\overline{y})\,d\overline{y} \overset{м.с.}{\underset{X}{=}} \underline{\int_Y} f(\overline{x},\overline{y})\,d\overline{y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu\left\{\overline{x}\in X : \overline{J}(\overline{x}) \neq \underline{J}(\overline{x})\right\} = 0.$$

17.6.2 Наслідки із теореми Фубіні.

Наслідок 1. Якщо $X = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_m,b_m]\subset\mathbb{R}^m$, то

$$\int_X f(\overline{x})\,d\overline{x} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1\int_{a_2}^{b_2} dx_2\ldots\int_{a_m}^{b_m} f(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,dx_m.$$

Приклад. Знайти $\int_I f(\overline{x})\,d\overline{x}$, якщо

$$f(x,y,z) = z\cdot\sin(x+y),\quad I = [0,\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[0,1].$$

Застосуємо наслідок 1 із теореми Фубіні:

$$\iiint_I f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^{\pi} dx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy\int_0^1 z\sin(x+y)\,dz = \int_0^{\pi} dx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy\cdot\sin(x+y)\cdot\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy\big(\sin(x+y)\big) =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx\cos(x+y)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)dx = \frac{1}{2}\left.\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right|_0^{\pi} =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}\big(-1+(-1)-1\big) = \frac{3}{2}.$$

Наслідок 2. Якщо $D-$ допустима множина в $\mathbb{R}^{m-1}$, а $E-$ допустима множина в $\mathbb{R}^m$, яка визначається наступним чином

$$E = \left\{(\overline{x},y)\in\mathbb{R}^m : \overline{x}\in D \wedge \varphi(\overline{x})\le y\le\psi(\overline{x})\right\},$$

А функція $f(\overline{x},y)$ - інтегровна на E ($f(\overline{x},y)\in\Re(E)$), тоді

$$\boxed{\int\limits_E f\left(\overline{x},y\right)d\overline{x}dy=\int\limits_D d\overline{x}\int\limits_{\varphi(\overline{x})}^{\psi(\overline{x})} f\left(\overline{x},y\right)dy}.$$

Доведення. Нехай $\overline{x}\in D-fix$, тоді визначимо множину

$$E_{\overline{x}}=\begin{cases}\left\{\left(\overline{x},y\right):\varphi\left(\overline{x}\right)\le y\le\psi\left(\overline{x}\right)\right\}, \text{якщо } \overline{x}\in D\\ \varnothing, \text{якщо } \overline{x}\notin D\end{cases},$$

(див. рис. 17.2 – тривимірний випадок, рис. 17.3 – двовимірний випадок), тоді

$$\chi_E\left(\overline{x},y\right)=\chi_D\left(\overline{x}\right)\cdot\chi_{E_{\overline{x}}}\left(y\right),$$

Звідки

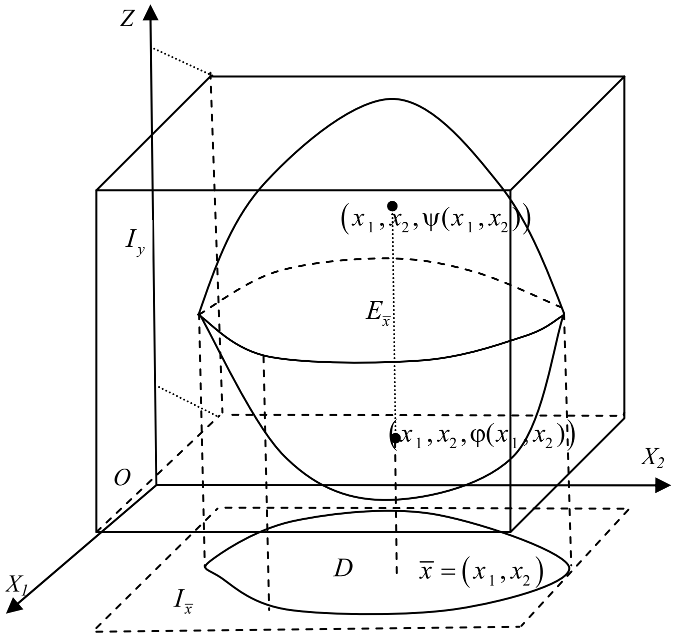


Рис. 17.2.

$$\int\limits_E f\left(\overline{x},y\right)d\overline{x}dy=\int\limits_{I_{\overline{x}}\times I_y\supset E} f\left(\overline{x},y\right)d\overline{x}dy=\int\limits_{I_{\overline{x}}\supset D} d\overline{x}\int\limits_{I_y\supset E_{\overline{x}}} f\left(\overline{x},y\right)\chi_E\left(\overline{x},y\right)dy=$$

$$=\int\limits_{I_{\overline{x}}\supset D}\chi_D\left(\overline{x}\right)d\overline{x}\int\limits_{I_y\supset E_{\overline{x}}} f\left(\overline{x},y\right)\chi_{E_{\overline{x}}}\left(y\right)dy=\int\limits_{I_{\overline{x}}\supset D}\chi_D\left(\overline{x}\right)dx\underbrace{\int\limits_{E_{\overline{x}}} f\left(\overline{x},y\right)dy}_{=F(\overline{x})}=$$

$$= \int\limits_{I_{\overline{x}} \supset D} \chi_D\left(\overline{x}\right) dx \underbrace{\int\limits_{\varphi(\overline{x})}^{\psi(\overline{x})} f\left(\overline{x}, y\right) dy}_{=F(\overline{x})} = \int\limits_D d\overline{x} \int\limits_{\varphi(\overline{x})}^{\psi(\overline{x})} f\left(\overline{x}, y\right) dy.$$

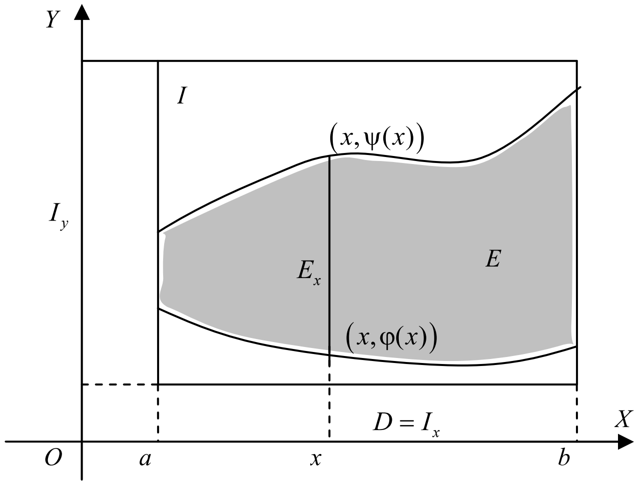


Рис. 17.3.

Тут значення функції $F\left(\overline{x}\right)$ визначається так само, як і в теоремі Фубіні, а саме:

$$F\left(\overline{x}\right) = \begin{cases} \int\limits_{\varphi(\overline{x})}^{\psi(\overline{x})} f\left(\overline{x}, y\right) dy, \textit{якщо} \quad \textit{інт.} \quad \textit{існує}, \\ \in \left[\underline{\int\limits_{\varphi(\overline{x})}^{\psi(\overline{x})}} f\left(\overline{x}, y\right) dy, \overline{\int\limits_{\varphi(\overline{x})}^{\psi(\overline{x})}} f\left(\overline{x}, y\right) dy \right], \textit{якщо} \quad \textit{інт.} \quad \textit{не існує}. \end{cases}$$

При цьому, $\mu\left\{ \overline{x} \in D : \underline{\int\limits_{\varphi(\overline{x})}^{\psi(\overline{x})}} f\left(\overline{x}, y\right) dy \neq \overline{\int\limits_{\varphi(\overline{x})}^{\psi(\overline{x})}} f\left(\overline{x}, y\right) dy \right\} = 0$. ■

Наслідок з наслідку 2.

$$\left.\begin{array}{l} D - \textit{доп. мн. і визначається так само, як і в поперед. насл.} \\ \left(D \subset \mathbb{R}^{m-1}\right) \\ \varphi\left(\overline{x}\right) \textit{ і } \psi\left(\overline{x}\right) - \textit{неперервні на } D \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 1) E – *допустима множина*,

2) $\boxed{\mu\left(E\right) = \int\limits_D \left(\psi\left(\overline{x}\right) - \varphi\left(\overline{x}\right)\right) d\overline{x}.}$

Доведення. Оскільки $\varphi(\overline{x})$ і $\psi(\overline{x})$ – *неперервні на* D, тому множини точок графіків цих функцій в просторі $\mathbb{R}^m$ мають лебегову міру нуль. Тоді множина E, що обмежена цими графіками буде допустима, оскільки має межу лебегової міри нуль. Тому із наслідку 2 отримаємо:

$$\mu(E)=\int\limits_E d\overline{x}dy=\int\limits_D dx\int\limits_{\varphi(\overline{x})}^{\psi(\overline{x})}dy=\int\limits_D d\overline{x}\cdot y\Big|_{\varphi(\overline{x})}^{\psi(\overline{x})}=\int\limits_D\left(\psi(\overline{x})-\varphi(\overline{x})\right)d\overline{x}\ .\ \blacksquare$$

Приклад. Знайти площу круга $x^2+y^2\le r^2$.

Оскільки

$\psi(x)=\sqrt{r^2-x^2}$,

$\varphi(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$,

$D=[-r,r]$,

то згідно до останнього наслідку

$$\mu(E)=\int\limits_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}-\left(-\sqrt{r^2-x^2}\right)\right)dx=2\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=2\left(\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-r}^{r}=$$

$$=0+r^2\frac{\pi}{2}-\left(0+r^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\cdot r^2\frac{\pi}{2}=\pi r^2.$$

Наслідок 3. Нехай E - допустима множина, що лежить в проміжку I, тобто $E\subset I\subset\mathbb{R}^m$. Представимо I у вигляді прямого добутку: $I=I_x\times I_y$, де $I_x\subset\mathbb{R}^{m-1}$, $I_y\subset\mathbb{R}^1$, тоді при майже усіх значеннях $y_0\in I_y$ переріз

$$E_{y_0}=\left\{(\overline{x},y)\in E: y=y_0\right\}$$

множини E $(m-1)$ – вимірною гіперплощиною $y=y_0$ для майже всіх $y_0\in I_y$ являє собою допустиму її підмножиною, причому

$$\boxed{\mu E=\int\limits_{I_y}\tilde{\mu}\left(E_y\right)dy}.$$

Тут $\tilde{\mu}\left(E_y\right)-(m-1)$ – вимірна міра множини E_y у випадку, коли E_y - допустима, якщо E_y - не є допустимою множиною, тоді $\tilde{\mu}\left(E_y\right)$ - це число, що лежить поміж $\underline{\int\limits_{E_y}}1dy$ і $\overline{\int\limits_{E_y}}1dy$.

Доведення.

$$\chi_E(\overline{x},y)=\chi_{I_y}(y)\cdot\chi_{E_y}(\overline{x}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mu(E)=\int_E 1d\overline{x}dy=\int_{I_{\overline{x}}\times I_y\supset E}\chi_E(\overline{x},y)d\overline{x}dy=\int_{I_y}\chi_{I_y}(y)dy\int_{E_y}1d\overline{x}=\int_{I_y}\tilde{\mu}E_y dy. \blacksquare$$

Приклад. Застосовуючи останню формулу, довести, що об'єм $m-$вимірної кулі радіуса R у випадку, коли $m=2k+1$, дорівнює $V_{2k+1}=2\cdot\dfrac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!}\cdot R^{2k+1}$, а у випадку, коли $m=2k$, - $V_{2k}=\dfrac{(2\pi)^k}{(2k)!!}\cdot R^{2k}$.

Вивчити доведення самостійно!

17.7 Заміна змінної в кратному інтегралі

17.7.1 Постановка задачі і евристичне виведення формули заміни змінних.

ПОВТОРЕННЯ. Якщо функція однієї змінної $f(x)$–неперервна на $[a.b]$, $x=\varphi(t)$- неперервно диференційована на $[\alpha,\beta]$, $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta), \varphi[\alpha,\beta]=[a,b]$ ($\varphi(t)$ - взаємно однозначна функція),

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Узагальнимо це твердження на випадок функції багатьох змінних. Нехай

1) $\varphi(\overline{t})$ - дифеоморфізм, тобто взаємно однозначне відображення множин $D_t \to D_x$, причому таке, що $x_i=\varphi_i(\overline{t})$ - неперервно диференційовні на D_t $\forall i=1,m$ і $t_j=\varphi_j^{-1}(\overline{x})$- неперервно диференційовні на D_x $\forall j=1,m$;

2) D_t і D_x - відкриті множини;

$f(\overline{x})$ - неперервна на D_x (або в загальному випадку $f\in\Re(D_{\overline{x}})$).

Мета: знайти $g(\overline{t})$, яка виражається через $f(\overline{x})$ і $\varphi(\overline{t})$, так щоб здійснювалася рівність $\int_{D_x} f(\overline{x})d\overline{x}=\int_{D_t} g(\overline{t})d\overline{t}$.

Розглянемо випадок, коли $D_t=I$ - проміжок в $\mathbb{R}^m$.

Розіб'ємо проміжок I на проміжки I_i (утвориться розбиття $R=\{I_i\}_{i=1}^n$). Знайдемо, на які множини відобразяться проміжки I_i за допомогою відображення φ: $\varphi(I_i)$ - допустима множина в $\mathbb{R}^m$, оскільки I_i - множина допустима, а $\varphi(\overline{t})$ – дифеморфізм.

Оскільки $D_x = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(I_i)$, а $\{\varphi(I_i)\}$ - не мають спільних внутрішніх точок, то за властивістю адитивності кратного інтегралу

$\int\limits_{D_x} f(\overline{x})d\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\varphi(I_i)} f(\overline{x})d\overline{x} =$ (застосуємо непер. випадок теореми про середнє) $= \sum_{i=1}^{n} f(\overline{\xi_i})\mu(\varphi(I_i))$.

Оскільки $\varphi(\overline{t})$ – бієкція і $\overline{\xi_i} \in \varphi(I_i) \subset D_{\overline{x}}$, то $\exists \overline{\tau_i} \in I_i : \overline{\xi_i} = \varphi(\overline{\tau_i})$, тоді

$$\int\limits_{D_x} f(\overline{x})d\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\overline{\tau_i}))\mu(\varphi(I_i)).$$

Знайдемо $\mu(\varphi(I_i))$.

У випадку, коли $\varphi(\overline{t})$ - лінійна, то в двовимірному випадку (m=2) прямокутники I_i переводяться відображенням φ в паралелограми, тоді в координатному вигляді

$$x_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 = \varphi_1(t_1, t_2),$$
$$x_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 = \varphi(t_1, t_2),$$

а у векторному вигляді

$$e_i^{\overline{x}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^{\overline{t}}, \ i = 1, 2.$$

В цьому випадку

$$\mu(\varphi(I_i)) = \left|\left[e_1^{\overline{x}}, e_2^{\overline{x}} \right]\right| = abs\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

В тривимірному випадку прямий паралелепіпед в базисі $\left\{e_j^{\overline{t}}\right\}$ перейде в похилий паралелепіпед в базисі $\left\{e_i^{\overline{x}}\right\}$. Об'єм останнього обчислюється як модуль мішаного добутку, що дорівнює модулю визначника матриці лінійного перетворення, який можна також обчислювати через часткові похідні цього перетворення:

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_m} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_m} \end{vmatrix} = \det \varphi'(\overline{\tau_i}),$$

$$\underline{\mu(\varphi(I_i)) = \det \varphi'(\overline{\tau_i})\mu(I_i)}.$$

Остання рівність у випадку лінійного перетворення насправді має значення, що не залежить від точки, в якій обчислюється, а у випадку, коли $\varphi(t)$ - нелінійна функція, а міра $\mu(I_i)$ - мала, тоді значення $\mu(\varphi(I_i))$ мало відрізняється від міри похилого паралелепіпеду і залежить від точки, в якій обчислюється, і тоді

$$\mu(\varphi(I_i)) \approx \det\,\varphi'(\overline{\tau}_i)\mu(I_i)\ .$$

Значення виразу $\det\varphi'(\overline{\tau}_i)$ називається *якобіаном*.

В результаті отримаємо

$$\int\limits_{D_x} f(\overline{x})d\overline{x} \approx \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\overline{\tau}_i))\det\varphi'(\overline{\tau}_i)\mu(I_i)\ .$$

Сума в правій частині відповідає інтегральній сумі для функцій $f(\varphi(\overline{t}))\det\varphi'(\overline{t})$ на проміжку *I*. Тому після здійснення граничного переходу отримаємо

$$\int\limits_{D_x} f(\overline{x})d\overline{x} = \int\limits_{I} f(\varphi(\overline{t}))\det\varphi'(\overline{t})d\overline{t}\ .$$

Чи існує інтеграл в правій частині? В правій частині функція $f(\overline{x})$ неперервна на D_x, $\varphi(\overline{t})$ неперервна на $I = \varphi(D_x)$, тому $f(\varphi(\overline{t}))-$ неперервна на *I*. Якобіан утворюється із часткових похідних координатних функцій $\varphi_i(\overline{t})$, які за умовою є неперервні на *I*, тому якобіан є неперервною на *I* функцією. Підінтегральна функція в правій частині, таким чином, неперервна, тому інтеграл на *I* існує.

Отже, функцію $g(\overline{t})$ знайдено: $g(\overline{t}) = f(\varphi(t))\det\varphi'(\overline{t})$. Залишається перейти до множини D_t і застосувати рівність $\int\limits_{D_t} g(\overline{t})dt = \int\limits_{I\supset D_x} g\chi_{D_x}(\tilde{t})d\overline{t}$.

Теорема (*заміна змінної під знаком кратного інтегралу).* Якщо $f(\overline{x})$ - неперервна на D_x, $\overline{x} = \varphi(\overline{t})$ - дифеоморфізм D_t на D_x, $D_x = \varphi(D_t)$, тоді здійснюється рівність

$$\boxed{\int\limits_{D_x=\varphi(D_t)} f(\overline{x})d\overline{x} = \int\limits_{D_t} f(\varphi(\overline{t}))\det\varphi'(\overline{t})d\overline{t}},$$

тут

$$\det\varphi'(\overline{t}) = abs\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{D(t_1,\ldots,t_m)} = abs\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \ldots. & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial t_1} & \ldots. & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial t_m} \end{vmatrix}.$$

Зауваження. Множини D_t і D_x - однакові, але виражені через різні змінні.

Приклад. Знайти площу області, що обмежена кривими:

$$x+y=a, x+y=b,$$
$$y=\alpha x, y=\beta x,$$
$$0<a<b, 0<\alpha<\beta.$$

Розв'язання.

$$S=\iint\limits_D dxdy=\left|\begin{array}{l} u=x+y, \quad v=\dfrac{y}{x} \\ a\le u\le b, \alpha\le v\le\beta, \\ \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{u}{x^2}=\dfrac{(v+1)^2}{u} \\ x=\dfrac{u}{v+1}\Rightarrow |I|=abs\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\dfrac{u}{(v+1)^2}\end{array}\right|=\int_a^b du\int_\alpha^\beta \frac{u}{(v+1)^2}dv=$$

$$=\int_a^b udu\left(\frac{-1}{\beta+1}+\frac{1}{\alpha+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{\beta+1}\right)(b^2-a^2).$$

17.7.2 Полярні координати.

Розглянемо заміну-перехід до полярної системи координат:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Розглянемо

$$I=\{(\rho,\varphi): 0\le\rho\le R\wedge 0\le\varphi\le 2\pi\},$$

$$K=\{(x,y): x^2+y^2\le R^2\},$$

тоді відображення $I\to K$ не є дифеоморфізмом, тому що

1) відрізок $\{(\rho,\varphi):\rho=0\wedge 0\le\varphi\le 2\pi\}$ відображається в точку (0,0),

2) два відрізки

$\{(\rho,\varphi): 0\le\rho\le R\wedge\varphi=0\}$ і $\{(\rho,\varphi):\ 0\le\rho\le R\wedge\varphi=2\pi\}$

відображається в один $\{(x,y): y=0,\ 0\le x\le R\}$.

Висновок: порушується взаємна однозначність. Для того, щоб відображення стало взаємно однозначним, потрібно розглянути відображення $I\setminus\partial I\leftrightarrow !K\setminus E$, де E - множина точок кола разом з множиною точок відрізку $0\le x\le R$. Застосуємо теорему про заміну змінної під знаком кратного інтегралу:

$$\int\limits_{K\setminus E} f(x,y)dxdy = \int\limits_{I\setminus\partial I} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\left|I\right| d\rho d\varphi,$$

$$\mu E = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{K\setminus E} f(x,y)dxdy = \int\limits_{K} f(x,y)dxdy,$$

$$\mu\partial I = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{I\setminus\partial I} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\left|I\right| d\rho d\varphi = \int\limits_{I} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\left|I\right| d\rho d\varphi.$$

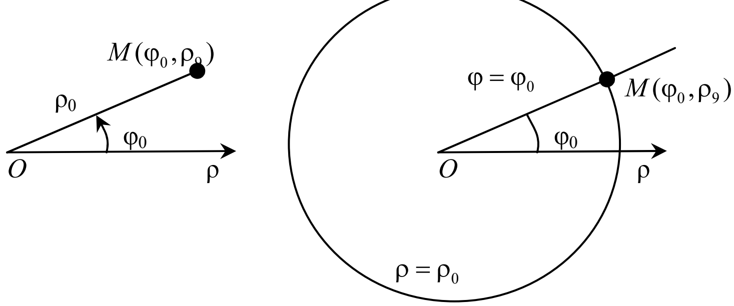
Знайдемо якобіан $|I|$:

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi,$$
$$\left|I\right| = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

Отже,

$$\iint\limits_{K} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho\,.$$

Зауважимо, що в полярній системі координат (див. рис. 17.4)
ρ - відстань від точки M площини до початку координат O ($\rho \geq 0$!),
φ - кут між OM і віссю Oρ,
ρ=R - коло радіусом R з центром в т. O,
φ =φ_0 - промінь що утворює кут φ_0 з віссю Oρ.



а) б)

Рис.17.4

Елемент площі в полярній криволінійній системі координат: $\left|I\right| d\rho d\varphi = \rho d\rho d\varphi$. Тоді площа плоскої області обчислюється як

$$S = \iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{D} \rho d\rho d\varphi\,.$$

Приклад. Знайти площу області, що обмежена лінією

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

за умови $x^2 + y^2 \geq a^2$.

Введемо полярну систему координат $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, тоді

$x^2 + y^2 = \rho^2,$

$\left(\rho^2\right)^2 = 2a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right),$

$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi,$

$\frac{-\pi}{2} + 2\pi n \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$

$-\frac{\pi}{4} + \pi n \le \varphi \le \frac{\pi}{4} + \pi n,$

$\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$

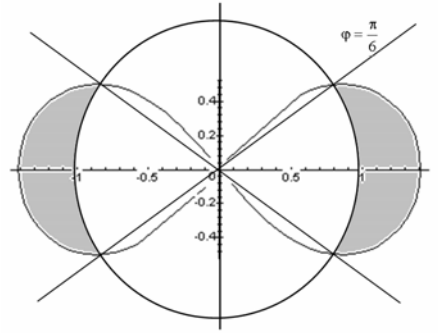


Рис. 17.5

Знайдемо точки перетину лімніскати $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ і кола $\rho = a$:

$\begin{cases} \rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi} \\ \rho = a \end{cases};$

$a = a\sqrt{2\cos 2\varphi}; \quad \cos 2\varphi = \tfrac{1}{2}; \quad 2\varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

$\varphi = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Тоді

$$S = 4\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi = 4\int_0^{\pi/6} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 4\int_0^{\pi/6} d\varphi \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} = 4\int_0^{\pi/6} d\varphi\left(\frac{2a^2\cos 2\varphi}{2} - \frac{a^2}{2}\right) =$$

$$= 4\left.\left(\frac{a^2}{2}\sin 2\varphi - \frac{a^2}{2}\varphi\right)\right|_0^{\pi/6} = 2a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}a^2.$$

17.7.3 Циліндричні координати $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$.

h - визначає аплікату точку M в просторі,

ρ - відстань від проекції A точки M простору на площину XOY до початку координат O, тобто $\rho = OA$ ($\rho \ge 0$!),

φ - кут між OA і віссю OX (*див. рис. 17.6 а*).

$h = h_0$ - площина, паралельна XOY ,

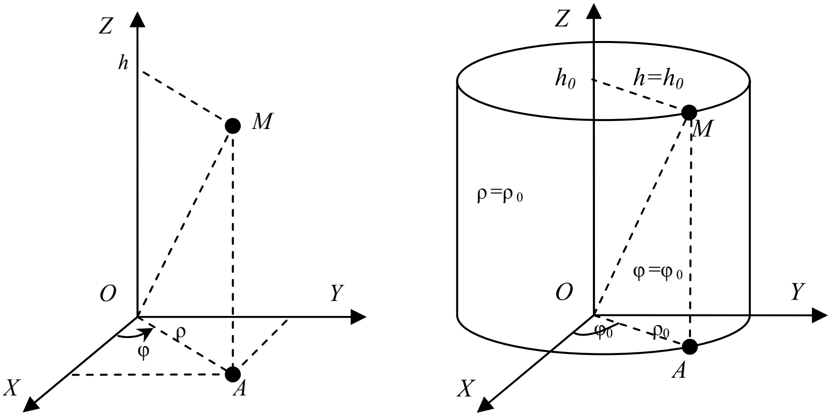
$\rho = \rho_0$ - циліндр, твірна якого паралельна осі OZ і вісь якого співпадає з OZ , радіус перерізу циліндру дорівнює ρ_0 ,

$\varphi = \varphi_0$ - півплощина, обмежена віссю аплікат, яка утворює з віссю абсцис кут φ_0 (*див. рис. 17.6 б*).

Знайдемо якобіан:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,h)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho .$$ Елемент об’єму:

$$dxdydz = |I|\, d\rho d\varphi dh = \rho \; d\rho d\varphi dh .$$



а б

Рис. 17.6

Приклад. Знайти об’єм тіла Вівіані, що обмежене поверхнями $x^2 + y^2 = Rx, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Розглянемо циліндричну поверхню:

$$x^2 + y^2 = Rx, \quad x^2 + y^2 - 2Rx \cdot \frac{1}{2} + \frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{4} = 0, \quad \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 .$$

Вона являє собою циліндр з віссю $x = \frac{R}{2}$, радіусом перерізу $\frac{R}{2}$.

Перейдемо до циліндричної системи координат:

$$x^2 + y^2 = Rx \quad \Rightarrow \quad \rho = R\cos\varphi,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

Тоді

$$V = 2\iiint\limits_T \rho d\rho d\varphi dz = 2\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \rho d\rho \, z \Big|_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\rho\cos\varphi} \rho d\rho \sqrt{R^2-\rho^2} = -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left. \frac{(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} \right|_0^{R\cos\varphi} =$$

$$= -\frac{4}{3}R^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\varphi^{-1}) d\varphi = \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

17.7.4 Сферичні координати

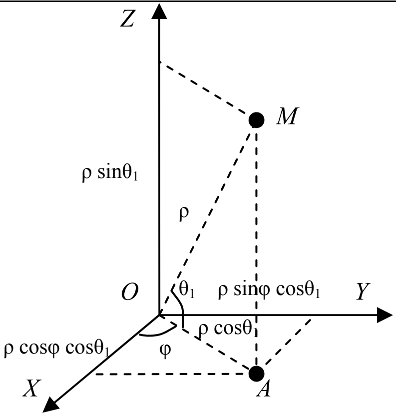
<table>
<tr>
<td>$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\cos\theta_1 \\ y=\rho\sin\varphi\cos\theta_1 \\ z=\rho\sin\theta_1 \end{cases}$</td>
<td>$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta_2 \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta_2 \\ z=\rho\cos\theta_2 \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td>

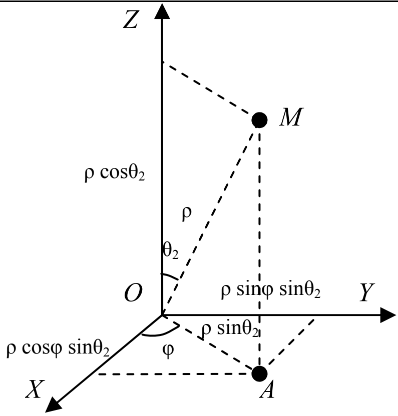
Рис. 17.7</td>
<td>

Рис. 17.8</td>
</tr>
<tr>
<td>θ_1 - кут між радіус-вектором OM та площиною XOY і</td>
<td>θ_2 - кут між радіус-вектором OM і додатнім напрямком осі OZ;</td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{-\pi}{2} \le \theta_1 \le \frac{\pi}{2}$; $\quad |I_1| = \rho^2\cos\theta_1$.</td>
<td>$0 \le \theta_2 \le \pi$; $|I_2| = \rho^2\sin\theta_2$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">ρ - довжина від початку координат до точки M, тобто $\rho = OM$ $(\rho \ge 0\,!)$, φ - кут між OA і віссю OX, де A – це проекція точки M простору на площину XOY.</td>
</tr>
<tr>
<td>Елемент об’єму:
$dxdydz = \rho^2\cos\theta_1 d\rho d\varphi d\theta$</td>
<td>Елемент об’єму:
$dxdydz = \rho^2\sin\theta_2 d\rho d\varphi d\theta_2$</td>
</tr>
</table>

Обчислимо якобіан в першому випадку:

$$|I| = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta_1)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta_1 & -\rho\sin\varphi\cos\theta_1 & -\rho\cos\varphi\sin\theta_1 \\ \sin\varphi\cos\theta_1 & \rho\cos\varphi\cos\theta_1 & -\rho\sin\varphi\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 0 & \rho\cos\theta_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2\sin\theta_1\sin^2\varphi\cos\theta_1\sin\theta_1 + \rho^2\sin\theta_1\cos^2\varphi\cos\theta_1\sin\theta_1 +$$
$$+\rho^2\cos\theta_1\cos^2\varphi\cos^2\theta_1 + \rho^2\cos\theta_1\sin^2\varphi\cos^2\theta_1 = \rho^2\cos\theta_1.$$

Оскільки

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2(\cos^2\varphi\cos^2\psi_1 + \sin^2\varphi\cos^2\psi_1 + \sin^2\psi_1) = \rho^2(\cos^2\psi_1 + \sin^2\psi_1) = \rho^2,$$

тому $\rho = \rho_0$ - сфера з центром в т.О і радіусом ρ_0.

$\theta_1 = \theta_0$ ($\theta_2 = \theta_0$) - частина конуса, твірна якого з площиною XOY (з віссю OZ) утворює кут θ_0. При перерізі сфери $\rho = \rho_0$ конусом $\theta_1 = \theta_0$ ($\theta_2 = \theta_0$) утворюється паралель на сфері.

Оскільки $\varphi = \angle(OA, OX)$, то $\varphi = \varphi_0$ - півплощина, обмежена віссю аплікат, яка утворює з віссю абсцис кут φ_0.

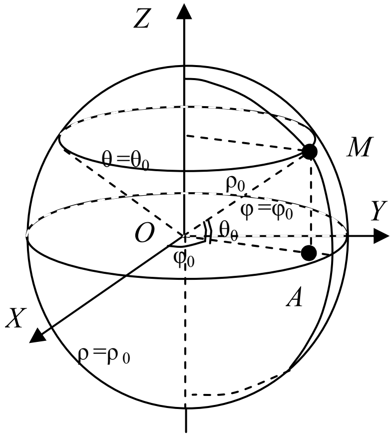


Рис. 17.9

Переріз сфери цією півплощиною утворює меридіан.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2dz$ за допомогою сферичних координат..

Розглянемо сферичну систему координат першого випадку:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\theta_1 \\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta_1 \\ z = \rho\sin\theta_1 \end{cases}.$$

За умовою

$0 \le x \le 1,$

$0 \le y \le \sqrt{1-x^2},$

$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2},$

тому тіло обмежене додатними частинами конуса і сфери, що лежать в першому октанті. В даному випадку рівнянням поверхні конуса в сферичній системі координат є $\theta = \frac{\pi}{4}$, а сфери – $\rho = \sqrt{2}$. Виходячи із геометричного змісту сферичних координат, отримаємо (див. рис. 17.10):

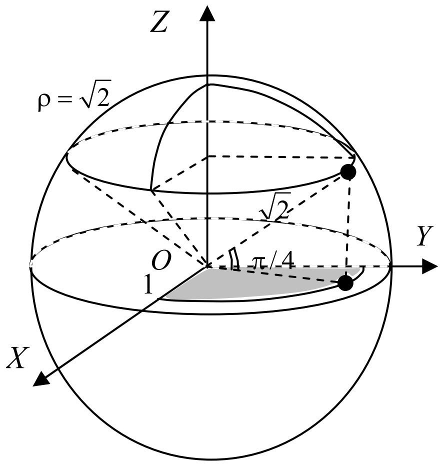


Рис. 17.10

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cos\theta_1 \rho^2 \sin^2\theta_1 d\rho.$$

Обчислення завершити самостійно!

17.7.5 Сферичні координати в $\mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} x_1 = \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots\ldots \sin\varphi_{n-1} \\ \ldots\ldots \\ x_k = \rho\cos\varphi_{k-1} \prod_{i=k}^{m-1} \sin\varphi_i, k = 2,3,\ldots.,m-1 \\ \ldots\ldots \\ x_m = \rho\cos\varphi_{m-1} \end{cases}$$

$$0 \le \varphi_1 \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi_i \le \pi \ \forall i = \overline{2, m-1}, \quad \rho \ge 0,$$

$$|I| = \rho^{m-1} \prod_{k=1}^{m-1} \sin^{k-1}\varphi_k \text{ - якобіан.}$$

Приклад. Обчислити $I = \int_D \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2} dx_1 \ldots dx_m$, де $D: x_1^2 + \ldots + x_m^2 \le R^2$.

Оскільки $x_1^2 + \ldots + x_m^2 = R^2$, то $D: \rho^2 \le R^2 \Rightarrow D: \rho \le R$. Отже,

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi_i \int_0^{\pi} \sin\varphi_2 d\varphi_2 \int_0^{\pi} \sin^2\varphi_3 d\varphi_3 \ldots \int_0^{\pi} \sin^{m-2}\varphi_m d\varphi_m \int_0^R \rho^{m-1} \cdot \rho \cdot d\rho =$$

$$=\frac{R^{m+1}}{m+1}\cdot 2\pi\cdot 2^{m-2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi_2 d\rho_i\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi_3 d\varphi_3\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi_4 d\varphi_4\ldots\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}\varphi_{m-1}d\varphi_{m-1}=$$

$$=\frac{R^{m+1}}{m+1}\cdot\pi\cdot 2^{m-1}\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2!!}{3!!}\cdot 1\cdot\ldots\cdot\frac{(m-4)!!}{(m-3)!!}\cdot\frac{(m-3)!!}{(m-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1=$$

$$=\frac{R^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{\pi 2^{m-1}}{(m-2)!!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{m-2}{2}\right]}.$$