18 КРИВОЛІНІЙНІ І ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

18 КРИВОЛІНІЙНІ І ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

18.1 Криволінійні інтеграли

18.1.1.Поняття криволінійного інтегралу першого і другого роду. Нехай L - спрямована крива: - це така крива, що існує скінченний супремум множини усіх довжин ламаних з вузлами на цій кривій. Значення цього супремума називається довжиною ламаної.

Параметризація L *:* $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$

Припущення:

1. L не має самоперетинів і самонакладів.

2. L **-** гладка крива, тобто така крива, параметризація якої містить функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ неперервно диференційовні на відрізку $[a,b]$, тобто:

а) функції $\varphi'(t)$ і $\psi'(t)$ - неперервні на відрізку $[a,b]$

б) $\exists \varphi'(a+0) = \lim\limits_{t \to a+0} \varphi'(t) \quad \wedge \quad \exists \varphi'(b-0) = \lim\limits_{t \to b-0} \varphi'(t)$;

3. крива *не має особливих точок,* тобто таких точок $(\varphi(t_0);\psi(t_0)) \in L$, що $[\varphi'(t_0)]^2 + [\psi'(t_0)]^2 = 0$, іншими словами, усі точки кривої L - *звичайні,* тобто $[\varphi'(t_0)]^2 + [\psi'(t_0)]^2 \neq 0 \ \ \forall t_0 \in [a,b]$.

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками $a = t_0 < t_1 < ... < t_k < ... < t_{n-1} < t_n = b$. Йому відповідає розбиття кривої L точками $\{M_k\}$ на дуги $\{\cup M_{k-1}M_k\}$ (рис. 18.1). Тут

$M_k(x_k, y_k) = M_k(\varphi(t_k), \psi(t_k))$,

$M_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1}) = M_{k-1}(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1}))$,

$\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = x_k - x_{k-1}$,

$\Delta y_k = \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = y_k - y_{k-1}$.

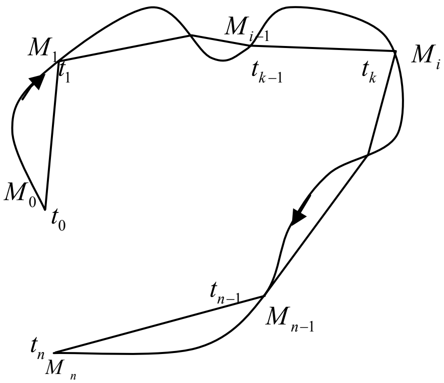


Рис. 18.1.

Позначимо через Δl_k довжину дуги $\cup M_{k-1}M_k$, тобто

$$\Delta l_k = \left|\cup M_{k-1}M_k\right| = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,dt .$$

Діаметром розбиття кривої L точками $\{M_k\}$ називається $\Delta = \max\limits_k \Delta l_k$.

Розглянемо три функції: $f(x,y)$, $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, які є неперервними вздовж L. Оскільки L - замкнена множина і обмежена, то f,P,Q - рівномірно неперервні на L, тобто

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall\ M_1,M_2\in L\ \ \rho(M_1,M_2)<\delta \Rightarrow \left|f(M_1)-f(M_2)\right|<\varepsilon,$$

аналогічно для функцій $P(x,y)$ і $Q(x,y)$.

Нехай $N_k \in \cup M_{k-1}M_k$, тобто $N_k(\alpha_k,\beta_k) = N_k(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))$, $\tau_k \in [t_{k-1},t_k]$, $k=1,\dots,n$ - проміжні точки розбиття кривої L точками $\{M_k\}$.

Розглянемо інтегральні суми

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\cdot\Delta l_k = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k,\beta_k)\cdot\Delta l_k ,$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(\alpha_k,\beta_k)\cdot\Delta x_k ,$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} Q(\alpha_k,\beta_k)\cdot\Delta y_k .$$

Означення. Число I_s $(s=1,2,3)$ назвемо *границею інтегральних сум* σ_s при діаметрі розбиття, що прагне до нуля

$$I_s = \lim_{\Delta\to 0}\sigma_s ,$$

якщо $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall\{M_k\}\forall\{N_k\}:\ \Delta<\delta \Rightarrow \left|\sigma_s - I_s\right|<\varepsilon$.

Означення. Границя I_1 називається *криволінійним інтегралом першого роду,* похначення: $I_1 = \int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl$.

Означення. Границі I_2 і I_3 називаються *криволінійними інтегралами другого роду*: $I_2 = \int\limits_L P(x,y)\,dx$, $I_3 = \int\limits_L Q(x,y)\,dy$.

Означення. Сума $\int\limits_L P(x,y)\,dx + \int\limits_L Q(x,y)\,dy = \int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ називається *загальним інтегралом другого роду*.

Із означення випливає,

по-перше, що криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку обходу кривої L, а інтеграл другого роду залежить від напрямку обходу L;

по-друге, *фізичний зміст інтегралу першого роду – це* маса кривої L, що має щільність $f(x,y)$;

по-третє, *фізичний зміст інтегралу другого роду (загальний інтеграл)* – робота по переміщенню матеріальної точки із А в В вздовж кривої L під дією сили, що має складові $P(x,y)$ і $Q(x,y)$.

Зауваження. Аналогічним чином вводяться криволінійні інтеграли в просторі, зокрема

$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ *- криволінійний інтеграл першого роду.*

$\int\limits_L P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$ *- загальний криволінійний інтеграл другого роду.*

18.1.2. Умови існування криволінійних інтегралів.

Теорема. Якщо на криву L накладаються вище зазначені припущення, $f(x,y)$, $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ - неперервні вздовж L, тоді існують криволінійні інтеграли першого і другого роду від відповідних функцій, до того ж, має місце формула зв'язку між криволінійними інтегралами і означенним інтегралом Рімана:

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl=\int\limits_a^b f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\cdot\sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2+\big[\psi'(t)\big]^2}\,dt=I_1, \qquad (1)$$

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx=\int\limits_a^b P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt=I_2. \qquad (2)$$

$$\int\limits_L Q(x,y)\,dy=\int\limits_a^b Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\cdot\psi'(t)\,dt=I_3. \qquad (3)$$

Доведення. Визначені інтеграли в правій частині існують завдяки неперервності підінтегральних функцій на $[a,b]$. Розглянемо інтегральні суми

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^n f(\alpha_k,\beta_k)\Delta l_k=\left\|\begin{matrix}\alpha_k=\varphi(\tau_k),\quad \beta_k=\psi(\tau_k),\\ \Delta l_k=\left|M_{k-1}M_k\right|=\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2+\big[\psi'(t)\big]^2}\,dt\end{matrix}\right\|=$$

$$=\sum_{k=1}^n f\big(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)\big)\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2+\big[\psi'(t)\big]^2}\,dt;$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P\left(\alpha_k, \beta_k\right)\Delta x_k = \left\| \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \varphi\left(t_k\right) - \varphi\left(t_{k-1}\right) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'\left(t\right) dt \right\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P\left(\varphi\left(\tau_k\right), \psi\left(\tau_k\right)\right) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'\left(t\right) dt \ ;$$

аналогічно для σ_3;

$$\left|\sigma_2 - I_2\right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P\left(\varphi\left(\tau_k\right), \psi\left(\tau_k\right)\right)\varphi'\left(t\right) dt - \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P\left(\varphi\left(t\right), \psi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right) dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'\left(t\right)\left[P\left(\varphi\left(\tau_k\right), \psi\left(\tau_k\right)\right) - P\left(\varphi\left(t\right)\right), \psi\left(t\right) \right] dt \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left|\varphi'\left(t\right)\right| \cdot \left| P\left(\varphi\left(\tau_k\right), \psi\left(\tau_k\right)\right) - P\left(\varphi\left(t\right), \psi\left(t\right)\right) \right| dt;$$

$$\left[\sigma_1 - I_1\right] \le \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\left[\varphi'\left(t\right)\right]^2 + \left[\psi'\left(t\right)\right]^2} \cdot \left| f\left(\varphi\left(\tau_k\right), \psi\left(\tau_k\right)\right) - f\left(\varphi\left(t\right), \psi\left(t\right)\right) \right| dt \ .$$

Покажемо що $\Delta = \max\limits_k \Delta l_k \to 0 \Rightarrow \Delta^* = \max\limits_k \Delta t_k \to 0$. Функції $\varphi'\left(t\right)$ і $\psi'\left(t\right)$ - неперервні функції $\Rightarrow$ і корінь буде неперервний на відрізку $\left[a, b\right]$. Оскільки $\left[\varphi'\left(t\right)\right]^2 + \left[\psi'\left(t\right)\right]^2 \ne 0$, то за другою теоремою Вейєрш-трасса

$$\exists t_0 \in [a,b]: \ \min_{[a,b]} \sqrt{\left[\varphi'\left(t\right)\right]^2 + \left[\psi'\left(t\right)\right]^2} = \sqrt{\left[\varphi'\left(t_0\right)\right]^2 + \left[\psi'\left(t_0\right)\right]^2} = m > 0 \ ,$$

Тоді

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\left[\varphi'\left(t\right)\right]^2 + \left[\psi'\left(t\right)\right]^2} dt \ge m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m\Delta t_k \ ,$$

тобто $\Delta t_k \le \dfrac{1}{m} \Delta l_k$. Тоді

$$\begin{array}{ccccc} 0 \le & \Delta^* & \le & \dfrac{1}{m}\Delta \\ \searrow & \Downarrow & \swarrow & \\ & 0 & & \end{array}$$

, тобто $\Delta = \max\limits_k \Delta l_k \to 0 \Rightarrow \Delta^* = \max\limits_k \Delta t_k \to 0$.

Маємо:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\varphi(t),\psi(t)\right) \\ \varphi(t),\psi(t) - \textit{неперервні} \quad \textit{на} \quad [a,b] \\ f(x,y) - \textit{неперервна} \quad \textit{на} \quad L \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\varphi(t),\psi(t)\right) - \textit{неперервна} \quad \textit{на} \quad [a,b] \Rightarrow$$

$f\left(\varphi(t),\psi(t)\right)$ рівномірно неперервна на відрізку $[a,b]$, тоді

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall\{t_k\}\ \ \Delta^*<\delta\Rightarrow\left|\left(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)\right)-\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\right|<\frac{\varepsilon}{|L|}$$

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall\{t_k\}\quad \Delta^*<\delta\Rightarrow\left|P\left(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)\right)-P\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\right|<\frac{\varepsilon}{M(b-a)},$$

де $M=\max\limits_{[a,b]}\left|\varphi'(t)\right|$.

Таким чином, маємо:

$$\left|\sigma_1-I_1\right|\le\frac{\varepsilon}{|L|}\cdot\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}dt=\frac{\varepsilon}{|L|}\cdot|L|=\varepsilon;$$

$$\left|\sigma_2-I_2\right|\le\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\cdot\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left|\varphi'(t)\right|dt\le M\cdot\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k=\varepsilon.$$

Отже, отримали:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta^*>0:\exists\delta>0\forall\{M_k\}\quad\Delta<\delta^*\Rightarrow\Delta^*<\delta\Rightarrow\left(\left|\sigma_1-I_1\right|<\varepsilon\wedge\left|\sigma_2-I_2\right|<\varepsilon\right).$$

Що доводить потрібне. ■

Означення. Крива називається *кусково гладкою*, якщо вона неперервна і її можна розбити на скінчену кількість дуг-ділянок L_k, що не мають спільних внутрішніх точок, тобто $\left(L_k\bigcap L_i\right)^0=\varnothing\ \forall i\ne k$, $L=\bigcup\limits_{k=1}^{n}L_k$, так що кожна ділянка L_k є гладкою кривою.

Зауваження 1. Якщо крива кусково гладка, то криволінійні ін.теграли по ній можна представити як суму по гладким її ділянкам, тобто $\int\limits_L\ldots=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{L_k}\ldots$ При цьому формули (1), (2), (3) мають місце і для кусково гладких кривих. Так само ці ж формули справедливі, якщо функції $f(x,y)$, $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ кусково неперервні на L.

Зауваження 2. Формули (1), (2), (3) мають місце для кривих L у просторі: якщо крива параметризована як

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [a,b], \\ z = \eta(t) \end{cases}$$

то

$$\int_L f(x,y,z)\,dl = \int_a^b f\left(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)\right)\cdot\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2 + \left[\eta'(t)\right]^2}\,dt\ ;$$

$$\int_L P(x,y,z)\,dx = \int_a^b P\left(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)\right)\cdot\varphi'(t)\,dt\ ,$$

$$\int_L Q(x,y,z)\,dy = \int_a^b Q\left(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)\right)\cdot\psi'(t)\,dy\ ,$$

$$\int_L R(x,y,z)\,dy = \int_a^b R\left(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)\right)\cdot\eta'(t)\,dt\ .$$

якщо $f(x,y,z), P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ - неперервні вздовж кривої, а L - гладка крива, без само перетинів і самонакладів. Ці формули справедливі також, якщо L - кусково гладка крива.

Зауваження 3. Якщо крива зімкнена, то інтеграл за цією кривою можна обчислювати, розбивши цю криву на дві. Як правило це робиться теоретично, а на практиці лише перевіряється неперервність $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ на відрізку змінних параметру t, що відповідає повному обходу кривої.

Додатнім напрямком обходу зімкненої кривої при обчисленні інтегралів другого роду будемо вважати такий напрямок, рухаючись яким по кривій L область, яку обмежує ця крива залишається зліва від точки, що здійснює цей обхід. Тобто проти годинникової стрілки.

Коли хочуть зазначити, що крива зімкнена, то дотримуються позначати:

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\ .$$

18.1.3. Властивості криволінійних інтегралів першого роду.

Отримаємо їх застосовуючи властивості визначеного інтегралу Рімана і формули зв’язку між криволінійним і Ріманівським інтегралами.

1) Якщо для функцій $f(x,y)$ і $g(x,y)$ $\exists\int_L f(x,y)dl \wedge \exists\int_L g(x,y)\,dl \Rightarrow \forall\alpha,\beta\in R\,\exists\int_L \left(\alpha\cdot f(x,y) + \right.$

$$+\beta\cdot g\left(x,y\right)\big)dl=\alpha\int_L f\left(x,y\right)dl+\beta\int_L g\left(x,y\right)dl$$ -

це властивість *лінійності інтегралу першого роду.*

2) Властивість *адитивності інтегралу першого роду:* якщо $L=\bigcup_{k=1}^{n}L_k$, $\left(L_k\bigcap L_i\right)^0=\varnothing\ \forall i\neq k$, тоді $\int_L f\left(x,y\right)dl=\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k} f\left(x,y\right)dl$.

3) *Теорема про середнє:* якщо $f\left(x,y\right)$ - неперервна на L , тоді $\exists M^*\in L:\int_L f\left(x,y\right)dl= f\left(M^*\right)\cdot\left|L\right|$.

4) *оцінка модуля:*

$$\exists\int_L f\left(x,y\right)dl\ \Rightarrow\ \exists\int_L\left|f\left(x,y\right)\right|dl\ \wedge\ \left|\int_L f\left(x,y\right)dl\right|\leq\int_L\left|f\left(x,y\right)\right|dl .$$

Геометричний зміст криволінійного інтегралу першого роду.

$\int_L dl=\left|L\right|$, тобто інтеграл $\int_L dl$ дорівнює *довжині дуги.*

Зауваження. *Аналогічно вводяться криволінійні інтеграли для кривих в просторі* $\mathbb{R}^n$.

Приклад 1. $\left|L\right|$ **-** ? Знайти довжину кривої

$$\begin{cases}x=e^{-t}\cos t\\ y=e^{-t}\sin t\ ,\quad 0\leq t\leq 2\pi\ .\\ z=e^{-t}\end{cases}$$

Розв'язання.

$$\left|L\right|=\int_L dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left[-e^{-t}\cos t+e^{-t}\left(-\sin t\right)\right]^2+\left[-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t\right]^2+\left[-e^{-t}\right]^2}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}e^{-t}\cdot\sqrt{\cos^2 t+2\cos t\sin t+\sin^2 t+\sin^2 t-2\sin t\cos t+\cos^2 t+1}=$$

$$=\sqrt{3}\int_0^{2\pi}e^{-t}dt=\sqrt{3}\cdot\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^{2\pi}==-\sqrt{3}\left(e^{-2\pi}-1\right)=\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{e^{2\pi}}\right).$$

Приклад 2. $\int_{AC}\left(x,y\right)dx+\left(x-y\right)dy$, якщо AC - частина еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ для випадку $y>0$, де $A\left(a,0\right)$, $C\left(0,b\right)$.

Розв'язання. Параметризуємо криву: $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$

$$\int_{AC} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos t + b\sin t)(-a\sin t)\,dt + (a\cos t - b\sin t)\,b\cos t dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-a^2\cos t\sin t - ab\sin^2 t + ab\cos^2 t - b^2\sin t\cos t\right) dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\left(a^2+b^2\right)}{2}\sin 2t + ab\left(\cos 2t\right) dt = -\frac{a^2+b^2}{2}.$$

18.2 Поверхневі інтеграли

18.2.1. Поняття поверхні.

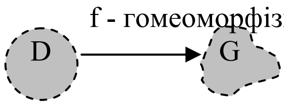
Означення. Відображення f що переводить множину G в множину G^* називається *гомеоморфізмом*, якщо це відображення $f\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to G^* \subset \mathbb{R}^3$ задовольняє вимогам:

1. f – взаємнооднозначне відображення G на G^*,
2. будь-яка фундаментальна послідовність $\{N_n\} \subset G$ точок переводиться в фундаментальну послідовність $\{M_n\} \subset G^*$,
3. будь яка фундаментальна послідовність $\{M_n\} \subset G^*$ є образом фундаментальної послідовності $\{N_n\} \subset G$.

Означення. Відображення f: $G \subset \mathbb{R}^2 \to G^* \subset \mathbb{R}^3$ називається *локальним гомеоморфізмом*, якщо $\forall\, x_\circ \in G\ \exists\ \text{окіл}\ U_{x_\circ} \subset G$, який гомеоморфно відображається на свій образ, тобто на $f(U_{x_\circ})$.

Означення. Область G на площині T називається *елементарною областю (ЕО)*, якщо вона є гомеоморфним образом відкритого кругу D $\subset$ R^2, тобто

$G \subset T$ – елементарна область $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists\ D \subset \mathbb{R}^2$ - відкритий круг: $f: D \to G$ - гомеоморфізм.



Означення. Зв'язна область G на площині називається *простою плоскою областю*, якщо будь-яка її точка x_0 має окіл, який є елементарною областю, тобто

G - проста плоска область $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 1) G – зв'язна; 2) $\forall x_0\ \exists U_{x_\circ}$ - є ЕО

18 КРИВОЛІНІЙНІ І ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Означення. Множина точок $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ називається *поверхнею*, якщо вона є локально гомеоморфним образом простої плоскої області G, тобто

$\Phi \subset \mathbb{R}^3$ - *поверхня* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists G$ - проста плоска область: $f\colon G \to \Phi$ – локальний гомеоморфізм.

Означення. Околом т.M на поверхні Ф називається множина виду $W(M) \overset{def}{=} U(M) \cap \Phi$

Приклад. Нехай G – проста плоска область на площині Oxy (наприклад, G – відкритий круг),

$M(x, y) \in G$,

$z = z(x,y) = z(M)$ – неперервна функція на G,

G^* - графік функції $z(M)$, тобто

$G^* = \{(x,y,z)\colon z = z(x,y)\}$.

Відображення, що задає локальний гомеоморфізм:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u,v) \end{cases} \Rightarrow \textit{поверхнею} \ є \ \Phi = G^* \ !$$

Розглянемо функцію, що задана параметрично:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in G, \quad G \text{ проста плоска область.} \\ x = z(u,v) \end{cases} \tag{1}$$

Відображення задає векторну функцію $\overline{r} = \overline{r}(u,v) = x(u,v)\overline{i} + y(u,v)\overline{j} + z(u.v)\overline{k}$.

<u>Вимоги А:</u>

1. Функції (1) має неперервні часткові похідні першого порядку в G.

2. $$rang \left. \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \right|_{(u,v)} = 2 \qquad \forall \, (u,v) \, є \, G \, .$$

Твердження. При виконані вимог А множина точок Ф в просторі, що визначаються рівнянням (1) представляє собою поверхню, тобто є образом простої плоскої області G при локально гомеоморфному відображені.

18 КРИВОЛІНІЙНІ І ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Приклад. Функція $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u,v) \end{cases}$ в простій плоскій області G задовольняє вимогам А, якщо $z = z(u,v)$ має неперервні часткові похідні першого порядку в G, крім того є вірним

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{dz}{du} \\ 0 & 1 & \dfrac{dz}{dv} \end{pmatrix} = 2\,.$$

Вона визначає поверхню.

Доведення твердження.

$N_\circ(u_\circ, v_\circ) \in G$
$M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ) \in \Phi$
$x_\circ = x(u_\circ, v_\circ)$
$y_\circ = y(u_\circ, v_\circ)$
$z_\circ = z(u_\circ, v_\circ)$

I) Доведемо, що малий окіл т. N_0 відображається за допомогою (1) в малий окіл т. M_0.

А1) => *x(u, v), y(y, v), z(u, v)* – неперервна в області G, зокрема, в т. N_0, тоді

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall\ N \subset G\ \rho_2(N, N_o) < \delta \Rightarrow$$
$$\left(\left| x(N) - x(N_o) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \wedge \left| y(N) - y(N_o) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \wedge \wedge \left| z(N) - z(N_o) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \right).$$

Тому

$$\rho_3(M, M_o) = \sqrt{\left| x(N) - x(N_o) \right|^2 + \left| y(N) - y(N_o) \right|^2 + \left| z(N) - z(N_o) \right|^2} < \sqrt{3 \cdot \frac{\varepsilon^2}{3}} = \varepsilon\,,$$

$$\rho_2(N, N_o) < \delta \Rightarrow N \in U_\delta(N_o) = U(N_o)\,,$$

$$\rho_3(M, M_o) < \delta \Rightarrow M \in V_\varepsilon(M_o) = V(M_o)\,,$$

звідси і випливає потрібне.

II) Оскільки G –проста область, то точка N_0 має окіл $U^*(N_o)$, який є елементарною областю, тобто є образом відкритого кругу D при гомеоморфному відображені. Нехай цей окіл міститься в $U(N_o)$. Оберемо в середині кругу D замкнену множину, тоді при гомеоморфізмі вона відобразиться в замкнену підмножину $U^{**}(N_o)$ околу $U^*(N_o)$. Зауважимо, що $U^*(N_o) \subset G$.

На замкненій, обмеженій множині $U^*(N_o)$ функції *x, y, z* – неперервні, а тому за теоремою Кантора рівномірно неперервні.

Нехай $\{N_k\}\subset U^{**}(N_o)-$ фундаментальна послідовність, а $\{M_k\}=\{x(N_k),y(N_k),z(N_k)\}$. Чи є фундаментальною послідовність $\{M_k\}$?

$\{N_k\}\subset U^{**}(N_o)-$ фундаментальна послідовність, тому $\forall\delta'>0\ \exists\ n_o\in\mathbb{N}:\forall n\ge n_o\forall p\in\mathbb{N}\ \rho(N_n,N_{n+p})<\delta'$.

В силу рівномірної неперервності функцій *x, y, z* на $U^{**}(N_o)$ отримаємо

$$\forall\varepsilon'>0\ \exists\delta'>0;\forall n\ge n_o\forall p\in\mathbb{N}\ \rho(N_n,N_{n+p})<\delta'\Rightarrow$$

$$\left(\left|x(N_n)-x(N_{n+p})\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\wedge\left|y(N_n)-y(N_{n+p})\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\wedge\left|z(N_n)-z(N_{n+p})\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)$$

Звідки $\forall n\ge n_o\forall p\in\mathbb{N}\quad \rho(M_n,M_{n+p})<\sqrt{3\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)^2}=\varepsilon$.

Висновок: фундаментальну послідовність $\{N_k\}$ переведено в фундаментальну послідовність $\{M_k\}$.

III) Із A2) маємо $rang\begin{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=2$, тому хоча б один із мінорів не обертається в нуль. Нехай для визначеності

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\ne 0\quad\forall\ N(u,v)\in U(N_o).$$

Зважаючи на вимогу A1), одержимо за теоремою про неявні функції (2 випадок): система $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ має єдиний розв'язок $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$ в околі точки $P_o(x_o,y_o)$.

За тією теоремою, крім того, маємо неперервну диференційовність функцій *u(x, y) і v(x, y)* в околі $W(P_o)$. Тому малий окіл $W(P_o)$ буде переводитися в малий окіл $U(N_o)$, а фундаментальна послідовність $\{P_n\}$ переведеться в фундаментальну послідовність $\{N_n\}$. Крім того, відображення малого околу $W(P_o)$ на малий окіл $U(N_o)$ є взаємно однозначним, оскільки відображення $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ і $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$ є взаємно оберненими.

Оскільки функції $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ неперервні в $W(P_o)$, то, маючи на увазі $z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y)) = \varphi(x, y)$, отримаємо неперервність функції $\varphi(x, y)$ в $W(P_o)$. Тому малий окіл $W(P_o)$ буде переводитися в малий окіл $V(M_o)$, а фундаментальна послідовність $\{P_n\}$ переведеться в фундаментальну послідовність $\{M_n\}$.

Відображення $z = \varphi(x, y)$ здійснює проектування поверхні Ф в малому околі т.M_o на площину Oxy взаємно однозначно, тому малий окіл $V(M_o)$ буде переводитися в малий окіл $W(P_o)$, а фундаментальна послідовність $\{M_n\}$ переведеться в фундаментальну послідовність $\{P_n\}$.

Отже, фунд. $\{M_n\} \leftrightarrow$ фунд. $\{P_n\} \leftrightarrow$ фунд. $\{N_n\}$;

малий окіл $V(M_o) \leftrightarrow!$ малий окіл $W(P_o) \leftrightarrow!$ малий окіл $U(N_o)$.

Тому відображення (1) здійснює локальний гомеоморфізм G на Ф. Висновок: Ф – поверхня. ■

Зауваження. Поверхня Ф, що визначена рівнянням (1) і виконує вимоги А, однозначно проектується хоча б на одну з трьох координатних площин.

Зауваження. Поверхня Ф, що задовольняє рівнянням (1) і першій з вимог А, тобто часткові похідні першого порядку від координатних функції неперервні, то така поверхня називається *гладкою*, а якщо задовольняє другій вимозі А, тобто rang матриці дорівнює двом, то така поверхня називається *поверхнею без особливих точок*. Тобто, фактично, поверхня Ф, що визначається рівнянням (1) і задовольняє обом вимогам А називається *гладкою, без особливих точок поверхнею.*

Нехай Ф – поверхня, що визначається рівнянням (1), гладка, без особливих точок.

$\bar{r}(u,v) = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\bar{k}$ - її векторне рівняння

Нехай v_o – фіксоване, таке що $(u, v_o) \in G$, тоді

$\bar{z}(u, v_o)$ - крива на поверхні Ф,

$\frac{\partial \bar{z}}{\partial u}(u, v_o)$ - вектори дотичних до кривої $\bar{z}(u, v_o)$.

Аналогічно, $u_o\colon (u_o, v) \in G \Rightarrow \bar{z}(u_o, v)$ - крива на Ф,

$\frac{\partial \bar{z}}{\partial v}(u_o, v)$ - вектори дотичних до кривої $\bar{z}(u_o, v)$.

Множина кривих $\bar{z}(u, v_o)$ і $\bar{z}(u_o, v)$ - визначає *множину координатних ліній.*

Оскільки $N_o(u_o, v_o) \to M_o(x_o, y_o, z_o)$, то $\frac{\partial \bar{z}}{\partial u}(N_o)$ i $\frac{\partial \bar{z}}{\partial v}(N_o)$ - два вектори, що виходять із однієї точки M_o.

Із вимоги А 2), в якій рядки матриці містять координати векторів $\frac{\partial \bar{z}}{\partial u}$ i $\frac{\partial \bar{z}}{\partial v}$, випливає, що ці вектори лінійно незалежні, оскільки ранг утворений ними матриці дорівнює двом.

Тоді ці два вектора та точка M_o визначають дотичну площину в т.M_o на поверхні. Тоді $\bar{n} = \dfrac{\left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial u}(N), \frac{\partial \bar{z}}{\partial v}(N)\right]}{\left|\left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial u}(N), \frac{\partial \bar{z}}{\partial v}(N)\right]\right|}$ - одиничний вектор нормалі до дотичної площини в т. M_o.

Оскільки поверхня гладка, то усі компоненти дотичних векторів є неперервними функціями, тому $\bar{n}$ - неперервна функція в околі довільної точки поверхні M_o. Таким чином утворено в околі будь-якої точки гладкої, без особливих точок поверхні неперервне векторне поле нормалей. На практиці хотілося б мати справу з поверхнями, що мають цілком у всіх своїх точках неперервне поле нормалей.

Приклад. Лист Мьобіусу: склеїмо прямокутник ABB′A′ так, щоб співподало B з A′, а A з B′. Поверхня, що утвориться в результаті називається *листом Мьобіуса*.

При обході листа Мьобіуса нормаль змінює свій напрям не протилежний. Ліст Мьобіуса не має неперервного поля нормалей (факт, відомий із диф. геометрії).

Означення. Якщо поверхня Ф в цілому має неперервне поле нормалей, то така поверхня називається *двосторонньою* і *односторонньою* – у супротивному випадку.

Лист Мьобіуса є односторонньою поверхнею.

Означення. Поверхня Ф називається *повною*, якщо будь-яка фундаментальна послідовність точок цієї поверхні збігається до точки, що лежить на цій поверхні.

Означення. Поверхня називається *обмеженою*, якщо її можна помістити в деяку тривимірну кулю.

Приклади. Куля, еліпсоїд, одиничний гіперболоїд – двосторонні та повні.

Надалі будемо розглядати такі поверхні Ф, що є:

1) гладкими;
2) без особливих точок;
3) двосторонні;
4) повні;
5) обмежені.

18.2.2. Допоміжні леми.

Лема 1: Нехай Ф гладка поверхня, а точка M_0 - не є особлива (тобто rangA=2 в т. (u_0, v_0), що відповідає точці M_0). Тоді існує такий окіл точки M_0, який однозначно проектується на дотичну площину, що проходить через будь-яку точку цього околу.

Доведення вивчити за бажанням самостійно ✍!

Як наслідок з цієї леми і попередньої теореми отримаємо лему 2.

Означення. Ділянка $\Phi^* \subset \Phi$ має розмір δ, якщо вона лежить в середині кулі радіуса $\frac{\delta}{2}$. Тоді

$$\forall M_1, M_2 \in \Phi^* \ \ \rho(M_1, M_2) < \delta .$$

Лема 2. Якщо поверхня Φ гладка, без особливих точок, обмежена, повна, тоді існує таке $\delta > 0$, що будь-яка ділянка Φ^* поверхні Φ, розмір якої менший за δ, однозначно проектується

а) на одну із координатних площин;

б) на будь-яку дотичну площину, що проходить через будь-яку довільну точку цієї ділянки.

Лема 3. Якщо поверхня Φ гладка, без особливих точок, обмежена, повна, двостороння, що визначається рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in G, \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

тоді $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall \Phi^* \subset \Phi$ ділянка розміру, меншого за δ, є такою, що кут $\angle\gamma$ між будь-якими двома нормалями в точках цієї ділянки задовольняє умові:

$$\cos\gamma = 1 - \alpha \text{ , де } 0 < \alpha < \varepsilon .$$

Доведення. Оскільки поверхня є двохсторонньою, то вона має неперервне поле нормалей. Поверхня Φ обмежена і повна. Повнота забезпечує її замкненість. Замкненість і обмеженість множини Φ разом із неперервністю поля нормалей дає змогу застосувати теорему

Кантора, приходимо до висновку про рівномірну неперервність поля нормалей, а саме:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall M_1, M_2 \in \Phi\ \rho\left(M_1, M_2\right) < \delta \Rightarrow \left|\overline{n}(M_1) - \overline{n}(M_2)\right| < \sqrt{2\varepsilon}\ .$$

Поле нормалей являється одиничним, тобто

$$\left\|\overline{n(M)}\right\| = 1\ ,\ \forall M \in \Phi\ .$$

Оскільки $\cos\gamma = \left(\overline{n}(M_1), \overline{n}(M_2)\right)$, то

$$\alpha = \frac{1}{2}\left\|\overline{n}\left(M_1\right) - \overline{n}\left(M_2\right)\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{n}\left(M_1\right) - \overline{n}\left(M_2\right), \overline{n}\left(M_1\right) - \overline{n}\left(M_2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\overline{n}\left(M_1\right), \overline{n}\left(M_1\right)\right) + \left(\overline{n}\left(M_2\right), \overline{n}\left(M_2\right)\right) - 2\left(\overline{n}\left(M_1\right), \overline{n}\left(M_2\right)\right)\right) = 1 - \cos\gamma.$$

Звідси, а також з врахуванням умови рівномірної неперервності, отримаємо

$$\cos\gamma = 1 - \alpha\ ;\ 0 < \alpha < \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon\ . \qquad \blacksquare$$

18.2.3. Площа поверхні

Нехай Φ – гладка + без особливих точок + двостороння + повна + обмежена. Застосовуємо лему 2, згідно до якої знайдемо таке δ, щоб будь-яка ділянка поверхні розміром, меншим за δ, однозначно проектувалася на будь-яку дотичну площину, що проходить через довільну точку цієї ділянки.

Розбиваємо цю поверхню за допомогою кусково-гладких кривих на скінченну кількість ділянок $\left\{\Phi_i\right\}_{i=1}^{n}$ розміром , меншим за δ. Нехай $M_i \in \Phi_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ - довільні точки на цих ділянках. Позначимо через d – найбільший серед розмірів ділянок Φ_i - це діаметр розбиття. Проектуємо ділянку Φ_i на дотичну площину, що проходить через точку M_i. Позначаємо площу утвореної проекції σ_i. Розглянемо $\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i$.

Означення. Границею сум $\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i$, що відповідають розбиттю $\left\{\Phi_i\right\}_{i=1}^{n}$, при діаметрі розбиття *d*, що прагне до нуля, називається

$$\mathrm{I} = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\left\{\Phi_i\right\}\ \ \forall\left\{M_i\right\}\ d < \delta \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n}\sigma_i - \mathrm{I}\right| < \varepsilon\ .$$

18 КРИВОЛІНІЙНІ І ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Означення. Якщо існує скінченне значення границі $\mathrm{I}=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i$, тоді поверхня Φ називається *квадровною*, а значення границі I, її *площею*. Позначення: $\mathrm{I}=\sigma(\Phi)$.

Зауваження. Не можна отримати площу поверхні, апроксимуючи її площами поверхонь вписаних многогранників при подрібненні розмірів граней, і беручи в якості площі поверхні sup вписаних многогранників (так ми робили при обчисленні довжин кривих, вписуючи в них ламані). Існує класичний приклад Шварца – так званий «чобіт Шварца» – , який показує, що у площ вписаних в циліндричну поверхню многогранників не існує скінченного sup.

Теорема. Якщо поверхня Φ гладка + без особливих точок + двостороння + повна + обмежена і визначається рівнянням (1)

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v), \quad (u,v)\in G, \\ z=z(u,v) \end{cases} \qquad (1)$$

(тут G - проста плоскі область). тоді ця поверхня являється квадровною, а для обчислення її площі застосовується формула:

$$\sigma=\iint\limits_G\left\|\left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial u};\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right]\right\|dudv,$$

тут $\bar{r}(u,v)=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}$.

Доведення. Оскільки, поверхня гладка, то функції *x, y, z* мають неперервні часткові похідні першого порядку, через які виражається підінтегральна функція, тому ця функція є неперервною на *G*, а інтеграл від неї існує. Домовимося, значення цього інтегралу позначати через *I*, тобто

$$I=\iint\limits_G\left\|\left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial u};\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right]\right\|dudv.$$

Доведемо, квадровність поверхні Φ і той факт, що значення площі поверхні дорівнює *I*. Для цього застосуємо леми 2, 3 і

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\quad\forall\{\Phi_i\}_{i=1}^{n}$ - розбиття поверхні Φ за допомогою кусково-гладких кривих так, що $d<\delta\Rightarrow$

1) за лемою 2 кожна така ділянка однозначно проектується на дотичну площину, що проходить через будь-яку точку цієї ділянки; нехай

$M_i \in \Phi_i$, через σ_i позначимо площу проекції ділянки Φ_i на дотичну площину, що проходить через точку M_i;

2) за лемою 3 кут між будь-якими двома векторами нормалі в точках ділянки Φ_i визначається рівністю $\cos\gamma = 1-\alpha$, де $0<\alpha<\dfrac{\varepsilon}{I}$.

Мета: знайти площу σ_i.

Розглянемо власну систему координат. Початок координат - M_i, вісь Oz спрямуємо паралельно до нормалі, що проходить через M_i, тобто до $\overline{n}(M_i)$, площину *xOy* розташуємо в дотичній площині до Φ_i що проходить через точку M_i. В цій системі координат поверхня визначається системою (1).

Розглянемо нормаль в точці $M \in \Phi_i$, де $M=(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$,

$$\overline{n}(M)=\left[\frac{\partial\overline{r}}{\partial u};\frac{\partial\overline{r}}{\partial v}\right]\Bigg|_{(u,v)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u,v)} = A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k},$$

де $A=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u,v)}$, $B=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u,v)}$, $C=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u,v)}$.

Завдяки вибору системи координат косинус кута між нормаллю $\overline{n}(M)$ і віссю *Oz* дорівнює

$$\cos\gamma_M = \frac{C}{\left\|\left[\dfrac{\partial\overline{r}}{\partial u},\dfrac{\partial\overline{r}}{\partial v}\right]\right\|_{(u,v)}},\ C>0.$$

Через G_i позначимо ділянку області G, що відповідає $\mathit{\Phi}_i$ на $\mathit{\Phi}$, а через $\overline{\Phi_i}$ - проекцію Φ_i на дотичну площину, яка співпадає з OXY, тоді площа цієї проекції дорівнює

$$\sigma_i = \iint\limits_{\overline{\Phi}} dxdy.$$

Застосуємо формулу заміни змінної під знаком подвійного інтегралу, отримаємо

$$\sigma_i = \iint\limits_{\Phi} dxdy =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ \Phi_i \to G_i \end{matrix} \right| = \iint\limits_{G_i} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv = \iint\limits_{G_i} \underbrace{\left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial u}{\partial v} \end{matrix} \right|}_{C>0} dudv = \iint\limits_{G} \cos\gamma_M \left\| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\| dudv .$$

Оскільки поверхня двостороння, то вона має неперервне поле нормалі, тому $\cos\gamma_M$ - неперервна на G. Отже, можна застосувати теорему про середнє.

$$\sigma_i = \cos\gamma_{M_i^*} \iint\limits_{G_i} \left\| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\| dudv .$$

Тепер обчислимо значення суми

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \cos\gamma_{M_i^*} \iint \left\| \left[\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right] \right\| dudv = \left| \cos\gamma_{M_i^*} = 1 - \alpha_i^*, \partial e 0 < \alpha_i^* < \frac{\varepsilon}{\mathrm{I}} \right| =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{G} \left\| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\| dudv}_{= \iint\limits_{G} \left\| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\| dudv = \mathrm{I}} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \iint\limits_{G_i} \left\| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\| dudv .$$

Звідси

$$|\sigma - \mathrm{I}| = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\alpha_i^*}_{< \frac{\varepsilon}{I}} \iint\limits_{\sigma_i} \left\| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\| dudv < \frac{\varepsilon}{\mathrm{I}} \underbrace{\iint\limits_{G_i} \left\| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\| dudv}_{I} = \frac{\varepsilon}{I} \cdot I = \varepsilon .$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \{\Phi_i\}\, d < \delta \Rightarrow |\sigma - \mathrm{I}| < \varepsilon \Rightarrow$$

Маємо: $\Rightarrow \begin{cases} 1) \exists \lim\limits_{d \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i = I; \\ 2) I = \sigma = \iint\limits_{G} \left\| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\| dudv. \end{cases}$.

Що і треба було довести. ■

Зауваження. В теоремі припускається, що поверхня є гладка + без особливих точок + двостороння + повна + обмежена і визначається рівняннями (1). Якщо поверхню можна розбити на скінчену кількість ділянок, кожна з яких є гладкою, без особливих точок, повною, обмеженою, двосторонньою, що визначаються рівнянням (1), тоді поверхня Ф буде квадровна, а її площа обчислюється як сума площ ділянок, що її утворюють.

Зауваження 2. Якщо поверхня Ф є кусково гладкою, то, розбиваючи її на скінчену кількість ділянок, на кожній з яких вона є гладкою, площу всієї поверхні знайдемо як суму площ ділянок, що її утворюють.

Зауваження 3. Площа поверхні задовольняє властивості адитивності, тобто

$$\left(\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \wedge \Phi_1^{o} \cap \Phi_2^{o} = \varnothing\right) \Rightarrow \sigma_\Phi = \sigma_{\Phi_1} + \sigma_{\Phi_2}.$$

Зауваження 4.

$$\textit{Нехай } E = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right)^2 = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v},$$

Тоді, застосувавши співвідношення

$$\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|^2 + \left|(\bar{a},\bar{b})\right|^2 = |\bar{a}|^2 \cdot |\bar{b}|^2,$$

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \quad \bar{b} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v},$$

отримаємо

$$\left\|\left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right]\right\| = \sqrt{E\,G - F^2},$$

тобто

$$\boxed{\sigma = \iint_G \sqrt{E\,G - F^2}\,du\,dv - \textit{площа поверхні, зад. парам. через } (1).}$$

18.2.4 Поверхневі інтеграли

Нехай поверхня Ф - гладка + без особових точок + двостороння + гладка + повна + обмежена і визначена параметричним рівнянням (1) в простій плоскій області G. Нехай на цій поверхні визначені чотири функції:

f(x,y,z), P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z).

Надалі будемо припускати, що вони неперервні на Ф. Розіб'ємо поверхню Ф за допомогою кусково гладких кривих на ділянки $\{\Phi_i\}$ так, щоб здійснювалися леми 2 і 3.

Нехай точка $M_i \in \Phi_i$,

$\bar{n}(M_i)$ - вектор одиничної нормалі, тоді

$\overline{n}(M_i) = (\cos X_i, \cos Y_i, \cos Z_i)$,

$\sigma_i = \sigma(\Phi_i) = \iint\limits_S \sqrt{EG - F^2}\, dudv$

d = max серед розмірів ділянок Φ_i.

Визначимо чотири інтегральні суми:

$$\sum\nolimits_1 = \sum\nolimits_1 (f, \{\Phi_i\}, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^{n} F(M_i)\sigma_i ,$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum\nolimits_2 (P, \{\Phi_i\}, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^{n} P(M_i) \cos X_i \sigma_i ,$$

$$\sum\nolimits_3 = \sum\nolimits_3 (Q, \{\Phi_i\}, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^{n} Q(M_i) \cos Y_i \sigma_i ,$$

$$\sum\nolimits_4 = \sum\nolimits_4 (R, \{\Phi_i\}, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^{n} R(M_i) \cos Z_i \sigma_i .$$

Означення. Число

$$I_s = \lim_{d \to 0} \sum\nolimits_S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \{\Phi_i\} \forall \{M_i\}\, d > \delta \Rightarrow \left| I_s - \sum\nolimits_S \right| < \varepsilon \quad (s = 1, 2, 3, 4)$$

називається границею відповідної інтегральної суми при діаметрі розбиття, що прагне до нуля.

Означення. Якщо існує $I_1 = \lim\limits_{d \to 0} \sum_1 \Rightarrow I_1$ називається *поверхневим інтегралом першого роду*. Позначення: $I_1 = \iint\limits_{\Phi} f(x, y, z) d\sigma$.

Якщо існує $I_s = \lim\limits_{d \to 0} \sum_S$, s = 2, 3, 4 $\Rightarrow$ I_s називається *поверхневим інтегралом другого роду*. Позначення:

$$I_2 = \iint\limits_{\Phi} P(x, y, z) \cos X d\sigma = \iint\limits_{\Phi} P(x, y, z) dydz,$$

$$I_3 = \iint\limits_{\Phi} Q(x, y, z) \cos Y d\sigma = \iint\limits_{\Phi} Q(x, y, z) dxdz,$$

$$I_4 = \iint\limits_{\Phi} R(x, y, z) \cos Z d\sigma = \iint\limits_{\Phi} R(x, y, z) dxdy.$$

Означення. Значення суми

$$I_2 + I_3 + I_4 = \iint\limits_{\Phi} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dxdz + P(x, y, z) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Phi} (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z) d\sigma$$

називається *повним (або загальним) поверхневим інтегралом другого роду.*

Зауваження 1. Поверхневий інтеграл I роду не залежить від сторони поверхні, поверхневий інтеграл II роду залежить від сторони поверхні. Повний поверхневий інтеграл II роду змінює знак на протилежний при зміні сторони поверхні.

Зауваження 2. *Фізичний зміст поверхневих інтегралів.*

Поверхневий інтеграл I роду – це маса поверхні з поверхневою густиною *f(x,y,z)*.

Розглянемо повний поверхневий інтеграл II роду. Нехай

$\overline{A}\,(x,y,z)=(\,P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)),$

$\overline{n}\,(x,y,z)=(\cos X,\ \cos Y,\ \cos Z),$

тоді $I_2+I_3+I_4=\iint\limits_{\Phi}(\overline{A},\overline{n})d\sigma$ - потік векторного поля $\overline{A}$ наскрізь поверхню Ф.

Зауваження 3. Поверхневий інтеграл I роду і загальний поверхневий інтеграл II роду не залежать від вибору системи координат і є інваріантними відносно переходу до нових координат.

Зауваження 4. *Зв'язок між поверхневими інтегралами I і II роду*. Для переходу від поверхневого інтегралу II роду до поверхневого інтегралу I роду потрібно відповідно в якості функції *f(x,y,z)* обрати або *P(x,y,z)* cos*X,* або *Q(x,y,z)* cos*Y,* або *R(x,y,z)* cos*Z.*

Теорема *(зведення поверхневих інтегралів до подвійних). Я*кщо поверхня Ф гладка + без особових точок + двостороння + повна + обмежена і визначена параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x=x(u,v)\\ y=y(u,v),\quad (u,v)\in G,\\ z=z(u,v)\end{cases}\qquad (1)$$

тут G - проста плоска область. тоді

$$I_1=\iint\limits_G f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv,$$

$$I_2=\iint\limits_G P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\cos X dudv,$$

$$I_3=\iint\limits_G Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\cos Y dudv,$$

$$I_4=\iint\limits_G R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\cos Z dudv.$$

Доведення. Зважаючи на зауваження 4, доведемо здійсненність лише I_1. Але пояснимо існування усіх чотирьох подвійних інтегралів.

1) Функції F, P, Q, R – неперервні на Ф,

2) поверхня Ф є гладкою, тому функції $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ - неперервні разом із своїми частковими похідними першого порядку на G, тоді

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \Bigg/ \left\| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\| = \underbrace{\frac{A}{\left\| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\|}}_{\cos X} \bar{i} + \underbrace{\frac{B}{\left\| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\|}}_{\cos Y} \bar{j} + \underbrace{\frac{C}{\left\| \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\|}}_{\cos Z} \bar{k},$$

$\cos X, \cos Y, \cos Z$ виражається через часткові похідні x, y, z, тому є неперервними функціями на G;

3) функції

$$f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$
$$R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

є також неперервними, як композиції неперервних функцій, тому існують усі чотири подвійні інтеграли.

Нехай

$$\gamma = \iint_G F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Довести:

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \{\Phi_i\}\ \forall \{M_i\}\ \ d < \delta \Rightarrow \left| \sum\nolimits_1 - \gamma \right| < \varepsilon \right) \ \Leftrightarrow\ \exists \lim_{d \to 0} \sum\nolimits_1 = \gamma = I_1.$$

Розглянемо інтегральну суму

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{i-1}^{n} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \iint_{G_i} \sqrt{EG - F^2}\, dudv,$$

$G_i \subset G$, що відповідає ділянці $\Phi_i \subset \Phi$ при відображенні (1).

Застосуємо адитивність подвійного інтегралу:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \sum_{i=1}^{n} \iint_{G_i} f(M) \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Тоді

$$\left| \sum\nolimits_1 - \gamma \right| = \left| \iint_{G_i} (f(M) - f(M_i)) \sqrt{EG - F^2}\, dudv \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \iint_{G_i} \left| f(M) - f(M_i) \right| \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Оскільки функція $f(x,y,z)$ - неперервна на Ф, а поверхня Ф – повна, а тому замкнена, а також обмежена, тому рівномірно неперервна на Ф (теорема Кантора), тоді

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\forall M_1,M_2\in\Phi\quad \rho(M_1,M_2)<\delta\Rightarrow\left|f(M_1)-f(M_2)\right|<\frac{\varepsilon}{\sigma},$$

де $\sigma=\sigma(\Phi)$.

Якщо розбити поверхню Ф на ділянки з діаметром $<\delta$, тобто з max розміром цих ділянок $<\delta$, то це буде означати, що відстань між будь-якими двома точками таких ділянок буде $<\delta$. Потурбуємося, щоб значення δ відповідало також лемам 2 і 3, щоб задовільними теорему про площу поверхні. Отже,

$$\rho(M,M_i)<\delta\Rightarrow\left|f(M)-f(M_i)\right|<\frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

Таким чином,

$$\left|\sum\nolimits_1-\gamma\right|\le\sum_{i=1}^{n}\iint_{G_i}\left|f(M)-f(M_i)\right|\sqrt{EG-F^2}\,dudv<\frac{\varepsilon}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\iint_{G_i}\sqrt{EG-F^2}\,dudv=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\sigma}\sum_{i-1}^{n}\sigma_i=\frac{\varepsilon}{\sigma}\sigma=\varepsilon\,.\quad\blacksquare$$

Наслідок. Нехай поверхня Ф є графіком неперервної функції $z=f(x,y)$ на замкненій обмеженій області G, а функція $f(x,y)$ має неперервні часткові похідні першого порядку на G. Тоді графік цієї функції буде
гладкою поверхнею (завдяки неперервності часткових похідних),
без особливих точок (rang A=2, перевірте!),
двосторонньою (завдяки неперервності часткових похідних),
повною (завдяки неперервності функції $f(x,y)$),
обмеженою (теорема Вейєрштрасса для неперервної функції на замкненій обмеженій області G).
Формули для обчислення поверхневих інтегралів II роду:

$$I_2=-\iint_G P(x,y,f(x,y))f_x'(x,y)dxdy,$$

$$I_3=-\iint_G Q(x,y,f(x,y))f_y'(x,y)dxdy,$$

$$I_4=\iint_G R(x,y,f(x,y))dxdy.$$

у припущенні, що нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Oz.

Доведення. Маємо:

1) $\sqrt{EG-F^2}dudv = \sqrt{1+(f_x^{'})^2+(f_y^{'})^2}dxdy$,

2) $\overline{n}(M)=(\cos X, \cos Y, \cos Z)$ - нормаль до поверхні Ф, вона перпендикулярна до дотичної площини, яка має рівняння:

$$z-z_0 = f_x^{'}(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y^{'}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

тоді вектор одиничної нормалі має координати

$$\overline{n}(M)=\frac{(-f_x^{'}, f_y^{'}, 1)}{\sqrt{1+(f_x^{'})^2+(f_y^{'})^2}},$$

тобто,

$$\cos X = \frac{-f_x^{'}}{\sqrt{1+(f_x^{'})^2+(f_y^{'})^2}},$$

$$\cos Y = \frac{-f_y^{'}}{\sqrt{1+(f_x^{'})^2+(f_y^{'})^2}},$$

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+(f_x^{'})^2+(f_y^{'})^2}}.$$

Тоді у випадку інтегралу I_2 отримаємо

$$I_2 = \iint_G (P(x,y), f(x,y))\frac{-f_x^{'}}{\sqrt{1+(f_x^{'})^2+(f_y^{'})^2}}\sqrt{1+(f_x^{'})^2+(f_y^{'})^2}dxdy =$$

$$= -\iint_G P(x,y,f(x,y))f_x^{'}(x,y)dxdy,$$

інші формули отримати самостійно!

Зауваження. Якщо поверхня Ф кусково-гладка, то поверхневі інтеграли можна обчислити як суму інтегралів за гладкими частинами. Зробивши зворотну дію, тобто після переходу від суми інтегралів до одного інтегралу, отримаємо можливість застосування виведених формул для кусково-гладких поверхонь.