# 19 ТЕОРІЯ ПОЛЯ. ОСНОВНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ФОРМУЛИ АНАЛІЗУ

## 19.1 Повторення з курсу лінійної алгебри.

Скорочені записи: $a_i e^i = \sum_{i=1}^{3} a_i e^i$ ,

$g_{ij} e^i$ - сумування за і, а j – фіксоване.

Нехай $\{e^i\}$ - базис в $\mathbb{R}^3$, тоді $a \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow a = a^i e_i$ .

$\delta_i^j = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$ - називається символом Кронекера

### 19.1.1. Біортогональні базиси в $\mathbb{R}^3$.

**Означення.** Базис $\{e^j\}$ називається біортогональним до базису $\{e_i\}$, якщо $(e^j, e_i) = \delta_i^j$ .

**Твердження.** Для будь-якого базису $\{e_i\}$ в $\mathbb{R}^3$ існує єдиний біортогональний базис $\{e^j\}$.

### 19.1.2. Перетворення базисів.

Розглянемо дві пари біортогональних базисів $\{e_i\}$, $\{e^j\}$ та $\{e_{i'}\}, \{e^{j'}\}$ - відповідно, старих і нових. Тоді

$$\begin{matrix} e_{i'} = b_{i'}^i e_i \\ e^{i'} = \tilde{b}_i^{i'} e^i \end{matrix} , \qquad \begin{matrix} e_i = b_i^{i'} e_{i'} \\ e^i = \tilde{b}_{i'}^i e^{i'} \end{matrix}$$

$b_{i'}^i, b_i^{i'}, \tilde{b}_i^{i'}, \tilde{b}_{i'}^i$ - взаємно обернені пари матриць. Оскільки $b_{i'}^i = (e_{i'}, e^i)$ , то

$$\begin{matrix} b_i^{i'} = \tilde{b}_i^{i'} \\ b_{i'}^i = \tilde{b}_{i'}^i \end{matrix} .$$

Отже, для переходу від базисів $\{e_i\}$ , $\{e^i\}$ до базисів $\{e_{i'}\}, \{e^{i''}\}$ і навпаки достатньо знати тільки матрицю $\{b_{i'}^i\}$ переходу від старого базису $\{e_i\}$ до нового базису $\{e_{i'}\}$

Нехай $a = a^i e_i$ , $a = a_i e^i$ , тоді, оскільки $(a, e^i) = a^i (e_i, e^i)$ , $(e_i, e^i) = 1$ , то $a^i = (a, e^i)$ . Висновок:

$$\underline{a = (a, e_i) e^i}, \qquad \underline{a = (a, e^i) e_i} .$$

Знайдемо розклад базисних векторів. Для цього в останні представлення підставимо замість вектора $a$ базисний вектор $e_j$ *і* $e^j$ відповідно:

$$\begin{matrix} e_j = (e_j, e_i)e^i = g_{ji}e^i \\ e^j = (e^j, e^i)e_i = g^{ji}e_i \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} g_{ij} = (e_j, e_i) \\ g^{ji} = (e^j, e^i) \end{matrix}$$ - матриці симетричні, тобто

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ji} = g^{ij}.$$

Висновок:

$$\underline{e_j = g_{ji}e^i} \qquad \underline{e^j = g^{ji}e_i}$$

Доведемо, що $g_{ij}$ і $g^{ij}$ взаємо-обернені

► $(e^k, e_j) = \delta^k_j = g_{ij}(e^k, e^i) = g_{ji}g^{ki} \Rightarrow \{g_{ij}\}, \{g^{ij}\}$ - взаємно обернені та симетричні. ◄

**19.1.3. Інваріанти лінійного оператора. Дивергенція. Ротор.**

Розглянемо оператор А: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

🗁 **Означення.** Оператор А називається лінійним, якщо

$\forall x, y \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \ A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.

**Твердження.** Наступні співвідношення є вірними

для скалярного добутку $(e_i, Ae^i) = (e^i, Ae_i)$,

для векторного добутку $\left[e_i, Ae^i\right] = \left[e^i, Ae_i\right]$.

► $(e_i, Ae^i) = (g_{ij}e^j, g^{ik}Ae^k) = \underbrace{g_{ij}g^{ik}}_{=\delta^k_j}(e^j, Ae_k) = (e^k, Ae_k) = (e^i, Ae_i)$.

Для векторного добутку аналогічно. ◄

🗁 **Означення.** Вираз називається *інваріантом*, якщо він не змінюється при перетворенні базисів простору.

**Твердження.** Величини $(e_i, Ae^i)$, $\left[e_i, Ae^i\right]$ і відповідно рівні їм $(e^i, Ae_i)$, $\left[e^i, Ae_i\right]$ є інваріантами.

► $(e_i, Ae^i) = (b^{i'}_i e_{i'}, Ab^i_{k'}e^{k'}) = b^{i'}_i b^i_{k'}(e_{i'}, Ae^{k'}) = (e_{k'}, Ae^{k'}) = (e_{i'}, Ae^{i'})$,

аналогічне доведення і для векторного добутку. ◄

🗁 **Означення.** Інваріант $(e^i, Ae_i)$ або $(e_i, Ae^i)$ називається *дивергенцією оператора А*, а $\left[e^i, Ae_i\right]$ - *ротором оператора А*.

Розкладемо образ базисного елемента при дії оператора за базисом: $Ae_i = a_i^k e_k$. Скалярно домножимо цю рівність на елемент біортогонального базису і просумуємо:

$$(e^j, Ae_i) = a_i^k (e^j, e_k) = a_i^k \delta_k^j = a_i^j .$$

Зробимо висновок щодо представлення елементів матриці оператора: $\underline{a_i^j = (e^j, Ae_i)}$.

Обчислимо дивергенцію оператора A:

$$divA = (e^i, Ae_i) = (e^1, Ae_1) + (e^2, Ae_2) + (e^3, Ae_3) = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = \\ = trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 .$$

Тут $\lambda_i, i = 1,2,3$ - власні числа оператора A, з врахуванням їх кратності

Розглянемо в $\mathbb{R}^3$ базис i, j, k, тоді

$$a_1^1 = (i, Ai), a_1^2 = (i, Aj), a_1^3 = (i, Ak), \ldots,$$

таким чином, матриця $\overset{o}{A}$ оператора A має вигляд

$$\overset{o}{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i, Ai) & (i, Aj) & (i, Ak) \\ (j, Ai) & (j, Aj) & (j, Ak) \\ (k, Ai) & (k, Aj) & (k, Ak) \end{pmatrix},$$

тому

$$\underline{div\overset{o}{A} = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = (i, Ai) + (j, Aj) + (k, Ak) .} \qquad (☺)$$

Розглянемо аналогічно ротор лінійного оператора:

$$rotA = \left[e^i, Ae_i\right] = \left[i, Ai\right] + \left[j, Aj\right] + \left[k, Ak\right].$$

Обчислимо його доданки:

$$\left[i, Ai\right] = \left[i, a_1^1 i + a_1^2 j + a_1^3 k\right] = ka_1^2 + ja_1^3 ,$$

інші можна отримати аналогічно. Підставивши, отримаємо

$$\underline{rotA = (a_2^3 - a_3^2)i + (a_3^1 - a_1^3)j + (a_1^2 - a_2^1)k .} \qquad (☺ ☺)$$

## 19.2 Скалярні і векторні поля

**Означення.** Будемо говорити, що в області $D$ задане скалярне (векторне) поле, якщо кожній точці $M \in D$ співставлено за деяким законом єдине число (вектор).

Якщо $D \subset R^3$, тоді скалярне поле – це скалярна функція трьох змінних; векторне поле – векторна (координатна) функція трьох змінних.

**Приклади.** 1) E(M) – напруження електричного поля, утвореного від'ємним зарядом, розташованим в точці O.

$\overline{E(M)} \uparrow\uparrow \overline{MO}$,

$$\left|\overline{E(M)}\right| = \frac{1}{\rho^2}, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \overline{E(M)} = \left\{-\frac{x}{\rho^3}; -\frac{y}{\rho^3}; -\frac{z}{\rho^3}\right\}.$$

2) скалярне поле температур всередині нагрітого тіла;
3) векторне поле швидкостей встановленого потоку рідини.

**Означення.** Скалярне поле U(M) називається диференційовним в точці $M \in D$, якщо його повний приріст можна представити у вигляді

$$\Delta U(M) = A_1\Delta x + A_2\Delta y + A_3\Delta z + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y + \alpha_3\Delta z,$$

де $A_1, A_2, A_3$ - числа, що не залежать від $\Delta x, \Delta y, \Delta z$,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \alpha_i = 0 \ \wedge \ \alpha_i\Big|_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y=0\\ \Delta z=0}} = 0, \quad i=1, 2, 3.$$

Як було доведено в темі «Функції багатьох змінних», еквівалентним є представлення повного приросту у вигляді

$$\Delta U(M) = A_1\Delta x + A_2\Delta y + A_3\Delta z + o(\rho),$$
$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \ \lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho} = 0.$$

Нехай

$$\overline{A} = \{A_1, A_2, A_3\},$$
$$\overline{h} = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}.$$

Тоді повний приріст матиме вигляд:

$$\Delta U(M) = (\overline{A}, \overline{h}) + o(\rho).$$

Як було доведено в темі «Функції багатьох змінних»,

$$\overline{A} = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right\} = \overline{gradU}(M) = \overline{\nabla U}(M),$$
$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Означення градієнта не залежить від вибору системи координат, тому градієнт – це інваріант. Якщо $\vec{e}$ - одиничний вектор, що задає напрям, то похідна скалярної функції за напрямом $\vec{e}$ обчислюється за формулою

$$\frac{\partial U}{\partial e}(M) = (\overline{gradU}(M), \overline{e}).$$

## 19 ТЕОРІЯ ПОЛЯ. ОСНОВНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ФОРМУЛИ АНАЛІЗУ

**Означення.** Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається диференційовним в точці $M \in D \overset{dwf}{\Leftrightarrow}$ існує лінійний оператор А: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, такий, що $\Delta\vec{a}(M) = \overline{a}(M_1) - \overline{a}(M) = A\overline{h} + \overline{o}\left(\left\|\overline{h}\right\|\right)$, де $M_1 = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$,

$\left\|\overline{h}\right\| = \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, $\overline{o}\left(\left\|\overline{h}\right\|\right)$ - вектор: $\lim\limits_{\left\|\vec{h}\right\| \to 0} \dfrac{\overline{o}\left(\left\|\overline{h}\right\|\right)}{\left\|\vec{h}\right\|} = \vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ .

**Твердження.** Якщо $\vec{a}(M)$ - диференційовне векторне поле в точці $M \in D$, тоді представлення $\Delta\vec{a}(M) = A\overline{h} + o\left(\left\|\overline{h}\right\|\right)$ єдине.

**Доведення.** Припустимо супротивне $\exists$ А і В – лінійні оператори: $\Delta\vec{a}(M) = A\overline{h} + \overline{o}\left(\left\|\overline{h}\right\|\right) = B\overline{h} + \overline{o}\left(\left\|\overline{h}\right\|\right)$.

Тоді $A\vec{h} - B\vec{h} = (A - B)\vec{h} = \vec{o}\left(\left\|\vec{h}\right\|\right)$,

$(A - B)\vec{h} = \vec{o}\left(\left\|\vec{h}\right\|\right)$ - поділимо весь вираз на $\left(\left\|\vec{h}\right\|\right)$.

Оскільки $\left(\vec{e} = \dfrac{\vec{h}}{\left\|h\right\|}\right)$, то отримаємо

$$\left.\begin{array}{l} (A - B)\vec{e} = \dfrac{\vec{o}\left(\left\|\vec{h}\right\|\right)}{\left\|\vec{h}\right\|} \\ \dfrac{\vec{o}\left(\left\|\vec{h}\right\|\right)}{\left\|\vec{h}\right\|} \xrightarrow[\left\|\vec{h}\right\| \to 0]{} \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow (A - B)\vec{e} = \vec{0} \Rightarrow A\vec{e} = B\vec{e}.$$

Образи операторів на одиничних векторах співпадають, а оператори лінійні, тому ці оператори будуть співпадати на усіх елементах із $\mathbb{R}^3$. ■

**Означення.** Векторне поле називається диференційовним в області $D$, якщо воно диференційовне в усіх точках області $D$.

*Мета:* дати означення похідної векторного поля за напрямом.

Нехай $M, M_1 \in D$. Одиничний вектор $\vec{e}$ однаково спрямований з вектором $\overline{MM_1}$ : $\vec{e} \uparrow\uparrow \overline{M}\overline{M}_1$

**Означення.** Похідною векторного поля $\vec{a}(M)$ за напрямком $\vec{e}$ називається

$$\frac{\partial \overline{a}}{\partial \overline{e}}(M)=\lim_{M_1\to M}\frac{\Delta\overline{a}(M)}{\left|\overline{MM_1}\right|}=\lim_{M_1\to M}\frac{\overline{a}(M_1)-\overline{a}(M)}{\left|\overline{MM_1}\right|}.$$

**Твердження.** Якщо $\vec{a}(M)$ - диференційовне векторне поле в точці $M\in D$, тоді $\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{e}}(M)=A\vec{e}\ \ \forall\vec{e}$, де $A$ – оператор в означенні диференційовності $\vec{a}(M)$.

**Доведення.** Оскільки $\vec{a}(M)$ - диференційовне векторне поле в точці $M\in D$, то

$$\Delta\vec{a}(M)=A\overline{h}+\overline{o}\left(\left\|\overline{h}\right\|\right).$$

Якщо $\rho=\left\|\overline{h}\right\|=\left|\overline{MM_1}\right|$, а $\overline{e}\uparrow\uparrow\overline{MM_1}$, то $\overline{h}=\overline{e}\left\|\overline{h}\right\|=\rho\overline{e}$. Звідси

$$\Delta\overline{a}(M)=\rho A\overline{e}+\overline{o}(\rho).$$

Поділимо останній вираз на $\rho$:

$$\frac{\Delta\overline{a}(M)}{\left|\overline{MM_1}\right|}=A\overline{e}+\frac{o(\rho)}{\rho},$$

здійснимо граничний перехід:

$$\lim_{M_1\to M}\frac{\Delta\overline{a}(M)}{\left|\overline{MM_1}\right|}=A\overline{e}=\frac{\partial a}{\partial e}(M).\qquad\blacksquare$$

**Зауваження.** Оскільки $\frac{\partial U}{\partial\overline{e}}(M)=(\overline{gradU}(M),\overline{e})$,

$$\overline{gradU}(M)=\overline{A}=\{A_1,A_2,A_3\}=\nabla U,$$

то можна вважати, що похідна за напрямом від скалярної функції також є результатом дії оператора $\overline{A}$ на напрям $\overline{e}$.

*Мета:* знайти матрицю $\overset{o}{A}$ оператора А, що визначається умовою диференційовності в ортонормованому базисі $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\overline{a}}{\partial\overline{e}}=A\overline{e},\\&a(\overline{M})=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k},\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&A\overline{i}=\frac{\partial\overline{a}}{\partial\overline{i}}=\frac{\partial\overline{a}}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial Q}{\partial x}\overline{j}+\frac{\partial R}{\partial x}\overline{k},\\&A\overline{j}=\frac{\partial P}{\partial y}\overline{i}+\frac{\partial Q}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial R}{\partial y}\overline{k},\\&A\overline{k}=\frac{\partial P}{\partial z}\overline{i}+\frac{\partial Q}{\partial z}\overline{j}+\frac{\partial R}{\partial z}\overline{k},\end{aligned}\right.\qquad\Rightarrow$$

$$a_1^1=(\overline{i},A\overline{i})=\frac{\partial P}{\partial x},a_1^3=(\overline{k},A\overline{i})=\frac{\partial R}{\partial x},\ldots$$

*Висновок:*

$$\overset{o}{A}=\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

## 19.3 Дивергенція, ротор, похідна за напрямом векторного поля

🗀 **Означення.** *Дивергенцією векторного поля*, що є диференційовним в точці $M$ називається дивергенція оператора $A$, що визначається умовою диференційовності цього векторного поля в точці $M$. Тобто, якщо $\Delta\overline{a}(M)=A\overline{h}+o\left(\left\|\overline{h}\right\|\right)$, то $div\overline{a}(M)=divA$ .

🗀 **Означення.** Ротор визначається аналогічно, як $\overline{rot}\,a(M)=\overline{rot}\,A$ .

Якщо $\overline{a}(M)=(P(M),Q(M),R(M))$ , то формули для обчислення отримаємо як наслідок визначень і формул (☺) і (☺ ☺):

$$div\,\overline{a}=a_1^1+a_2^2+a_3^3=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\left(\nabla,\overline{a}\right);$$

$$\overline{rot}\,a=(a_2^3-a_3^2)\overline{i}+(a_3^1-a_1^3)\overline{j}+(a_2^1-a_1^2)\overline{k}=$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}=$$

$$=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\left[\nabla,\overline{a}\right].$$

Формули обчислення похідної за напрямом

$\overline{e}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\cos\alpha\overline{i}+\cos\beta\overline{j}+\cos\gamma\overline{k}$ ,

де $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ - направляючі косинуси.

$$
\begin{aligned}
A\overline{e} &= \cos\alpha(A\overline{i}) + \cos\beta(A\overline{j}) + \cos\gamma(A\overline{k}) = \\
&= \overline{i}\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial P}{\partial z}\cos\gamma\right) + \\
&+ \overline{j}\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\gamma\right) + \\
&+ \overline{k}\cdot\left(\frac{\partial R}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial R}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial R}{\partial z}\cos\gamma\right).
\end{aligned}
$$

**Зауваження.** Дивергенція і ротор не залежать від вибору базису, тому для диференційовного в точці М векторного поля ротор і дивергенція – інваріанти, тому в кожній точці $M \in D$ визначаються єдиним чином.

**Зауваження.** Якщо $\overline{a}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ - диференційовне векторне поле в області $D$, а $u(M)$ - диференційовне скалярне поле в області $D$, другі мішані часткові похідні якого неперервні в $D$, тоді мають місце наступні, зручні для розв'язання прикладних задач, тотожності

$$
\overline{rot}\left(\overline{gradU}\right) = \left[\nabla, \nabla U\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = \overline{0},
$$

$$
div\left(\overline{gradU}\right) = (\nabla, \nabla U) = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},
$$

$$
div\left(\overline{rot\, a}\right) = (\nabla, \left[\nabla, \overline{a}\right]) = 0.
$$

## Фізичний зміст дивергенції і ротору.

$$
div\overline{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.
$$

Дивергенція векторного поля_ $\overline{a}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ характеризує його розбіжність. Вона визначає швидкість зміни кожного компоненту вектора у своєму власному напрямку:

- $div\overline{a}(M) > 0 \Rightarrow$ із точки М витікає більше рідини, ніж потрапляє, тоді така точка $M$ називається *витоком*;
- $div\overline{a}(M) < 0 \Rightarrow$ із точки $M$ витікає менше рідини, ніж потрапляє, тоді така точка $M$ називається *стоком*;

- $div\overline{a}(M) = 0 \Rightarrow$ здійснюється *баланс* між витіканням і потраплянням.

$$\overline{rot\, a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Величина $\overline{rot\, a}$ характеризує *вихор*. Це пов'язано з тим, що він якби «змішує» похідні і компоненти. Він якби слідкує як змінюються компоненти векторного поля за чужими напрямками, тобто ротор – це <u>міра обертання векторного поля.</u> Якщо $\vec{v}(M)$ - векторне поле швидкостей потоку рідини, тоді його кутова швидкість $\vec{\omega}(M) = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\, v(M)$.

## 19.4 Формула Гріна

Нехай $\pi$ - це площина в $\mathbb{R}^3$,

$\vec{k}$ - одиничний вектор нормалі до $\pi$,

$D$ – область на площині $\pi$.

$D$ *– однозв'язна плоскі область*, тобто будь-яка кусково-гладка зімкнена крива, що лежить в $D$ обмежує область, яка також цілком лежить в $D$.

*Умови на* $D$*:*

1) $C = \partial D$ - зімкнена, кусково гладка, без особливих точок. тут $\partial D$ - межа області $D$, тобто множина межових точок $D$;

2) на площині $\pi$ можна обрати таку декартову прямокутну систему координат, що усі прямі, які паралельні осям координат перетинають C не більш, ніж у двох точках.

$\{\overline{t} = \overline{t}(M)\}$ - вектори дотичних до кривої C, які узгоджені з $\vec{k}$. Це означає наступне: якщо дивитися з кінця вектора $\vec{k}$, то вектори $\bar{t}$ будуть задавати додатній напрям обходу кривої C, тобто обхід, що узгоджений з нормаллю за правилом «штопора».

**Теорема** (*формула Гріна*). Нехай $\vec{a}(M)$ - векторне поле, диференційовне в області $D$, що задовольняє умовам 1) і 2); $\vec{a}(M)$ - має неперервні похідні за будь-яким напрямком в точках об'єднання $D \bigcup C = \overline{D}$. Тоді виконується формула:

## 19 ТЕОРІЯ ПОЛЯ. ОСНОВНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ФОРМУЛИ АНАЛІЗУ

$$\boxed{\iint\limits_{\bar{D}} (\bar{k}, \overline{rota})dxdy = \oint\limits_{C} (\bar{t}, \bar{a})dl}. \qquad (\Gamma 1)$$

*Фізична інтерпретація.*

$\oint\limits_{C} (\bar{t}, \bar{a})dl$ - циркуляція векторного поля $\vec{a}(M)$ вздовж контура *C* (або робота векторного поля $\vec{a}(M)$ по пересуванню матеріальної точки по контуру С) дорівнює $\iint\limits_{\bar{D}} (\bar{k}, \overline{rota})dxdy$ потоку векторного поля $\overline{rot}\,a$ наскрізь область $\bar{D}$.

**Доведення.**

- Дотичні вектори $\bar{t}$ виражаються через похідні від функцій, що характеризують контур (вони кусково непер. за умовою, оскільки *C* – кусково гладка крива), тому $\bar{t}$ - кусково неперервне векторне поле на *C*;
- $\vec{a}(M)$ є неперервним на *C* в напрямках дотичних в своїх точках (оскільки похідні за цими напрямками є неперервними в точках *C*);
- із двох останніх фактів випливає, що $(\bar{t}, \bar{a})$ - скалярна кусково неперервна на *C* функція;
- $\overline{rot}\,a$ - за кожною координатою неперервна функція в $\bar{D}$, оскільки утворюється із часткових похідних компонент векторної функції $\vec{a}(M)$, які, як похідні за напрямками осей координат, неперервні на $D \cup C = \bar{D}$;
- $(\bar{k}, rot\bar{a})$ - неперервна скалярна функція в $\bar{D}$;
- область $\bar{D}$ має як межу кусково гладку криву *C*, тому множина *C* має лебегову міру нуль, отже, область $\bar{D}$ являється допустимою множиною і на ній коректно визначатиметься кратний інтеграл;
- крива *C* є кусково гладкою, без особливих точок, тому на ній коректно визначатиметься криволінійний інтеграл.

*Висновок:* обидва інтеграла формули існують.

Функції, що стоять під знаком інтеграла є інваріантами, тому вони не залежать від вибору системи координат. Тому систему координат будемо вибирати спеціальним чином: площину xOy оберемо таким чином, щоб задовольнялася умова 2), а ось $Oz \uparrow\uparrow \bar{k}$. Тоді

$$\bar{a} = P(x, y, 0)\bar{i} + Q(x, y, 0)\bar{j} + 0\bar{k},$$

$$rot\bar{a}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\,(0-0)+\bar{j}\,(0-0)+\bar{k}\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\bar{k}\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

$$(\bar{k},rot\bar{a})=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{a}=\{P,Q,0\}\\ \bar{t}=\{\cos\alpha,\cos\beta,0\}\end{array}\right\}\Rightarrow(\bar{a},\bar{t})=P\cos\alpha+Q\cos\beta\Rightarrow(\bar{t},\bar{a})dl=P\cos\alpha dl+Q\sin\alpha dl.$$

Тут $l$ – параметр довжини дуги, який змінюється, зростаючи в тому самому напрямку, в якому здійснюється обхід кривої С, тому

$(\bar{t},\bar{a})dl=P\cos\alpha dl+Q\sin\alpha dl=Pdx+Qdy$ .

Таким чином, потрібно довести формулу:

$$\iint\limits_{\bar{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint\limits_{C}Pdx+Qdy\ .$$

Це значить, що потрібно довести окремо здійсненність співвідношень

$$-\iint\limits_{\bar{D}}\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=\oint\limits_{C}Pdx,\qquad \iint\limits_{\bar{D}}\frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy=\oint\limits_{C}Qdy.$$

Доведемо перше співвідношення, друге доводиться аналогічно.

Нехай область визначається нерівностями (рис.19.1)

$$\bar{D}:\begin{cases}x_1\le x\le x_2,\\ \varphi_2(x)\le y\le\varphi_1(x)\end{cases}.$$

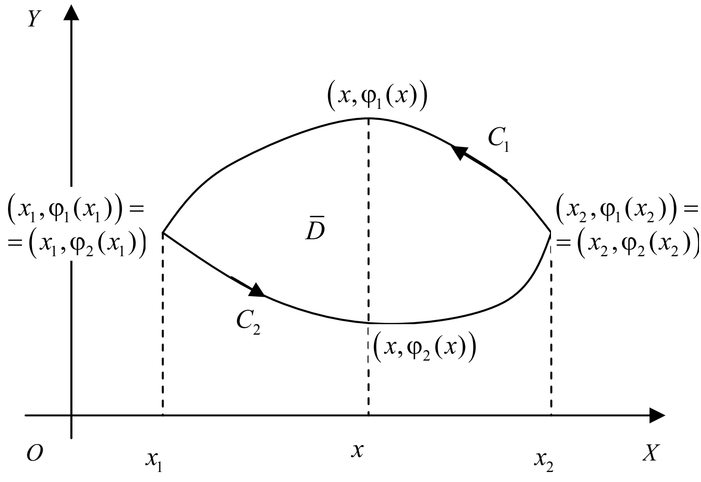


Рис. 19.1.

Тут $x_1$ *і* $x_2$ є абсцисами точок дотику прямих до контуру *C*, паралельних осі ординат так, що лівіше (правіше) за $x_1$ $(x_2)$ такі прямі не перетинають контур С в жодній точці, а поміж ними – у двох точках $(x,\varphi_1(x))$ і $(x,\varphi_2(x))$. Тоді

$$-=\iint\limits_{\bar{D}}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\int\limits_{x_1}^{x_2}dx\int\limits_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy=-\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(P(x,y)\Big|_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)}\right)dx=$$

$$=-\int\limits_{x_1}^{x_2}P(x,\varphi_1(x))dx+\int\limits_{x_1}^{x_2}P(x,\varphi_2(x))dx=$$

$$=\int\limits_{C_1}Pdx+\int\limits_{C_2}Pdx=\oint\limits_{C}Pdx.\quad \underline{dixi!}$$

**Зауваження1** (щодо умови 2). Якщо умова 2) не виконується, тоді потрібно розбити область на ділянки, на яких вона виконується. Наприклад, якщо таких ділянок виявиться дві (рис. 19.2), то

$$\iint\limits_{\bar{D}}=\iint\limits_{\bar{D}_1}+\iint\limits_{\bar{D}_2},$$

$$\iint\limits_{\bar{D}_2}=\oint\limits_{C_2\cup C_3}=\int\limits_{C_2}+\int\limits_{C_3},$$

$$\iint\limits_{D_2}=\oint\limits_{C_1\cup C_3}=\int\limits_{C_1}-\int\limits_{C_3}.$$

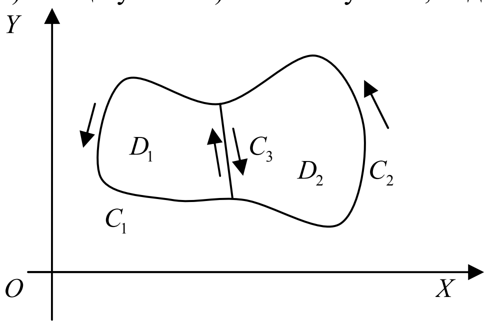

Рис. 19.2.

Тепер додамо дві останні рівності, отримаємо

$$\iint\limits_{D}=\int\limits_{C_1}+\int\limits_{C_2}=\int\limits_{C}.$$

Таким чином, формула Гріна виконується і без умови 2).

**Зауваження 2** (щодо не однозв'язності області $D$ ).

Не обов'язково потрібно накладати умову однозв'язності. Аналогічно зауваженню 2 область розбивається на ділянки за допомогою кусково гладких кривих так, що кожна ділянка є однозв'язною. Інтеграли за кривими розділу взаємознищуються при додаванні.

**Зауваження 3** (щодо послаблень припущень гладкості векторного поля $\vec{a}(M)$). Умови на гладкість векторного поля $\vec{a}(M)$ можна послабити, замінивши їх на неперервність поля $\vec{a}(M)$ в $\bar{D}$, його диференційованість в $D$ і неперервність похідних за будь-яким напрямом в $D$. Правда, доведення при цьому ускладнеться.

**Зауваження 4** (щодо послаблень припущень на криву *C*).

На криву можна накладати лише припущення про її спрямлюваність. Правда, доведення при цьому ускладнеться.

**Зауваження 4.** Формула Гріна може бути записана у вигляді:

$$\boxed{\iint\limits_{\bar{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)ds=\oint\limits_{C}Pdx+Qdy}. \qquad (\text{Г}2)$$

Це було отримано при виведенні формули. Крім того, формула (Г2), так само, як і формула (Г1), залишається інваріантною відносно вибору прямокутної системи координат. Покажемо це.

► Стара система координат: Оху : $\bar{a}=\{P,Q\}$.

Нова система координат: $Ox'y'$: $\bar{a}=\{P',Q'\}$, де $P'=P'(x',y'),\quad Q'=Q'(x',y')$. Скористаємося інваріантністю скалярного добутку

$$(\bar{k},\overline{rot\,a})=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(\bar{k},\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k})=(\bar{k},\overline{rot\,a'})=\left(\bar{k},\left(\frac{\partial Q'}{\partial x'}-\frac{\partial P'}{\partial y'}\right)\bar{k}\right)=\frac{\partial Q'}{\partial x'}-\frac{\partial P'}{\partial y'}.$$

Елемент площі при переході від прямокутної до прямокутної системи координат не змінює свого значення, оскільки якобіан переходу дорівнює 1, тобто

$$ds=\left|J\right|\cdot ds'=ds'.$$

Вираз під знаком криволінійного інтегралу:

$$(\bar{a},\bar{t})=Pdx+Qdy=(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)dl=$$
$$=(\bar{a}',\bar{t}')=(P'\cos\alpha'+Q'\sin\alpha')dl=P'dx'+Q'dy'. \quad ◄$$

## 19.5 Формула Остроградського-Гаусса

$D\subset\mathbb{R}^3$ - *однозв'язна тривимірна область* $\overset{dwf}{\Leftrightarrow}$ $\forall G$ – кусково-гладкої, зімкненої поверхні такої, що $G\subset D$, область $D_1$, яку вона обмежує лежить всередині *D*, тобто $(G\cup D_1)\subset D$.

$S=\partial D$ - $S$ – множина межових точок області *D*.

Поверхня $S$ в $\mathbb{R}^3$ задовольняє *умовам*:

1) $S$ – кусково-гладка, без особливих точок, двозв'язна, повна, обмежена, зімкнена;

2) $\exists$ Oxyz (можна обрати прямокутну систему координат), таку, що будь-яка пряма, паралельна координатній осі, перетинає $S$ не більше, як у двох точках.

$\vec{n}$ - одиничний вектор зовнішньої до поверхні $S$ нормалі.

**Теорема** (*формула Остроградського-Гаусса*). Нехай $\vec{a}(M)$ - векторне поле, диференційовне в $D$, яке задовольняє умовам 1) і 2) і, крім того, похідна за будь-яким напрямом неперервна в $D \cup S = \overline{D}$. Тоді здійснюється формула

$$\boxed{\iiint\limits_{\overline{D}} div\,\overline{a}\,dv = \oiint\limits_{S} (\overline{a}, \overline{n})\,ds}. \qquad \text{(О-Г1)}$$

*Фізичний зміст:* потрійний інтеграл від дивергенції векторного поля дорівнює потоку векторного поля через поверхню $S$.

**Доведення.**

- $div\,\overline{a}$ - виражається через часткові похідні, які є неперервними в $\overline{D}$ (пояснення аналогічне теоремі Гріна); звідси випливає, що дивергенція також неперервна в області $\overline{D}$;
- $(\overline{a}, \overline{n})$ - неперервна числова функція на $S$, оскільки векторне поле $\vec{a}(M)$ є неперервним в напрямках нормалей в своїх точках (оскільки похідні за цими напрямками є неперервними), а поле нормалей є неперервним на $S$, що випливає із двосторонньості поверхні;
- область $\overline{D}$ має як межу кусково гладку поверхню $S$, тому множина $S$ має лебегову міру нуль, отже, область $\overline{D}$ являється допустимою множиною і на ній коректно визначатиметься кратний інтеграл;
- поверхня $S$ є кусково гладкою, без особливих точок, двозв'язною, повною, обмеженою, тому на ній коректно визначатиметься поверхневий інтеграл.

*Висновок:* обидва інтеграла формули існують.

Величини $div\overline{a}$ та $(\overline{a}, \overline{n})$ - інваріантні відносно системи координат, тому оберемо систему координат так, як зазначено в умові 2). Тоді в цій системі координат

$$\left.\begin{array}{l} \overline{a} = \{P, Q, R\}, \\ \overline{n} = \{\cos X, \cos Y, \cos Z\}, \end{array}\right\} \Rightarrow (\overline{a}, \overline{n}) = P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z,$$

$$div\overline{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Формула (О-Г1) надбає вигляду

$$\iiint\limits_{\bar D}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\oiint\limits_S (P\cos X+Q\cos Y+R\cos Z)ds=\begin{vmatrix}\cos Xds=dydz\\ \cos Yds=dxdz\\ \cos Zds=dxdy\end{vmatrix}=$$

$$=\oiint\limits_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy.$$

Потрібно довести окремо кожну із наступних формул:

$$J=\iiint\limits_{\bar D}\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz=\oiint\limits_S Pdydz,$$

$$I=\iiint\limits_{\bar D}\frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz=\oiint\limits_S Qdxdz,$$

$$L=\iiint\limits_{\bar D}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\oiint\limits_S Rdxdy.$$

Зупинимося на доведенні третьої. Інші дві доводяться аналогічно.

Нехай $D^*-$це проекція $D$ на $Oxy$; через межові точки $D^*$ проведемо прямі, які паралельні Oz. В результаті отримаємо (рис. 19.3)

$S=S_1\bigcup S_2$,

$S_1: z=z_1(x,y)$, $\quad S_2: z=z_2(x,y)$.

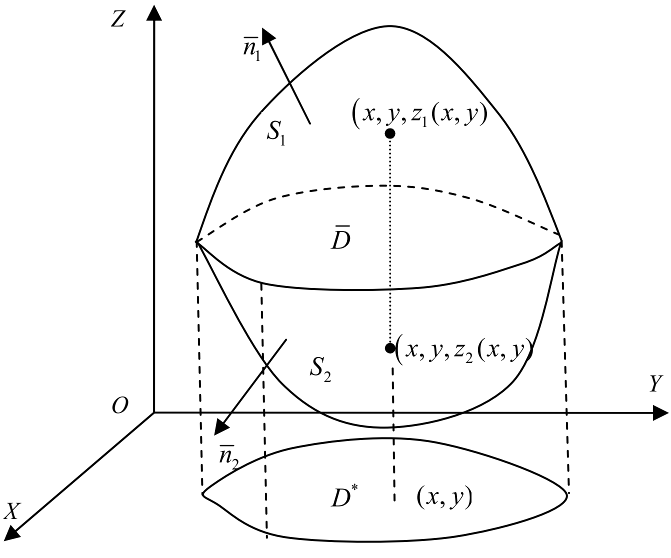


Рис. 19.3.

Розглянемо тепер L:

$$L = \iiint\limits_{\bar{D}} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D^*} dxdy \int\limits_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{D^*} dxdy \left[ R(x,y,z_1(x,y)) - R(x,y,z_2(x,y)) \right] =$$

$$= \iint\limits_{D^*} R(x,y,z_1(x,y))dxdy - \iint\limits_{D^*} R(x,y,z_2(x,y))dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_2} Rdxdy + \iint\limits_{S_1} Rdxdy = \oiint\limits_{S} Rdxdy. \qquad dixi!$$

**Зауваження** (щодо області $D$). Якщо поверхня S не задовольняє умові 2) або область $D$, яку вона обмежує не є однозв'язною, тоді область $D$ потрібно розбити на скінчену кількість областей, кожна з яких задовольняє умові 2), і $\iiint\limits_{\bar{D}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \iiint\limits_{D_i}$. Що стосується поверхневого інтегралу, то ті частини поверхні, що були спільними у областей $D_i$ взаємознищуються, оскільки, будуть утворювати протилежні напрямки нормалі. Після застосування формули Остроградського-Гаусса для кожної з частин $D_i$ ми отримаємо після сумування, що $\iiint\limits_{\bar{D}} = \oiint\limits_{S}$.

**Зауваження 2.** Формулу Остроградського-Гаусса можна переписати, як було отримано при її доведенні, у вигляді:

$$\boxed{\iiint\limits_{\bar{D}} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oiint\limits_{S} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.} \qquad \text{(О-Г2)}$$

Причому, ця формула є інваріантною за формою і значенням відносно переходу до нової системи координат. Доведення аналогічне, як для зауваження 3 до формули Гріна.

## 19.6 Формула Стокса

Повторимо деякі означення і зробимо висновки з метою введення поняття поверхні з краєм.

🗁 **Означення.** Область *G* на площині *T,* тобто $G \subset T$ – *елементарна область* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists\ D \subset \mathbb{R}^2$ - відкритий круг: $f : D \to G$ - гомеоморфізм..

## 19 ТЕОРІЯ ПОЛЯ. ОСНОВНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ФОРМУЛИ АНАЛІЗУ

**Означення.** *G - проста плоска область* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 1) $G$ – зв’язна; 2) $\forall x_0\ \exists U_{x_0}$ - є ЕО.

Звідси випливає, що як елементарна область, так і проста плоска, повинні бути відкритими множинами на площині з евклідовою метрикою.

**Означення.** $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ - *поверхня* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists G$ - проста плоска область: $f$: $G \to \Phi$ – локальний гомеоморфізм.

Оскільки проста плоска область $G$ є відкритою множиною, зокрема, в $\mathbb{R}^2_2$, то можна множину $\mathbb{R}^2$ гомеоморфно відобразити на $G$. Композиція локальних гомеоморфізмів є локальним гомеоморфізмом, тому означення поверхні можна дати в інший спосіб.

$\Phi \subset \mathbb{R}^3$ - *поверхня* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $f$: $\mathbb{R}^2 \to \Phi$ – локальний гомеоморфізм.

*Позначення:* $H^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$.

**Означення.** Околом т.$M$ на поверхні Φ називається множина виду $W(M) \overset{def}{=} U(M) \bigcap \Phi$.

**Означення.** *Поверхнею з краєм* називається така множина $G$, деякий окіл кожної з точок якої є гомеоморфним образом або множини $\mathbb{R}^2$ або $H^2$. Множина $C$ тих точок, околи яких є гомеоморфними образами множини $H^2$, називається *краєм поверхні G (*див. рис. 19.4).

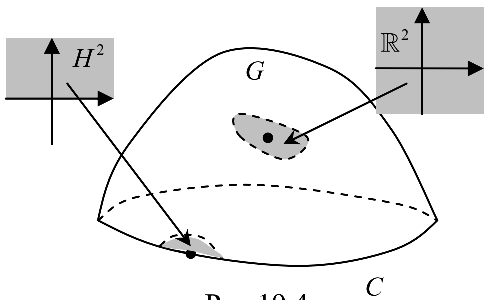

Рис.19.4.

**Означення.** $S \subset \mathbb{R}^3$ - однозв’язна поверхня $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall\ C$ – кусково-гладкої, зімкненої кривої $C \subset S$ $\exists$ поверхня G, для якої крива $C$ є краєм, причому ця поверхня $G$, разом із краєм $C$, лежить всередині $S$, тобто $(G \bigcup C) \subset S$.

*Умови на поверхню S:*

1) $S$ – кусково-гладка, без особливих точок, двостороння, повна, обмежена,
2) $\exists$ $C$ – край поверхні $S$, який є кусково гладкою, без особливих точок просторовою кривою;

3) $\exists$ система координат O*xyz* така, що поверхня *S* однозначно проектуємо на кожну з трьох координатних площин.

$\{\vec{n} = \vec{n}(M)\}$ - одиничні вектори нормалі до S.

$\{\vec{t} = \vec{t}(M)\}$ - одиничні вектор дотичної в точці контура C з напрямом, що узгоджено з $\vec{n}$ (правило «штопора»).

За цих умов виконується теорема.

**Теорема** (*формула Стокса*). Якщо $\vec{a}(M)$ - векторне поле, неперервно диференційовне в околі поверхні *S* (у відкритій множині, що містить у собі *S*), поверхня *S* задовольняє зазначеним умовам, тоді здійснюється формула

$$\boxed{\iint\limits_S (\vec{n}, \overline{rot a}) ds = \oint\limits_C (\vec{a}, \vec{t}) dl}. \tag{C1}$$

*Фізичний зміст:* потік векторного поля ротора $\vec{a}(M)$ наскрізь поверхню *S* дорівнює циркуляції векторного поля вздовж контура *C,* який є краєм поверхні *S.*

**Доведення.**

- Поверхня двостороння, тому поле нормалей $\vec{n}$ - неперервне на *S*;
- векторне поле $\vec{a}(M)$ - неперервно диференційовне на *S*, а компоненти вектора $\overline{rot\, a}$ виражаються через часткові похідні координатних функцій $\vec{a}(M)$, тому $\overline{rot\, a}$ - неперервне векторне поле на *S*;
- дотичні вектори $\vec{t}$ виражаються через часткові похідні координатних функцій контура *C*, який є кусково гладким, тому векторне поле дотичних $\vec{t}$ є кусково неперервним на *C;*
- тому кожен із скалярних добутків утворює неперервні або кусково неперервні функції;
- поверхня *S* є кусково гладкою, без особливих точок, двозв'язною, повною, обмеженою, тому на ній коректно визначатиметься поверхневий інтеграл;
- крива *C* є кусково гладкою, без особливих точок, тому на ній коректно визначатиметься криволінійний інтеграл.

*Висновок:* обидва інтеграла формули існують.

Підінтегральні функції – інваріанти відносно вибору системи координат O*xyz* . Оберемо систему координат так, щоб виконувалася умова 3). Домовимося, що при виборі системи координат напрямки осей оберемо так, щоб нормаль $\vec{n}$ утворювала гострий з усіма осями.

В цій системі координат маємо:

## 19 ТЕОРІЯ ПОЛЯ. ОСНОВНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ФОРМУЛИ АНАЛІЗУ

$\overline{a} = \{P, Q, R\}$,

$\overline{n} = \{\cos X, \cos Y, \cos Z\}$,

$\overline{t} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$,

$$(\overline{n}, \overline{rota}) = \begin{vmatrix} \cos X & \cos Y & \cos Z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \cos X\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) +$$

$$+ \cos Y\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \cos Z\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

$(\overline{a}, \overline{t}) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma.$

Формула (С1) надбає вигляду

$$\boxed{\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz}. \quad (C2)$$

Потрібно окремо перевірити формули:

$$J = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos Y - \frac{\partial P}{\partial y}\cos z\right) ds = \oint_C Pdx,$$

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos Y - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos z\right) ds = \oint_C Qdx,$$

$$L = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos Y - \frac{\partial R}{\partial x}\cos z\right) ds = \oint_C Rdx.$$

Доведемо першу із них. Спроектуємо поверхню $S$ на площину $OXY$ (див. рис. 19.5). Позначимо цю проекцію $D^*$. Вона за умовою – єдина. Через Г позначимо проекцію контура $C$.

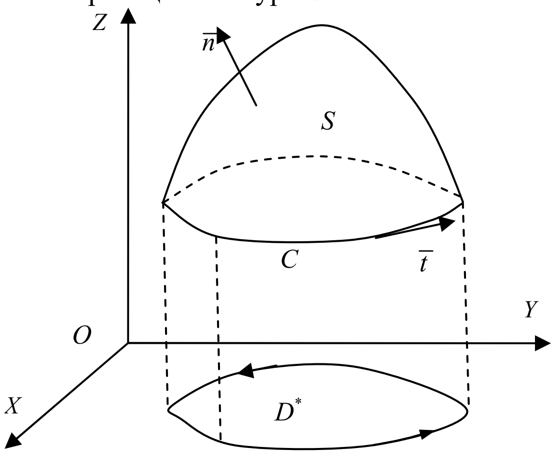


Рис. 19.5.

## 19 ТЕОРІЯ ПОЛЯ. ОСНОВНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ФОРМУЛИ АНАЛІЗУ

Нехай поверхня характеризується функцією $z(x,y)$. Оскільки поверхня кусково гладка, то функція $z(x,y)$ - диференційовна на $D$. Оскільки поверхня двостороння, то поле нормалей – неперервне і функції

$$\cos X = \frac{-z_x'}{\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}}, \quad \cos Y = \frac{-z_y'}{\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}}, \quad \cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}}$$

являються неперервними на $D$.

Оскільки $ds = \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy$, то

$$J = \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial z}\cos Y - \frac{\partial P}{\partial y}\cos z \right) ds = \iint_{D^*} \frac{\left.\left( \frac{\partial P}{\partial z}(-z_y') - \frac{\partial P}{\partial y}1 \right)\right|_{z=z(x,y)}}{\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}} \cdot \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy = .$$

$$= \iint_{D^*} \left.\left( \frac{\partial P}{\partial z}(-z_y') - \frac{\partial P}{\partial y}1 \right)\right|_{z=z(x,y)} dxdy.$$

Обчислимо похідну від функції $P(x,y,z(x,y))$:

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z(x,y)) = \left.\left( \frac{\partial P}{\partial y}\cdot \underbrace{\frac{dy}{dy}}_{1} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} \right)\right|_{z=z(x,y)} = \left.\left( \frac{\partial P}{\partial z}\cdot z_y' + \frac{\partial P}{\partial y} \right)\right|_{z=z(x,y)},$$

тому

$$J = -\iint_{D^*} \frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z(x,y))dxdy .$$

Застосуємо формулу Гріна, знаючи, що Г – контур (множина межових точок) області $D^*$. Потім зазначимо, що Г – проекція контура *C:*

$$J = \oint_{\Gamma} P(x,y,z(x,y))dx = \oint_C P(x,y,z)dx. \quad \blacksquare$$

**Зауваження 1.** Формула Стокса вірна для поверхні S, що задовольняє умові 1), але не задовольняє умові 3)

Для обґрунтування цього факту спочатку доводиться твердження, що $\exists \delta > 0$: $S$ можна розбити на ділянки $\{\Phi_i\}$: розмір ділянки $d\Phi_i < \delta \wedge \Phi_i$ - єдиним чином проектується на усі координатні площини, за умови виконання 1) для поверхні $S$ (вивчити доведення за бажанням самостійно ✍!).

Після цього, вважаючи, що $S=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Phi_i$, представляємо поверхневий і криволінійний інтеграл сумами

$$\iint\limits_{S}=\sum\iint\limits_{\Phi_i}\ ,\quad \oint\limits_{C}=\sum\oint\limits_{\partial\Phi_i}\ .$$

Для ділянок, що мають спільну межу, криволінійний інтеграл за цією межею взаємно знищиться, оскільки для таких ділянок обхід буде здійснюватися в протилежних напрямках.

**Зауваження 2.** Формулу Стокса (С1) можна переписати у вигляді формули (С2), що в скороченому записі має вигляд

$$\boxed{\iint\limits_{S}\begin{vmatrix}\cos X & \cos Y & \cos Z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}ds=\oint\limits_{C}Pdx+Qdy+Rdz},$$

де інтеграли зліва і справа мають інваріантний характер щодо вибору декартової системи координат. Доведення аналогічне зауваженню 2 до формули Гріна.

### 19.7 Умови незалежності криволінійного інтегралу на площині від шляху інтегрування

Нехай $\vec{a}$ - плоске векторне поле:
$\vec{a}(x,y)=\{P(x,y);Q(x,y\}$ - у відкритій області $D$.

**Означення.** Функція U(x,y) називається *потенціалом векторного поля* $\overline{a}(x,y)\overset{def}{\Leftrightarrow}\overline{a}(x,y)=\overline{grad}U(x,y)$. *Поле* $\vec{a}$, що має потенціал, називається *потенціальним*.

Із означення потенціалу і градієнта випливає:

$$\overline{gradU}=\left\{\frac{\partial U}{\partial x};\frac{\partial U}{\partial y}\right\}=\{P,Q\}=\overline{a}\Rightarrow P=\frac{\partial U}{\partial x},Q=\frac{\partial U}{\partial y}.$$

**Теорема.** Якщо функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – неперервні в області $D$ і для будь-яких двох точок A і B із цієї області значення інтегралу $\int\limits_{A\breve{B}}Pdx+Qdy$ не залежать від лінії $\cup AB\subset D$, що сполучає ці точки, тоді і лише тоді, коли векторне поле $\vec{a}(x,y)=\{P(x,y),Q(x,y)\}$ - потенціальне. Крім того, в цьому випадку $\int\limits_{A\breve{B}}Pdx+Qdy=U(B)-U(A)$.

**Доведення.** *Достатність.* Нехай $\overline{a} = \{P, Q\}$ - потенціальне поле, U – його потенціал, тоді $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}, Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$. Потрібно довести, що інтеграл $\iint\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy$ не залежить від лінії AB.

Нехай AB: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$, тоді

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[ \frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t) \right] dt =$$
$$= \int\limits_a^b \frac{dU}{dt}(x(t), y(t))dt = U(x(t), y(t))\Big|_a^b = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) = U(B) - U(A).$$

<u>Висновок:</u> інтеграл не залежить від лінії AB.

*Необхідність* Нехай інтеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ - не залежить від лінії $AB \subset D \ \forall A, B \in D$.

Довести: поле $\overline{a} = \{P, Q\}$ - потенціальне, тобто знайти функцію $U(x,y)$ таку, що $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}, Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$.

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ - фіксована точка області $M_0 \in D$.

Розглянемо відповідність $M \to ! \int\limits_{M_0 M} Pdx + Qdy$, де $M \in D$ – довільна точка. Ця відповідність утворює функцію, оскільки кожній точці співставляється значення інтегралу, який не залежить від лінії $M_0 M$:

$$U(M) = \int\limits_{M_0 M} Pdx + Qdy.$$

Доведемо, що $U(M)$ – це шуканій потенціал поля $\overline{a} = \{P, Q\}$, тобто доведемо, що $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}, Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$. Перевіримо першу рівність, друга доводиться аналогічно.

Нехай $\Delta x : N(x + \Delta x, y) \in D$. Таку точку знайти можливо (рис.

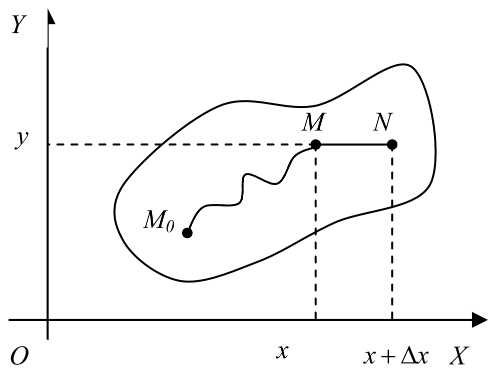

Рис. 19.6.

19.6), оскільки, область $D$ – відкрита. Маємо:

$$U(x+\Delta x,y)-U(x,y)=U(N)-U(M)=\int\limits_{M_0MN}-\int\limits_{M_0M}=$$

$$=\int\limits_{MN}Pdx+Qdy=\left|\begin{matrix}MN\in D\\ MN: y=const\Rightarrow dy=0dx\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_{MN}Pdx=\int\limits_{x}^{x+\Delta x}P(t,y)dt=/\,th\ про\ середнє\,/=P(x+\theta\Delta x,y)(x+\Delta x-x),$$

тобто,

$$\Delta U_x(x,y)=P(x+\theta\Delta x,y)\Delta x\,,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U_x(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x,y)=P(x,y)\,.\ \blacksquare$$

Нехай функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ - неперервні і їх часткові похідні неперервні в області $D$.

$\overline{a}=\{P,Q\}$ - потенціальне $\Rightarrow\exists U(x,y):\dfrac{\partial U}{\partial x}=P,\dfrac{\partial U}{\partial y}=Q$.

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$ - неперервні в області $D$, тоді за теоремою Шварца $\Rightarrow\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

**Висновок.** Якщо функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ - неперервні і їх часткові похідні неперервні в області $D$, інтеграл $\int\limits_{AB}Pdx+Qdy$ не залежить від лінії $AB\subset D\ \forall A,B\in D$, тоді векторне поле $\overline{a}$ - потенціальне $\Rightarrow\dfrac{\partial P}{\partial y}(M)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(M)\quad\forall M\in D$.

Доведемо зворотне твердження для випадку кругової області.

**Твердження 1.** Дано: 1) $D$ – круг, 2) функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – неперервні і їх часткові похідні неперервні в області $D$; 3) $\dfrac{\partial P}{\partial y}(M)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(M)\quad\forall M\in D$.

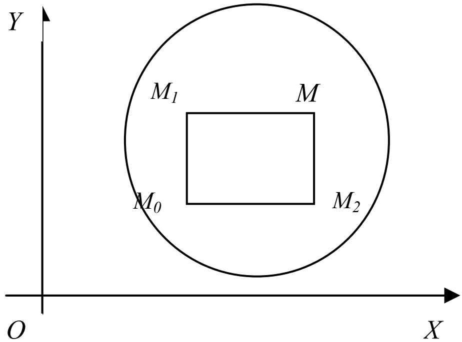


Рис. 19.7.

## 19 ТЕОРІЯ ПОЛЯ. ОСНОВНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ФОРМУЛИ АНАЛІЗУ

Довести: $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ - не залежить від лінії $AB \subset D\ \forall A, B \in D$.

► $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\overline{a} = \{P, Q\} \Rightarrow$ довести, що векторне поле потенціальне, тобто знайти функцію $U(x,y)$ таку, що $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}, Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$.

Побудуємо таку схему, як показано на рис. 19.7, отримаємо

$$\int\limits_{M_0M_1MM_2M_0} Pdx + Qdy = \int\limits_{M_0M_1M} + \int\limits_{MM_2M_0} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\limits_{M_0M_1M} Pdx + Qdy = \int\limits_{M_0M_2M} Pdx + Qdy,$$

Тому $\int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy$ не залежить від вигляду ламаної $M_0M$, що має ланцюги, паралельні координатним осям.

Розглянемо функцію $U(M) = \int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy$, де $M_0M$ - ламана з ланцюгами паралельними координатним осям. Доведення того, що це і є шуканий потенціал, здійснюється аналогічно, як в теоремі. ◄

**Твердження 2.** Дано: 1) $D$ – однозв'язна область, 2) функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – неперервні і їх часткові похідні неперервні в області $D$; 3) $\dfrac{\partial P}{\partial y}(M) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(M)\quad \forall M \in D$.

Довести: $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ - не залежить від лінії $AB \subset D\ \forall A, B \in D$.

► Якщо $L$ - довільна кусково гладка, зімкнена крива, що розташована в $D$, то область $D^*$, яку вона обмежує, цілком лежить в $D$, оскільки $D$ - зв'язна. Застосуємо формулу Гріна і умову 3):

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_{D^*} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds = 0.$$

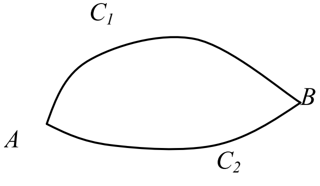

Рис. 19.8.

Нехай A і B – довільні точки $D$. Сполучимо їх двома кусково гладкими кривими $AC_1B$ і $AC_2B$, тоді

$$\int\limits_{AC_2BC_1A} Pdx + Qdy = \int\limits_{AC_2B} + \int\limits_{BC_1A} = 0 \Rightarrow \int\limits_{AC_1B} Pdx + Qdy = \int\limits_{AC_2B} Pdx + Qdy.$$ ◄

## 19 ТЕОРІЯ ПОЛЯ. ОСНОВНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ФОРМУЛИ АНАЛІЗУ

Загальний висновок: $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy 0$ не залежить від шляху інтегрування за дугою АВ, що лежить в області $D$, в якій дані функції неперервні разом із своїми частковими похідними, тоді і лише тоді, коли $\frac{\partial P}{\partial y}(M) = \frac{\partial Q}{\partial x}(M) \quad \forall M \in D$, крім того має місце формула $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = U(B) - U(A), \quad U$ - це потенціал векторного поля $\vec{a}(x, y)$.