

Змістовий модуль 1. Сутність та задачі математичного моделювання складних систем

Тема 1. Поняття та характеристики складних систем

1.1 Поняття складної системи

Одним з важливих завдань сучасної науки є розробка та впровадження у практику методів дослідження динаміки функціонування складних систем. До таких систем відносять великі виробничі енергетичні, гідротехнічні комплекси з автоматизованим керуванням, комп'ютерні комплекси, що є засобами керування такими системами, а також різноманітні соціально-економічні та біологічні системи. Суттєву роль у таких дослідженнях відіграють загальносистемні питання, що відносяться до загальної структури системи, організації взаємозв'язків між її елементами, взаємодії елементів системи з її зовнішнім середовищем, керування діяльністю її елементів тощо. Ці питання складають сутність системного підходу до вивчення властивостей реальних складних об'єктів.

На сьогодні не існує загальноприйнятого означення складної системи. Віднесення певного об'єкту моделювання до категорії складних систем значною мірою залежить від мети та задач його моделювання. Надалі будемо вважати об'єкт моделювання *складною системою*, якщо його властивості та особливості задач, що виникають при моделюванні цього об'єкту, вимагають дослідження цього об'єкту як системи з великою кількістю елементів, що взаємопов'язані та взаємодіють між собою, а також забезпечують виконання нею деякої достатньо складної функції.

Сукупність деяких взаємопов'язаних елементів, що входять до складу системи, утворює її *підсистему*. Підсистеми є деякими частинами системи, що можуть функціонувати самостійно. Наприклад, у системі виробничого підприємства окремий цех можна розглядати як підсистему.

Функціонування складної системи здійснюється під впливом підсистеми керування. Під *керуванням системою* розуміють цілеспрямований вплив на неї, що здійснюється з метою її певної зміни або підтримки у існуючому стані. Цей вплив здійснюється підсистемою керування.

Характерною рисою складної системи є її взаємодія з зовнішнім середовищем та функціонування в умовах дії випадкових зовнішніх факторів.

Отже, надалі складною системою будемо називати систему, що здійснює деяку складну функцію, та до складу якої входить велика кількість елементів.

Серед задач, що виникають у зв'язку з моделюванням складних систем, можна виокремити два основні класи: 1) задачі аналізу, пов'язані з дослідженням властивостей та поведінки системи у залежності від її структури та значень параметрів; 2) задачі синтезу, що зводяться до вибору структури та значень параметрів у залежності від заданих властивостей системи.

Типовими задачами математичного моделювання складних систем можуть бути пошук оптимальних або близьких до оптимальних розв'язків задач підвищення їх ефективності, визначення їх характеристик та властивостей, а також встановлення взаємозв'язків між елементами системи.

При проектуванні складних систем, їх модернізації, а також при визначенні оптимальних режимів експлуатації, задачі аналізу розглядають як задачі оцінки можливих варіантів системи. Для кожного з них обчислюють систему показників, що характеризують властивості системи (ефективність, надійність тощо). Порівнюючи ці характеристики, вибирають оптимальний варіант для проектування системи.

1.2 Ефективність функціонування складної системи

Якість функціонування складної системи визначають з допомогою її показників ефективності. Показником ефективності складної системи називають її числову характеристику, що відображає ступінь пристосованості системи до виконання поставлених перед нею задач. Без визначення показника ефективності складної системи неможливо чітко визначити її мету та задачі. При цьому вибір показника ефективності суттєво впливає на інтерпретацію властивостей системи та результатів її дослідження.

Нехай складною системою є деякий виробничий процес. За показник ефективності цієї системи можна вибрати її продуктивність, тобто кількість виробів, виготовлених за одиницю часу. Оцінюючи якість виробничого процесу на основ цього критерію, ми будемо приділяти основну увагу факторам, що сприяють досягненню максимальної продуктивності. При цьому недостатня увага буде приділятися таким характеристикам виробничого процесу як витрати енергії та матеріалів, витрати на заробітну платню, якість продукції тощо. Аналогічна ситуація має місце і для інших показників ефективності. Цей приклад свідчить, що вибір показника ефективності функціонування системи суттєво впливає на формування його цілей та задач.

Для того, щоб показник ефективності достатньо повно відображав якість роботи системи, він повинен враховувати її основні особливості та властивості, умови її діяльності та взаємодію з зовнішнім середовищем. Отже, він повинен

залежати від структури системи, значень її параметрів, характеру взаємодії з зовнішнім середовищем, тобто вибір показника ефективності визначається характером діяльності системи. Тому показник ефективності складної системи можна розглядати як функціонал, визначений на множині всіх можливих процесів її функціонування.

У зв'язку з тим, що складні системи функціонують в умовах впливу випадкових факторів, значення таких функціоналів виявляються випадковими величинами. Тому при виборі показників ефективності використовують їх середні значення (математичні сподівання): середня кількість виробів за одиницю часу, середня тривалість поїздки, середній час очікування у черзі. Інколи за показник ефективності обирають ймовірність деякої події, наприклад, ймовірність успішної посадки літака.

1.3 Показники, що характеризують властивості складних систем

Крім показників ефективності, при описанні роботи складної системи використовують і інші показники, що характеризують її властивості: надійність, якість керування тощо.

Розглянемо побудову показника, що характеризує надійність діяльності системи. Звичайно у теорії надійності таким показником є середній час безвідмовної роботи системи або ймовірність безвідмовної роботи системи на протязі деякого заданого часу. Проте для багатьох складних систем відмова окремого елемента ще не означає зупинки роботи системи у цілому, вона спричиняє лише зниження ефективності її роботи.

Постановка задачі про оцінку надійності складної системи зводиться до наступного. Вважаються відомими показники, що описують інтенсивність відмов окремих елементів складної системи: середня кількість відмов за одиницю часу, закон розподілу проміжків часу між послідовними відмовами. Ці характеристики визначаються експериментально. Нехай за показник ефективності складної системи вибрано деякий функціонал R . Його значення залежить не лише від структури та параметрів системи, але й від показників надійності її окремих елементів.

Нехай R_1 – значення показника ефективності для випадку, коли відмови елементів мають інтенсивності, що відповідають заданим характеристикам, R_2 – для випадку відсутності відмов елементів. Тоді за показник надійності даної системи можна вибрати величину $\Delta R = |R_1 - R_2|$, що показує, наскільки зменшується ефективність системи внаслідок можливих відмов її елементів, у

порівнянні з ефективністю ідеальної системи, елементи якої є абсолютно надійними.

Для розрахунку показників надійності, крім характеристик інтенсивності відмов елементів, задаються також характеристики витрат часу на відновлення їх працездатності.

Тема 2. Основні принципи моделювання складних систем

2.1 Сутність математичного моделювання

Модель – це об’єкт, який у ході дослідження заміняє оригінал, відображаючи при цьому характеристики оригіналу, що є найбільш важливими для дослідника. Математичною моделлю реальної системи або процесу називають сукупність математичних співвідношень (формул, рівнянь, нерівностей, логічних умов тощо), що визначають характеристики стану системи у залежності від її параметрів, зовнішніх умов (вхідних сигналів, зовнішніх впливів), початкових умов та часу. За визначенням В.М. Глушкова, математична модель – це множина символічних математичних об’єктів та співвідношень між ними.

Прикладом математичної моделі є описання руху матеріальної точки під дією сталої сили \bar{F} у вигляді рівняння:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 \cdot t + \frac{\bar{F}t^2}{2m}. \quad (2.1)$$

Тут $\bar{r}(t)$ – радіус-вектор точки у момент часу t , \bar{r}_0 – радіус-вектор точки у початковий момент часу, \bar{v}_0 – початкова швидкість точки, m – її маса.

Якщо рух точки здійснюється під впливом змінної сили $\bar{F}(t)$, то математична модель руху точки є векторним диференціальним рівнянням другого порядку, для якого задані початкові умови:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{\bar{F}(t)}{m}, \bar{r}(0) = \bar{r}_0, \bar{v}(0) = \bar{v}_0. \quad (2.2)$$

У співвідношеннях, що утворюють математичну модель, розрізняють два типи змінних: екзогенні та ендогенні. Екзогенні змінні визначаються поза моделлю, а ендогенні змінні визначають у ході розрахунків за моделлю. У моделі (2.2) екзогенними змінними є $\bar{F}(t)$, m , \bar{r}_0 , \bar{v}_0 , ендогенною змінною є радіус-вектор $\bar{r}(t)$ матеріальної точки, який визначається шляхом розв’язання задачі Коші (2.2).

Математичні моделі різних об’єктів можуть мати однакову математичну структуру, але різні змістовні інтерпретації, тобто одну й ту ж математичну модель можна використати для дослідження різних об’єктів.

Поряд з експериментом, математичне моделювання є основним способом дослідження. Активне застосування математичного моделювання у різних областях науки обумовлене наступними причинами:

- неможливість здійснення експериментів у багатьох дослідженнях;
- значні витрати на проведення експериментів;
- ускладнення типів задач, що розв’язуються у ході досліджень;

- скорочення термінів дослідження та отримання результатів;
- можливість багаторазового повторення дослідження на математичній моделі.

2.2 Класифікація математичних моделей складних систем та їх властивості

Складні системи характеризуються функціями, які вони виконують, процесами, що відбуваються у них, структурою та змінами стану системи у часі. Відповідно розрізняють функціональні, структурні, інформаційні та поведінські моделі складних систем.

Функціональна модель описує сукупність функцій, які виконує система та процесів, що у ній відбуваються. Структурна модель відображає побудову системи. Інформаційна модель характеризує співвідношення між елементами системи, а також між системою та зовнішнім середовищем. Інформаційні моделі здебільшого мають вигляд рівнянь регресії, що відображають зв'язок між рядами даних або інших статистичних моделей. Поведінська модель складної системи відображає динаміку її функціонування.

Існують також інші системи класифікації математичних моделей складних систем. З точки зору зміни стану системи у часі розрізняють динамічні та статичні моделі. У статичних моделях розглядають стан системи у конкретний момент часу і змінні характеристики моделі не залежать від часу. В динамічних моделях вони є функціями часу.

З точки зору врахування випадкових факторів розрізняють детерміновані та стохастичні моделі. Детерміновані моделі передбачають наявність жорстких функціональних зв'язків між змінними моделі. Стохастичні моделі допускають наявність дії випадкових факторів на систему – об'єкт дослідження. Вони використовують для моделювання системи апарат теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів. За виглядом співвідношень між змінними розрізняють лінійні та нелінійні моделі.

Оптимізаційні моделі передбачають побудову цільової функції, що відображає результати функціонування системи та подальше дослідження її на екстремум з врахуванням обмежень на систему.

Найбільш розповсюдженими формами представлення математичної моделі складної системи є інваріантна, аналітична, алгоритмічна та графічна форми. У інваріантній формі моделі записують у вигляді алгебраїчних, диференціальних, інтегральних та інших рівнянь та нерівностей, без врахування методу подальшого аналізу моделі. Аналітична форма – це запис моделі у вигляді аналітичного розв'язку вихідних рівнянь інваріантної форми моделі. Алгоритмічна форма – це запис алгоритму дослідження вихідної моделі. Використання графічної форми

передбачає подання моделі у вигляді геометричних об'єктів, графів, схем, графіків тощо.

За методами аналізу моделі розрізняють моделі, що досліджуються аналітично та чисельно. Результатом аналітичного дослідження є отримання формул, що задають шукані величини у явному вигляді, тут можуть бути також отримані висновки про стійкість розв'язку, наявність у нього особливих точок, його асимптотику тощо. У більшості реальних випадків математичну модель неможливо звести до вигляду, для якого можливо отримати аналітичний розв'язок за умови збереження адекватності моделі. Тому для дослідження моделі використовують чисельні методи. Проблемами при використанні чисельного аналізу можуть бути некоректність або нестійкість побудованої математичної моделі. У некоректно поставленій задачі відсутній єдиний розв'язок (його немає або розв'язків декілька). Нестійкість моделі означає, що малі похибки у визначенні її вихідних даних спричиняють великі відхилення у отриманих результатах. У таких випадках застосування чисельних методів здебільшого не має сенсу.

До основних властивостей математичних моделей відносять їх скінченність, спрощеність, наближеність, повноту, адекватність та істинність.

Скінченність моделі означає, що вона відображає лише деякі з характеристик, притаманних оригіналу. Вона обумовлена обмеженістю часу, потрібного для розробки та аналізу моделі.

Спрощеність моделі означає, що при її побудові були відкинуті характеристики оригіналу, несуттєві для дослідника.

Наближеність означає, що модель лише наближено відображає характеристики системи та співвідношення у ній. Типовими прикладами наближень, що використовуються при математичному моделюванні, є заміна дискретних систем неперервних систем дискретними та навпаки, заміна нелінійних залежностей лінійними, установлення обмежень на точність обчислення результатів тощо. З скінченності та наближеності моделі випливає, що вона відображає оригінал неповно. Ступінь повноти моделі залежить від мети та задач моделювання.

Адекватність моделі характеризує можливість реалізації мети моделювання, а її істинність відображає відповідність моделі існуючим знанням про об'єкт моделювання. Критеріями адекватності є відображення всіх суттєвих властивостей об'єкта дослідження, вірне відображення існуючих взаємозв'язків між окремими елементами складної системи. При кількісному дослідженні показником адекватності моделі є величина відхилення результатів моделювання від існуючих емпіричних даних. Істинність моделі не є гарантією її адекватності. Це може бути обумовлено накопиченням обчислювальних похибок при розрахунках по моделі. З іншого боку, адекватними можуть бути моделі, що не є істинними. Прикладом є

регресійні моделі для прогнозування поведінки системи, що досліджується, у деякому діапазоні зміни вхідних параметрів, не відображаючи при цьому відомі дані щодо структури системи та взаємозв'язків між її елементами.

2.3 Побудова математичної моделі складної системи

Основними підходами до побудови математичних моделей складних систем є: 1) застосування фундаментальних законів природи; 2) використання варіаційних принципів; 3) використання аналогій; 4) застосування ієрархії моделей. Розглянемо сутність цих підходів.

Найбільш розповсюджений метод побудови математичних моделей полягає у застосуванні фундаментальних законів природи до конкретної ситуації. Ці закони є загально визнаними та підтверджені експериментально і використовувалися багато разів, тому їх обґрунтованість не викликає сумніву. Основним питанням є, який з законів природи застосовувати у конкретному випадку, і як це зробити. До таких законів у фізиці, зокрема, у механіці, відносяться закон збереження енергії, закон збереження матерії, закон збереження імпульсу, закони Ньютона.

Варіаційні принципи, що застосовуються при математичному моделюванні, – це твердження про те, що з всіх можливих варіантів поведінки об'єкта дослідження, можливим є лише той, що задовольняє певній умові. Згідно з цією умовою функціонал, пов'язаний з об'єктом дослідження, досягає екстремального значення для певного стану об'єкту.

На практиці у багатьох випадках при моделюванні певної системи або неможливо безпосередньо вказати фундаментальні закони чи варіаційні принципи, яким безпосередньо відповідає поведінка системи, або немає впевненості у існуванні таких законів, що допускають математичне формулювання. У такому випадку використовуються аналогії з вже існуючими об'єктами, для яких розроблені математичні моделі.

Лише у виняткових випадках вдається побудувати математичну модель складної системи, що адекватно відображає всі її властивості та фактори, суттєві для її функціонування. Тому спочатку будуємо найпростішу модель об'єкта дослідження, а потім її поступово уточнюємо. При цьому отримується ієрархічна послідовність моделей, що реалізує принцип «від простого до складного». Кожна наступна модель включає у себе попередню.

Наведемо основні етапи побудови математичної моделі складної системи. До них відносяться:

- 1) формулювання предмету та цілей дослідження;

- 2) визначення елементів та характеристик системи, що є важливими для дослідження з точки зору досягнення його мети;
- 3) вербальний опис взаємозв'язків між виділеними елементами та характеристиками системи;
- 4) введення символічних позначень для визначених характеристик складної системи та формалізація зв'язків між ними у вигляді математичних співвідношень;
- 5) здійснення розрахунків за побудованою математичною моделлю;
- 6) аналіз отриманих результатів (формальний, з точки зору їх відповідності математичній моделі, та змістовний, з точки зору відповідності реальному об'єкту моделювання).

