Змістовий модуль 2. Математичні моделі динамічних систем

Тема 3. Математичне моделювання динамічних систем

3.1 Поняття динамічної системи

Динамічною системою називають об'єкт або процес, для яких однозначно визначено поняття стану як сукупності значень деяких величин у заданий момент часу, а також задано оператор, що визначає еволюцію початкового стану у часі. Прикладом динамічної системи є система матеріальних точок, що знаходиться під дією заданих сил. Її стан повністю визначається координатами та швидкостями точок у початковий момент часу, а еволюцію системи визначають рівняння руху (другий закон Ньютона).

Якщо досліджується задача визначення стану динамічної системи у будь-який момент часу на заданому інтервалі його зміни, то маємо *динамічну систему* з *неперервним часом.* Для моделювання еволюції таких систем використовують диференціальні рівняння. Якщо для опису поведінки системи достатньо знати її стан у скінченну чи зліченну множину моментів часу, то отримаємо *систему* з *дискретним часом*. Для моделювання таких задач використовують різницеві рівняння.

Розрізняють детерміновані та стохастичні динамічні системи. Якщо початкові умови та еволюційний оператор дозволяють однозначно визначити параметри системи у будь-який момент часу, то відповідна динамічна система є *детермінованою*. Якщо на еволюцію системи впливають випадкові фактори, то її називають *стохастичною*. Для моделювання стохастичних динамічних систем використовують теорію випадкових процесів.

3.2 Приклади побудови елементарних диференціальних моделей динамічних систем

Розглянемо приклади побудови найпростіших диференціальних моделей динамічних систем. Спочатку розглянемо кілька прикладів моделювання економічних систем.

Приклад 3.1. Нехай $y(t)$ – обсяг виробництва продукції деякого підприємства. Будемо вважати, що зі збільшенням обсягу виробництва відбувається насичення ринку і ціна товару $p(y)$ при цьому зменшується. Нехай $p(y)=b-ay$, де параметри a та b є сталими додатними величинами, а швидкість збільшення обсягу виробництва є зростаючою функцією доходу підприємства.

Побудувати диференціальну модель виробничої діяльності підприємства та визначити обсяг виробництва продукції як функцію часу.

Розв'язання. Згідно з умовою швидкість зміни обсягу виробництва задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dt} = k\left(b - ay\right) \cdot y\,.$$

Отримали диференціальне рівняння, у якому можна відокремити змінні:

$$\frac{dy}{y\left(b - ay\right)} = k \cdot dt\,.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо:

$$y\left(t\right) = \frac{C \cdot be^{bkt}}{1 + C \cdot ae^{bkt}}\,.$$

Графіком отриманої функції є логістична крива.

Приклад 3.2. Розглянемо задачу про оптимізацію прибутку фірми-монополіста. Нехай така фірма пропонує на ринку однорідний товар, для якого функція витрат має вигляд: $C = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma$, де α, β, γ – додатні сталі, $Q = Q\left(t\right)$ – обсяг виробництва. Далі вважається, що він дорівнює попиту на товар фірми. Попит залежить не лише від ціни $p\left(t\right)$ на цей товар, але й від швидкості $\frac{dp}{dt}$ її зміни. Ця залежність має вигляд:

$$Q = a - b \cdot p\left(t\right) + h \cdot \frac{dp}{dt}, \quad a > 0, b > 0, h \neq 0\,.$$

Побудувати диференціальну модель для визначення зміни ціни у часі, що максимізує прибуток фірми на протязі часу T.

Розв'язання. Величина прибутку як функції часу має вигляд:

$$R\left(p, \frac{dp}{dt}\right) = p \cdot Q - C = p\left(a - bp + h\frac{dp}{dt}\right) - \alpha\left(a - bp + h\frac{dp}{dt}\right)^2 -$$

$$-\beta\left(a - bp + h\frac{dp}{dt}\right) - \gamma.$$

Загальний прибуток I за час T є функціоналом:

$$I = \int_0^T R\left(p\left(t\right), \frac{dp}{dt}\right) dt \to \max\,.$$

При цьому відомі значення ціни у початковий момент часу $t = 0$ та її прогнозоване значення у момент $t = T$: $p\left(0\right) = p_0$, $p\left(T\right) = p_1$.

Необхідною умовою досягнення функціоналом I екстремуму на функції $p\left(t\right)$ є те, що ця функція повинна бути розв'язком рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial R}{\partial p}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{p}}\right)=0.$$

Після підстановки у це рівняння виразу для $R\left(p,\frac{dp}{dt}\right)$ отримуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно функції $p(t)$:

$$\frac{d^2p}{dt^2}-\frac{b(1+ab)}{\alpha h^2}p=-\frac{\alpha+2\alpha ab+\beta b}{2\alpha}.$$

Розв'язавши це рівняння та визначивши довільні сталі з крайових умов $p(0)=p_0$, $p(T)=p_1$, отримуємо вигляд функції $p(t)$.

Приклад 3.3. Дві рідкі хімічні речовини, *A* та *B*, об'єм яких становить відповідно 10 л та 20 л, у процесі хімічної реакції утворюють нову рідку хімічну речовину *C*. Вважаючи, що температура у ході реакції не змінюється, а також, що з кожних двох об'ємів речовини *A* та одного об'єму речовини *B*, утворюються 3 об'єми речовини *C*, визначити кількість речовини *C* у довільний момент часу t, якщо за 20 хвилин отримуємо 6 л цієї речовини. При побудові математичної моделі використати закон діючих мас, згідно з яким швидкість хімічної реакції при сталій температурі пропорційна добутку концентрацій речовин, що у даний момент часу беруть участь у реакції (швидкість реакції – це швидкість утворення нової речовини).

Розв'язання. Нехай x л – об'єм речовини *C*, що утворилася до моменту часу t годин. Тоді з умови задачі випливає, що до цього моменту часу у хімічну реакцію вступило $2x/3$ л речовини *A* та $x/3$ л речовини *B*. Отже, до цього моменту часу залишилося $10-\frac{2x}{3}$ літрів речовини *A* та $20-\frac{x}{3}$ літрів речовини *B*. У відповідності до закону діючих мас, отримуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt}=k_1\left(10-\frac{2x}{3}\right)\left(20-\frac{x}{3}\right).$$

Його можна записати у вигляді:

$$\frac{dx}{dt}=k(15-x)(60-x).$$

Тут k – коефіцієнт пропорційності.

Оскільки у початковий момент часу $t=0$ речовини C ще не було, то у цей момент часу $x=0$. При $t=\frac{1}{3}$ кількість речовини C $x=6$. Отже, для отриманого диференціального рівняння маємо крайові умови: $x(0)=0$, $x\left(\frac{1}{3}\right)=6$.

Для розв’язку отриманої крайової задачі спочатку проінтегруємо останнє диференціальне рівняння, використавши умову $x(0)=0$. Отримаємо співвідношення:

$$\frac{60-x}{15-x}=4e^{45kt}.$$

Для визначення коефіцієнту пропорційності k використаємо умову $x\left(\frac{1}{3}\right)=6.$

Отримуємо, що $e^{15k}=\frac{3}{2}$, звідки знаходимо:

$$\frac{60-x}{15-x}=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3t}.$$

З останньої рівності знаходимо $x(t)$:

$$x(t)=\frac{15\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}\right)}{1-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}.$$

Приклад 3.4 (диференціальна модель бойових дій). Розглянемо математичну модель бойових дій регулярних військ, запропоновану британським математиком та інженером Ф.У. Ланчестером.

Нехай $x(t)$ та $y(t)$ – чисельність армій протидіючих у конфлікті сторін. Тут t – час, що пройшов з початку конфлікту (у днях). Практично важко вказати кількісний вимір інших критеріїв, що впливають на результат конфлікту (рівень озброєнь, ступінь бойової готовності, досвід, моральний дух тощо), тому будемо вважати, що вирішальну роль мають показники $x(t)$ та $y(t)$. При цьому вони змінюються неперервно та є диференційовними як функції часу. Нехай $\alpha(t)$ – швидкість, з якою сторона x несе небойові втрати(від хвороби та інше), $\beta(t)$ – швидкість бойових втрат, $\gamma(t)$ – швидкість надходження підкріплень до сторони x. Загальна швидкість зміни величини $x(t)$ визначається рівністю:

$$\frac{dx}{dt}=-(\alpha+\beta)+\gamma.$$

Аналогічне рівняння виконується і для невідомої функції $y(t)$. Подальше завдання полягає у тому, щоб вказати відповідні формули для введених величин $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, а потім дослідити отримані диференціальні рівняння, щоб визначити ймовірного переможця.

У подальшому будемо використовувати наступні позначення: a,b,c,d – невід'ємні сталі, що характеризують рівень впливу різних факторів на людські втрати обох сторін, $p(t), q(t)$ – функції, що моделюють можливість підходу підкріплень відповідно до сторін x та y на протязі дня, x_0, y_0 – чисельність сил x та y перед початком конфлікту. Тоді диференціальна модель бойових дій набуває вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) - by(t) + p(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = -cx(t) - dy(t) + q(t).$$

Кожне з цих диференціальних рівнянь відображає швидкість зміни чисельності військ сторін конфлікту у залежності від дії різних факторів. Відносні швидкості для втрат, не пов'язаних з бойовими діями, визначаються рівняннями:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = -a, \quad \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = -d .$$

Доданок $-b \cdot y(t)$ у моделі Ланчестера відображає бойові втрати сторони x, а коефіцієнт b у ньому – ефективність бойових дій сторони y. З рівняння

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dx}{dt} = -b$$

випливає, що стала b – це одиниця вимірювання середньої ефективності кожної одиниці бойових сил сторони y. Аналогічно можна пояснити і доданок $-c \cdot x(t)$. Коефіцієнти b та c подаються у вигляді:

$$b = r_y \cdot p_y, c = r_x \cdot p_x, \tag{3.1}$$

де r_x, r_y – коефіцієнти потужності озброєнь відповідно сторін x та y, p_x, p_y – ймовірності ураження противника кожним пострілом з боку x чи y.

Розглянемо випадок, коли втрати, не пов'язані з бойовими діями, відсутні і при цьому обидві сторони не отримують підкріплень. Тоді модель Ланчестера зводиться до системи рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = -by(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = -cx(t). \tag{3.2}$$

Поділивши перше рівняння цієї системи на друге, отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by}.$$

Після інтегрування цього рівняння отримуємо рівність

$$b\left(y^2(t)-y_0^2\right)=c\left(x^2(t)-x_0^2\right). \tag{3.3}$$

Позначивши K сталу величину $by_0^2-cx_0^2$, отримуємо при $K\neq 0$ рівняння гіперболи:

$$by^2-cx^2=K.$$

При $K=0$ отримаємо рівняння пари прямих.

З'ясуємо, яка зі сторін є переможцем згідно з моделлю Ланчестера. Далі вважатимемо, що перемогла та чи інша сторона, якщо вона першою знищила бойові сили суперника. У випадку, що розглядається, перемагає сторона *y,* якщо $K > 0$. З (3.3) випливає, що у цьому випадку *y* не дорівнює нулю, у той час, як при значенні $y(t)=\sqrt{\dfrac{K}{b}}$ змінна *x* набуває нульового значення. Отже, для перемоги сторони у, їй потрібно намагатися досягти такої ситуації, коли виконується нерівність $K > 0$, тобто коли

$$by_0^2>cx_0^2. \tag{3.4}$$

З (3.1) випливає, що нерівність (3.4) можна записати у вигляді:

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2>\frac{r_x}{r_y}\cdot\frac{p_x}{p_y}. \tag{3.5}$$

Ліва частина нерівності (3.5) свідчить, що зміна у співвідношенні сил y_0/x_0 надають перевагу одній зі сторін у відповідності з квадратичним законом.

Отримаємо відповідні співвідношення, які б враховували явно час. Для цього продиференціюємо по змінній t перше з рівнянь системи (3.2), а потім використаємо друге рівняння цієї ж системи. У результаті отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}-bcx=0. \tag{3.6}$$

Для цього рівняння маємо початкові умови:

$$x(0)=x_0,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-by_0.$$

Використовуючи ці умови, розв'язок рівняння (3.6) отримуємо у вигляді:

$$x(t)=x_0\cos\beta t-\gamma y_0\sin\beta t. \tag{3.7}$$

Тут $\beta=\sqrt{bc},\gamma=\sqrt{\dfrac{b}{c}}$. Аналогічно отримуємо вираз для $y(t)$:

$$y(t)=y_0\cos\beta t-\frac{x_0}{\gamma}\sin\beta t. \tag{3.8}$$

Зауважимо, що для перемоги сторони y не обов'язково, щоб виконувалася нерівність $y_0 > x_0$, достатньо, щоб виконувалася нерівність $\gamma y_0 > x_0$.

3.3 Фазовий портрет та особливі точки динамічної системи

Нехай вектор $\bar{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ у деякий момент часу описує стан динамічної системи. Визначимо еволюційний оператор, вказавши швидкість зміни стану системи:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), \quad i = 1, ..., n. \tag{3.9}$$

Евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ n-вимірних векторів $\bar{x}$ називають *фазовим простором*, а вектор $\bar{x}$ – *фазовою точкою*. Системи, що мають вигляд (3.9), у яких права частина не залежить у явному вигляді від часу t, називають *автономними*. Якщо систему (3.9) доповнити початковими умовами $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, то отримаємо *задачу Коші* для цієї системи. Її розв'язок $\bar{x}(t)$, що розглядається як множина фазових точок, утворює *фазову траєкторію*. У фазовому просторі праві частини рівнянь системи (3.9) визначають векторне поле швидкостей. Фазові траєкторії та векторне поле швидкостей динамічної системи формують наочне уявлення про характер поведінки системи у часі. Множина фазових траєкторій, що відповідають різним початковим умовам, визначає *фазовий портрет динамічної системи*.

Розглянемо автономну систему, стан якої визначається диференціальними рівняннями

$$\dot{x} = f\left(x, y\right), \quad \dot{y} = g\left(x, y\right). \tag{3.10}$$

Нехай функції $f\left(x, y\right)$ та $g\left(x, y\right)$ є неперервно диференційовними у деякому околі точки $\left(x_0, y_0\right)$, у якій вони одночасно дорівнюють нулю, тобто $f\left(x, y\right) = 0$, $g\left(x, y\right) = 0$. Точку $\left(x_0, y_0\right)$ називають *особливою точкою* системи (3.10) на фазовій площині Oxy. У найпростішому випадку, коли $f\left(x, y\right)$ та $g\left(x, y\right)$ є лінійними функціями, тобто $f\left(x, y\right) = ax + by$, $g\left(x, y\right) = cx + dy$, де величини a, b, c, d є сталими, визначення типу особливих точок здійснюється за наступною схемою. Спочатку знаходять корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння системи

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.11}$$

Якщо корені дійсні, $\lambda_1 \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$, то особливу точку називають *вузлом*. Тут множина інтегральних кривих за формою нагадує множину парабол з вершинами у початку координат. Якщо дійсні корені мають різні знаки, то особливу точку називають *сідлом*, а інтегральні криві нагадують дещо деформовані параболи. Якщо корені характеристичного рівняння є комплексними, з дійсною частиною, відмінною від нуля, то особливу точку називають *фокусом*, а інтегральні криві мають вигляд спіралей, що закручуються навколо початку координат. Якщо дійсна частина коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю, а уявна ненульова, то особливу точку у цьому випадку називають *центром*. Інтегральні криві у випадку центру є замкненими та охоплюють початок координат.

Для побудови на фазовій площині фазового портрету динамічної системи потрібно дослідити особливі точки цієї системи. Після цього з допомогою похідних $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$ вивчають поведінку інтегальних кривих рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}.$$

Якщо необхідно побудувати траєкторії рівняння $\ddot{x} = g(x,\dot{x})$, то вводять нову змінну $y = \dot{x}$ та переходять до системи виду (3.10):

$$\dot{x} = y, \dot{y} = g(x,y)$$

Граничним циклом системи (3.9) називають замкнену ізольовану траєкторію цієї системи, у якої існує окіл, цілком заповнений траєкторіями, по яким фазова точка необмежено наближається до цієї замкненої кривої при $t \to +\infty$ чи $t \to -\infty$.Якщо траєкторії системи (3.9) наближаються до граничного циклу лише при $t \to +\infty$, то його називають *стійким*. Якщо ж траєкторії системи (3.9) наближаються до граничного циклу лише при $t \to -\infty$, то цей граничний цикл називають *нестійким*.

У випадку $n = 2$ (фазова площина) розглядають також напівстійкі цикли. Граничний цикл на фазовій площині називають *напівстійким*, якщо траєкторії системи (3.10) з одного боку наближаються до нього при $t \to +\infty$, з іншого – при $t \to -\infty$. Отже, можливі напівстійкі цикли двох типів.

3.4 Різницеві моделі динамічних систем. Основні поняття та означення

Різницевим оператором Δ називають оператор, що переводить послідовність x_n у послідовність y_n за правилом

$$y_n = \Delta x_n = x_{n+1} - x_n,\ n = 1,2,.... \qquad (3.12)$$

Вираз Δx_n називають *різницею першого порядку*.

Різницевим рівнянням називають рівняння, що містить невідому послідовність та її різниці. *Розв'язком різницевого рівняння* називають будь-яку послідовність, при підстановці якої у різницеве рівняння для довільного натурального n отримуємо тотожність.

Різницею другого порядку називають вираз

$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n . \quad (3.13)$$

Оскільки $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $\Delta x_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1}$, то

$$\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n . \quad (3.14)$$

За індукцією можна визначити різницю m-го порядку:

$$\Delta^m x_n = \Delta^{m-1} x_{n+1} - \Delta^{m-1} x_n . \quad (3.15)$$

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести формулу:

$$\Delta^m x_n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k x_{n+k} . \quad (3.16)$$

Виконується також рівність:

$$x_{n+m} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \Delta^k x_n . \quad (3.17)$$

У формулах (3.16) та (3.17) $C_m^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

Лінійним різницевим рівнянням називають рівняння виду

$$a_0(n)\Delta^m x_n + a_1(n)\Delta^{m-1} x_n + \ldots + a_m(n) x_n = f(n). \quad (3.18)$$

де x_n – невідома послідовність, $a_0, a_1, \ldots, a_m, f$ – задані функції натурального аргументу n. Число m (старший порядок різниці) називають *порядком різницевого рівняння*. Використовуючи формулу (3.16), лінійне різницеве

рівняння можна записати у вигляді:

$$c_0(n) x_{n+m} + c_1(n) x_{n+m-1} + \ldots + c_m(n) x_n = f(n). \quad (3.19)$$

Якщо $f(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то рівняння (3.18) або (3.19) називають *лінійним однорідним різницевим рівнянням m-го порядку*.

Розглянемо різницеве рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y_{n+1} + a \cdot y_n = b , \quad (3.20)$$

де y_n, y_{n+1} – члени невідомої числової послідовності.

Різницеві рівняння є дискретним аналогом диференціальних рівнянь, тому математичні моделі, у яких використовуються різницеві рівняння, відносяться до дискретних моделей. Методи розв’язання лінійних різницевих рівнянь аналогічні методам розв’язання лінійних диференціальних рівнянь.

Загальний розв’язок рівняння (3.20) будемо шукати у вигляді: $y_n = y_n^o + \tilde{y}_n$, де y_n^o – загальний розв’язок відповідного однорідного різницевого рівняння $f(n) = 0$, $\tilde{y}_n$ – частинний розв’язок заданого неоднорідного різницевого рівняння.

Загальний розв’язок однорідного рівняння y_n^o шукаємо у вигляді: $y_n^o = C \cdot \lambda^n$, де C – довільна стала. Підставивши y_n^o у рівняння $y_{n+1} + a \cdot y_n = 0$, знаходимо:

$$C \cdot \left(\lambda^{n+1} + a \cdot \lambda^n\right) = 0 \Rightarrow a + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -a .$$

Тут λ фактично є коренем характеристичного рівняння $\lambda + a = 0$, отриманого аналогічно такому рівнянню для диференціального рівняння $y' + ay = 0$ (у різницевому рівнянні y_{n+m} замінюємо на λ^m).

Отже, $y_n^o = C \cdot (-a)^n$.

Частинний розв’язок $\tilde{y}_n$ неоднорідного різницевого рівняння (3.20) шукаємо за виглядом його правої частини $f(n)$. Оскільки у даному випадку $f(n) = b = \text{const}$, то $\tilde{y}_n = A = \text{const}$.

Знайдемо сталу A, підставивши $\tilde{y}_n = A$ у рівняння. Маємо:

$$A + a \cdot A = b \Rightarrow A = \frac{b}{1+a} = \tilde{y}_n .$$

Таким чином, ми отримали розв’язок різницевого рівняння (3.20) у вигляді:

$$y_n = y_n^o + \tilde{y}_n = C \cdot (-a)^n + \frac{b}{1+a} .$$

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що має вигляд:

$$y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n = b . \qquad (3.21)$$

Тут p, q та b – задані сталі.

Структура загального розв’язку рівняння (3.21) також визначається рівністю $y_n = y_n^o + \tilde{y}_n$. Характеристичне рівняння має вигляд: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Можливими є наступні випадки.

1. Корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння є дійсними, причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння $y_n^o = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n$.

2. Корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння є дійсними, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Загальний розв'язок однорідного рівняння $y_n^o = \left(C_1 n + C_2\right) \cdot \lambda^n$.

3. Корені характеристичного рівняння комплексні: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тоді маємо: $y_n^o = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^n \left(C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi\right)$, $\varphi = \arg\left(\lambda_2\right)$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.21) у відповідності до його правої частини шукаємо у вигляді: $\tilde{y}_n = B = \text{const}$. Підставивши $\tilde{y}_n$ у рівняння, знаходимо: $B + pB + qB = b$, звідки $B = \dfrac{b}{1 + p + q}$. Отже, розв'язком рівняння (3.21) є послідовність $y_n = y_n^o + \dfrac{b}{1 + p + q}$, де y_n^o визначається у залежності від вигляду коренів характеристичного рівняння.

Прикладом економіко-математичної моделі, що приводиться до розв'язання лінійного різницевого рівняння, є так звана *павутиноподібна модель ринку*.

Нехай деяке виробниче підприємство визначає пропозицію свого товару у поточному періоді на основі цін, що склалися у попередньому періоді: $s_n = s\left(p_{n-1}\right)$. Попит на товар залежить від ціни товару у поточному періоді: $d_n = d\left(p_n\right)$. Будемо вважати функції попиту та пропозиції лінійними, тобто

$$s_n = m + l \cdot p_{n-1},\ d_n = a - b \cdot p_n,\ a > m > 0,\ l > 0,\ b > 0.$$

Знайдемо ціну рівноваги з умови $d_n = s_n$. Тоді $a - b \cdot p_n = m + l \cdot p_{n-1}$. Замінивши номер $n - 1$ члена послідовності на n, отримуємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку відносно ціни p_n:

$$b \cdot p_{n+1} + l \cdot p_n = a - m.$$

Розв'язком цього лінійного різницевого рівняння є послідовність

$$p_n = C \cdot \left(-\frac{l}{b}\right)^n + \frac{a - m}{b + l}.$$

З отриманого розв'язку випливає, що при $l < b$ $p_n \to p_0 = \dfrac{a - m}{b + l}$, якщо $n \to \infty$. Це значення p_0 є ціною рівноваги для даного товару. Якщо $l > b$, то з часом ціна p_n буде віддалятися від ціни рівноваги p_0. Для випадку $l = b$ спостерігаємо циклічні коливання ціни p_n у n-му періоді часу відносно значення p_0.

3.5 Лінійні системи різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Лінійною називають систему різницевих рівнянь відносно m невідомих послідовностей $x_{1,n}$, $x_{2,n},\ldots,x_{m,n}$ (n – номер члена послідовності):

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = a_{11}x_{1,n} + a_{12}x_{2,n} + \ldots + a_{1m}x_{m,n} + f_1(n), \\ x_{2,n+1} = a_{21}x_{1,n} + a_{22}x_{2,n} + \ldots + a_{2m}x_{m,n} + f_2(n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{m,n+1} = a_{m1}x_{1,n} + a_{m2}x_{2,n} + \ldots + a_{mm}x_{m,n} + f_m(n). \end{cases} \tag{3.22}$$

Перейдемо до матричних позначень:

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \ldots \\ x_{m,n} \end{pmatrix}, \; B_n = \begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_m(n) \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Систему (3.22) можна записати у матричній формі:

$$X_{n+1} = A \cdot X_n + B_n. \tag{3.23}$$

Загальний розв’язок системи (3.23) будемо шукати у вигляді: $X_n = X_n^o + \tilde{X}_n$, де X_n^o – загальний розв’язок відповідної однорідної системи, $\tilde{X}_n$ – частинний розв’язок (3.23). Для розв’язання лінійної однорідної системи різницевих рівнянь використовують *метод Ейлера*, згідно з яким фундаментальну систему розв’язків системи $X_{n+1} = A \cdot X_n$ шукають серед векторних послідовностей виду $X_n = D \cdot \lambda^n$, де D – деякий вектор. Підставивши $X_n = D \cdot \lambda^n$ у матричну рівність $X_{n+1} = A \cdot X_n$, отримуємо:

$$D \cdot \lambda^{n+1} = A \cdot D \cdot \lambda^n, \tag{3.24}$$

звідки знаходимо, що $A \cdot D = \lambda \cdot D$. Це означає, що векторна послідовність $X_n = D \cdot \lambda^n$ є розв’язком лінійної однорідної системи різницевих рівнянь $X_{n+1} = A \cdot X_n$ тоді і лише тоді, коли λ є власним значенням матриці A, а D – відповідним йому власним вектором.

Власні значення матриці A визначаються як корені многочлена $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, де E – одинична матриця. Цей многочлен називають характеристичним многочленом для системи різницевих рівнянь (3.23), а рівняння $P(\lambda) = 0$ – її характеристичним рівнянням.

Якщо всі власні значення $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ матриці A є дійсними і різними (всі корені характеристичного рівняння дійсні та прості), то фундаментальну систему розв'язків утворюють векторні послідовності $D_1\lambda_1^n$, $D_2\lambda_2^n$, …, $D_m\lambda_m^n$. Тут D_i – власний вектор матриці A, що відповідає власному значенню λ_i, $i = 1,2,...,m$. Загальний розв'язок лінійної однорідної системи різницевих рівнянь у цьому випадку має вигляд: $X_n^o = C_1 D_1 \lambda_1^n + C_2 D_2 \lambda_2^n + ... + C_m D_m \lambda_m^n$.

У моделі Леонтьєва міжгалузевого балансу $X = AX + Y$, розглянутій раніше, всі її елементи вважалися сталими, середніми за деякий період часу. На практиці обсяг виробництва у період часу $n+1$ визначається значеннями X_n та Y_n, що були досягнуті у періоді n. Тому розглядається динамічна модель Леонтьєва у вигляді:

$$X_{n+1} = AX_n + Y_n. \qquad (3.25)$$

Векторне рівняння (3.25) є системою m лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Постановка задачі: для заданого вектора кінцевого споживання Y_n та матриці прямих витрат A визначити вектор валового виробництва X_m.

Приклад. Визначити вектор валового виробництва X_m у динамічній моделі Леонтьєва, якщо технологічна матриця $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$, вектор кінцевого споживання $Y_n = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок системи $X_{n+1} = AX_n + Y_n$ лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами у вигляді $X_n = X_n^o + \tilde{X}_n$, де X_n^o – загальний розв'язок однорідної системи, $\tilde{X}_n$ – частинний розв'язок заданої системи. Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0,2-\lambda & 0,3 \\ 0,3 & 0,2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = -0,1$, $\lambda_2 = 0,5$. Знайдемо відповідні власні вектори. При $\lambda_1 = -0,1$ отримуємо рівняння для координат α_1 та α_2 власного вектору:

$$0,3\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = 0,$$

звідки $\alpha_1 = -\alpha_2$, наприклад, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$.

Для $\lambda_2 = 0,5$ маємо:

$$-0,3\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = 0.$$

Звідси отримуємо $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Отже, власні вектори $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тоді $X_n^o = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-0,1)^n + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0,5)^n$, C_1 та C_2 – довільні сталі.

Частинний розв'язок заданої системи будемо шукати за виглядом правої частини цієї системи: $\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^n$, $\tilde{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^{n+1}$. Підставивши ці вирази у задану неоднорідну систему, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^n + \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2\alpha_1 + 0,3\alpha_2 + 1 \\ 0,3\alpha_1 + 0,2\alpha_2 + 1 \end{pmatrix} \cdot 2^n .$$

Після скорочення обох частин цієї рівності на 2^n, отримуємо систему рівнянь відносно α_1 та α_2:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = 0,2\alpha_1 + 0,3\alpha_2 + 1, \\ 2\alpha_2 = 0,3\alpha_1 + 0,2\alpha_2 + 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1,8\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = -1, \\ 0,3\alpha_1 - 1,8\alpha_2 = -1. \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2}{3}.$$

Отже, $\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot 2^n$, загальний розв'язок системи (вектор валового виробництва) X_n у розглянутій динамічній моделі Леонтьєва матиме вигляд:

$$X_n = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-0,1)^n + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0,5)^n + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot 2^n .$$

Значення сталих C_1 та C_2 можна знайти, знаючи вектор валового виробництва у перші два роки.