ЛЕКЦІЯ 2

1. Силові лінії

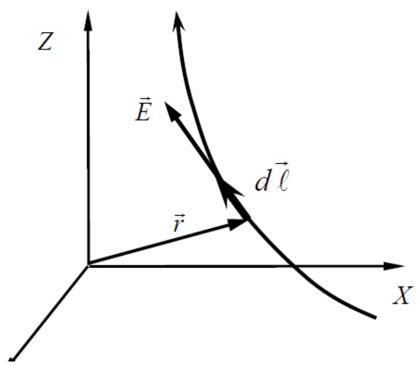
Векторне електричне поле геометрично представляють за допомогою силових ліній. *Силовою лінією* називають лінію в просторі, дотичні до якої співпадають з напрямком вектора напруженості електричного поля. На рис. 2.11 зображений вектор напруженості електричного поля E для точки, яка лежить на силовій лінії, і положення якої задано радіус-вектором r.

Введемо вектор елементарної ділянки кривої dl , який співпадає з хордою до кривої, коли точки перетину лежать нескінченно близько одна від другої. Таким чином, вектор d також лежить уздовж дотичної до кривої, і він співнаправлений з вектором напруженості електричного поля

$d \uparrow\uparrow E$

Коли вектори співнаправлені, то їх векторний добуток дорівнює нулю: $[E\uparrow\uparrow d]$=0.

Представимо вектор напруженості сумою його проекцій



$$\vec{E} = E_X\vec{i} + E_Y\vec{j} + E_Z\vec{k}$$

А вектор елементарної ділянки запишемо у вигляді:

$$d\vec{\ell} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$$

З співнаправленості вектора напруженості електричного поля і вектора елементарної ділянки силової лінії випливають співвідношення

$$\frac{dx}{E_X} = \frac{dy}{E_Y} = \frac{dz}{E_Z}$$

Зазначені рівняння є *диференціальними рівняннями силової лінії.*

Пошук аналітичного рішення цих рівнянь є дуже складною задачею. Проте, воно дозволяє без великих зусиль будувати криві силових ліній за допомогою чисельних методів.

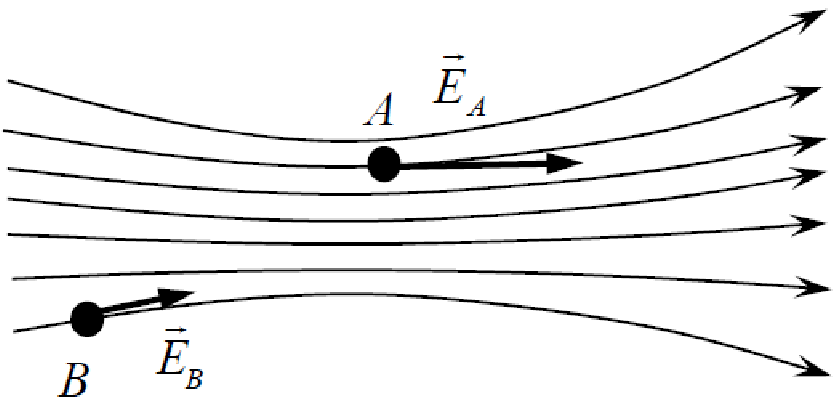
Будемо вважати, що нам відомий розподіл вектора напруженості електричного поля в просторі, тобто відомі функції $E_x(x,y,z)$, $E_y(x,y,z)$, $E_x(x,y,z)$, $E_z(x,y,z)$,. Будуватимемо силову лінію, яка проходить через точку з координатами (x_0, y_0, z_0) . З диференціального рівняння силової лінії знайдемо положення наступної точки силової лінії. Координати цієї точки можна записати у вигляді:

$$x_1 = x_0 + dx\,, \quad y_1 = y_0 + \frac{E_Y(x_0, y_0, z_0)}{E_X(x_0, y_0, z_0)}dx\,, \quad z_1 = z_0 + \frac{E_Z(x_0, y_0, z_0)}{E_X(x_0, y_0, z_0)}dx$$

Положення наступної точки знайдемо у такий же самий спосіб:

$$x_2 = x_1 + dx\,, \quad y_2 = y_1 + \frac{E_Y(x_1, y_1, z_1)}{E_X(x_1, y_1, z_1)}dx\,, \quad z_2 = z_1 + \frac{E_Z(x_1, y_1, z_1)}{E_X(x_1, y_1, z_1)}dx$$

Багаторазово проводячи зазначену процедуру, можна відтворити всю криву силової лінії. Точність відтворення кривої залежить від вибору довжини кроків.



Силових ліній може бути побудована нескінчена кількість. При їх побудові можна переконатися, що щільність силових ліній пропорційна вектору напруженості електричного поля. Коли лінії розріджуються, то в цій області простору напруженість електричного поля зменшується (точка B на рис. 1.12), і навпаки: коли лінії йдуть щільніше, то в цій області поля вектор напруженості електричного поля стає більшим (точка A на рис. 2.12). Силові лінії не перетинаються. Вони починаються на додатних зарядах («виходять» з них) і закінчуються на від’ємних зарядах («входять» в них).

2.2 Потенціал

2.21. Робота електричного поля точкового заряду

Розглянемо точковий заряд q (рис. 2.3) Цей заряд є джерелом електричного поля. Напруженість електричного поля, яке створює точковий заряд в оточуючому його просторі, описується формулою

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{e}_r}{r^2},$$

де E– вектор напруженості електричного поля в точці, положення якої задає радіус-вектор, модуль якого позначено r,

$$|\vec{r}| = r\ ,\ \text{а}\ \ \vec{e}_r\ –$$

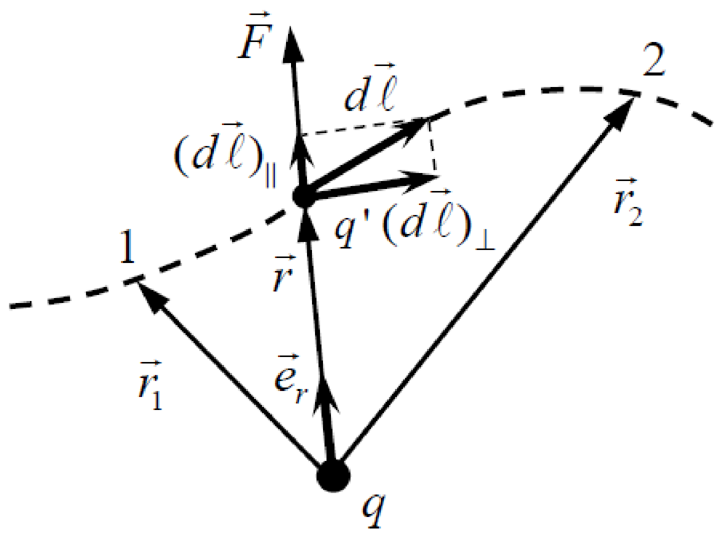
одиничний вектор, який направлений вздовж радіус-вектора

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Якщо в поле E внести інший заряд q' (зі штрихом), то зі сторони поля на заряд буде діяти сила $F = q'E$. При переміщенні заряду q' в полі, утвореному нерухомим зарядом q, електричне поле буде виконувати роботу.

Розрахуємо величину цієї роботи при переміщенні заряду q' вздовж довільної траєкторії, криву лінію якої на рис. 1.13позначено пунктиром. Для простоти будемо вважати, що заряди q та q' додатні.

Робота електричного поля при елементарному переміщенні вздовж траєкторії визначається скалярним добутком вектора сили на вектор переміщення:



$$dA = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} d\vec{\ell}$$

де прийнято, що елементарне переміщення дорівнює елементарному вектору ділянки кривої траєкторії,

$$d\vec{r} = d\vec{\ell}$$

Представимо вектор елементарної ділянки кривої сумою двох складових

$$d\vec{\ell} = d\vec{\ell}_{\parallel} + d\vec{\ell}_{\perp}, \text{ причому } d\vec{\ell}_{\parallel} \uparrow\uparrow \vec{F}, \text{ а } d\vec{\ell}_{\perp} \perp \vec{F}$$

Тепер елементарна робота буде містити два доданки:

$$dA = \vec{F} d\vec{\ell}_{\parallel} + \vec{F} d\vec{\ell}_{\perp}$$

Оскільки

$$d\vec{\ell}_{\perp} \perp \vec{F}, \text{ то другий доданок } \vec{F} d\vec{\ell}_{\perp}$$

буде дорівнювати нулю, бо скалярний добуток перпендикулярних векторів дорівнює нулю.

Вектор $d\vec{\ell}_{\parallel}$ колінеарний вектору $\vec{F}$.

Оскільки $d\vec{r} = d\vec{\ell}$, то $d\vec{r}_{\parallel} = d\vec{\ell}_{\parallel}$, а $\left| d\vec{r}_{\parallel} \right| = dr$,

і вираз для елементарної роботи набуває вигляду:

$$dA = F(\vec{r}) dr,$$

де перший множник є проекцією сили на напрямок радіус-вектора, тобто дорівнює скалярному добутку

$$F(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}) \vec{e}_r$$

який, в свою чергу, дорівнює

$$F(\vec{r}) = q' E(r), \text{ де } E(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \vec{e}_r.$$

Таким чином, вираз для елементарної роботи можна записати у вигляді:

$$dA = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2}.$$

Роботу, яку виконує електрична сила при переміщенні заряду з точки 1, положення якої задає радіус-вектор r_1, до точки 2, положення якої задає радіус-вектор r_2, знайдемо шляхом інтегрування:

$$A = \int_1^2 dA = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$$

Звідси знаходимо:

$$A = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-1}{r} \right) \Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Як бачимо з останнього виразу, робота поля не залежить від форми траєкторії і визначається тільки відстанями між зарядами в кінцевому та початковому їх положеннях. Це означає, що електричне поле є потенціальним, і взаємодію зарядів можна охарактеризувати потенціальною енергією.

Робота потенціального силового поля дорівнює різниці значень потенціальної енергії, взятій з від'ємним знаком

$A = -(W_2 - W_1)$, де W_2, W_1 –

потенціальна енергія для кінцевого та для початкового положень зарядів.

Отже, потенціальна енергія взаємодії двох точкових зарядів визначаються за

формулою:

$$W(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{r},$$

де r – відстань між точковими зарядами q та q'. З цієї формули випливає, що потенціальна енергія однойменних зарядів, які взаємодіють силами відштовхування, додатна і набуває найменшого значення, коли відстань між зарядами $r \to \infty$. Навпаки, для різнойменних зарядів, які притягуються, потенціальна енергія від'ємна, і вона набуває найменшого значення при $r \to 0$, прямуючи до $W(r \to 0) \to -\infty$.

2.2.2 Потенціальна енергія

Потенціальна енергія заряду в електричному полі дорівнює добутку заряду на значення потенціалу в точці, в якій знаходиться заряд:

$$W = q\varphi.$$

Звідси маємо, що потенціал електричного поля можна визначити як відношення енергії заряду в полі до величини заряду:

$$\varphi = \frac{W}{q}.$$

Потенціальна енергія двох точкових зарядів визначається за формулою

$$W(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}},$$

де q_1, q_2 – заряди, відстань між якими r_{12}. Потенціальна енергія взаємодії двох точкових зарядів пропорційна добутку їх зарядів.

З формули потенціальної енергії взаємодії для двох зарядів випливає, що потенціал точкового заряду визначається за формулою

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},$$

де r – відстань від заряду q до точки простору, в якій створене ним поле має потенціал $\varphi(r)$. Потенціал поля точкового заряду обернено пропорційний відстані до нього.

2.2.3 Еквіпотенціальні поверхні

Для геометричного представлення розподілу електричного поля використовують еквіпотенціальні поверхні. Їх ще називають ізоповерхнями потенціалу.

Еквіпотенціальними поверхнями називають поверхні в просторі, точки яких мають однакове значення потенціалу, тобто

$$\varphi(\vec{r}) = const,$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точок еквіпотенціальної поверхні.

В координатному вигляді еквіпотенціальну поверхню задають рівнянням

$$\varphi(x, y, z) = const$$