Змістовий модуль 2. Застосування перетворення Лапласа до розв'язання лінійних диференціальних рівнянь та систем

Застосування до диференціального рівняння перетворення Лапласа приводить до алгебраїчного рівняння відносно зображення. З отриманого рівняння можна знайти зображення шуканого оригіналу, а далі за зображенням можна відтворити оригінал.

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку з сталими коефіцієнтами відносно невідомої функції $x(t)$, що задовольняє вимогам оригіналу:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t). \tag{3.1}$$

Будемо шукати розв'язок цього рівняння, що задовольняє початкові умови:

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x'_0, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \tag{3.2}$$

Нехай $x(t) \div X(p)$, $f(t) \div F(p)$. Застосовуючи до обох частин рівняння (3.1) перетворення Лапласа і використовуючи теорему лінійності та теорему про диференціювання оригіналу, від диференціального рівняння (3.1) з початковими умовами (3.2) переходимо до алгебраїчного рівняння виду

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) X(p) + Q(p) = F(p),$$

де $Q(p)$ – деякий многочлен, коефіцієнти якого визначаються початковими умовами (3.2).

Розв'язавши отримане рівняння відносно зображення $X(p)$, отримуємо:

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Знайшовши оригінал $x(t)$ для $X(p)$, ми одержимо шуканий розв'язок диференціального рівняння (3.1) з початковими умовами (3.2), тобто розв'язок задачі Коші.

Аналогічно розв'язують і системи лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами. Різниця полягає лише у тому, що замість одного алгебраїчного рівняння отримуємо систему кількох рівнянь відносно зображень.

Приклад 3.1. Розв'язати задачу Коші: $x'(t) + x(t) = e^{-t}$, $x(0) = 1$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу $x'(t) \div pX(p) - 1$. Застосувавши перетворення Лапласа до заданої задачі Коші, отримуємо: $pX(p) - 1 + X(p) = \dfrac{1}{p+1}$. Розв'язавши це алгебраїчне рівняння відносно $X(p)$ маємо: $X(p) = \dfrac{1}{(p+1)^2} + \dfrac{1}{p+1}$.

Оскільки $\frac{1}{(p+1)^2} \div te^{-t}$, $\frac{1}{p+1} \div e^{-t}$, то шуканий розв'язок $x(t)$ має вигляд:

$$x(t) = (t+1)e^{-t}.$$

Приклад 3.2. Розв'язати задачу Коші:

$$x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t,\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$$

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$, тоді, з врахуванням початкових умов, $x''(t) \div p^2 X(p)$, $x^{(4)}(t) \div p^4 X(p)$. Оскільки $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$, то зображенням заданого диференціального рівняння є алгебраїчне рівняння відносно зображення $X(p)$:

$$p^4 X(p) + 2p^2 X(p) + X(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Звідси знаходимо, що $X(p) = \frac{1}{(p^2+1)^3}$. Знайдемо тепер оригінал, що відповідає даному зображенню. Функція $X(p)$ має два полюси $\pm i$ третього порядку. Тому за формулою (2.4) отримуємо:

$$x(t) = \frac{1}{2!}\lim_{p\to -i}\left(\frac{e^{pt}}{(p-i)^3}\right)'' + \frac{1}{2!}\lim_{p\to -i}\left(\frac{e^{pt}}{(p-i)^3}\right)'' = \frac{3}{8}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{8}t^2 \sin t.$$

Приклад 3.3. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y = e^t, \\ x + y' = e^{-t}, \end{cases}$$

при початкових умовах $x(0) = y(0) = 1$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$, $y(t) \div Y(p)$. Тоді $x'(t) \div pX(p) - 1$, $y'(t) \div pY(p) - 1$. Оскільки $e^t \div \frac{1}{p-1}$, $e^{-t} \div \frac{1}{p+1}$, то внаслідок застосування до заданої системи диференціальних рівнянь перетворення Лапласа отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно зображень розв'язків $X(p)$ та $Y(p)$:

$$\begin{cases} pX - 1 + Y = \frac{1}{p-1}, \\ pY - 1 + X = \frac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо:

$$X(p) = \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p^2-1} + \frac{p^2+1}{(p^2-1)^2},\ Y(p) = \frac{p}{p^2-1} - \frac{2p}{(p^2-1)^2}.$$

Використовуючи таблицю оригіналів та зображень, знаходимо оригінали для зображень $X(p)$ та $Y(p)$:

$$x(t) = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t + t\operatorname{ch} t,\ y(t) = \operatorname{ch} t - t\operatorname{sh} t.$$

Розглянемо приклад розв’язування диференціальних рівнянь виду (3.1) операційним методом, коли права частина рівняння $f(t)$ має точки розриву першого роду, тобто є кусочно неперервною функцією.

Приклад 3.4. Знайти розв’язок диференціального рівняння $x'' + x = f(t)$ при початкових умовах $x(0) = x'(0) = 0$, якщо функція $f(t)$ має вигляд:

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < 1; \\ 1, 1 \le t < 3; \\ 0, t \ge 3. \end{cases}$$

Розв’язання. Праву частину $f(t)$ запишемо у вигляді: $f(t) = \eta(t-1) - \eta(t-3)$, де $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда. Застосуємо до заданого диференціального рівняння перетворення Лапласа. Зображення $f(t)$ згідно з теоремою запізнення, має вигляд: $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p} - \dfrac{e^{-3p}}{p} = \dfrac{e^{-p}\left(1 - e^{-2p}\right)}{p}$

Нехай $x(t) \div X(p)$. Тоді зображення диференціального рівняння з врахуванням початкових умов має вигляд:

$$p^2 X(p) + X(p) = \frac{e^{-p}\left(1 - e^{-2p}\right)}{p}.$$

Звідси знаходимо зображення $X(p)$: $X(p) = \dfrac{e^{-p} - e^{-3p}}{p\left(p^2 + 1\right)}$. Для знаходження оригіналу $x(t)$ використаємо теорему запізнення. Знайдемо спочатку оригінал для функції $\dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)}$. Маємо:

$$\frac{1}{p\left(p^2+1\right)} = \frac{p^2 + 1 - p^2}{p\left(p^2+1\right)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \div 1 - \cos t.$$

Тоді за теоремою запізнення отримуємо:

$$e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right) \div (1 - \cos t)\cdot\eta(t-1),\ e^{-3p}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right) \div (1 - \cos t)\cdot\eta(t-3).$$

Таким чином, розв’язок даного диференціального рівняння має вигляд:

$$x(t) = (1 - \cos t)\cdot\eta(t-1) - (1 - \cos t)\cdot\eta(t-3).$$

Цей розв’язок можна записати у вигляді:

$$x(t) = \begin{cases} 0, t < 1; \\ 1 - \cos(t-1), 1 \le t < 3; \\ -\cos(t-1) + \cos(t-3), t \ge 3. \end{cases}$$

3.2 Розв'язування диференціальних рівнянь за допомогою формули Дюамеля

Лінійне диференціальне рівняння з сталими коефіцієнтами (3.1) можна записати у вигляді: $L(x) = f(t)$, де символ $L(x)$ означає *лінійний диференціальний оператор* n*-го порядку*: $L(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x$. З означення лінійного диференціального оператора випливає, що $L(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 L(x_1) + c_2 L(x_2)$, де $x_1(t)$ та $x_2(t)$ – довільні n разів диференційовні функції, c_1 та c_2 – довільні константи.

Теорема 3.1. Якщо $x_1(t)$ є розв'язком диференціального рівняння $L(x) = 1$ при нульових початкових умовах, то розв'язком рівняння $L(x) = f(t)$ при таких же початкових умовах є функція

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau) x_1'(t-\tau)\, d\tau. \qquad (3.3)$$

Доведення. Застосувавши перетворення Лапласа при нульових початкових умовах до рівняння $L(x) = 1$, отримаємо алгебраїчне рівняння $\tilde{L}(p) X_1(p) = \dfrac{1}{p}$, де $\tilde{L}(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$, $X_1(p) \div x_1(t)$. Звідси знаходимо: $\tilde{L}(p) = \dfrac{1}{p X_1(p)}$.

Зображенням рівняння $L(x) = f(t)$ при нульових початкових умовах є рівняння $\tilde{L}(p) X(p) = F(p)$, де $X(p) \div x(t)$, $F(p) \div f(t)$. Для зображення $X(p)$ отримуємо $X(p) = \dfrac{F(p)}{\tilde{L}(p)} = p X_1(p) F(p)$. Тоді за формулою Дюамеля (3.3) отримаємо:

$$x(t) = x_1(0) f(t) + \int_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau,$$

оскільки $x_1(0) = 0$. Другий вираз у правій частині рівності (3.3) випливає з комутативності згортки. Теорему доведено.

Дана теорема дозволяє знаходити розв'язок диференціального рівняння (3.1) без використання зображення правої частини цього рівняння. Знаючи розв'язок для одиничної правої частини рівняння, ми за допомогою інтегрування знаходимо розв'язок для довільної правої частини. Вимога нульових початкових умов є несуттєвою: заміною шуканої функції задачу з ненульовими початковими умовами можна звести до задачі з нульовими умовами.

Приклад 3.5. Знайти розв'язок диференціального рівняння $x'' - a^2 x = b e^{-t^2}$ при початкових умовах $x(0) = x'(0) = 0$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо розв'язок допоміжного рівняння $x_1'' - a^2 x_1 = 1$ при нульових початкових умовах, а потім застосуємо формулу (3.3). Зображенням останнього рівняння є алгебраїчне рівняння $\left(p^2 - a^2\right) X_1(p) = \frac{1}{p}$, звідки $X_1(p) = \frac{1}{p\left(p^2 - a^2\right)}$. Знайдемо оригінал $x_1(t)$ за допомогою таблиці оригіналів та зображень, а також теореми інтегрування оригіналу: $\frac{1}{p^2 - a^2} \div \frac{1}{a} \operatorname{sh} at$, $\frac{1}{p\left(p^2 - a^2\right)} \div \frac{1}{a}\int_0^t \operatorname{sh} a\tau d\tau = \frac{\operatorname{ch} at - 1}{a^2} = x_1(t)$.

Оскільки $x_1'(t) = \frac{\operatorname{sh} at}{a}$, то за формулою (3.3) отримуємо розв'язок заданої задачі Коші у вигляді згортки:

$$x(t) = \frac{b}{a}\int_0^t e^{-\tau^2} \operatorname{sh} a(t - \tau) d\tau .$$

Даний інтеграл не виражається скінченним числом елементарних функцій, проте може бути знайдений при довільному фіксованому значенні t наближено, зокрема за допомогою квадратурних формул трапецій або Сімпсона.