Лекція 3.

Апроксимація катастрофи збірки в околі трикратного режиму

Поверхня стаціонарних станів в околиці кратної особливої точки (особливості) представляється узагальненою зборкою Уитни, простою її реалізацією для випадку симетричного рішення є поверхня зборки (на початку координат виникає триразовий стаціонарний режим).

У основі підходу лежить геометрична інтерпретація умов стійкості в критичному випадку одного нульового кореня. Зупинимося детально на випадку системи з двома фазовими змінними, до якого зводиться завдання у разі довільного числа змінних [5, 7].

Розглянемо систему двох диференціальних рівнянь на площині

$$dx/dt = f(x, v, \theta),$$

де □, причому □ при усіх □ Якщо □ - досить гладка функція по змінних стану □, праві частини системи можуть бути розкладені в ряди Тейлора в околиці початку координат

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 + a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 + \dots\ ; \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 + b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 + \dots\ . \end{aligned} \tag{1.11}$$

При зміні параметра v (подовжній швидкості руху) нульове рішення, якому відповідає прямолінійний рух системи, втрачає стійкість - одне власне значення системи лінійного наближення проходить через нуль. Стаціонарним режимам системи (особливим точкам) відповідають точки перетину двох кривих, які визначаються правими частинами системи (1.11) fi(x1, x2) = 0. Критичному значенню параметра v=v+ відповідає нульовий корінь матриці лінійного наближення, отже, при критичному значенні параметра ці криві мають співпадаючі кути нахилу на початку координат (визначник матриці лінійних членів звертається в нуль). Дійсно, дозволимо кожне з рівнянь fi(x1, x2)=0 (i=1,2) в околиці початку координат відносно, наприклад, змінній x2

$$\begin{aligned} x_2 &= F_1(x_1) = F_1^{(1)}(0)x_1 + \frac{1}{3!}F_1^{(3)}(0)x_1^3 + \dots \\ x_2 &= F_2(x_1) = F_2^{1}(0)x_1 + \frac{1}{3!}F_2^{(3)}(0)x_1^3 + \dots \quad . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Кутові коефіцієнти цих кривих на початку координат задаються співвідношеннями

$$\gamma_1 = F_1^{(1)}(0) = -\frac{a}{b}, \ \gamma_2 = F_2^{(1)}(0) = -\frac{c}{d}.$$

Відносне положення кривих (1.12) при критичному значенні параметра визначають коефіцієнти при нелінійних членах ряду ($ad - bc = 0 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$)

$$\begin{aligned} F_1^{(3)}(0) &= \frac{6}{b^4}(-a_{30}b^3 + 3a_{21}ab^2 - 3a_{12}a^2b + a_{03}a^3), \\ F_2^{(3)}(0) &= \frac{6}{d^4}(-b_{30}d^3 + 3b_{21}cd^2 - 3b_{12}c^2d + b_{03}c^3). \end{aligned}$$

Збереження порядку дотримання кривих в докритичному і критичному положеннях відповідає безпечній втраті стійкості нульового рішення, порушення порядку дотримання кривих - небезпечній втраті стійкості :

$$g^{*} = (\gamma_1 - \gamma_2)^{(-)}[F_1^{(3)}(0) - F_2^{(3)}(0)] > 0. \qquad (1.13)$$

Дивергентна втрата стійкості стаціонарного стану пов'язана з реалізацією кратного стаціонарного режиму : в простому випадку зміни стійкості симетричного рішення реалізується триразовий режим. З початку координат або народжується пара стійких стаціонарних станів, що можливо при збереженні порядку дотримання кривих (1.12), або в початок координат приходить пара нестійких стаціонарних станів і зливається із стійким стаціонарним станом - цей випадок реалізується при порушенні порядку дотримання кривих (1.12).

У системі рівнянь, що визначає стаціонарні стани, залишимо члени не вищі за третій порядок крихти

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 = 0, \\ cx_1 + dx_2 + b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 = 0. \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Перейдемо від системи (1.14) до одного визначального рівняння, утримуючи лише члени до третього порядку крихти. З першого рівняння системи (1.14) маємо

$$x_1 = -a/bx_2 + (-a_{30}b^3 + a_{03}a^3 - a_{12}a^2b + a_{21}ab^2)/b^4x_2^3 + ...,$$

підставляючи це рішення в друге рівняння (1.14), отримуємо "укорочене" визначальне рівняння

$$\gamma x^3 + \beta x + \alpha = 0, \tag{1.15}$$

де $\beta = \beta(v)$; функція $\alpha(\theta)$ характеризує асиметрію системи при □ Проекція критичної великої кількості на площину параметрів (□) задає біфуркаційну множину (напівкубічну параболу). У кожній точці критичної великої кількості (у кратних точках поверхні рівноваги) якобиан системи (1.3.1) перетворюється на нуль.

Значення коефіцієнтів рівняння (1.15) при критичному значенні параметра v=v^+ , $\theta = 0$; $(d = cb/a)$

$$\beta^+ = 0,$$
$$\gamma^+ = \frac{b^3(ab_{30} - ca_{30}) + ab^2(ca_{21} - ab_{21}) + a^2b(ab_{12} - ca_{21}) + a^3(ca_{03} - ab_{03})}{ab^3}.$$

З точністю до постійного множника коефіцієнт Ляпунова □, що визначає стійкість нульового рішення системи (1.11) в критичному випадку одного нульового кореня, співпадає з коефіцієнтом γ^{+}.