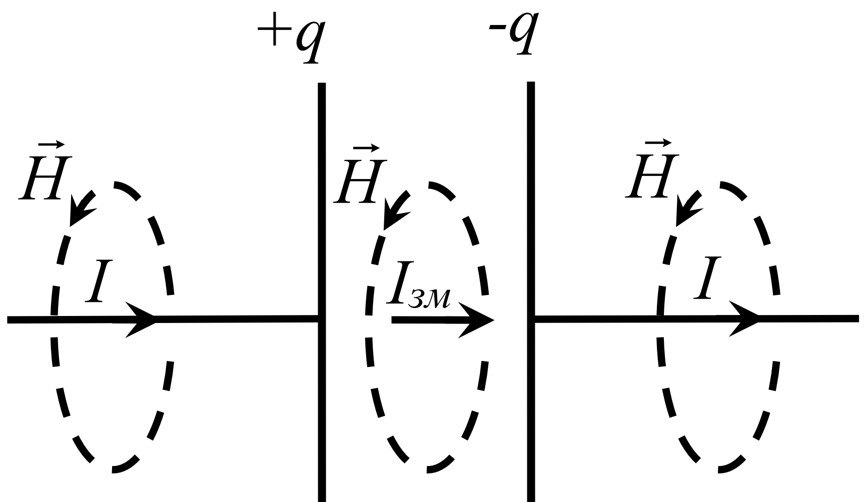
В.М. Калита, О.В. Дімарова,

С.О. Решетняк

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Модульне навчання



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО″

В.М. Калита, О.В. Дімарова, С.О. Решетняк

Загальна фізика

Електродинаміка

Модульне навчання

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за галузями знань 12 «Інформаційні технології», 15 «Автоматизація та приладобудування», 17 «Електроніка та телекомунікації»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Рецензент Котовський В.Й., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики та фізики твердого тіла, КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний
редактор Лінчевський І.В., доктор фіз.-мат. наук, професор

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 13.05.2021 р.) за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол № 3 від 29.03.2021 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Калита Віктор Михайлович, доктор фіз.-мат. наук, професор
Дімарова Олена Володимирівна
Решетняк Сергій Олександрович, доктор фіз.-мат. наук, професор

Загальна фізика. Електродинаміка

Модульне навчання

Загальна фізика. Електродинаміка. Модульне навчання [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. за галузями знань 12 «Інформаційні технології», 15 «Автоматизація та приладобудування», 17 «Електроніка та телекомунікації»/ В.М. Калита, О.В. Дімарова, С.О. Решетняк; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,62 Мб). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 144 с.

Наведено основні закони електродинаміки, формулювання яких здійснено з використанням математичного апарату лінійної алгебри, аналітичної геометрії, диференціального і інтегрального числення. Навчальний посібник містить такі розділи, як електростатика, електричний струм, магнетизм, індукційні явища та теорія Максвела електромагнітного поля. Представлення матеріалу відповідає сучасному рівню університетського курсу загальної фізики для інженерних спеціальностей та спеціальностей з інформаційних технологій. Зміст посібника відповідає діючим на сьогоднішній день навчальним програмам технічних університетів.

Посібник адаптовано до вимог Болонського процесу з можливістю використання в технологіях модульного навчання.

Для студентів бакалаврського та магістерського рівнів інженерних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів.

ПЕРЕДМОВА

Розділ фізики, в якому вивчають властивості електромагнітного поля та взаємодії між зарядженими тілами, називають *електродинамікою*. Взаємодії між зарядженими тілами є найбільш поширеними в природі, і здійснюються ці взаємодії за допомогою електромагнітного поля. Взаємодії між електронами та ядром в атомах чи іонах мають електричну природу. Вони є основними взаємодіями між атомами в твердих тілах. Наприклад, сила пружності, сила тертя спокою або ковзання також мають електричне походження.

Електромагнітні явища лежать в основі електротехніки, теорії електричних кіл, та інших наукових дисциплін, які спрямовані на створення нових машин, пристроїв та приладів.

Електромагнітні явища є наслідком властивості тіл та елементарних частинок набувати електричного заряду. Електромагнітна взаємодія між зарядженими тілами проявляється у два способи: взаємодією між нерухомими зарядженими тілами і взаємодією між рухомими зарядами. З точки зору теорії відносності не мало б бути різниці між цими двома випадками, але це лише тоді, коли інтенсивність взаємодій не залежить від швидкості. Ще з курсу шкільної фізики відомо, що нерухомі заряди діють один на одний завдяки електричному полю, а рухомі заряди, наприклад струми, взаємодіють завдяки магнітному полю. Ці поля взаємозв'язані внаслідок релятивізму. Взаємозв'язок між магнітним полем та електричним полем вперше був установлений видатним вченим Максвеллом, якого вважають автором класичної електродинаміки. В посібнику викладені всі основні закони класичної електродинаміки.

При вивченні електродинаміки студенти також отримають додаткові, практично спрямовані навички використання сучасного математичного апарату, а також усвідомлять можливості математики для опису фізичних явищ. Буде використано такі розділи, як векторний аналіз, диференціальне та інтегральне числення. Важливо, що під час вивчення електродинаміки студентам буде проілюстровано роль математичного моделювання фізичних явищ і процесів з точки зору польової теорії, притаманної електромагнетизму. В підсумку, вивчення електродинаміки спрямоване на формування у майбутнього інженера, спеціаліста з ІТ системного мислення та напрацювання навичок системного аналізу явищ та процесів.

В посібнику представлення матеріалу відповідає сучасному рівню університетського курсу загальної фізики для інженерних спеціальностей та спеціальностей з ІТ. Зміст посібника відповідає діючим на сьогоднішній день навчальним програмам технічних університетів.

Посібник адаптовано до вимог Болонського процесу та написано відповідно до вимог сьогодення з огляду на “модульне навчання”. В кінці кожної глави є перелік питань для самоконтролю, наведено список формул, що допоможе студентам успішно вивчити цей розділ фізики та отримати необхідну кількість балів рейтингового оцінювання.

Автори

Глава 1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

Електростатика вивчає взаємодії і властивості нерухомих електричних зарядів. В цій главі будуть розглядатися заряди в системі відліку, в якій вони нерухомі.

1.1. Електричний заряд

Перші досліди спостереження явищ електрики були проведені ще древніми греками. Це пов'язано з тим, що *електризація тіл*, тобто надання їм заряду, не потребує спеціальних умов. Наприклад, при терті тканиною по ебонітовій паличці, вона набуде заряду.

Якщо взяти дві однаково натерті ебонітові палички, то, навіть тримаючи їх в руках, можна відчути, що вони відштовхуються. Коли замість ебонітових взяти скляні палички, то вони також після натирання будуть відштовхуватися. Ситуація зміниться, якщо взяти дві різні палички – ебонітову і скляну. Вони після натирання будуть притягуватися.

Такий дослід демонструє існування двох типів зарядів – *позитивні* (додатні, з $q>0$) та *негативні* (від'ємні, з $q<0$) заряди. Терміни позитивний заряд (positive charge) і негативний заряд (negative charge) були введені Б.Франкліном і означають наявність у заряду знаку. Знак заряду відображає описану вище властивість, притаманну зарядженим тілам: заряди однакового знаку відштовхуються, а заряди протилежних знаків притягуються. Дві однакові палички при їх терті однаковою тканиною набувають однойменних зарядів, або додатних, або від'ємних, а дві різні палички при терті тканиною набувають різнойменних зарядів, тому і відбувається зміна знаку взаємодії.

Заряджені тіла взаємодіють між собою. Тіла, що мають однакові за знаком заряди, відштовхуються, а різнойменні – притягуються.

Явище *електризації*, яке спостерігається при натиранні палички, відбувається внаслідок процесу переходу заряду при дотику чи при терті від одного тіла до другого. Такий перехід має бути енергетично вигідним. При електризації певній частині електронів – носів заряду – вигідно перейти з одного тіла до іншого.

Заряд є невід'ємною властивістю елементарних частинок. Найменший заряд мають такі частинки: позитивно заряджені протони та негативно заряджені електрони. Модулі зарядів цих частинок однакові. Величина модулю заряду електрону називається *елементарним зарядом,* і він дорівнює e=1,6$\cdot 10^{-19}$ Кл.

Атоми складаються з протонів та електронів. Оскільки ці частинки мають протилежні за знаком заряди, модулі яких однакові, а кількість таких частинок в атомі однакова, то у звичайному стані атом *електронейтральний*. В різних атомах електрони рухаються з різними швидкостями. З електронейтральності атомів випливає, що заряд *не залежить від швидкості* його руху.

Відокремлення від атома електронів чи надання йому додаткових електронів призводить до *електризації атома* і утворення іонів.

Як було сказано вище, електризація пов'язана з передачею заряду від одного тіла до іншого. Зрозуміло, що вона може відбутися тільки при переході певної кількості електронів від одного тіла до іншого тіла. Таким чином, набутий при електризації *заряд кратний величині елементарного заряду* і дорівнює добутку кількості елементарних зарядів N на величину елементарного заряду

$$q = \pm Ne \, .$$

Здійснити електризацію можна іншими шляхом, наприклад, шляхом опромінення електронейтрального тіла ультрафіолетовим чи рентгенівським випромінюванням, яке внаслідок взаємодії з речовиною тіла вириває (вивільнює) з нього електрони. Знову ж таки, набутий тілом заряд буде кратний елементарному і пропорційний кількості вивільнених електронів.

Розподіл заряду в тілі визначається розташуванням в ньому елементарних зарядів, отриманих чи відданих при електризації. В металах, внаслідок вільного руху електронів, набутий заряд делокалізований і розподіляється по поверхні тіла. В ізоляторах вільні заряди не мають можливості рухатися в межах об'єму тіла, тому зарядженими будуть ті частини тіла, з яких вирвано, або яким додатково надано елементарних зарядів.

Вважається, що електрон не має просторової структури, а його заряд зосереджено в точці. Таке уявлення містить протиріччя. Оскільки, в такому підході, енергія електричного поля електрона має прямувати до нескінченності, створюючи нескінчений потенціал в тій точці, де він знаходиться, тому і маса електрона також має бути нескінченою, що протирічить дослідам, бо маса електрона дорівнює $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг. Однак, з цим протиріччям приходиться миритися, бо будь-яких скільки-небудь достовірних уявлень про структуру електрона немає.

На відміну від електрона протон не є точковою частинкою. Експериментально, шляхом зіткнення швидко прискорених електронів з протонами, було отримано структуру просторового розподілу заряду в протонах, $\rho(r)$, де ρ - густина заряду, r - відстань до центру протона. Траєкторія електронів, що пролітають через протон (для цього електрон повинен мати дуже велику кінетичну енергію – приблизно декілька мільярдів електрон-вольт), залежить від розподілу заряду протона. З досліджень траєкторій електронів було отримано графік просторового розподілу заряду в протоні в залежності від відстані до його центру r.

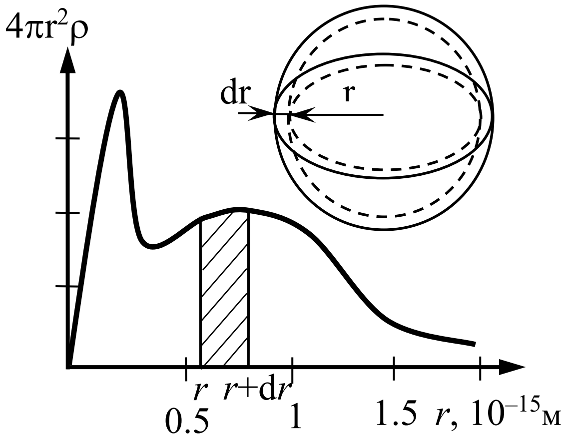


Рис. 1.1

На рис. 1.1 побудовано залежність густини заряду протона $\rho(r)$, помножену на $4\pi r^2$, від відстані до центру. Добуток $4\pi r^2\rho(r)dr$ дорівнює повному заряду сферичного шару товщиною dr, як зображено на рис. 1.1. З кривої, наведеної на рис. 1.1, видно, що майже весь заряд протона зосереджено в кулі з радіусом $r \approx 1.5 \cdot 10^{-15}$ м.

Як видно з рис. 1.1, тонкий сферичний шар товщиною dr має заряд, рівний площі заштрихованої смужки. Величина заряду смужки, тобто ділянки протона, яка не є окремим об'єктом, менша від елементарного заряду. В природі об'єктів з зарядом, меншим елементарного, не виявлено.

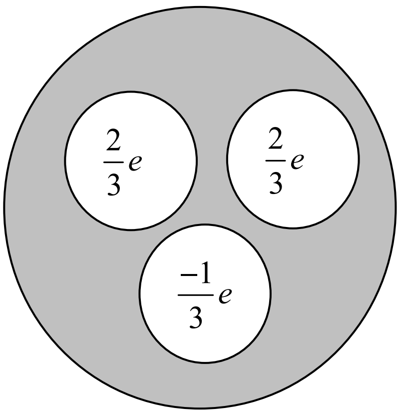


Рис. 1.2

Запропоновано гіпотезу, за якою вважається, що протон складається з двох точкових кварків з додатним зарядом і одного кварку з від'ємним зарядом. Додатний заряд кварку дорівнює $2e/3$, а від'ємний дорівнює $-e/3$ (дивись рис. 1.2). Кварки в протоні рухаються. Їх відносне усереднене розташування відносно центру призводить до формування просторового розподілу заряду, наведеного на рис. 1.1. Незважаючи на зусилля, вільні кварки, які знаходяться поза межами протону, не виявлені, а отже прямих доказів існування кварків нема, тому ще раз зауважимо, що існування кварків – це тільки наукова гіпотеза.

1.2. Закон збереження заряду

Заряди, яких набувають тіла при електризації, пов'язані з переходами електронів від одних тіл до інших. Електрони є стабільними частинками, мають нескінчений час життя, заряди електронів незмінні в часі і дорівнюють елементарному заряду. Протони також мають елементарний заряд і нескінчений час життя. Виходячи з особливостей процесу електризації і властивостей електронів і протонів, маємо, що повний заряд системи тіл залишається незмінним, бо незмінною є кількість електронів та протонів в ній. Це твердження називають *законом збереження електричного заряду*, який формулюють наступним чином: сума зарядів ізольованої системи є величина постійна

$$q_1 + q_2 + q_3 + ...q_n = const,$$

або

$$\sum_i q_i = const,$$

де q_i – величина заряду *i*-го тіла системи.

В законі збереження заряду *ізольованою* вважають систему тіл, які не обмінюється зарядами з іншими тілами, що не входять до складу системи. При цьому заряди тіл системи можуть з часом змінювати своє значення, проте сума її зарядів залишиться незмінною.

Суму всіх зарядів системи називають *повним* зарядом системи:

$$q_n = \sum_i q_i .$$

Повний заряд ізольованої системи не змінюється з часом:

$$q_n = const .$$

Закон збереження заряду має більш широкий зміст, ніж тільки збереження кількості протонів та електронів – носіїв елементарного заряду при електризації тіл. Елементарні частинки можуть випробувати перетворення, які відбуваються під час ядерних реакцій, за яких одні частинки зникають, а інші утворюються. Наприклад, під час реакції бетарозпаду відбувається утворення електронів. Але під час цієї реакції відбувається ще і перетворення ядра, воно набуває ще одного додатного за величиною елементарного заряду. Таким чином, закон збереження електричного заряду виконується і при ядерних реакціях.

Якщо ізольованою системою вважати весь Всесвіт, то, незважаючи на різноманітні процеси, що відбуваються в ньому, в тому числі і такі, як термоядерні реакції на Сонці чи інших зорях, повний заряд Всесвіту є постійною величиною.

1.3. Закон Кулона

Заряджені тіла взаємодіють між собою. Тіла, що мають однакові за знаком заряди, відштовхуються, а тіла з різнойменними зарядами притягуються. Кількісне вивчення взаємодії між зарядами розпочалося тільки після введення міри електричного заряду.

Закономірності взаємодії заряджених тіл було установлено експериментально Кулоном. Він встановив закономірність взаємодії між точковими нерухомими зарядженими тілами. *Точковим* називається заряд, розмірами якого можна знехтувати у порівняні з відстанями до інших тіл..

Сила взаємодії між двома точковими зарядами пропорційна добутку їх зарядів і обернено пропорційна квадрату відстані між ними:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

де q_1, q_2 – точкові заряди відстань між якими r, а ε_0 – електрична стала.

У разі, коли знаки зарядів однойменні, добуток зарядів додатний, а коли вони різнойменні, то добуток від'ємний, що призводить до зміни знаку сили і, відповідно, до зміни її напрямку на протилежний, а отже і до зміни характеру взаємодії: різнойменні заряди притягаються, а однойменні відштовхуються.

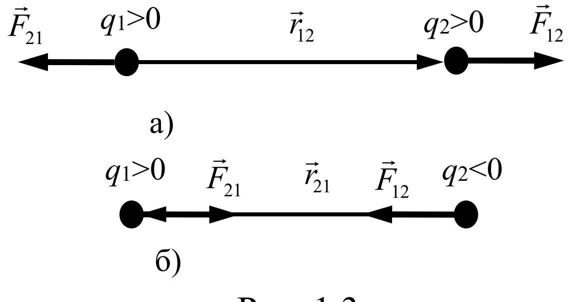


Рис. 1.3

В наведеному вище формулюванні закону Кулона визначена тільки величина сили взаємодії між зарядами. Врахуємо, що сила є векторною величиною і сили взаємодії між тілами виникають попарно.

Розглянемо два заряди q_1 та q_2 (дивись рис. 1.3). Положення другого заряду відносно першого задає радіус-вектор $\vec{r}_{12}$. Сила, з якою перший заряд діє на другий, визначається за формулою

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_{12}\right|^2}\frac{\vec{r}_{12}}{\left|\vec{r}_{12}\right|}.$$

Положення першого заряду відносно другого задає радіус-вектор $\vec{r}_{21}$. Сила, з якою другий заряд діє на перший, визначається за формулою

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_{21}\right|^2}\frac{\vec{r}_{21}}{\left|\vec{r}_{21}\right|}.$$

На рис. 1.3 показано напрямки векторів $\vec{r}_{12}$, $\vec{r}_{12}$ та $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$ для двох випадків взаємодії однойменних та різнойменних зарядів. Коли $q_1 q_2 > 0$, то $\vec{F}_{12} \uparrow\uparrow \vec{r}_{12}$, і навпаки, коли $q_1 q_2 < 0$, то $\vec{F}_{12} \uparrow\downarrow \vec{r}_{12}$. Оскільки $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$, то для сил взаємодії між зарядами виконується рівність

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_{21}\right|^2}\frac{\vec{r}_{21}}{\left|\vec{r}_{21}\right|} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_{12}\right|^2}\frac{\vec{r}_{12}}{\left|\vec{r}_{12}\right|} = -\vec{F}_{12}.$$

З рівності $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ випливає, що два нерухомі точкові заряди взаємодіють між собою з силами, рівними за величиною і протилежними за напрямком.

Закон Кулона виконується в межах відстаней від 10^{-17} м до 10^{7} м. Для малих відстаней закон Кулона підтверджено в експериментах взаємодій між елементарними частинками. В наведених вище дослідах визначення просторового розподілу заряду в протонах (дивись рис. 1.1) шляхом дослідження траєкторій електронів після їх розсіювання на протонах було підтверджено справедливість закону Кулона до відстаней, менших 10^{-15} м.

У випадку великих відстаней проведення прямих дослідів спостережень кулонівської взаємодії ускладнене. Неможливо створити умови для спостереження взаємодії між зарядженими тілами, які були б розташовані одне від одного на великій відстані та ще й у вакуумі. В звичайних умовах між тілами знаходиться оточуюче середовище, наприклад, навіть в міжпланетному просторі Сонячної системи є плазма, яка поширюється від Сонця, і яку називають «сонячний вітер».

Прийнято вважати, що електромагнітна взаємодія здійснюється завдяки фотонам – елементарним квантам (найменшим «порціям») електромагнітного випромінювання. У фотонів маса спокою дорівнює нулю, а сила взаємодії, яка виникає завдяки передачі фотонів, обернено пропорційна квадрату відстані. Тому експериментальне виявлення електромагнітних хвиль з найбільшою, яка тільки можлива, довжиною хвиль (найменшою частотою і, відповідно, енергією) повинне підтверджувати, що маса фотону дорівнює нулю, і воно також має підтвердити виконання закону Кулона для відстаней, порівняних з великою довжиною хвилі таких фотонів.

Довгохвильові електромагнітні хвилі, які впевнено спостерігаються сучасними експериментальними методами, – це так звані резонанси Шумана, що утворюються у вигляді стоячих хвиль між поверхнею Землі та іоносферою. Найменша резонансна частота цих хвиль ν=8 Гц, якій відповідає маса фотона, менша 10^{-48} кг. Спостереження за довгохвильовими збуреннями вказують на справедливість виконання закону Кулона навіть для відстаней порядку 10^7 м.

1.4. Напруженість електричного поля

За законом Кулона, величина силової дії між зарядженими тілами визначається добутком їх зарядів. Безпосередня силова дія одного заряду на інший не можлива, бо швидкість передачі взаємодії обмежена швидкістю світла у вакуумі. Силова дія між зарядами має польову природу і здійснюється завдяки електричному полю.

Взаємодію між точковими зарядами q_1 та q_2 можна пояснити наступним чином. Заряд q_1 створює в оточуючому просторі електричне поле. Це електричне поле чинить силову дію на заряд q_2. Заряд q_2 також створює в оточуючому просторі своє електричне поле, що чинить силову дію на заряд q_1.

Для опису електричного поля вводять фізичну величину, яка називається *напруженістю* електричного поля, і яка є його силовою характеристикою.

1.4.1. Означення напруженості електричного поля

Напруженість електричного поля визначають завдяки силовій дії, яку воно чинить на розміщений в полі заряд. Такий заряд має бути точковим і не повинен спотворювати досліджуваного електричного поля. Заряди, які задовольняють таким умовам називаються *пробними*.

При розміщенні точкового заряду в довільній точці простору зі сторони поля на нього буде діяти сила. Чим більша величина пробного заряду, тим більша сила. Напруженість електричного поля дорівнює відношенню сили, з якою воно діє на пробний заряд, до величини пробного заряду

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}},$$

де $\vec{E}$ – вектор напруженості електричного поля, $\vec{F}$ – сила, з якою поле діє на пробний заряд $q_{пр}$. Як правило, пробний заряд беруть додатним $q_{пр} > 0$. В цьому випадку $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{F}$.

Напруженість електричного поля є локальною характеристикою і має свою величину в кожній точці простору. При зміні положення пробного заряду змінюється значення сили, з якою поле діє на пробний заряд, а отже в кожній точці простору буде свій вектор напруженості електричного поля.

В такий спосіб можна визначити напруженість електричного поля в усіх точках простору, тобто знайти залежність $\vec{E}(\vec{r})$. Якщо поле однорідне, то $\vec{E}(\vec{r}) = const$.

З наведеного означення електричного поля випливає, що на точковий заряд *q*, розташований в точці простору з вектором напруженості $\vec{E}$, діє сила, величина якої визначається добутком

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Сила, з якою електричне поле діє на точковий заряд, дорівнює добутку напруженості електричного поля на величину заряду.

Визначена в такий спосіб сила є локальною: сила $\vec{F}$, як і напруженість $\vec{E}$, задані в точці, де розташований точковий заряд *q*. Напруженість $\vec{E}$, що діє на заряд *q*, утворена зарядами-джерелами поля, які розташовані в інших точках простору. Внесення заряду *q*, внаслідок явища поляризації, може спотворити просторовий розподіл зарядів-джерел поля, тому величина напруженості $\vec{E}$ в точці розташування заряду *q* може відрізнятися від величини напруженості електричного поля в цій точці до розміщення в ній заряду. В записаній вище формулі для сили, що діє на заряд, фігурує напруженість електричного поля, яка є в точці розташування заряду після його розміщення в цій точці.

1.4.2. Напруженість електричного поля точкового заряду

Розглянемо точковий заряд q. Визначимо величину напруженості електричного поля, утвореного цим зарядом в оточуючому його просторі. Розташуємо пробний заряд $q_{пр}$ в точці, яка знаходиться на відстані r від точкового заряду q (дивись рис. 1.4). Положення пробного заряду визначає радіус-вектор $\vec{r}$, $r = |\vec{r}|$. За законом Кулона, на пробний заряд діє сила

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q_{пр}}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Згідно з означенням, величина напруженості електричного поля, створеного зарядом q в точці $\vec{r}$, дорівнює

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Введемо одиничний вектор

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Тепер вираз для вектора напруженості електричного поля точкового заряду можна записати у вигляді

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\vec{e}_r}{r^2}.$$

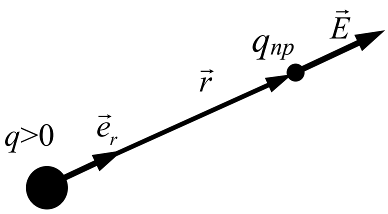


Рис. 1.4

Коли $q>0$, то вектор напруженості електричного поля направлений від заряду $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{r}$, а коли $q<0$, то вектор напруженості електричного поля направлений до заряду і протилежно направлений до радіус-вектора, $\vec{E} \uparrow\downarrow \vec{r}$.

Модуль вектора напруженості електричного поля дорівнює

$$E = |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q|}{r^2}.$$

Величина вектора напруженості електричного поля точкового заряду в довільній точці простору обернено пропорційна квадрату відстані від точки до заряду.

1.4.3. Принцип суперпозиції для електричного поля

Для електричних полів, утворених системою зарядів, виконується принцип *суперпозиції*. За принципом суперпозиції, в довільній точці простору напруженість електричного поля системи зарядів дорівнює сумі векторів напруженості полів, утворених в цій точці кожним зарядом окремо:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_N , \quad \text{або} \quad \vec{E} = \sum_j^N \vec{E}_j ,$$

де $\vec{E}$ – вектор напруженості електричного поля системи зарядів $q_1,\ q_2,...q_N$, N – кількість зарядів, $\vec{E}_1,\ \vec{E}_2,...\vec{E}_N$ – напруженості електричних полів, утворених кожним з зарядів системи.

Розглянемо два точкові заряди q_1 та q_2. Напруженість електричного поля в довільній точці простору навколо зарядів визначається сумою полів (рис. 1.5), утворених в цій точці кожним з цих зарядів:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 .$$

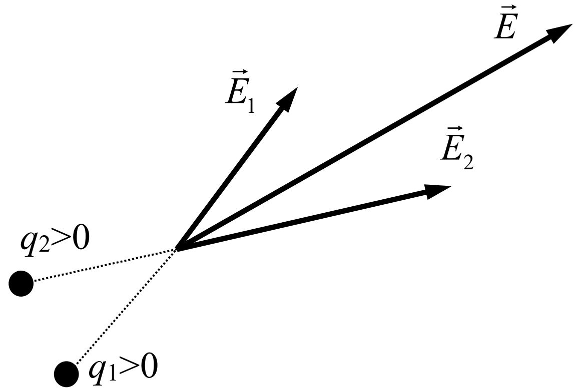


Рис. 1.5

Розмістимо в цьому полі точковий заряд q (інший, третій заряд). Сила, з якою сумарне електричне поле, створене обома зарядами, діє на третій заряд q, дорівнює

$$\vec{F} = q\vec{E} .$$

Використовуючи принцип суперпозиції, отримаємо

$$\vec{F} = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 .$$

Далі врахуємо, що добутки заряду на вектори напруженості полів, утворених зарядами q_1 та q_2, дорівнюють векторам сил, з якими кожен з цих зарядів діє на заряд q:

$$\vec{F}_1 = q\vec{E}_1, \qquad \vec{F}_2 = q\vec{E}_2 .$$

Таким чином, маємо, що сила, з якою сумарне поле зарядів q_1 та q_2 діє на заряд q, дорівнює сумі сил, з якими кожен заряд окремо діє на цей заряд:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

Отже, принцип суперпозиції для електричного поля означає незалежність дії сил. Незалежність дії сил може бути перевірена експериментально.

В експериментах було встановлено, що принцип суперпозиції виконується до дуже великих значень напруженостей електричних полів. Він виконується для електричних полів в атомах, де напруженість має величину порядку 10^{11}–10^{17} В/м. Напруженість електричних полів на поверхні важких ядер ще більша – порядку 10^{22} В/м. Незважаючи на таке величезне значення, експерименти показують, що принцип суперпозиції виконується з великою точністю, але в таких сильних полях можливі ефекти утворення електрон-позитронних пар, через що можливе відхилення від принципу суперпозиції.

1.4.4. Поле системи точкових зарядів

Розглянемо систему точкових зарядів $q_1, q_2, \ldots\ q_j,\ \ldots q_N$, де N - кількість зарядів, а q_j – величина заряду j-го тіла системи. Позначимо О точку відліку (дивись рис. 1.6). Положення зарядів відносно точки О визначають радіус-вектори $\vec{r}_j$.

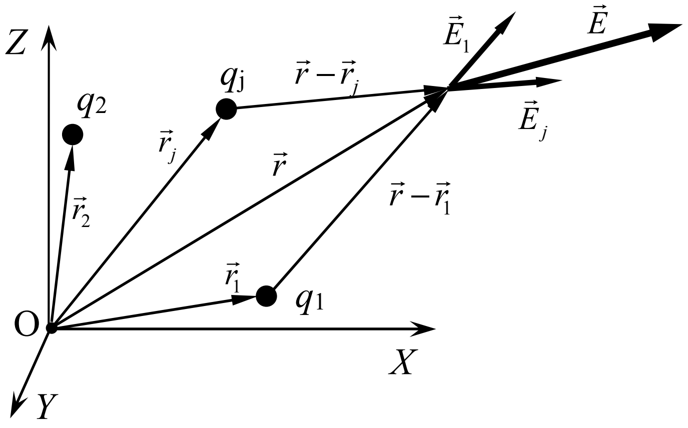


Рис. 1.6

Знайдемо напруженість електричного поля $\vec{E}$ в довільній точці простору, положення якої задає радіус-вектор $\vec{r}$. Положення цієї точки відносно зарядів характеризують вектори $\vec{r} - \vec{r}_j$.

Кожен з зарядів q_j в точці, положення якої задає вектор $\vec{r}$, створює електричне поле, величина якого визначається формулою:

$$\vec{E}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(\vec{r} - \vec{r}_j)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_j\right|^3}.$$

Для розрахунку електричного поля $\vec{E}$ системи зарядів застосуємо принцип суперпозиції:

$$\vec{E}=\sum_{j=1}^{N}\vec{E}_j=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j(\vec{r}-\vec{r}_j)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_j\right|^3}.$$

Знайдемо компоненти вектора напруженості поля $\vec{E}=E_X\vec{i}+E_Y\vec{j}+E_Z\vec{k}$, де $E_X, E_Y,\ E_Z$ – проекції вектора на осі *X*, *Y* *Z*, а $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори уздовж цих осей. Вектори $\vec{r}-\vec{r}_j$ запишемо за допомогою координат зарядів:

$$\vec{r}-\vec{r}_j=(x-x_j)\vec{i}+(y-y_j)\vec{j}+(z-z_j)\vec{k}.$$

Модулі цих векторів дорівнюють

$$\left|\vec{r}-\vec{r}_j\right|=\left((x-x_j)^2+(y-y_j)^2+(z-z_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

З використанням цих співвідношень можна отримати вирази для проекцій вектора напруженості електричного поля системи зарядів:

$$E_X=\sum_{j=1}^{N}E_{jX}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j(x-x_j)}{\left((x-x_j)^2+(y-y_j)^2+(z-z_j)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$E_Y=\sum_{j=1}^{N}E_{jY}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j(y-y_j)}{\left((x-x_j)^2+(y-y_j)^2+(z-z_j)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$E_Z=\sum_{j=1}^{N}E_{jZ}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j(z-z_j)}{\left((x-x_j)^2+(y-y_j)^2+(z-z_j)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Після знаходження проекцій вектора напруженості електричного поля можна знайти його модуль $E=\left|\vec{E}\right|=\sqrt{E_X^2+E_Y^2+E_Z^2}$, а також його орієнтацію відносно координатних осей, наприклад, розрахувавши косинус кута α між віссю *X* та $\vec{E}$, який дорівнює $\cos\alpha=E_X/E$.

1.4.5 Напруженість електричного поля неперервно розподілених зарядів

В цьому пункті буде показано спосіб розрахунку напруженості електричного поля довільного макроскопічного неточкового заряду.

і) Для характеристики розподілу неперервно розподіленого у просторі заряду використовують поняття об’ємної густини електричного заряду. Розглянемо довільне заряджене тіло. Виділимо в ньому маленьку ділянку, об’єм якої ΔV, а її заряд Δq. Об’ємна густина електричного заряду визначається з відношення

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}.$$

За умови, що $\Delta V \to 0$, маємо $\rho = \dfrac{dq}{dV}$.

В системі СІ одиницею об’ємною густини заряду є $[\rho]$=Кл/м^3.

Об’ємна густина є локальною характеристикою просторового розподілу заряду $\rho = \rho(\vec{r}\,')$, де радіус-вектор $\vec{r}\,'$ (зі штрихом) визначає положення точок тіла відносно точки відліку О.

Коли $\Delta V \to 0$, то об’єм ділянки стає елементарним dV, і її заряд dq може бути записаний у вигляді

$$dq = \rho(\vec{r}\,')dV.$$

Заряд тіла можна знайти шляхом інтегрування об’ємної густини заряду по об’єму

$$q = \int_V dq = \int_V \rho(\vec{r}\,')dV.$$

Коли $\Delta V \to 0$, то ділянка тіла є точковою. Її заряд утворює в оточуючому просторі електричне поле. В довільній точці простору, положення якої задає вектор $\vec{r}$ (див. рис. 1.7), вектор напруженості електричного поля ділянки ΔV визначається формулою

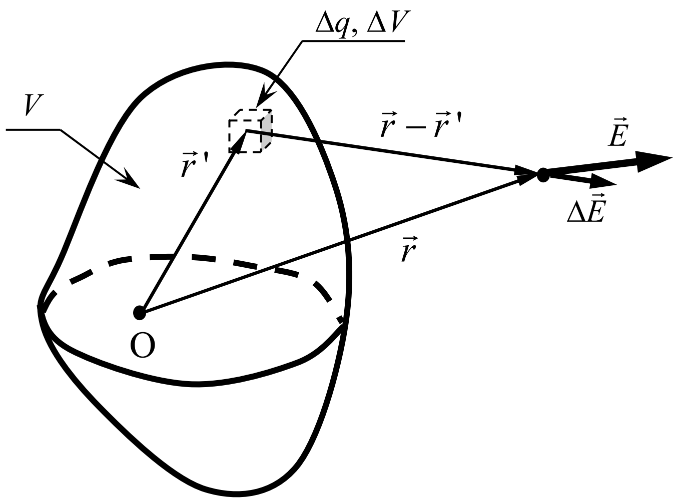


Рис. 1.7

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}.$$

При $\Delta V \to 0$ напруженість електричного поля можна вважати елементарною і записати її у вигляді

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}.$$

Вектор напруженості електричного поля, утвореного неперервно зарядженим тілом, визначається за формулою

$$\vec{E} = \int_V d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')dV}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3},$$

де інтегрування проводиться в межах об'єму тіла, положення точок якого визначає радіус-вектор $\vec{r}\,'$.

Коли точка простору лежить за межами об'єму тіла, то буде визначена напруженість електричного поля в оточуючому тіло просторі. При неперервному розподілі заряду електричне поле існує також і в середині тіла. Для його розрахунку можна скористатися отриманим інтегральним виразом, але в цьому випадку кінець вектора $\vec{r}$ буде знаходитися в межах об'єму тіла.

ii) Коли речовина, з якої виготовлене тіло, є металом, то його заряд буде розподілений на поверхні тіла. В цьому випадку розподіл електричного заряду характеризують за допомогою поверхневої густини електричного заряду

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S},$$

де σ – поверхнева густина електричного заряду, Δq – заряд маленької ділянки поверхні, площа якої ΔS (див. рис. 1.8).

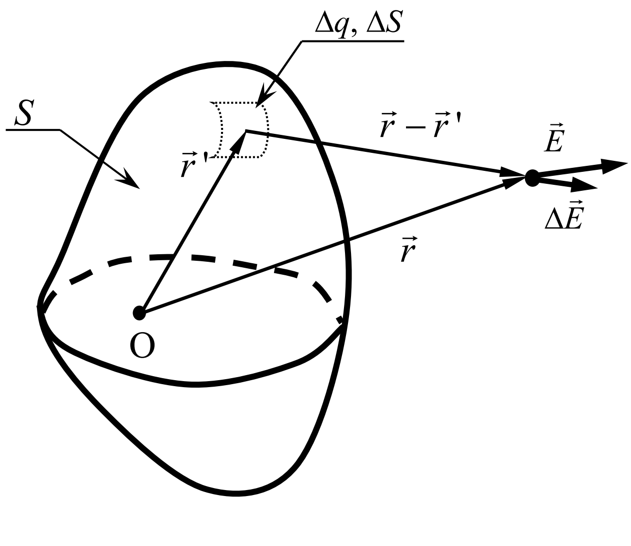


Рис. 1.8

За умови, що $\Delta S \to 0$,

$$\sigma = \frac{dq}{dS}.$$

В системі СІ одиницею поверхневої густини електричного заряду є $[\sigma]$=Кл/м^2.

Коли заряд тіла розподілений тільки по поверхні, то його сумарний заряд визначається шляхом інтегрування поверхневої густини електричного заряду по поверхні тіла

$$q = \int_S dq = \int_S \sigma(\vec{r}\,')dS,$$

де вектор $\vec{r}\,'$ (зі штрихом) визначає положення точок зарядженої поверхні тіла відносно точки відліку О.

Напруженість електричного поля в довільній точці простору $\vec{r}$ знаходиться шляхом інтегрування

$$\vec{E} = \int_S d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\sigma(\vec{r}\,')dS}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3},$$

де враховано, що поверхнева густина є неоднорідною, а інтегрування здійснюється по поверхні, положення точок якої задає вектор $\vec{r}\,'$.

iii) Коли при визначенні електричного поля, утвореного зарядженою ниткою, можна знехтувати її товщиною, то таку нитку називають *тонкою*. У випадку наближення тонкої нитки розподіл електричного заряду характеризують за допомогою лінійної густини електричного заряду, яка визначається з відношення

$$\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta \ell},$$

де λ – лінійна густина електричного заряду, Δq – заряд маленької лінійної ділянки нитки, довжина якої $\Delta \ell$ (рис. 1.9).

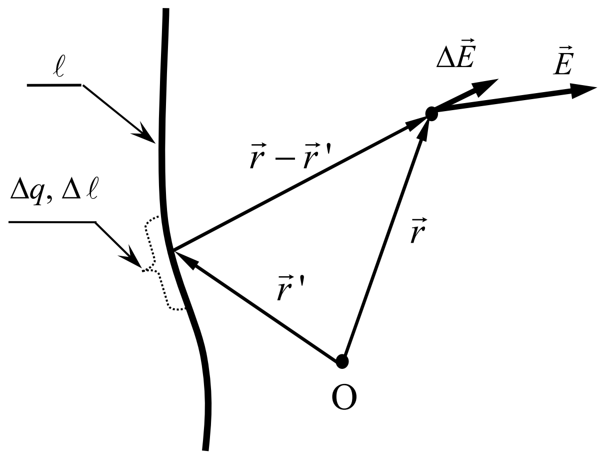


Рис. 1.9

За умови, що $\Delta \ell \to 0$,

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell}.$$

В системі СІ одиницею лінійної густини електричного заряду є $[\lambda]$=Кл/м.

Сумарний заряд нитки визначається шляхом інтегрування по довжині уздовж кривої

$$q = \int_\ell dq = \int_\ell \lambda(\vec{r}\,')d\ell,$$

де вектор $\vec{r}\,'$ (зі штрихом) визначає положення точок на зарядженій нитці відносно точки відліку О.

Напруженість електричного поля в довільній точці простору $\vec{r}$ знаходять шляхом інтегрування

$$\vec{E} = \int_\ell d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\ell \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\lambda(\vec{r}\,')d\ell}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3},$$

де враховано, що лінійна густина електричного заряду є функцією від $\vec{r}\,'$, а інтегрування проводиться уздовж лінії (кривої) зарядженої нитки.

Інтеграли, для яких область інтегрування є крива лінія, в математиці називаються криволінійними інтегралами.

Таким чином, у випадку неперервно розподілених зарядів принцип суперпозиції дозволяє розраховувати напруженість електричного поля шляхом інтегрування.

1.4.6. Сила взаємодії між зарядженими тілами

Розглянемо два довільних неперервно заряджених тіла, густини зарядів яких позначимо ρ_1 та ρ_2. Об'єми тіл позначимо V_1 та V_2. У випадку неперервного розподілу зарядів не можна напряму скористуватися законом Кулона, бо заряди тіл неточкові. Виділимо в межах об'ємів обох тіл малі ділянки об'ємами ΔV_1 та ΔV_2 (див. рис. 1.10). Для малих об'ємів ділянок їх заряди можна записати у вигляді:

$$\Delta q_1 = \rho_1(\vec{r}\,')\Delta V_1, \quad \Delta q_2 = \rho_2(\vec{r}\,'')\Delta V_2,$$

де $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$ – радіус-вектори положень цих зарядів (з одним та двома штрихами). Для випадку малих об'ємів ділянок їх заряди можна вважати точковими. Це означає, що при визначенні силової дії між цими ділянками можна використати закон Кулона.

Коли $\Delta V_1 \to 0$ та $\Delta V_2 \to 0$ отримаємо, що взаємодія між двома елементарними об'ємами (рис. 1.10) двох тіл визначається за формулою

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}\,''-\vec{r}\,')dq_1dq_2}{\left|\vec{r}\,''-\vec{r}\,'\right|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}\,''-\vec{r}\,')\rho_1(\vec{r}\,')\rho_2(\vec{r}\,'')dV_1dV_2}{\left|\vec{r}\,''-\vec{r}\,'\right|^3}.$$

Для знаходження повної сили, з якою перше заряджене тіло діє на друге заряджене тіло, треба проінтегрувати вираз для елементарної сили по об'ємам V_1 та V_2 обох тіл

$$\vec{F} = \iint\limits_{V_1,V_2} d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_{V_1,V_2}\frac{(\vec{r}\,''-\vec{r}\,')\rho_1(\vec{r}\,')\rho_2(\vec{r}\,')dV_1dV_2}{\left|\vec{r}\,''-\vec{r}\,'\right|^3}.$$

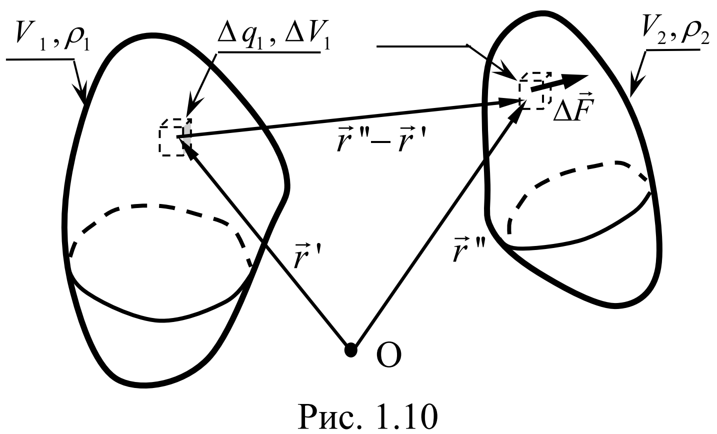


Рис. 1.10

У випадку, коли перше тіло заряджене об’ємно, а друге тіло має тільки поверхневий розподіл заряду, то вираз для сили буде визначатися інтегруванням по об’єму першого тіла і по поверхні другого тіла

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{V_1, S_2} \frac{(\vec{r}\,'' - \vec{r}\,')\rho_1(\vec{r}\,')\sigma_2(\vec{r}\,'')dV_1 dS_2}{\left|\vec{r}\,'' - \vec{r}\,'\right|^3},$$

де $\sigma_2(\vec{r}\,'')$ – густина розподілу поверхневого заряду другого тіла, а S_2 – площа його поверхні.

Коли другим тілом є заряджена нитка, то вираз для сили набуде вигляду

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{V_1, l_2} \frac{(\vec{r}\,'' - \vec{r}\,')\rho_1(\vec{r}\,')\lambda_2(\vec{r}\,'')dV_1 dl_2}{\left|\vec{r}\,'' - \vec{r}\,'\right|^3},$$

де $\lambda_2(\vec{r}\,'')$ – лінійна густина заряду нитки, а dl_2 – її елементарна довжина.

В аналогічний спосіб визначається сила взаємодії і у випадках, коли обидва тіла мають тільки поверхневі заряди або тільки лінійні заряди.

1.4.7. Силові лінії

Векторне електричне поле геометрично представляють за допомогою силових ліній. *Силовою лінією* називають лінію в просторі, дотичні до якої співпадають з напрямком вектора напруженості електричного поля. На рис. 1.11 зображений вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$ для точки, яка лежить на силовій лінії, і положення якої задано радіус-вектором $\vec{r}$.

Введемо вектор елементарної ділянки кривої $d\vec{\ell}$, який співпадає з хордою до кривої, коли точки перетину лежать нескінченно близько одна від другої. Таким чином, вектор $d\vec{\ell}$ також лежить уздовж дотичної до кривої, і він співнаправлений з вектором напруженості електричного поля $d\vec{\ell} \uparrow\uparrow \vec{E}$. Коли вектори співнаправлені, то їх векторний добуток дорівнює нулю:

$$[\vec{E}d\vec{\ell}]=0.$$

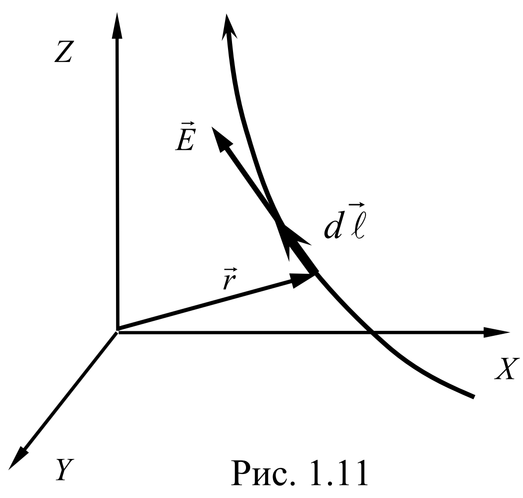


Рис. 1.11

Представимо вектор напруженості сумою його проекцій

$$\vec{E} = E_X \vec{i} + E_Y \vec{j} + E_Z \vec{k}\ .$$

А вектор елементарної ділянки запишемо у вигляді

$$d\vec{\ell} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz\ .$$

З співнаправленості вектора напруженості електричного поля і вектора елементарної ділянки силової лінії випливають співвідношення

$$\frac{dx}{E_X} = \frac{dy}{E_Y} = \frac{dz}{E_Z}\ .$$

Зазначені рівняння є *диференціальними рівняннями силової лінії*. Пошук аналітичного рішення цих рівнянь є дуже складною задачею. Проте, воно дозволяє без великих зусиль будувати криві силових ліній за допомогою чисельних методів.

Будемо вважати, що нам відомий розподіл вектора напруженості електричного поля в просторі, тобто відомі функції $E_X(x,y,z)$, $E_Y(x,y,z)$, $E_Z(x,y,z)$. Будуватимемо силову лінію, яка проходить через точку з координатами (x_0, y_0, z_0). З диференціального рівняння силової лінії знайдемо положення наступної точки силової лінії. Координати цієї точки можна записати у вигляді:

$$x_1 = x_0 + dx\ , \quad y_1 = y_0 + \frac{E_Y(x_0, y_0, z_0)}{E_X(x_0, y_0, z_0)}dx\ , \quad z_1 = z_0 + \frac{E_Z(x_0, y_0, z_0)}{E_X(x_0, y_0, z_0)}dx\ .$$

Положення наступної точки знайдемо у такий же самий спосіб:

$$x_2 = x_1 + dx\ , \quad y_2 = y_1 + \frac{E_Y(x_1, y_1, z_1)}{E_X(x_1, y_1, z_1)}dx\ , \quad z_2 = z_1 + \frac{E_Z(x_1, y_1, z_1)}{E_X(x_1, y_1, z_1)}dx\ .$$

Багаторазово проводячи зазначену процедуру, можна відтворити всю криву силової лінії. Точність відтворення кривої залежить від вибору довжини кроків.

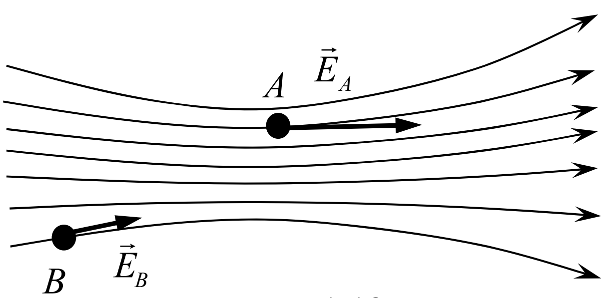


Рис. 1.12

Силових ліній може бути побудована нескінчена кількість. При їх побудові можна переконатися, що щільність силових ліній пропорційна вектору напруженості електричного поля. Коли лінії розріджуються, то в цій області простору напруженість електричного поля зменшується (точка B на рис. 1.12), і навпаки: коли лінії йдуть щільніше, то в цій області поля вектор напруженості електричного поля стає більшим (точка A на рис. 1.12).

Силові лінії не перетинаються. Вони починаються на додатних зарядах («виходять» з них) і закінчуються на від'ємних зарядах («входять» в них).

1.5. Потенціал

1.5.1. Робота електричного поля точкового заряду

Розглянемо точковий заряд q (рис. 1.13) Цей заряд є джерелом електричного поля. Напруженість електричного поля, яке створює точковий заряд в оточуючому його просторі, описується формулою

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{e}_r}{r^2},$$

де $\vec{E}$ – вектор напруженості електричного поля в точці, положення якої задає радіус-вектор, модуль якого позначено r, $|\vec{r}| = r$, а $\vec{e}_r$ – одиничний вектор, який направлений вздовж радіус-вектора, $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$.

Якщо в поле $\vec{E}$ внести інший заряд q' (зі штрихом), то зі сторони поля на заряд буде діяти сила $\vec{F} = q'\vec{E}$. При переміщенні заряду q' в полі, утвореному нерухомим зарядом q, електричне поле буде виконувати роботу. Розрахуємо величину цієї роботи при переміщенні заряду q' вздовж довільної траєкторії, криву лінію якої на рис. 1.13 позначено пунктиром. Для простоти будемо вважати, що заряди q та q' додатні.

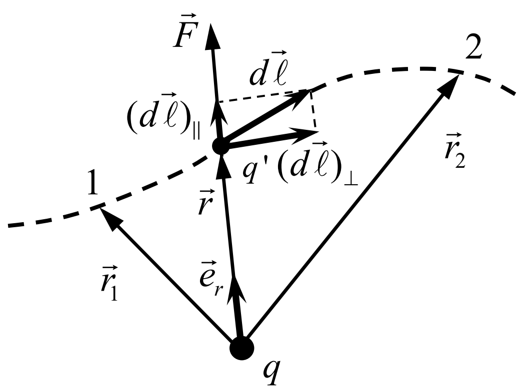


Рис. 1.13

Робота електричного поля при елементарному переміщенні вздовж траєкторії визначається скалярним добутком вектора сили на вектор переміщення:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}d\vec{\ell},$$

де прийнято, що елементарне переміщення дорівнює елементарному вектору ділянки кривої траєкторії, $d\vec{r} = d\vec{\ell}$.

Представимо вектор елементарної ділянки кривої сумою двох складових $d\vec{\ell} = d\vec{\ell}_{\parallel} + d\vec{\ell}_{\perp}$, причому $d\vec{\ell}_{\parallel} \uparrow\uparrow \vec{F}$, а $d\vec{\ell}_{\perp} \perp \vec{F}$. Тепер елементарна робота буде містити два доданки:

$$dA = \vec{F}d\vec{\ell}_{\parallel} + \vec{F}d\vec{\ell}_{\perp}.$$

Оскільки $d\vec{\ell}_{\perp} \perp \vec{F}$, то другий доданок $\vec{F}d\vec{\ell}_{\perp}$ буде дорівнювати нулю, бо скалярний добуток перпендикулярних векторів дорівнює нулю.

Вектор $d\vec{\ell}_{\parallel}$ колінеарний вектору $\vec{F}$.

Оскільки $d\vec{r} = d\vec{\ell}$, то $d\vec{r}_{\parallel} = d\vec{\ell}_{\parallel}$, а $\left|d\vec{r}_{\parallel}\right| = dr$, і вираз для елементарної роботи набуває вигляду:

$$dA = F(\vec{r})dr,$$

де перший множник є проекцією сили на напрямок радіус-вектора, тобто дорівнює скалярному добутку $F(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})\vec{e}_r$, який, в свою чергу, дорівнює $F(\vec{r}) = q'E(r)$, де $E(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})\vec{e}_r$. Таким чином, вираз для елементарної роботи можна записати у вигляді:

$$dA = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}.$$

Роботу, яку виконує електрична сила при переміщенні заряду з точки 1, положення якої задає радіус-вектор $\vec{r}_1$, до точки 2, положення якої задає радіус-вектор $\vec{r}_2$, знайдемо шляхом інтегрування:

$$A = \int_1^2 dA = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}.$$

Звідси знаходимо:

$$A = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Як бачимо з останнього виразу, робота поля не залежить від форми траєкторії і визначається тільки відстанями між зарядами в кінцевому та початковому їх положеннях. Це означає, що електричне поле є потенціальним, і взаємодію зарядів можна охарактеризувати потенціальною енергією.

Робота потенціального силового поля дорівнює різниці значень потенціальної енергії, взятій з від’ємним знаком $A = -(W_2 - W_1)$, де W_2, W_1 –

потенціальна енергія для кінцевого та для початкового положень зарядів. Отже, потенціальна енергія взаємодії двох точкових зарядів визначаються за формулою:

$$W(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r},$$

де r – відстань між точковими зарядами q та q'. З цієї формули випливає, що потенціальна енергія однойменних зарядів, які взаємодіють силами відштовхування, додатна і набуває найменшого значення, коли відстань між зарядами $r \to \infty$. Навпаки, для різнойменних зарядів, які притягуються, потенціальна енергія від'ємна, і вона набуває найменшого значення при $r \to 0$, прямуючи до $W(r \to 0) \to -\infty$.

1.5.2. Диференціальна умова потенціальності електростатичного поля

З формули для роботи, яку виконує поле точкового заряду q при переміщенні в цьому полі точкового заряду q', маємо:

$$A = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Величина роботи поля не залежить від форми траєкторії, а визначається тільки початковим та кінцевим положенням зарядів. Це означає, що електричне поле є потенціальним.

Електричне поле є силовим полем. В кожній точці, де знаходиться заряд, на нього діє кулонівська сила $\vec{F}$, вектори якої утворюють поле сил. Якщо при переміщенні тіла вздовж замкнутої траєкторії воно повертається до початкової точки, в якій $r_2 = r_1$, то робота силового поля $\vec{F}$ дорівнює нулю, і нулю дорівнює інтеграл

$$A = \oint \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = 0,$$

де $d\vec{r}$ – елементарне переміщення уздовж кривої, яке дорівнює елементарному вектору ділянки кривої, $d\vec{r} = d\vec{\ell}$.

Такі інтеграли від векторних функцій, розраховані по замкнутій траєкторії, називаються *циркуляцією*. Циркуляція вектора кулонівської сили, з якою електричне поле діє на заряд, дорівнює нулю.

Врахуємо, що сила дії поля на заряд дорівнює добутку напруженості електричного поля на величину заряду. Для розглянутого на рис. 1.12 випадку, заряд q' переміщується в електричному полі з напруженістю $\vec{E}$, а сила, що діє на цей заряд, дорівнює $\vec{F} = q'\vec{E}$. Підставимо цей вираз для сили в циркуляцію. Отримаємо, що циркуляція вектора напруженості електричного поля дорівнює нулю:

$$\oint\limits_{(l)} \vec{E}d\vec{l} = 0,$$

де інтегрування йде по замкнутому контуру *l*.

Таким чином, електричне поле потенціальне. Інтегральною умовою потенціальності електричного поля є рівність нулю циркуляції вектора напруженості.

Вираз для циркуляції можна переписати у вигляді

$$\oint (E_X dx + E_Y dy + E_Z dz) = 0,$$

де $E_X = E_X(x, y, z)$, $E_Y = E_Y(x, y, z)$, $E_Z = E_Z(x, y, z)$ – проекції вектора напруженості електричного поля, кожна з яких в загальному випадку є функцією координат.

Незалежність роботи електричного поля від форми траєкторії, а також рівність нулю циркуляції напруженості, означають, що диференціальна форма $E_X dx + E_Y dy + E_Z dz$ є повним диференціалом. Звідки випливає, що проекції вектора напруженості задовольняють умовам

$$\frac{\partial E_Y}{\partial x} - \frac{\partial E_X}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial E_X}{\partial z} - \frac{\partial E_Z}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial E_Z}{\partial y} - \frac{\partial E_Y}{\partial z} = 0.$$

Скорочено зазначені умови можна записати, використовуючи математичний символ, який називають „ротор”. Ротор вектора напруженості електричного поля розраховують шляхом знаходження визначника

$$rot\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_X & E_Y & E_Z \end{vmatrix}.$$

Цей визначник розкривають, формально дотримуючись послідовності виконання правила множення, щоб символи частинних похідних були завжди зліва від проекції вектора напруженості електричного поля.

Отже, $rot\vec{E}$ є вектором, компоненти якого визначаються різницею частинних похідних проекцій вектора напруженості електричного поля:

$$rot\vec{E} = \left(\frac{\partial E_Z}{\partial y} - \frac{\partial E_Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_X}{\partial z} - \frac{\partial E_Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_Y}{\partial x} - \frac{\partial E_X}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Диференціальна умова потенціальності електричного поля може бути записана у вигляді вимоги, що ротор вектора напруженості потенціального електричного поля повинен дорівнювати нулю:

$$rot\vec{E} = 0.$$

Математично цей вираз можна переписати інакше

$$[\vec{\nabla}\vec{E}] = 0,$$

де зліва записаний векторний добуток вектора набла $\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$ на вектор напруженості електричного поля.

1.5.3. Потенціал електростатичного поля

Вище стверджувалося, що скалярний добуток $\vec{E}d\vec{r} = E_X dx + E_Y dy + E_Z dz$ є повним диференціалом. Цей диференціал вводять наступним чином

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{r} = -(E_X dx + E_Y dy + E_Z dz),$$

де φ – скалярна функція, яку називають *потенціалом*.

За правилом знаходження диференціала функції багатьох змінних, маємо, що диференціал $d\varphi$ дорівнює сумі добутків частинних похідних на диференціали змінних

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

де вважається, що скалярна функція $\varphi = \varphi(x, y, z)$ залежить від трьох просторових координат x, y, z.

Порівнюючи два попередні вирази, отримаємо зв'язок проекцій електричного поля з частинними похідними потенціалу:

$$E_X = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_Y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_Z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Звідси маємо:

$$\vec{E} = E_X\vec{i} + E_Y\vec{j} + E_Z\vec{k} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Вираз в дужках справа називають градієнтом потенціалу поля:

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

Таким чином, напруженість електричного поля дорівнює градієнту потенціалу електричного поля, взятого з протилежним знаком:

$$\vec{E} = -grad\varphi.$$

Градієнт позначають за допомогою вищезгаданого диференціального вектора набла. Отже, можна записати:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi.$$

Потенціал в довільній точці $\vec{r}$ можна знайти за допомогою криволінійного інтегралу від напруженості електричного поля:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r})d\vec{r},$$

де $\vec{r}_0$ – початкова точка.

Зазначимо, що, завдяки вибору початкової точки, потенціал можна визначити з точністю до константи $\varphi_0 = \varphi(\vec{r}_0)$. Часто потенціал нескінченності приймають рівним нулю, $\varphi(x_0 = \infty, y_0 = \infty, z_0 = \infty) = 0$.

Потенціал є енергетичною характеристикою електричного поля. Дійсно, величина елементарної роботи поля при переміщенні в ньому заряду q дорівнює

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = q\vec{E}d\vec{r} = -qd\varphi,$$

де враховано, що диференціал потенціалу $d\varphi = -\vec{E}d\vec{r}$.

Робота поля при переміщенні заряду з точки 1, положення якої задає радіус-вектор $\vec{r}_1$, до точки 2, положення якої задає радіус-вектор $\vec{r}_2$, дорівнює

$$A = \int_1^2 dA = -q\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\varphi.$$

Врахуємо, що $d\varphi$ є повний диференціал. Після інтегрування отримаємо, що робота поля дорівнює добутку величини заряду на різницю потенціалів в точках 1 та 2

$$A = -q\varphi\Big|_{r_1}^{r_2} = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

де $\varphi_1 - \varphi_2$ – *різниця потенціалів* або *напруга*, $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)$.

Таким чином, отримано, що робота поля не залежить від форми траєкторії, тобто електростатичне поле є потенціальним. Роботу поля при переміщенні заряду можна представити різницею потенціальної енергії заряду в кінцевому та початковому положеннях:

$$A = -(W_2 - W_1),$$

де W_2 та W_1 – значення потенціальної енергії в кінцевому та початковому положеннях заряду відповідно.

Порівнявши попередні вирази для роботи поля, отримаємо:

$$q(\varphi_1 - \varphi_2) = -(W_2 - W_1).$$

Враховуючи, що для цієї рівності кінцеве та початкові положення заряду є довільними, приходимо до висновку, що потенціальна енергія заряду в електричному полі дорівнює добутку заряду на значення потенціалу в точці, в якій знаходиться заряд:

$$W = q\varphi.$$

Звідси маємо, що потенціал електричного поля можна визначити як відношення енергії заряду в полі до величини заряду:

$$\varphi = \frac{W}{q}.$$

Потенціальна енергія двох точкових зарядів визначається за формулою

$$W(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}},$$

де q_1, q_2 – заряди, відстань між якими r_{12}. Потенціальна енергія взаємодії двох точкових зарядів пропорційна добутку їх зарядів.

З формули потенціальної енергії взаємодії для двох зарядів випливає, що потенціал точкового заряду визначається за формулою

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},$$

де r – відстань від заряду q до точки простору, в якій створене ним поле має потенціал $\varphi(r)$. Потенціал поля точкового заряду обернено пропорційний відстані до нього.

1.5.4. Еквіпотенціальні поверхні

Для геометричного представлення розподілу електричного поля використовують еквіпотенціальні поверхні. Їх ще називають ізоповерхнями потенціалу.

Еквіпотенціальними поверхнями називають поверхні в просторі, точки яких мають однакове значення потенціалу, тобто

$$\varphi(\vec{r}) = const,$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точок еквіпотенціальної поверхні.

В координатному вигляді еквіпотенціальну поверхню задають рівнянням

$$\varphi(x, y, z) = const$$

де x, y, z – координати точок поверхні: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Розглянемо довільну точку, положення якої задано вектором $\vec{r} + d\vec{r}$, яка лежить на еквіпотенціальній поверхні поряд з точкою $\vec{r}$ (рис. 1.14). Згідно з означенням еквіпотенціальної поверхні, має виконуватись рівняння $\varphi(\vec{r} + d\vec{r}) = \varphi(\vec{r})$. Приріст потенціалу між сусідніми точками еквіпотенціальної поверхні дорівнює нулю, $d\varphi = \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r})$=0.

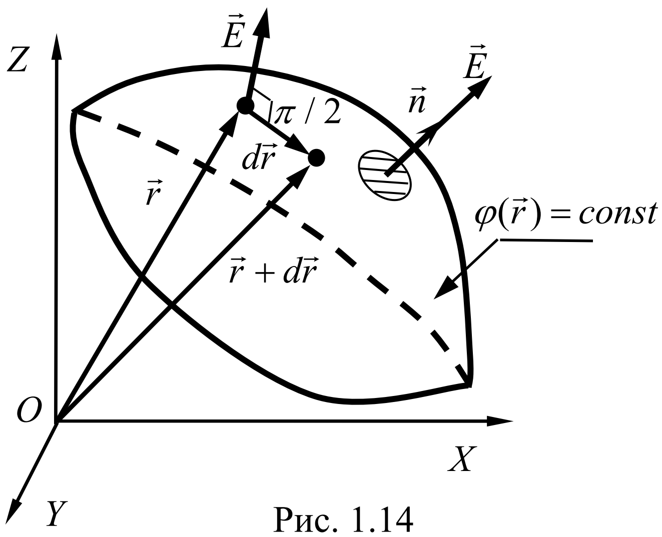


Рис. 1.14

Врахуємо, що

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

де $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$.

Тоді отримуємо рівняння:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = 0, \quad \text{або} \quad grad\varphi d\vec{r} = 0,$$

де $d\vec{r}$ – довільний вектор, що лежить на еквіпотенціальній поверхні.

Скалярний добуток векторів дорівнює нулю, якщо вони перпендикулярні між собою, $grad\varphi \perp d\vec{r}$. Таким чином, градієнт потенціалу перпендикулярний до довільного вектора $d\vec{r}$, що лежить на еквіпотенціальній поверхні. Тому вектор напруженості електричного поля перпендикулярний до еквіпотенціальної поверхні.

Орієнтацію поверхні задають за допомогою одиничного вектора $\vec{n}$, який направлений вздовж перпендикуляра до поверхні. Таким чином, в кожній точці еквіпотенціальної поверхні $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{n}$ (див. рис. 1.14).

Потенціал точкового заряду залежить тільки від відстані до точкового заряду. Тому точки простору, які рівновіддалені від точкового заряду, лежать на одній еквіпотенціальній поверхні. Еквіпотенціальною поверхнею точкового заряду є сфера з центром на заряді.

1.6. Теорема Гауса для електричного поля

1.6.1. Потік вектора напруженості електричного поля

Розглянемо довільне електричне поле, вектор напруженості якого визначено в кожній точці простору $\vec{E}(\vec{r})$. Тепер візьмемо довільну поверхню S (рис. 1.15). Розглянемо на поверхні довільну маленьку ділянку площею ΔS. Коли $\Delta S \to 0$, то зазначена ділянка буде лежати на площині, яка дотикається до поверхні. Таку малу ділянку будемо називати елементарною, а її площу позначатимемо dS.

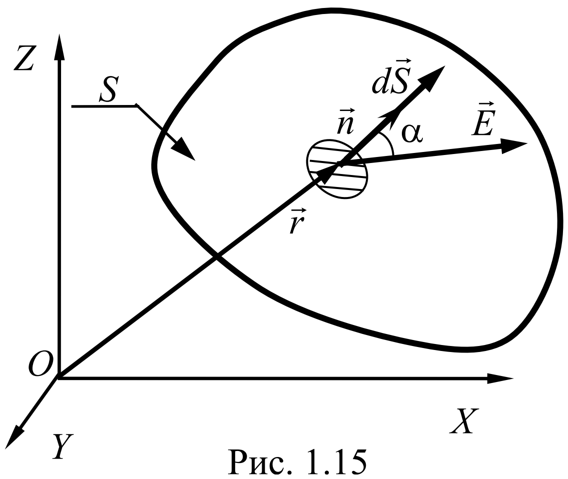


Рис. 1.15

Орієнтацію елементарної ділянки у просторі задає одиничний вектор $\vec{n}$, який перпендикулярний до ділянки. Введемо вектор елементу площі поверхні, який позначимо $d\vec{S}$, модуль якого дорівнює площі елементарної поверхні $\left|d\vec{S}\right| = dS$, і напрямок якого збігається з напрямком одиничного вектора $\vec{n}$, тобто $d\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{n}$.

Елементарний потік вектора $\vec{E}$ напруженості електричного поля через елемент поверхні $d\vec{S}$ визначається скалярним добутком:

$$d\Phi_E = \vec{E}d\vec{S}, \quad \text{або} \quad d\Phi_E = \vec{E}\vec{n}dS, \quad d\Phi_E = E\cos\alpha dS, \quad d\Phi_E = E_n dS,$$

де α – кут між векторами $\vec{E}$ та $d\vec{S}$, а $E = \left|\vec{E}\right|$ – модуль вектора напруженості електричного поля, E_n – нормальна до поверхні складова вектора $\vec{E}$, $E_n = E\cos\alpha$.

Потік вектора напруженості максимальний, коли вектор напруженості електричного поля співнаправлений з вектором елемента поверхні $d\vec{S}\uparrow\uparrow\vec{E}$. Коли кут α<π/2, то потік додатний $d\Phi_E > 0$ і навпаки, коли α>π/2, то потік від'ємний $d\Phi_E < 0$.

Величина потоку через довільну скінчену поверхню визначається шляхом інтегрування

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E .$$

З урахуванням означення елементарного потоку, маємо, що потік через довільну поверхню дорівнює інтегралу

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}d\vec{S} .$$

Коли поверхня S замкнута, то зазначений інтеграл записують у вигляді:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S \vec{E}\vec{n}dS .$$

При інтегруванні по замкнутій поверхні слід спочатку визначитися з напрямком одиничного вектора $\vec{n}$. Для замкнутих поверхонь вектор $\vec{n}$ співпадає з напрямком виходу з об'єму, тобто з середини оточеного поверхнею об'єму до оточуючого поверхню простору.

1.6.2. Інтегральна теорема Гауса для вектора напруженості електричного поля

Потік вектора напруженості електричного поля має цікаву властивість: його величина пропорційна заряду, оточеному поверхнею. Для доведення цього твердження спочатку розглянемо точковий заряд q. Цей заряд створює в оточуючому просторі електричне поле, вектор напруженості якого описується формулою

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{e}_r}{r^2},$$

де $\vec{e}_r$ – одиничний вектор, напрямок якого співпадає з радіус-вектором положення точки спостереження вектора напруженості електричного поля $\vec{e}_r\uparrow\uparrow\vec{r}$, а $r = |\vec{r}|$.

Оточимо заряд сферичною поверхнею радіусом r, центр якої співпадає з точкою розташування заряду q (рис. 16). Вектор нормалі до цієї сферичної поверхні є одиничний вектор, який паралельний до радіуса сфери і співпадає за напрямком з радіус-вектором, $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{r}$. Тепер розрахуємо потік вектора напруженості електричного поля заряду q через цю поверхню. Маємо

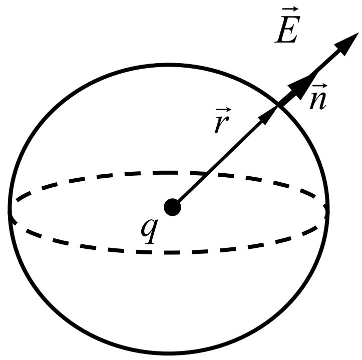


Рис.1.16

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{\vec{e}_r \vec{n}}{r^2} dS .$$

Врахуємо, що у випадку, коли заряд q знаходиться в центрі сфери, одиничні вектори $\vec{e}_r$ та $\vec{n}$ для будь-якої точки сфери співпадають, а тому їх скалярний добуток дорівнює одиниці: $\vec{e}_r \vec{n} = |\vec{e}_r||\vec{n}| = 1$. Крім того, відстань від точок сфери до заряду постійна, $r = const$. З урахуванням цієї умови величина потоку дорівнює

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \oint_S dS .$$

Інтеграл $\oint_S dS$ дорівнює площі сфери $\oint_S dS = 4\pi r^2$. Звідки маємо, що величина потоку буде дорівнювати

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} .$$

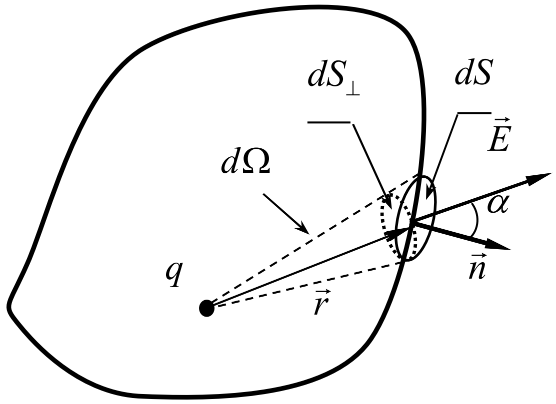


Рис. 1.17

Тепер розглянемо випадок, коли заряд оточено довільною несферичною замкнутою поверхнею, рис. 1.17. Величина потоку вектора напруженості електричного поля дорівнює

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E \cos\alpha dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{\cos\alpha}{r^2} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{dS_\perp}{r^2}$$

де α – кут між вектором напруженості електричного поля $\vec{E}$ та вектором елементарної ділянки $d\vec{S}$. Враховано, що $dS_\perp = \cos\alpha dS$ – проекція вектора $d\vec{S}$ на напрямок радіус-вектора. Відношення $\frac{dS_\perp}{r^2} = d\Omega$ дорівнює елементарному *тілесному* куту, який спирається на поверхню $dS_\perp$.

Отже величина потоку вектора напруженості електричного поля, створюваного зарядом, через довільну замкнуту поверхню визначається інтегруванням по тілесному куту

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S d\Omega .$$

Величина тілесного кута для замкнутої поверхні, що оточує заряд, дорівнює $\oint_S d\Omega = 4\pi$. Таким чином, знову отримано, що величина потоку вектора напруженості електричного поля через замкнуту поверхню, що оточує точковий заряд, пропорційна величині цього заряду

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} .$$

Коли, наприклад, додатний заряд q знаходиться за межами замкнутої поверхні, то величина потоку через цю поверхню дорівнює нулю, бо силові лінії двічі по різному пронизують поверхню: один раз входять в неї, а другий раз виходять. Вклад в потік від ліній, що входять в поверхню, від'ємний і дорівнює $-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$, де Ω – тілесний кут, на який спирається поверхня, і який визначено відносно точки розташування заряду. Вклад в потік від силових ліній, що виходять з поверхні, додатний і дорівнює $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$, бо в обох випадках тілесні кути однакові.

Отриманий результат можна узагальнити на довільну систему зарядів. За принципом суперпозиції напруженість електричного поля системи зарядів дорівнює сумі напруженостей полів утворених кожним з зарядів окремо,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_N , \quad \text{або} \quad \vec{E} = \sum_j^N \vec{E}_j ,$$

де $\vec{E}$ – вектор напруженості електричного поля системи зарядів $q_1,\ q_2,...q_N$ (N – кількість зарядів), а $\vec{E}_1,\ \vec{E}_2,...\vec{E}_N$ – напруженості електричних полів, утворених кожним з цих зарядів.

Потік вектора напруженості системи зарядів дорівнює

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S \sum_j^N \vec{E}_j d\vec{S} = \sum_j^N \oint_S \vec{E}_j d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i^{\tilde{N}} q_i .$$

Сума зарядів $\sum_{i}^{N} q_i$ є повним зарядом, оточеним поверхнею. При підрахунку суми зарядів змінено індекс, бо не обов'язково всі заряди системи охоплені поверхнею, а $\tilde{N}$ позначено кількість зарядів, що потрапляють всередину відповідного об'єму.

Отримане співвідношення називається *теоремою Гауса* для вектора напруженості електричного поля, за якою величина потоку вектора напруженості електричного поля через замкнуту поверхню дорівнює повному (сумарному) заряду, охопленому поверхнею.

1.6.3. Теорема Гауса для напруженості електричного поля в диференціальній формі

Запишемо теорему Гауса для вектора напруженості електричного поля, за якою потік вектора напруженості електричного поля через замкнуту поверхню пропорційний величині заряду охопленого поверхнею

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_n}{\varepsilon_0},$$

де q_n – повний заряд, який дорівнює сумі зарядів в об'ємі, обмеженому замкнутою поверхнею *S*.

У разі неперервного розподілу зарядів для характеристики розподілу заряду використовують об'ємну густину заряду $\rho = dq / dV$, де dq – величина заряду в елементарному об'ємі dV.

Для неперервного розподілу заряду маємо, що величина повного заряду в об'ємі, обмеженому поверхнею *S*, може бути визначена шляхом знаходження інтегралу

$$q_n = \int_V \rho dV,$$

де інтегрування здійснюється по об'єму *V*.

Тепер теорема Гауса набуде вигляду

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Врахуємо добре відоме з математики співвідношення, яке називають теоремою Остроградського – Гауса, за якою потік вектора через замкнуту поверхню можна знайти інтегруванням дивергенції цього вектора по об'єму.

У разі потоку для вектора напруженості електричного поля з теореми Остроградського – Гауса маємо:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_V div\vec{E}dV ,$$

де інтегрування здійснюється по об'єму *V*, обмеженому замкнутою поверхнею *S*. Під знаком правого інтегралу позначено дивергенцію вектора напруженості електричного поля, яка визначається сумою частинних похідних відповідних проекцій вектора напруженості:

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} .$$

З урахуванням теореми Остроградського – Гауса маємо рівність

$$\int_V div\vec{E}dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV ,$$

в якій зліва і справа стоять інтеграли, що розраховуються по одному й тому ж самому об'єму, обмеженому поверхнею *S*. Зауважимо, що ця інтегральна рівність виконується для довільних поверхонь, тому вона можлива тільки у разі рівності підінтегральних виразів, тобто

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} .$$

Отже, отримано, що дивергенція вектора напруженості електричного поля пропорційна густині об'ємного заряду. Зазначене співвідношення називають теоремою Гуса для вектора напруженості електричного поля в диференціальній формі.

Згідно з означенням дивергенції, рівняння теореми Гауса в диференціальній формі можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} .$$

Зазначене співвідношення ще називають законом Кулона, записаним в диференціальній формі, оскільки теорема Гауса для вектора напруженості в інтегральній і в диференціальній формі є наслідком закону Кулона.

Дивергенція будь-якого вектора формально розглядається як скалярний добуток вектора набла на цей вектор. Зокрема, дивергенція напруженості електричного поля:

$$div\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}\right) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} .$$

В пункті **1.4.5** було описано процедуру знаходження напруженості електричного поля неперервно розподілених зарядів з об'ємною густиною заряду ρ. Диференціальне рівняння

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

дозволяє вирішувати обернену задачу, коли за допомогою відомого розподілу вектора напруженості електричного поля $\vec{E}(\vec{r})$ можна знайти розподіл заряду, $\rho(\vec{r})$.

1.6.4. Рівняння Пуассона

Диференціальне рівняння $\vec{\nabla}\vec{E} = \rho / \varepsilon_0$, або

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

містить три функції E_x, E_y, E_z, які є проекціями вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$. Врахуємо, що вектор напруженості електричного поля можна виразити через скалярну функцію – потенціал поля:

$$\vec{E} = -grad\varphi .$$

Дію градієнта також символьно можна записати з використанням вектора набла:

$$grad\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \right)\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} .$$

Для проекцій маємо:

$$E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right),$$

або

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} .$$

Підставимо ці співвідношення для проекцій у рівняння теореми Гауса в диференціальній формі. Отримаємо

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} .$$

Перенесемо знак мінус до правої частини рівняння і запишемо його у вигляді:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Отримане рівняння називають *рівнянням Пуассона*. Воно є лінійним відносно потенціалу φ і містить суму частинних похідних другого порядку від потенціалу. Такі рівняння називають диференціальними рівняннями другого порядку.

Коли об’ємна густина заряду дорівнює нулю ρ=0, то права частина у рівнянні Пуассона також стає рівною нулю.

Рівняння

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

називають *рівнянням Лапласа*.

Символьно ліву частину рівнянь Пуассона і Лапласа можна записати, використовуючи позначення для суми диференціальних символів частинних похідних другого порядку:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

де символ Δ називають „лапласіаном”.

Лапласіан дорівнює квадрату вектора набла (скалярному добутку двох векторів набла):

$$\Delta=\vec{\nabla}\vec{\nabla}=\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

З використанням лапласіану рівняння Пуассона і рівняння Лапласа набувають вигляду:

$$\Delta\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\Delta\varphi=0.$$

Рівняння Лапласа, на відміну від рівняння Пуассона, не містить правої частини, що спрощує знаходження потенціалу поля.

В арсеналі сучасної математики існує багато розрахункових аналітичних та чисельних комп’ютерних методів (які вважаються стандартними методами і можуть бути реалізовані навіть на сучасному персональному комп’ютері) для розв’язку подібних диференціальних рівнянь. В цілому, задача розрахунку довільного електростатичного поля не має особливих принципових труднощів.

1.6.5. Приклади використання теореми Гауса для розрахунку напруженості електричних полів

При розрахунку напруженості електростатичного поля корисно використовувати симетрійні властивості розподілу заряду, які обов'язково мають поширюватися і на розподіл електричного поля, тобто симетрія (її тип) розподілу заряду і симетрія розподілу електричного поля мають бути однаковими.

1.6.5.1 Електричне поле однорідно зарядженої кулі

Розглянемо випадок просторового розподілу заряду, коли всередині кулі густина заряду постійна $\rho(\vec{r}) = const$ при $|\vec{r}| \leq R$, де R – радіус кулі (рис. 1.18), тобто куля заряджена однорідно. Нехай густина заряду є додатною, $\rho > 0$. Вважатимемо, що за межами кулі будь-які заряди відсутні.

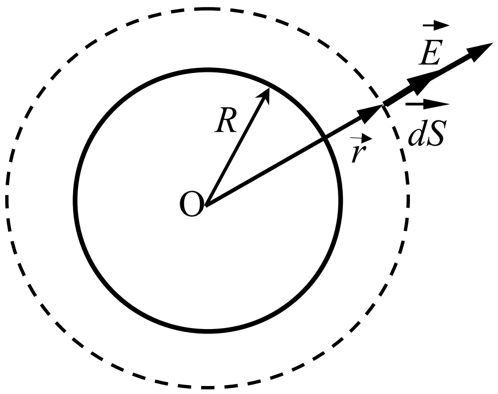


Рис. 1.18

Розподіл заряду є сферично-симетричним. Таку ж саме сферичну симетрію повинне мати електричне поле, утворене зарядом. Пояснимо, що це означає. Здійснимо (умовно) поворот в просторі на довільний кут відносно центру кулі. Очевидно, що після повороту куля та заряд в ній співпаде сам з собою. При такому повороті електричне поле також має співпасти саме з собою. Це є можливим, коли модуль вектора напруженості електричного поля має однакове значення на однаковій відстані від центра кулі і вектор напруженості направлений або від центра кулі, коли густина заряду додатна, або до центру кулі, якщо густина заряду від'ємна.

Отже, зі сферичної симетрії випливає, що електричне поле однорідно зарядженої кулі є радіальним, а вектор напруженості електричного поля співпадає (або протилежно направлений) з радіус-вектором, що має початок в центрі сфери.

Таким чином, за умов сферично-симетричного розподілу заряду маємо, що напруженість електричного поля залежить лише від відстані

$r = |\vec{r}|$ до центру кулі $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r)$ і для додатної густини розподілу заряду, $\rho > 0$, співнаправлена $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{r}$ з радіус-вектором положення точки спостереження поля (див. рис. 1.18).

Оточимо заряджену кулю сферичною поверхнею, яку на рис. 1.18 позначено пунктиром, і радіус якої більший за радіус сфери, *r>R*. В точках на цій поверхні напруженість електричного поля перпендикулярна до поверхні, бо $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{r}$, тому вектор $d\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{E}$. Звідси маємо, що скалярний добуток векторів $\vec{E}$ та $d\vec{S}$ дорівнює добутку їх модулів, $\vec{E}d\vec{S} = EdS$. Тепер вираз для потоку вектора напруженості електричного поля буде рівний

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S EdS .$$

Врахуємо, що для всіх точок на сферичній поверхні модуль вектора напруженості однаковий, тому напруженість *E* можна винести з під знаку інтеграла

$$\Phi_E = E\oint_S dS .$$

Інтеграл $\oint_S dS$ дорівнює площі поверхні сфери, яка дорівнює

$$\oint_S dS = S = 4\pi r^2 .$$

Отже для потоку вектора напруженості однорідно зарядженої кулі для *r>R* отримаємо вираз

$$\Phi_E = E4\pi r^2 .$$

Розрахуємо заряд, охоплений сферичною поверхнею. Величина заряду дорівнює інтегралу по об’єму від густини:

$$q = \int \rho dV \ ,$$

де інтегрування здійснюється по об’єму всієї зарядженої кулі. Оскільки густина розподілу заряду є постійною, то її можна винести з під знаку інтеграла:

$$q = \rho\int dV = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 ,$$

де враховано, що інтегрування по об’єму кулі дорівнює її об’єму, величина якого дорівнює $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Тепер підставимо в рівняння теореми Гауса $\Phi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ знайдені нами у явному вигляді вирази для потоку і заряду:

$$E 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3 .$$

Звідси знаходимо, що за межами $r>R$ однорідно зарядженої кулі напруженість електричного поля обернено пропорційна квадрату відстані до центру кулі:

$$E(r>R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} .$$

На поверхні сфери напруженість електричного поля дорівнює

$$E(r=R) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} .$$

Тепер знайдемо напруженість електричного поля всередині кулі, коли $r<R$. Розглянемо сферичну поверхню з центром в т. О, яку на рис. 1.19 позначено пунктиром. Як і в попередньому випадку, для цієї сферичної поверхні потік вектора напруженості буде рівний $\Phi_E = E 4\pi r^2$, що обумовлено симетрією. Величина заряду, охопленого сферою радіусу $r<R$, буде відмінною від попереднього випадку:

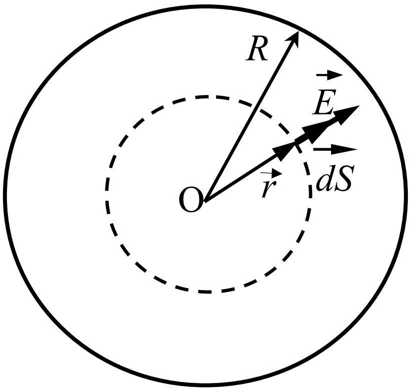


Рис. 1.19

$$q = \int \rho dV = \rho \int dV = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 ,$$

де враховано, що величина охопленого сферою об’єму дорівнює $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Тепер з теореми Гауса $\Phi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ отримаємо рівняння:

$$E 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 ,$$

з якого знайдемо величину вектора напруженості електричного поля всередині однорідно зарядженої кулі:

$$E(r<R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r .$$

Якщо в цей вираз підставити $r=R$, то знову знайдемо напруженість електричного поля на поверхні зарядженої кулі:

$$E(r=R)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R\,.$$

Отже напруженість електричного поля всередині однорідно зарядженої кулі зростає із збільшенням r за лінійним законом.

Розрахуємо потенціал електричного поля однорідно зарядженої кулі. Для цього скористаємось формулою $\varphi(\vec{r})=\varphi(\vec{r}_0)-\int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{E}(\vec{r})d\vec{r}$. Приймемо потенціал на нескінченості рівним нулю, тоді

$$\varphi(\vec{r})=-\int\limits_{\infty}^{\vec{r}}\vec{E}(\vec{r})d\vec{r}\,.$$

Інтегрування здійснимо вздовж прямої, що проходить через центр кулі. Для точок, що лежать на цій прямій, радіус-вектор дорівнює відстані до центру кулі, а вектори напруженості електричного поля і елементарної ділянки прямої співпадають за напрямком, $\vec{E}(\vec{r})\uparrow\uparrow d\vec{r}$, тому в підінтегральному виразі скалярний добуток можна замінити на добуток модулів:

$$\varphi(r)=-\int\limits_{\infty}^{r}E(r)dr\,.$$

Для знаходження потенціалу за межами кулі $r>R$ підставимо отриманий нами вираз для напруженості:

$$\varphi(r>R)=-\int\limits_{\infty}^{r}E(r)dr=-\int\limits_{\infty}^{r}\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr=\left.\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\right|_{\infty}^{r}=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\,.$$

Потенціал поверхні кулі дорівнює

$$\varphi(r=R)=-\int\limits_{\infty}^{R}E(r)dr=\left.\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\right|_{\infty}^{R}=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}\,.$$

Для знаходження потенціалу всередині кулі запишемо інтеграл як суму двох інтегралів по двох ділянках інтегрування, а саме – з нескінченості до поверхні кулі і від поверхні кулі до точки r:

$$\varphi(r<R)=-\int\limits_{\infty}^{r}E(r)dr=-\int\limits_{\infty}^{R}E(r)dr-\int\limits_{R}^{r}E(r)dr\,.$$

Перший інтеграл дорівнює вже знайденому потенціалу на поверхні кулі, а в другий треба підставити вираз для напруженості електричного поля при $r<R$:

$$\varphi(r<R)=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}-\int_R^r\frac{\rho}{3\varepsilon_0}rdr=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2\Big|_R^r=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}+\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2-r^2)\,.$$

З останньої формули видно, що потенціал в центрі однорідно зарядженої кулі визначається квадратом радіуса кулі:

$$\varphi(r=0)=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\,.$$

На відміну від напруженості, потенціал в центрі кулі не дорівнює нулю і є більшим за потенціал на поверхні кулі.

1.6.5.2. Електричне поле однорідно зарядженої безмежної площини

Як і раніше, поверхневу густину заряду площини позначимо σ, яку приймемо додатною, $\sigma>0$. Для безмежної додатно зарядженої площини силові лінії електричного поля будуть виходити з площини і всюди будуть перпендикулярними до неї, як зображено на рис. 1.20. На цьому рисунку з ближнього до нас боку силові лінії суцільні, а на зворотному боці, за площиною, вони зображені пунктиром.

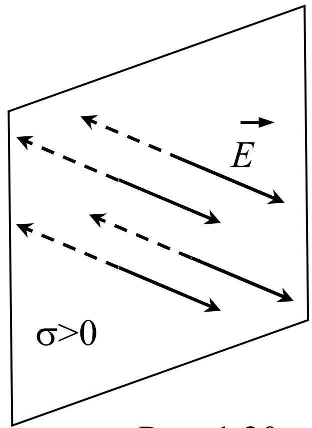


Рис. 1.20

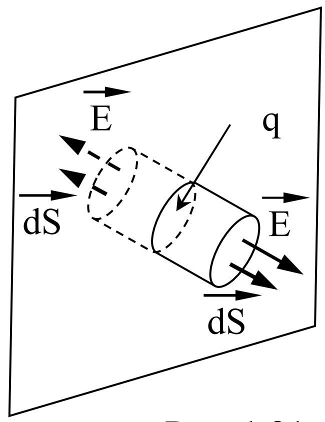


Рис. 1.21

Для розрахунку напруженості поля розглянемо поверхню, що має форму циліндру, вісь якого паралельна до силових ліній, і який пронизує заряджену площину. Частина циліндра на зворотному боці позначена на рис. 1.21 пунктиром. При розрахунку потоку вектора напруженості електричного поля через поверхню циліндра представимо інтеграл сумою двох інтегралів: одного – по бічній стороні, і двох інших – по основах циліндру:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_{S_{бічна}} \vec{E}d\vec{S}_{бічна} + 2\int_{S_{осн}} \vec{E}d\vec{S}_{осн} .$$

На бічній поверхні $\vec{E}d\vec{S}_{бічна} = 0$, бо вектор напруженості електричного поля направлений уздовж бічної поверхні, а отже $\vec{E} \perp d\vec{S}_{бічна}$. На поверхні основ $\vec{E}d\vec{S}_{осн} = EdS_{осн}$, бо $\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{S}_{осн}$. Слід також врахувати, що електричне поле однорідне, тобто $\vec{E} = const$, тому потік вектора напруженості електричного поля буде рівним

$$\Phi_E = 2ES_{осн},$$

де враховано, що поле перетинає дві поверхні основ циліндра.

Заряд q, охоплений циліндричною поверхнею (див. рис. 1.21), дорівнює добутку поверхневої густини заряду на площу основи циліндру, $q = \sigma S_{осн}$.

Підставимо вирази для потоку та охопленого заряду в рівняння $\Phi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ теореми Гауса:

$$2ES_{осн} = \frac{\sigma S_{осн}}{\varepsilon_0}.$$

Звідси отримаємо величину напруженості електричного поля безмежної однорідно зарядженої площини:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

З цієї формули слідує, що напруженість електричного поля прямо пропорційна густині поверхневого заряду площини і однакова в усіх точках поблизу неї. При переході через площину напруженість електричного поля змінює свій напрямок (знак) на протилежний.

1.6.5.3. Електричне поле однорідно зарядженої прямолінійної нитки

Лінійну густину заряду однорідно зарядженої нитки позначимо λ, яку приймемо додатною, $\lambda > 0$ і $\lambda = const$. Для безмежної однорідно зарядженої тонкої і прямолінійної нитки електричне поле має осьову симетрію. Тобто при повороті на будь-який кут навколо осі нитки електричне поле має співпасти саме з собою. Для додатно зарядженої нитки силові лінії електричного поля мають починатися на нитці і мають бути перпендикулярними до неї, тому вектор напруженості електричного поля залежить тільки від відстані до нитки $r = |\vec{r}|$, тобто $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r)$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки, початок якого лежить на осі, і який є найменшою відстанню від точки до неї. Для $\lambda > 0$ вектор напруженості електричного поля співнаправлений з радіус-вектором, початок якого лежить на осі нитки, $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{r}$.

Оточимо нитку циліндричною поверхнею, радіус якої *r*, а вісь якої співпадає з ниткою, як зображено на рис. 1.22. Висота циліндра *h*. Заряд, що охоплений цією поверхнею, дорівнює добутку довжини нитки, що знаходиться в середині циліндра, на його лінійну густину заряду, $q = \lambda h$.

Представимо потік вектора напруженості електричного поля сумою двох інтегралів – по бічній поверхні і по поверхнях основ циліндру

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_{бічна}} \vec{E} d\vec{S}_{бічна} + \int_{S_{осн}} \vec{E} d\vec{S}_{осн} .$$

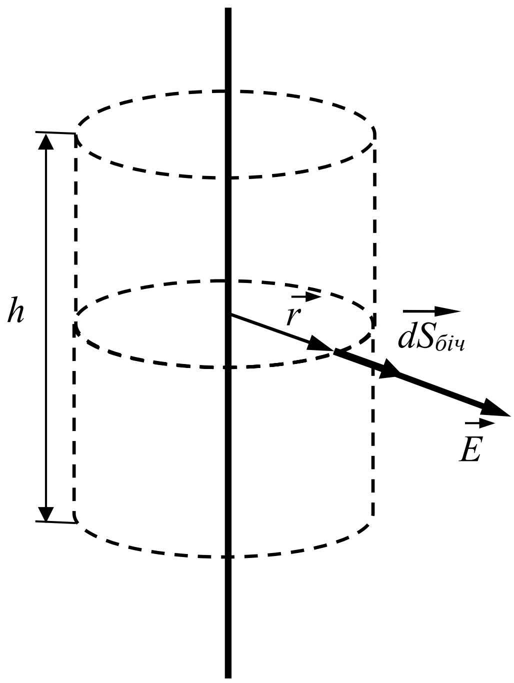


Рис. 1.22

На бічній поверхні $\vec{E} d\vec{S}_{бічна} = E dS_{бічна}$, бо вектор напруженості електричного поля направлений уздовж радіуса циліндра, а отже $\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{S}_{бічна}$. На поверхні основ $\vec{E} d\vec{S}_{осн} = 0$, бо $\vec{E} \perp d\vec{S}_{осн}$. Слід також врахувати, що електричне поле для всіх точок бічної поверхні однакове $\vec{E} = const$, тому потік вектора напруженості електричного поля буде рівним

$$\Phi_E = ES_{бічна} = E 2\pi r h ,$$

де враховано, що площа бічної поверхні дорівнює $S_{бічна} = 2\pi r h$.

Підставимо знайдені величину заряду та потік в рівняння теореми Гауса. Отримаємо:

$$E 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} .$$

Після скорочень знаходимо, що величина напруженості електричного поля однорідно зарядженої прямолінійної нитки описується виразом

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

З цієї формули слідує, що напруженість електричного поля однорідно зарядженої прямолінійної нитки (дротини) обернено пропорційна відстані до неї.

1.7. Основні формули для розв'язку задач

1. Електричний заряд кратний елементарному:

$$q = \pm Ne.$$

2. Сума зарядів ізольованої системи є величиною постійною:

$$q_1 + q_2 + q_3 + ...q_n = const.$$

3. Закон Кулона. Сила, з якою перший заряд q_1 діє на заряд q_2, дорівнює

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_{12}\right|^2}\frac{\vec{r}_{12}}{\left|\vec{r}_{12}\right|},$$

де $\vec{r}_{12}$ – радіус-вектор, початок якого співпадає з першим зарядом, а кінець – з другим зарядом, $\vec{F}_{12}$ – сила, прикладена до другого заряду.

4. Сила, з якою електричне поле діє на заряд q:

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

де $\vec{E}$ – напруженість електричного поля.

5. Формула для напруженості електричного поля, утвореного точковим зарядом q:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left|\vec{r}\right|^2}\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|}.$$

6. Потенціальна енергія взаємодії двох точкових зарядів:

$$W(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}.$$

7. Зв'язок між напруженістю електричного поля та потенціалом:

$$\vec{E} = -grad\varphi, \qquad \varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r})d\vec{r}.$$

8. Потенціал точкового заряду визначається за формулою:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

9. Енергія заряду в потенціальному полі:

$$W = q\varphi .$$

10. Формула для потоку вектора напруженості електричного поля:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S} .$$

11. Терема Гауса для вектора напруженості електричного поля:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV .$$

12. Напруженість електричного поля зарядженої пластини:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} .$$

13. Напруженість електричного поля зарядженої нитки:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} .$$

1.8. Питання для самоконтролю

1. Наведіть приклади електризації.

2. Чому електричні заряди мають два знаки?

3. Який заряд називають елементарним?

4. Поясніть, чому заряд не залежить від швидкості.

5. Чим протон відрізняється від електрона?

6. Наслідком якої властивості мікрочастинок є закон збереження заряду?

7. Які заряди є точковими?

8. Напишіть формулу закону Кулона з поясненням величин, які входять в цю формулу.

9. Для яких відстаней виконується закон Кулона?

10. Чи має величина ступеня в законі Кулона похибку?

11. Що характеризує напруженість електричного поля?

12. Як визначають напруженість електричного поля?

13. Які умови накладають на пробний заряд?

14. Напишіть формулу для напруженості електричного поля точкового заряду. Як визначається її напрямок для точкового заряду?

15. Поясніть принцип суперпозиції напруженостей електричних полів.

16. Напишіть формулу напруженості електричного поля для: системи точкових зарядів; об’ємного заряду; поверхневого заряду; лінійного заряду.

17. Як визначається об’ємна густина заряду, поверхнева густина заряду, лінійна густина заряду?

18. Як порахувати заряд, якщо відома об’ємна густина заряду, поверхнева густина заряду, лінійна густина заряду?

19. Напишіть формулу сили взаємодії двох об’ємно заряджених тіл та поясніть, які величини входять в цю формулу.

20. Поясніть ітераційну схему розрахунку силових ліній.

21. Чому розрахунок роботи поля точкового заряду відбувається шляхом інтегрування по відстані між зарядами?

22. Напишіть формулу для потенціальної енергії взаємодії двох точкових зарядів q_1 та q_2.

23. Запишіть інтегральну умову потенціальності електричного поля.

24. Запишіть диференціальну умову потенціальності електричного поля.

25. Як розписується ротор по компонентах?

26. Запишіть диференціал потенціалу через напруженість електричного поля.

27. Напишіть формулу диференціального зв’язку між потенціалом та напруженістю електричного поля.

28. Напишіть формулу інтегрального зв’язку між потенціалом та напруженістю електричного поля.

29. Напишіть формулу для енергії заряду, якщо відомий потенціал поля в точці розташування заряду.

30. Напишіть формулу для потенціалу точкового заряду.

31. Чому вектор напруженості електричного поля перпендикулярний до еквіпотенціальної поверхні?

32. Чому потік вектора напруженості поля для точкового заряду не залежить від форми замкнутої поверхні, яка його оточує?

33. Чому потік вектора напруженості через замкнуту поверхню дорівнює нулю, коли заряд знаходиться зовні поверхні?

34. Напишіть формулу для теореми Гауса для вектора напруженості електричного поля в інтегральному вигляді. Поясніть, які величини входять в цю формулу.

35. Напишіть формулу для теореми Гауса для вектора напруженості електричного поля в диференціальній формі.

36. Що таке дивергенція?

37. Що таке лапласіан? Запишіть рівняння Пуассона та рівняння Лапласа.

38. Напишіть формулу для напруженості електричного поля однорідно зарядженої площини.

Глава 2. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНАХ

2.1. Діелектрики

Діелектрики – це речовини, які не проводять електричного струму, і їх використовують, наприклад, для ізоляції провідників в електричних колах.

Діелектриками можуть бути речовини незалежно від їх агрегатного стану. Вони можуть перебувати в газоподібному, рідкому або твердому агрегатних станах.

Діелектрики впливають на взаємодії між зарядами і на розподіл електричного поля. Якщо два заряди розмістити в діелектрику, то сила взаємодії між ними зменшиться. Очевидно, що зменшення сили є наслідком того, що в діелектрику змінюється напруженість електричного поля. Змінити напруженість електричного поля можуть заряди речовини діелектрика. Отже основним при вивченні впливу діелектриків на електричне поле є з'ясування, як заряди речовини впливають на електричне поле. Ця задача є нетривіальною, бо самі заряди (точніше їх перерозподіл), як буде показано далі, виникають під дією електричного поля.

2.1.1. Поляризація діелектриків

При внесенні діелектриків в електричне поле відбувається спотворення поля. Можуть змінюватися величина і напрямок напруженості електричного поля. Зміна поля відбувається за рахунок перерозподілу власних зарядів діелектрика, який в процесі перерозподілу залишається електронейтральним.

Діелектрики бувають двох видів: *полярні* та *неполярні*.

У молекул полярних діелектриків розподіл додатних та від'ємних зарядів не співпадає. Якщо в молекулі всі додатні заряди ядер атомів замінити одним сумарним зарядом $+q$, який знаходиться у центрі розподілу всіх її додатних зарядів, а від'ємні заряди електронів замінити одним сумарним від'ємним зарядом, розміщеним у центрі розподілу від'ємних зарядів, то таку молекулу можна вважати електричним диполем, який складається із зарядів $+q$ і $-q$ з плечем l, що дорівнює відстані між цими зарядами (дивись рис.2.1).

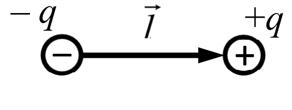


Рис. 2.1

Для характеристики диполя використовують фізичну величину, яку називають *дипольним* моментом

$$\vec{p} = q\vec{l} \ ,$$

де $\vec{l}$ – вектор, модуль якого дорівнює плечу диполя $|\vec{l}\,| = l$, початок співпадає з від'ємним зарядом, а кінець знаходиться на додатному заряді.

Якщо радіус-вектор положення додатного заряду позначити $\vec{r}_+$, а радіус-вектор положення від'ємного заряду позначити $\vec{r}_-$, то дипольний момент дорівнює сумі

$$\vec{p} = \sum_{i=1,2} q_i \vec{r}_i \ ,$$

де індекс i позначає номери додатного та від'ємного зарядів та їх радіус-вектори. Дійсно, зробимо перетворення цієї суми

$$\sum_{i=1,2} q_i \vec{r}_i = q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2 = q\vec{r}_+ - q\vec{r}_- = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q\vec{l} = \vec{p} \ ,$$

де враховано, що плече диполя може бути записане, як різниця радіус-векторів положень додатного та від'ємного зарядів $\vec{l} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$.

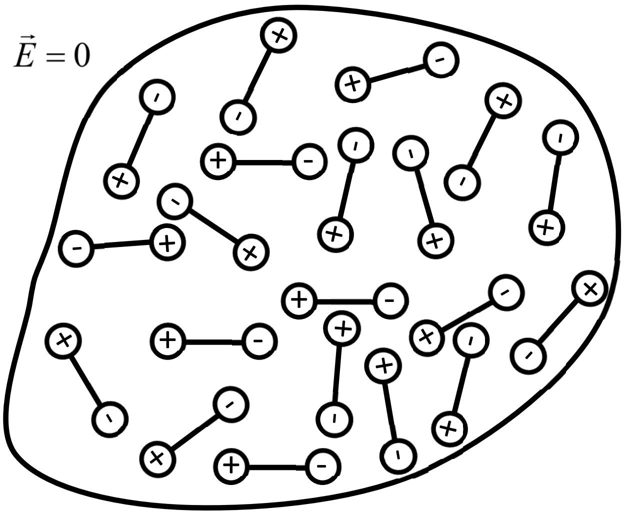


Рис. 2.2

Кожна молекула полярного діелектрика, незважаючи на те, що вона електронейтральна, має дипольний момент. Внаслідок теплового руху орієнтування електричних диполів молекул є хаотичним, тому діелектрик за відсутності зовнішнього електричного поля не виявляє електризації. Діелектрики за відсутності зовнішнього електричного поля не створюють власного електричного поля. На рис. 2.2 показано розподіл зарядів диполів у діелектрику з хаотичною орієнтацією його дипольних моментів. Диполі молекул полярного діелектрика схематично зображено у вигляді з'єднаних відрізком двох кульок зі знаком плюс та знаком мінус, які позначають центри додатного та від'ємного заряду молекул. В середньому в об'ємі та біля поверхні діелектрика в рівній мірі присутні додатний та від'ємний заряди диполів.

Якщо полярний діелектрик розмістити у зовнішньому електричному полі, то на електричні диполі діятиме пара сил, під впливом якої вони здійснять повороти. При повороті диполя його додатній заряд буде зміщуватися вздовж силових ліній зовнішнього електричного поля, а від'ємний – у протилежному напрямку, як на рис. 2.3, на якому показано орієнтації диполів після їх нахилу електричним полем.

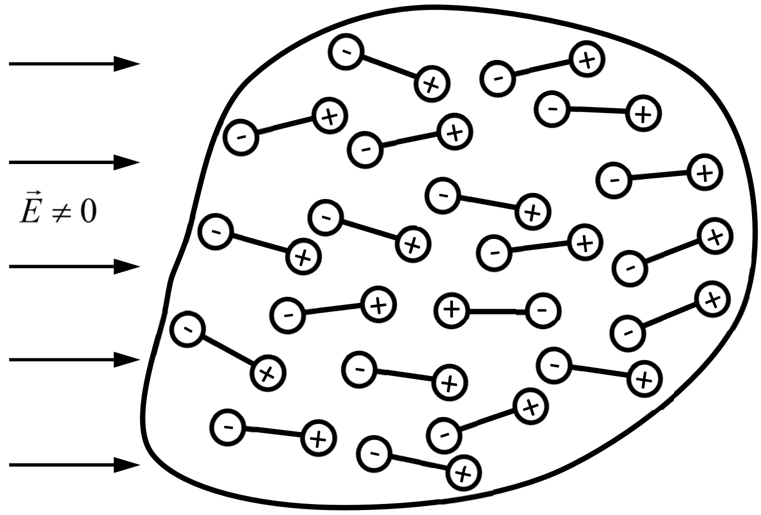


Рис. 2.3

Завдяки поворотам диполів і зміщенню їх зарядів на поверхні діелектрика, в яку входять силові лінії зовнішнього електричного поля, утворюються від'ємні заряди. На поверхні діелектрика, з якої силові лінії зовнішнього електричного поля виходять, утворюються додатні заряди. Ці заряди зв'язані зі своєю молекулою і не можуть її покинути, тому їх називають *зв'язаними*, або *поляризаційними*. Явище утворення поляризаційних зарядів називають *поляризацією діелектрика*.

Результуючі напрямки векторів диполів у полярному діелектрику визначаються досягненням рівноваги орієнтуючої дії електричного поля та розорієнтуючої дії теплового руху. Зі зростанням напруженості поля момент пари сил, що діє на молекули, зростає, і зростає ступінь поляризації. В сильному полі всі диполі полярного діелектрика будуть направлені уздовж вектора напруженості електричного поля. Такий вид поляризації діелектрика називають *орієнтаційним*.

Полярними діелектриками є, наприклад, такі речовини, як CO, NH, HCl, N_2O, SO_2 та інші.

В *неполярних* діелектриках за відсутності електричного поля центр розподілу від'ємного заряду електронів молекул співпадає з центром розподілу їх додатних зарядів, тому плече диполя дорівнює нулю $l = 0$. Якщо такий діелектрик помістити в електричне поле, то під дією електричної сили в молекулах відбувається зміщення електронів, центри додатного і від'ємного зарядів молекул не будуть співпадати, плече диполя стає не рівним нулю, $l \neq 0$. Величина дипольного моменту молекули неполярного діелектрика прямо пропорційна напруженості електричного поля

$$\vec{p} = \beta\varepsilon_0\vec{E} \ ,$$

де β – коефіцієнт, що характеризує поляризаційну здатність молекули. Прикладами неполярних діелектриків є H_2, O_2, N_2, CH_4 тощо.

2.1.2. Електричний диполь

Розглянемо електричний диполь у зовнішньому однорідному електростатичному полі. Нехай вектор дипольного моменту $\vec{p} = q\vec{l}$ направлений під кутом α до вектора напруженості поля $\vec{E}$, як показано на рис. 2.4.

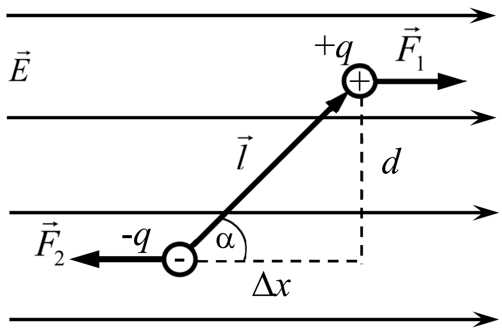


Рис. 2.4

На додатний заряд диполя поле діятиме з силою $\vec{F}_1 = q\vec{E}$, напрямок якої збігається із напрямком напруженості поля, а отже, і з напрямком ліній напруженості поля. На від'ємний заряд диполя $-q$ діятиме сила $\vec{F}_2 = -q\vec{E}$, напрямок якої протилежний напрямку сили $\vec{F}_1$.

В однорідному полі, $\vec{E} = const$, модулі цих сил однакові $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = q|\vec{E}| = qE$. Вони утворюють так звану *систему пари сил*, момент сили якої дорівнює $M = Fd = qEl\sin\alpha$. Врахуємо, що добуток заряду на плече диполя є дипольним моментом. Отримаємо, що момент сили дорівнює

$$M = pE\sin\alpha .$$

Запишемо вираз для моменту сили у векторному вигляді. Згідно з означенням моменту сил, маємо:

$$\vec{M} = [\vec{r}_+\vec{F}_1] + [\vec{r}_-\vec{F}_2] = [\vec{r}_+ q_+ \vec{E}] + [\vec{r}_- q_- \vec{E}] = [\vec{r}_+ q\vec{E}] + [\vec{r}_-(-q)\vec{E}] =$$
$$= [(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)q\vec{E}] = [q\vec{l}\vec{E}] ,$$

де враховано, що плече диполя дорівнює різниці радіус-векторів $\vec{l} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$. Оскільки добуток плеча диполя на заряд дорівнює дипольному моменту, то у векторному вигляді вираз для моменту сил, що діє на диполь в електричному полі, визначається векторним добутком вектора дипольного моменту на вектор напруженості електричного поля:

$$\vec{M} = [\vec{p}\vec{E}].$$

На електричний диполь, що знаходиться в однорідному електричному полі, діє пара сил. Під впливом пари сил електричний диполь намагається повернутися так, щоб його дипольний момент $\vec{p}$ був направлений уздовж лінії напруженості електричного поля. Він перебуватиме у стійкій рівновазі, коли кут $\alpha = 0$ (напрямок $\vec{p}$ збігається з напрямком ліній напруженості поля). Коли кут $\alpha = \pi$, то буде нестійка рівновага. У цих станах сили, що діють на заряди диполя, лежать на одній прямій і протилежно направлені, тому момент пари сил $M = 0$.

Розрахуємо роботу, яку виконує електричне поле при повороті диполя. Врахуємо, що при повороті диполя під дією поля робота поля додатна, а величина кута α зменшується. Елементарна робота дорівнює добутку моменту сили на елементарний кут повороту

$$dA = -M\,d\alpha = -pE\sin\alpha\,d\alpha\,,$$

де враховано, що $dA > 0$, а $d\alpha < 0$. Іншими словами, знак мінус у виразі для роботи є наслідком того, що диполь у прикладі, зображеному на рисунку, має повертатися за годинниковою стрілкою.

Робота, яку виконує момент сили при повороті диполя, коли початковий кут α_1, а кінцевий α_2, визначається шляхом інтегрування:

$$A = \int dA = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (-pE\sin\alpha)d\alpha = pE\cos\alpha\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = pE\cos\alpha_2 - pE\cos\alpha_1\,.$$

Згідно з означенням $A = -(W_2 - W_1)$, маємо, що потенціальна енергія диполя в електричному полі дорівнює

$$W = -pE\cos\alpha\,.$$

У векторному вигляді вираз для енергії диполя в електричному полі визначається скалярним добутком вектора дипольного моменту на вектор напруженості електричного поля

$$W = -\vec{p}\vec{E}\,.$$

Енергія електричного диполя найменша, коли вектор дипольного моменту направлений уздовж електричного поля, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}$, тому це є стійкою (рівноважною) орієнтацією диполя в електричному полі.

Розглянемо інший випадок, коли електричний диполь знаходиться у зовнішньому неоднорідному електростатичному полі. В цьому разі лінії напруженості не є паралельними прямими, вони, наприклад, можуть сходитися, як на рис. 2.5.

Сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, з якими неоднорідне поле діє на заряди диполя q і $-q$, будуть неоднаковими за величиною. У межах диполя неоднорідність зовнішнього поля незначна, тому сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ можна вважати напрямленими протилежно. Вони дорівнюють $\vec{F}_1 = q\vec{E}_1$ і $\vec{F}_2 = -q\vec{E}_2$, де $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ – значення напруженостей електричного поля в місцях розташування зарядів $+q$ і $-q$. На рис. 2.5 значення напруженостей поля $E_1 = |\vec{E}_1| > E_2 = |\vec{E}_2|$. Результуюча сила дорівнює алгебраїчній різниці модулів цих сил:

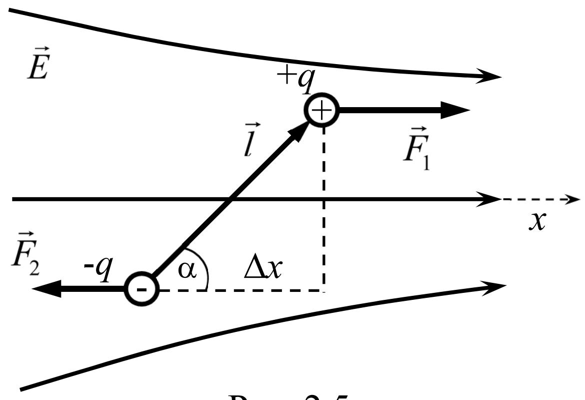


Рис. 2.5

$$F = qE_1 - qE_2 = q(E_1 - E_2).$$

Виберемо напрямок координатної осі x уздовж напрямку середньої силової лінії на рис. 2.5. Тоді

$$E_1 - E_2 = \frac{\partial E}{\partial x}\Delta x.$$

Підставимо це значення для різниці E_1–E_2 у вираз для сили і отримаємо для неї вираз:

$$F = q(E_1 - E_2) = q\frac{\partial E}{\partial x}\Delta x = q\frac{\partial E}{\partial x} l\cos\alpha = p\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha,$$

де враховано, що $\Delta x = l\cos\alpha$, $p = ql$.

Добуток $p\cos\alpha = p_E$ дорівнює проекції вектора дипольного моменту на вектор напруженості електричного поля, уздовж якого направлена вісь x на рис. 2.5, тому

$$F = p_E\frac{\partial E}{\partial x}.$$

Отже, в неоднорідному електростатичному полі на диполь, крім крутного моменту, діє сила, під дією якої диполь або втягується в область сильнішого електричного поля (кут α – гострий, p_E та $\partial E / \partial x$ мають однакові знаки), або навпаки – виштовхуватиметься з поля (кут α – тупий, або p_E та $\partial E / \partial x$ мають різні знаки).

Величину сили, що діє на діелектрик, в загальному випадку можна записати у вигляді

$$\vec{F} = -gradW = -grad(-\vec{p}\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{p}\vec{E}).$$

Коли поле має тільки одну складову $\vec{E} = (E_x(x), 0, 0)$, то ненульовою буде тільки x-ва складова вектора сили:

$$F_x = p_x \partial E_x / \partial x \text{, або } F = F_x = p_E \partial E / \partial x,$$

де p_E - проекція на поле.

Існування сил, що переміщують електричний диполь у область більшої напруженості поля, може бути фізичною причиною притягання до зарядженого тіла легких предметів (клаптиків паперу, часточок пилу, диму тощо). Під впливом електричного поля у частинок виникають індуковані поляризаційні заряди, і частинки ведуть себе у зовнішньому полі як диполі. Це явище використовують у техніці для створення електрофільтрів, у яких частинки пилу або диму осідають на електродах. Електричні фільтри застосовують на теплових електростанціях для очищення диму, на цементних та хімічних заводах, а також в побуті для очищення житлових приміщень.

2.1.3. Вектор поляризації

Коли зовнішнє електричне поле відсутнє, $\vec{E} = 0$, то дипольні моменти молекул неполярного діелектрика дорівнюють нулю. У полярного діелектрика за відсутності електричного поля диполі молекул орієнтовані рандомно (випадково). Коли відсутнє зовнішнє електричне поле, сумарний дипольний момент діелектрика також дорівнює нулю.

Під дією зовнішнього електричного поля, $\vec{E} \neq 0$, відбувається поляризація діелектрика, вектори дипольних моментів молекул не компенсують один одного, і сумарний дипольний момент діелектрика стає відмінним від нуля. Вектор сумарного (повного) дипольного моменту довільного об'єму діелектрика дорівнює сумі векторів дипольних моментів усіх молекул, що містяться в діелектрику.

Кількісною мірою поляризації діелектрика визначають електричний дипольний момент одиниці об'єму поляризованого діелектрика, який позначають вектором $\vec{P}$ і називають *вектором поляризації* діелектрика. За визначенням, вектор поляризації дорівнює

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{V}$$

де $\vec{p}_i$ – електричний момент i-го диполя; N – число диполів, що знаходяться в діелектрику об'ємом V.

Суму в чисельнику, пораховану по всім диполям, що містяться в діелектрику, називають електричним дипольним моментом діелектрика:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i .$$

Електричний дипольний момент діелектрика можна розрахувати за допомогою суми

$$\vec{J} = \sum_i q_i \vec{r}_i ,$$

де індекс i нумерує всі заряди діелектрика.

Отже електричний дипольний момент діелектрика дорівнює сумі добутків зарядів на їх радіус-вектори.

Тепер вираз для вектора поляризації можна записати інакше:

$$\vec{P} = \frac{\sum_i q_i \vec{r}_i}{V} .$$

Таким чином, вектор поляризації дорівнює сумі добутків зарядів на їх радіус-вектори, порахованій для одиниці об'єму діелектрика.

У загальному випадку вектор поляризації $\vec{P}$ можна визначити як границю відношення електричного моменту деякого об'єму ΔV діелектрика, що оточує дану точку середовища діелектрика, до об'єму, коли останній прямує до нуля, тобто

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{J}}{\Delta V} ,$$

або

$$\vec{P} = \frac{d\vec{J}}{dV} ,$$

де dV – елементарний об'єм ділянки діелектрика, дипольний момент якої $d\vec{J}$.

Розрахуємо вектор поляризації однорідного неполярного діелектрика з малою концентрацією полярних молекул. Врахуємо, що вектори дипольного моменту у кожної молекули однакові і дорівнюють $\vec{p}_i = \beta\varepsilon_0\vec{E}$. Підставимо цей вираз у формулу для вектора поляризації, отримаємо

$$\vec{P}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\beta\varepsilon_0\vec{E}}{V}=\beta\varepsilon_0\vec{E}\frac{\sum_{i=1}^{N}1}{V}=\beta\varepsilon_0\vec{E}\frac{N}{V},$$

де N – кількість полярних молекул в об’ємі V. Відношення кількості молекул до об’єму дорівнює концентрації полярних молекул в речовині, $n = N / V$. Тепер вираз для поляризації набуде вигляду:

$$\vec{P}=\varepsilon_0\beta n\vec{E}.$$

Величини параметрів β та n залежать тільки від роду речовини, тому їх добуток βn є характеристикою речовини, і його називають *діелектричною сприйнятливістю*. Ця фізична величина, æ$=\beta n$, визначає зв’язок вектора поляризації з величиною напруженості електричного поля. Таким чином, вектор поляризації пропорційний напруженості електричного поля:

$$\vec{P}=æ\,\varepsilon_0\vec{E}.$$

Цю формулу отримано для однорідного неполярного діелектрика. Вона виконується також і для полярного діелектрика в полі з невеликою величиною напруженості.

2.1.4. Вектор поляризації та поляризаційні заряди

Вектор поляризації діелектрика $\vec{P}$ виникає внаслідок явища поляризації діелектрика, яке супроводжується утворенням поверхневого зв’язаного заряду. Установимо зв'язок між цими фізичними величинами. Для цього між двома паралельними нескінченно довгими різнойменно зарядженими площинами розмістимо однорідний діелектрик, який має форму тонкої пластини, причому ця пластина розміщена паралельно до заряджених зовнішніх площин, рис. 2.6. Під дією електричного поля, утвореного зарядженими площинами з поверхневими густинами зарядів $+\sigma_0$ та $-\sigma_0$, відбувається поляризація діелектрика.

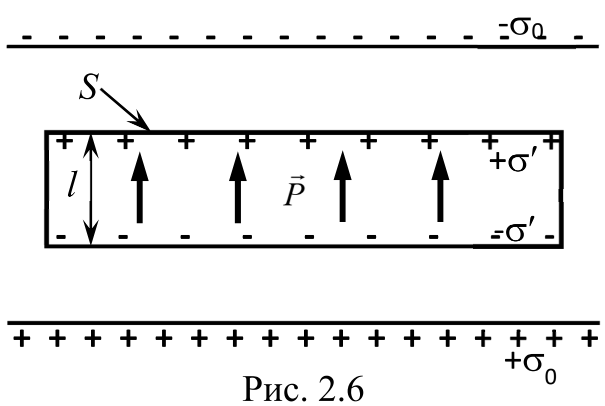


Рис. 2.6

Завдяки поляризації на поверхнях пластинки діелектрика з’являться зв’язані електричні заряди, поверхневу густину яких позначимо $+\sigma'$ та $-\sigma'$. З рис. 2.6 видно, що поляризовану пластинку однорідного діелектрика можна вважати системою зарядів, що утворюють диполь, додатний заряд якого дорівнює $q' = +\sigma' S$, а від'ємний дорівнює $q'' = -q' = -\sigma' S$. Плече диполя дорівнює товщині пластинки l, S – площа її зарядженої поверхні. З означення, що дипольний момент діелектрика дорівнює сумі добутків зарядів на їх радіус-вектори, отримаємо, що до цієї суми будуть входити тільки поверхневі заряди і ненульовою буде тільки компонента вектора поляризації, перпендикулярна до поверхні. Величина вектора дипольного моменту буде дорівнювати добутку модуля поляризаційних зарядів поверхонь на відстань між ними $J = q'l$, або $J = \sigma' Sl = \sigma V$ (де $V=Sl$ - об'єм діелектрика).

Згідно з означенням, вектор поляризації діелектрика можна знайти з відношення:

$$P = \frac{J}{V} = \frac{\sigma' V}{V} = \sigma' .$$

Отже, вектор поляризації однорідного діелектрика, розташованого в однорідному електричному полі, дорівнює поверхневій густині зв'язаного заряду.

2.1.5. Електричне поле в діелектрику

В якості джерела однорідного зовнішнього електричного поля візьмемо дві паралельні різнойменно заряджені площини з поверхневими густинами заряду $+\sigma_0$ та $-\sigma_0$. На рис. 2.7 силові лінії цього поля направлені вгору і позначені пунктиром. Напруженість поля, утвореного цими зарядженими площинами, коли між ними відсутній діелектрик, дорівнює

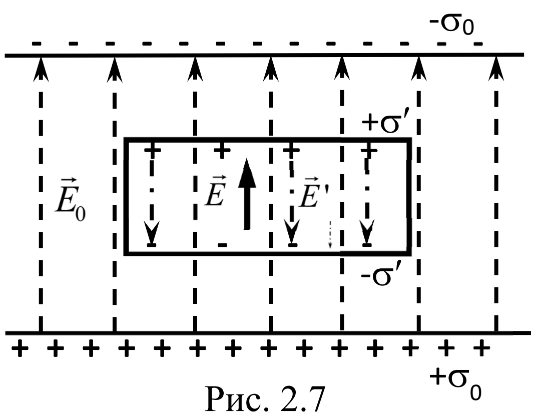


Рис. 2.7

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} .$$

Розмістимо між цими площинами однорідну діелектричну пластину, яка орієнтована паралельно до заряджених площин, як на рис. 2.7. Під впливом електричного поля $\vec{E}_0$ діелектрик поляризується. На його поверхнях утворюються зв'язані заряди з поверхневою густиною σ'. Силові лінії поля $\vec{E}'$, утвореного поверхневими зв'язаними зарядами діелектричної пластини, на рис. 2.7 направлені вниз і позначені штрих-пунктирними стрілками. Напруженість електричного поля поляризаційних зарядів дорівнює

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}.$$

Вектори зовнішнього $\vec{E}_0$ і поляризаційного $\vec{E}'$ електричних полів направлені протилежно один до одного, $\vec{E}_0 \uparrow\downarrow \vec{E}'$.

Вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$ всередині діелектрика, який позначено суцільною стрілкою, за принципом суперпозиції дорівнює сумі векторів, $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$. Абсолютна величина напруженості поля $E = |\vec{E}|$ в діелектрику буде дорівнювати різниці величин напруженостей полів:

$$E = E_0 - E',$$

де $E_0 = |\vec{E}_0|$, $E' = |\vec{E}'|$.

Підставимо у цей вираз величини напруженостей E_0 і E', тоді отримаємо:

$$E = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0}.$$

Отже, напруженість E електричного поля в діелектрику менша за напруженість зовнішнього електричного поля E_0, в якому розміщено діелектрик.

2.1.6. Діелектрична проникність та діелектрична сприйнятливість

Здатність діелектриків змінювати (послаблювати) електричні поля характеризують фізичною величиною, яку називають *діелектричною проникністю* і позначають ε. Вона дорівнює відношенню величини напруженості зовнішнього електричного поля до напруженості електричного поля в діелектрику

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}.$$

Коли джерелом однорідного поля є дві різнойменні площини, то отримаємо, що діелектрична проникність діелектрика пластини, розміщеної паралельно до заряджених зовнішніх площин, може бути знайдена з відношення густин поверхневих зарядів:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E_0 - E'} = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma'}.$$

Якщо з умов експерименту відомі значення густини σ_0 площин – джерел зовнішнього електричного поля, і відома величина ε діелектрика, то можна знайти поверхневу густину зв'язаного заряду σ':

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma_0 .$$

Знайдемо зв'язок між діелектричною проникністю ε та діелектричною сприйнятливістю æ.

Діелектрична сприйнятливість визначається як коефіцієнт пропорційності між поляризацією $\vec{P}$ та напруженістю $\vec{E}$ електричного поля в діелектрику. Як було показано вище, в лінійних однорідних середовищах ця пропорційність описується виразом $\vec{P} = æ\varepsilon_0 \vec{E}$, де $\vec{E}$ – напруженість поля всередині діелектрика. Врахуємо, що за величиною поляризація дорівнює поверхневому заряду, $P = \sigma'$. Отримаємо, що напруженість електричного поля поляризаційних зарядів пропорційна напруженості електричного поля всередині діелектрика, $E' = \sigma' / \varepsilon_0 = P / \varepsilon_0 = æE$. Таким чином, діелектрична сприйнятливість як фізична величина характеризує пропорційність між напруженістю поля поляризаційних зарядів та напруженістю поля всередині діелектрика.

Тепер ще раз використаємо формулу, за якою напруженість поля всередині діелектрика складається з напруженостей зовнішнього поля та поля, утвореного зв'язаними зарядами, $E = E_0 - E'$, підставивши значення $E' = æE$. Отримаємо

$$E = E_0 - æE.$$

Звідси знаходимо, що поле всередині діелектрика і зовнішнє поле зв'язані співвідношенням

$$E_0 = (1 + æ)E .$$

Порівнявши цей вираз з $E_0 / E = \varepsilon$, отримаємо, що діелектрична проникність пропорційна діелектричній сприйнятливості:

$$\varepsilon = 1 + æ,$$

тобто діелектрична проникність середовища дорівнює діелектричній сприйнятливості, збільшеній на одиницю.

Завдяки поляризації напруженість електричного поля точкового заряду q в оточуючому його просторі, заповненому однорідним діелектриком, зменшиться в ε разів і набуде вигляду:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r ,$$

де $\vec{e}_r$ – орт, r – модуль радіус-вектора $\vec{r}$.

Потенціал електричного поля точкового заряду q в оточуючому його просторі, заповненому однорідним діелектриком, зменшується в ε разів і набуває вигляду:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r},$$

де $r = |\vec{r}\,|$ – відстань до заряду.

Сила взаємодії між двома точковими зарядами, розташованими в однорідному діелектрику, завдяки поляризації зменшується:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}},$$

де $\vec{r}_{12}$ – вектор положення заряду q_2 відносно заряду q_1, а $\vec{F}_{12}$ – сила, з якою заряд q_1 діє на заряд q_2, і яка прикладена да заряду q_2.

2.1.7. Вектор електричної індукції

Напруженість електричного поля $\vec{E}$ в діелектрику пропорційна напруженості $\vec{E}_0$ зовнішнього електричного поля і зменшується на величину діелектричної проникності

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}.$$

Напруженості електричного поля в різних діелектриках, якщо їх розмістити в однаковому зовнішньому електричному полі, будуть різними:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_1},\ \ldots\ \vec{E}_i = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_i}, \ldots\ \vec{E}_n = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_n},$$

бо діелектрики відрізняються величинами проникненостей $\varepsilon_1, \ldots\ \varepsilon_i, \ldots \varepsilon_n$, де n – кількість діелектриків, $1 \le i \le n$.

На поверхні діелектрика певна частка силових ліній зовнішнього поля розривається, вони замкнуться на поляризаційних зарядах. Фізичною величиною, лінії якої не розриваються на діелектрику, є вектор електричної індукції, який визначають формулою:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

Модуль вектора $\vec{D}$ в діелектриках, розміщених в однаковому зовнішньому електричному полі, є однаковим. Для кожного з діелектриків маємо

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_i \vec{E}_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_i} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 .$$

Коли джерелом однорідного поля є дві різнойменно заряджені площини, $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$, то величина вектора індукції, утвореного зарядом цих площин, буде дорівнювати густині заряду:

$$D = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \sigma_0 .$$

Таким чином, модуль вектора електричної індукції не залежить від типу діелектрика і визначається тільки зарядами пластин, які є джерелами зовнішнього електричного поля. Щоб відокремити заряди σ_0, які є джерелами зовнішнього поля, від поляризаційних, індукованих зовнішнім полем, їх називають *сторонніми* зарядами.

В системі СІ одиницею електричної індукції є 1 Кл/м^2.

Розрахуємо потік вектора індукції електричного поля $\vec{D}$. За означенням потоку, він дорівнює $\Phi_D = \oint\limits_S \vec{D} d\vec{S}$. Врахуємо, що $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$, де $\vec{E}_0$ – напруженість електричного поля сторонніх зарядів. Отримаємо, що потік вектора електричної індукції виражається через потік вектора напруженості поля сторонніх зарядів:

$$\Phi_D = \varepsilon_0 \oint\limits_S \vec{E}_0 d\vec{S} .$$

За теоремою Гауса для вектора напруженості електричного поля,

$$\Phi_E = \oint\limits_S \vec{E}_0 d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} ,$$

де q – величина охопленого поверхнею стороннього заряду – джерела зовнішнього поля $\vec{E}_0$.

Таким чином, отримано, вираз для теореми Гауса для вектора індукції електричного поля:

$$\Phi_D = q \text{ , або } \oint\limits_S \vec{D} d\vec{S} = q ,$$

за яким потік вектора електричної індукції через замкнуту поверхню дорівнює сторонньому заряду, охопленому поверхнею.

В диференціальній формі теорема Гауса для вектора індукції електричного поля записується у вигляді:

$$div\vec{D} = \rho_{cm} ,$$

де $\rho_{ст}$ – густина сторонніх (неполяризаційних) зарядів.

Запишемо формулу для вектора індукції точкового заряду:

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Бачимо, що його величина не залежить від того, яким діелектриком оточено заряд.

Між електричною індукцією $\vec{D}$, напруженістю $\vec{E}$ електричного поля та вектором поляризації $\vec{P}$ існує зв'язок. З формул $E = E_0 - E'$, $E_0 = \sigma_0 / \varepsilon_0$, $E' = \sigma' / \varepsilon_0$ отримаємо:

$$E = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0}.$$

Оскільки $D = \sigma_0$, а $P = \sigma'$, то цей вираз набуває вигляду:

$$E = \frac{D - P}{\varepsilon_0}, \quad \text{або} \quad D = \varepsilon_0 E + P.$$

У векторній формі зв'язок між векторами $\vec{D}$, $\vec{E}$ та $\vec{P}$ можна записати у вигляді:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Ця формула поєднує в кожній точці діелектрика вектор електричної індукції, вектор напруженості електричного поля та вектор поляризації.

2.2. Провідники в електричному полі

2.2.1. Поверхневий розподіл заряду провідника

Провідники – це речовини, які містять велику кількість вільних носіїв заряду. На відміну від діелектриків, провідники не є ізоляторами і добре проводять електричний струм. В металах валентні електрони слабко зв'язані з додатно зарядженими ядрами атомів, і, оскільки такі електрони здатні рухатись в межах об'єму всього провідника, їх називають *вільними*. Вільні електрони є носіями струму в металах.

Якщо заряджати діелектрик, то заряди в ньому будуть знаходитись в місцях, де вони були створені при поляризації. Наприклад, один кінець ебонітової палички може мати від'ємний заряд, а інший – додатний.

У провідниках заряди, які здатні вільно переміщуватися по провіднику, впливають на розподіл заряду. Для прикладу розглянемо металеву кулю. В ній вільними є електрони, заряд яких скомпенсовано зарядом іонів. Припустимо, що в середині кулі є певна кількість нескомпенсованих однойменних зарядів, утворених, наприклад, надлишковими електронами. Між ними виникне сила відштовхування, тому заряди будуть переміщуватися і, як наслідок, розподіляться на поверхні кулі.

Куля є сферично симетричним тілом, всі точки її поверхні є еквівалентними, тому заряди розподіляються рівномірно на поверхні кулі і не створюють електричного поля в середині провідника. Якби таке поле було, то під його дією, вільні електрони мали б узгоджено рухатись, і мав би виникати електричний струм, тому наявність електростатичного поля в середині провідника суперечить закону збереження енергії. Адже, коли тече струм, то має виділятися енергія, що можливо тільки за присутності джерела струму. Таким чином, у випадку металевої кулі електричні заряди рівномірно розподіляються по поверхні кулі, в середині кулі електричне поле відсутнє.

Ефект відсутності електричного поля всередині зарядженого провідника і розподіл заряду на поверхні провідника був підтверджений в експериментах. Отже, у стані рівноваги електричний заряд розподіляється на поверхні провідника, або, якщо точніше, – на зовнішній поверхні провідника. Поверхнева густина розподілу електричного заряду залежить від кривизни поверхні, вона найбільша в місцях найбільшої опуклості поверхні провідника. Тому найбільшою буде напруженість електричного поля на вістрях провідника, як на рис. 2.8.

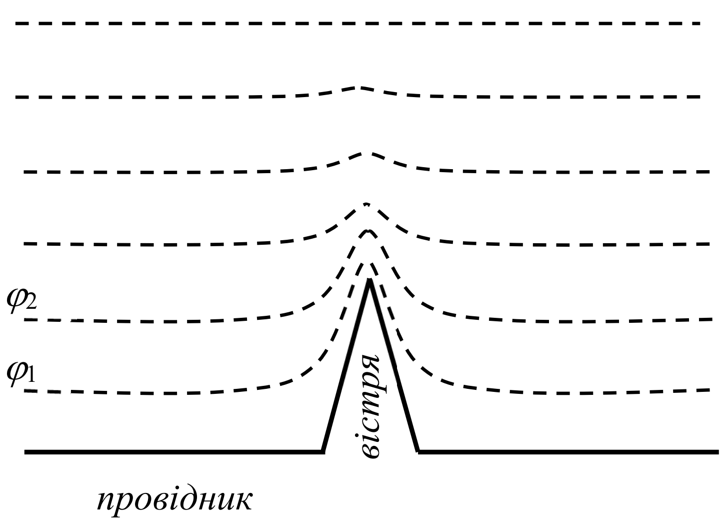


Рис. 2.8

Незалежно від форми провідника, його заряд знаходять інтегруванням поверхневої густини заряду:

$$q = \oint\limits_{(S)} \sigma dS,$$

де σ – густина поверхневого заряду.

На рис. 2.8 зображено вістря, яке розташоване на плоскій металевій поверхні. Пунктиром на рисунку зображені еквіпотенціальні поверхні. У випадку зарядженої площини еквіпотенціальними поверхнями є площини, які паралельні площині заряду. Тому на великій відстані від вістря еквіпотенціальні поверхні є паралельними площинами. Біля вістря еквіпотенціальні поверхні викривляються, і відстань між ними зменшується. Відповідно, біля вістря зростає напруженість електричного поля. Величина напруженості біля вістря зростає у стільки разів, у скільки разів зменшується відстань між еквіпотенціальними поверхнями. Якщо поверхня провідника має додатний заряд, то для потенціалів ізоповерхонь виконується умова $\varphi_1>\varphi_2$ як на рис. 2.8.

Всередині заряджених провідників електричне поле відсутнє, тому напруженість електричного поля всередині провідників дорівнює нулю, тобто E=0. Звідси випливає, що потенціал всередині провідника має бути однаковим в усіх його точках. Справді,

$$\vec{E} = -grad\varphi = 0 \ ,$$

тому в провіднику $\varphi = const$.

Поверхня провідника є еквіпотенціальною поверхнею, а лінії напруженості електростатичного поля поблизу поверхні провідника перпендикулярні до його поверхні

2.2.2. Поле біля поверхні провідника

Знайдемо зв’язок між напруженістю електричного поля біля поверхні провідника E і поверхневою густиною заряду σ. Розглянемо невелику ділянку провідника ΔS, як на рис. 2.9. В межах малої ділянки густина заряду майже незмінна, σ=const. Заряд ділянки дорівнює $q=\sigma\Delta S$.

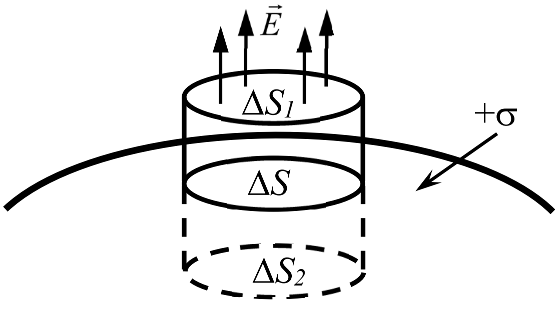


Рис. 2.9

Проведемо через цю малу поверхню ΔS твірні, як на рис. 2.9. Вони утворюють циліндр з основами ΔS_1 і ΔS_2, які паралельні ділянці ΔS всередині циліндра. Застосуємо теорему Гауса, яка в загальному випадку записується у вигляді:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

де інтегрування здійснюється по замкнутій поверхні циліндра, а q – охоплений нею заряд.

Всередині провідника $\vec{E} = 0$, тому потік через частину поверхні циліндра, що знаходиться в провіднику, дорівнює нулю. Бічна частина циліндра, що знаходяться зовні провідника, паралельна силовим лініям $\vec{E}$. Отже, ненульовий внесок в потік буде отримано лише на основі циліндра, яка лежить над поверхнею провідника:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} \vec{E}d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} EdS = E\Delta S_1 = E\Delta S .$$

Величина охопленого циліндром заряду дорівнює $q=\sigma\Delta S$.

Таким чином, з теореми Гауса маємо рівняння:

$$E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0} .$$

З цього рівняння знаходимо вираз для напруженості електричного поля біля поверхні провідника:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} .$$

Отже, напруженість електричного поля біля та на поверхні провідника прямо пропорційна поверхневій густині електричного заряду і направлена перпендикулярно до поверхні провідника.

Якщо провідник оточений діелектриком, то величина напруженості електричного поля на поверхні провідника буде дорівнювати

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} ,$$

тобто буде зменшеною в ε разів, де ε – діелектрична проникність діелектрика.

2.2.3. Електризація провідника в електричному полі

Розглянемо електростатичне поле. Внесемо в це поле незаряджений металевий провідник. Вільні електрони провідника під дією зовнішнього електричного поля почнуть переміщуватися проти його силових ліній. Внаслідок цього на поверхні провідника, куди входять силові лінії зовнішнього поля, з’являться надлишкові електрони. Ця частина провідника зарядиться від’ємно. Навпаки, на протилежному боці провідника, звідки виходять силові лінії зовнішнього поля, не вистачатиме вільних електронів, і там виникне додатний заряд.

Перерозподіл зарядів у провіднику триватиме до тих пір, поки в кожній його точці потік вектора напруженості електричного поля поверхневих зарядів не зрівняється за абсолютною величиною з потоком вектора напруженості зовнішнього електричного поля. Урівноваження протилежно направлених потоків силових ліній призведе до повної компенсації електричного поля всередині провідника. Коли всередині провідника напруженість стане рівною нулю, $\vec{E}=0$, то процес перерозподілу зарядів припиниться. Утворені поверхневі заряди також перебуватимуть у рівновазі. Явище виникнення у провіднику поверхневих зарядів під впливом зовнішнього електричного поля називають *електризацією*, а поверхневі заряди називають *індукованими*, або *наведеними*.

Отже у провіднику, розміщеному в зовнішньому електричному полі, індуковані заряди компенсують зовнішнє електричне поле, напруженість електричного поля всередині провідника дорівнює нулю, $\vec{E}=0$. Скориставшись залежністю між напруженістю поля і потенціалом, легко довести, що поверхня провідника, внесеного в електричне поле, є еквіпотенціальною. Як і у випадку зарядженого провідника, для всіх точок провідника в електричному полі виконується рівняння

$$\vec{E}=-grad\varphi=0.$$

З цього рівняння слідує, що в провіднику, розміщеному в електричному полі, $\varphi=const$. Потенціал поверхні провідника називають потенціалом провідника.

Всі точки провідника, розміщеного в зовнішньому електричному полі, мають однаковий потенціал і його поверхня є еквіпотенціальною. На поверхні провідника тангенціальна уздовж поверхні складова вектора напруженості електричного поля дорівнює нулю, $E_\tau=0$ або $(grad\varphi)_\tau=0$. Не рівною нулю на поверхні провідника є тільки перпендикулярна до неї складова поля, $E_n\neq 0$ або $(grad\varphi)_n\neq 0$. Це – так звані граничні умови для напруженості поля на поверхні провідника.

Ефект відсутності електростатичного поля всередині провідника або на його внутрішніх поверхнях використовують для захисту (екранування) людей та електронної апаратури від сильних зовнішніх електричних полів.

2.2.4. Електроємність віддаленого провідника

Віддаленим називають провідник, що знаходиться на великій відстані від інших провідників чи тіл, які можуть мати заряди. Якщо інші заряди знаходяться на великій відстані, то вони не спотворюють розподіл заряду на віддаленому провіднику.

Заряд q, якого надано провіднику, розподіляється на його поверхні, причому всередині провідника електричне поле відсутнє. Якщо провіднику додатково надати ще такого ж самого заряду q, то характер просторового розподілу заряду на поверхні не зміниться, але у два рази зросте поверхнева густина заряду.

Електричні заряди розподіляються в такий спосіб, щоб відношення поверхневої густини зарядів у двох різних точках поверхні провідника було однаковим, незалежно від повного заряду провідника.

Якщо збільшувати заряд провідника, то в кожній точці його поверхні пропорційно до величини заряду буде зростати густина поверхневого заряду, і в стільки саме разів буде зростати напруженість електричного поля. Потенціал провідника також буде зростати пропорційно зростанню його заряду. Якщо провіднику надати *n* зарядів, $q_1,\ldots\ q_i,\ldots,\ q_n$ $(1 \le i \le n)$, то його потенціал, відповідно, буде рівним $\varphi_1,\ldots\ \varphi_i,\ldots\ \varphi_n$. З урахуванням пропорційності між зарядом і потенціалом, буде виконуватись рівність:

$$\frac{q_1}{\varphi_1}=\ldots\frac{q_i}{\varphi_i}=\ldots=\frac{q_n}{\varphi_n}.$$

Відношення заряду провідника до його потенціалу є постійною величиною, яку називають *електроємністю*, або просто *ємністю* провідника:

$$C=\frac{q}{\varphi},$$

де C – ємність.

Чисельно електроємність провідника дорівнює заряду, якого треба надати провіднику, щоб його потенціал зріс на 1 вольт.

В системі СІ одиницею ємності є фарад (Ф), [С]=Ф. Ємність 1 Ф має провідник, який має заряд 1 Кл і потенціал якого 1 В, $1\text{Ф}=\frac{1\text{Кл}}{1\text{В}}$.

Електроємність провідника не залежить від природи його речовини, вона залежить лише від його геометричних параметрів, його розмірів, форми і діелектричної проникності навколишнього середовища.

2.2.5. Електроємність кулі

Розглянемо металеву кулю, радіус якої *R*. Надамо кулі заряд q. Потенціал кулі описується виразом, який було отримано раніше:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Якщо кулю оточити діелектриком, діелектрична проникність якого ε, то потенціал кулі буде зменшений:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}.$$

З означення ємності $C = q / \varphi$ отримаємо вираз для ємності кулі:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R.$$

За допомогою цієї формули можемо знайти, наприклад, ємність кулі, радіус якої дорівнює радіусу Землі, $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м:

$$C = 4 \cdot 3.14 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 6.37 \cdot 10^6 = 7.08 \cdot 10^{-4} \text{ (Ф)}$$

Зауважимо, що ємність 1 міліфарад є дуже великою величиною, вона співрозмірна з ємністю Землі.

2.2.6. Енергія зарядженого провідника

Розглянемо відокремлений незаряджений провідник, який будемо заряджати, поступово надаючи йому порцій елементарного заряду dq. При заряджанні провідника його потенціал φ також буде поступово зростати. Елементарна робота зовнішньої сили при перенесенні наступної порції елементарного заряду буде дорівнювати

$$dA = \varphi dq.$$

Врахуємо, що $\varphi = q / C$, де C – ємність провідника. Тепер елементарну роботу можна записати у вигляді:

$$dA = \frac{qdq}{C}.$$

Отже, робота зовнішньої сили при заряджанні провідника до заряду q може буде знайдена шляхом інтегрування

$$A = \int dA = \int_0^q \frac{qdq}{C} = \frac{q^2}{2C}.$$

Знову використовуючи формулу $\varphi = q / C$, отримаємо, що робота зовнішньої сили при заряджанні провідника дорівнює половині добутку заряду провідника на потенціал провідника:

$$A = \frac{q\varphi}{2}.$$

Згідно з законом збереження і перетворення енергії, робота A має йти на зростання енергії провідника. Коли провідник був незаряджений ($q = 0$), то його електрична енергія дорівнювала нулю. Набута електрична енергія зарядженого провідника дорівнює виконаній роботі при заряджанні провідника $W=A$. Отже, енергія зарядженого провідника дорівнює

$$W = \frac{\varphi q}{2}, \text{ або } W = \frac{q^2}{2C}, \text{ або } W = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

Двійка у знаменнику виникла через те, що зазначена енергія є власною енергією поля, створеного зарядом. Нагадаємо, що енергія точкового заряду у зовнішньому полі дорівнює добутку заряду на потенціал поля без двійки.

2.2.7. Конденсатори

Конденсатор – це пристрій для накопичення заряду та електричної енергії. Складається конденсатор з провідників, розділених діелектриком.

Конструктивно конденсатори мають дві чи більшу кількість провідників (часто у вигляді пластин), які називають *обкладками*. Обкладки розділені діелектриком. У конденсатора з двома обкладками одна з них заряджається додатно, $+q$, інша – від'ємно з зарядом $-q$. Модуль заряду однієї з обкладинок називається *зарядом конденсатора*.

Електричне поле конденсатора зосереджене між його обкладками. Тому наявність інших тіл біля конденсатора практично не впливає на його ємність.

Різниця потенціалів між обкладками конденсатора називається *напругою конденсатора*, $U = \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Електроємність конденсатора C визначають з відношення заряду конденсатора до різниці потенціалів $\Delta\varphi$ (напруги U) між його обкладками:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}, \text{ або } C = \frac{q}{U}.$$

Ємність конденсаторів також вимірюють у фарадах. Фарад – одиниця ємності, яка дорівнює ємності такого конденсатора, кожній обкладці якого потрібно надати різнойменні заряди 1 Кл, щоб змінити різницю потенціалів між обкладками на 1 В. За формою обкладок конденсатори бувають плоскі, циліндричні, сферичні та ін. Залежно від типу діелектрика, конденсатори поділяють на паперові, слюдяні, керамічні, електролітичні.

2.2.8. Електроємність конденсаторів

Визначимо електроємність плоского, циліндричного та сферичного конденсаторів.

А) *Плоский* конденсатор утворюють дві металеві пластинки, паралельні одна одній і розділені ізолятором, як на рис. 2.10. Відстань між обкладками *d*, площа кожної з обкладок *S*.

Розміри обкладок конденсатора значно перевищують відстань між ними, тому електричне поле між обкладками плоского конденсатора можна вважати однорідним. Заряд на обкладках розподілений рівномірно з поверхневою густиною $\sigma = q / S$.

Електричне поле між обкладками плоского конденсатора однорідне. Його напруженість дорівнює подвоєній напруженості електричного поля, утвореного однією обкладкою:

$$E = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

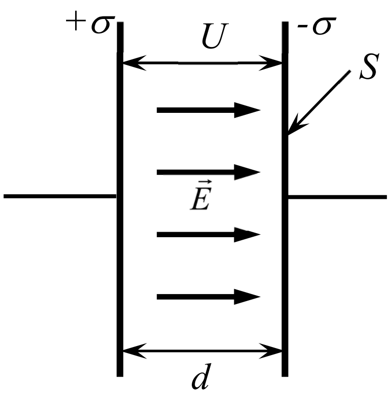


Рис. 2.10

Різниця потенціалів між обкладками дорівнює добутку напруженості електричного поля в конденсаторі на відстань між обкладками:

$$U = \int_0^d \vec{E}d\vec{l} = \int_0^d Edl = E\int_0^d dl = Ed.$$

Тут інтегрування здійснюється уздовж силової лінії – відрізку прямої від додатно зарядженої пластини до від'ємно зарядженої пластини, тому вектори співнаправлені, $\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{l}$. Крім того враховано, що поле однорідне.

Ємність конденсатора:

$$C = \frac{q}{U}.$$

Підставимо значення напруги, $U = Ed$, та заряду, $q = \sigma S$, у вираз для електроємності, отримаємо:

$$C = \frac{\sigma S}{Ed}.$$

Тепер скористаємось виразом для напруженості електричного поля, $E = \sigma / \varepsilon\varepsilon_0$, з якого маємо $\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E$. Як результат отримаємо формулу для ємності плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 ES}{Ed} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

Величина ємності плоского конденсатора прямо пропорційна площі S обкладок, обернено пропорційна відстані d між ними та прямо пропорційна діелектричній проникності ε діелектрика між його обкладками.

Б) *Циліндричний* конденсатор утворюють дві тонкі металеві розділені шаром ізолятора циліндричні трубки, вставлені одна в одну так, що їх осі збігаються, як показано на рис. 2.11.

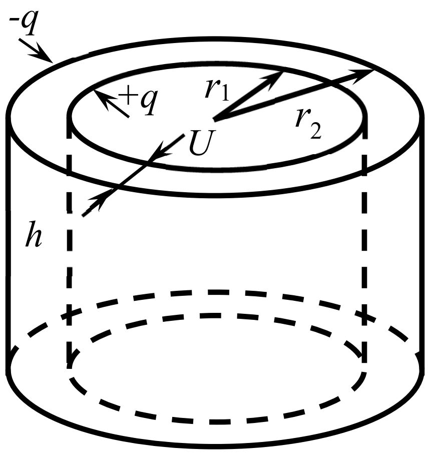


Рис. 2.11

Позначимо радіус внутрішньої циліндричної обкладки r_1, і нехай вона буде зарядженою, наприклад, додатно з поверхневою густиною заряду σ. Радіус зовнішньої обкладки позначимо r_2, і вона заряджена від'ємно. Згідно з теоремою Гауса для вектора напруженості електричного поля, від'ємний заряд, що знаходиться на зовнішній циліндричній поверхні, не створює електричного поля всередині конденсатора. Джерелом електричного поля всередині циліндричного конденсатора є внутрішня обкладка. За теоремою Гауса, напруженість поля між обкладками циліндричного конденсатора для $r_1 < r < r_2$ описується виразом:

$$E = \frac{\sigma r_1}{\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

де ε – діелектрична проникність.

Використаємо цей вираз для розрахунку різниці потенціалів між обкладками циліндричного конденсатора. Шляхом інтегруванням знаходимо:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma r_1}{\varepsilon\varepsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{\sigma r_1}{\varepsilon\varepsilon_0} \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{\sigma r_1}{\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Величина заряду внутрішньої обкладки конденсатора дорівнює

$$q = \sigma S,$$

де S – площа бічної поверхні внутрішнього циліндра, яка дорівнює $S=2\pi r_1 h$, де h – висота циліндра. Отже, заряд конденсатора:

$$q = \sigma 2\pi r_1 h\,.$$

З загальної формули для ємності конденсатора $C = q / \Delta\varphi$ отримаємо вираз для ємності циліндричного конденсатора:

$$C = \frac{\sigma 2\pi r_1 h}{\dfrac{\sigma r_1}{\varepsilon\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\,.$$

Розглянемо наближення, коли відстань $d=r_2-r_1$ між обкладками циліндричного конденсатора значно менша за радіус обкладки, $d<<r_1$. За цієї умови, скориставшись наближенням $\ln(1+x)\approx x$, коли $x\to 0$, логарифм у знаменнику в виразі для ємності можна записати у вигляді:

$$\ln\frac{r_2}{r_1} = \ln\frac{r_1+d}{r_1} = \ln(1+\frac{d}{r_1}) \approx \frac{d}{r_1}\,.$$

Звідси маємо, що для циліндричного конденсатора, у якого відстань між циліндричними обкладками нескінченно мала, $d/r_1<<1$, для ємності виконується наближення плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 2\pi r_1 h}{d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\,,$$

де S – площа поверхні внутрішньої обкладки циліндричного конденсатора.

В) *Сферичний* конденсатор утворюють дві концентричні сферичні обкладки. Обкладки тонкі, виготовлені з провідника і розділені шаром діелектрика. Позначимо радіуси сферичних обкладок r_1 та r_2 (див. рис. 2.12)

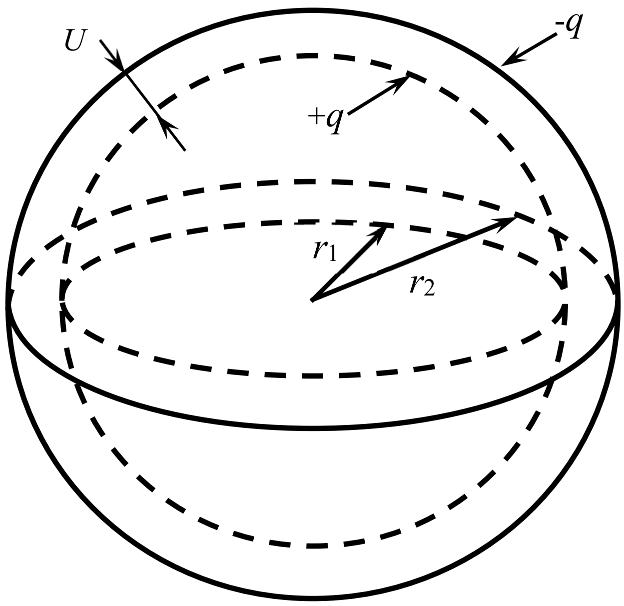


Рис. 2.12

Нехай внутрішня обкладка має додатній заряд $+q$, а зовнішня – від'ємний заряд $-q$. Електричне поле в просторі між обкладками сферичного конденсатора утворює тільки додатній заряд внутрішньої обкладки.

Напруженість електричного поля точок, що лежать між обкладками на відстані r від їх центра, $r_1 < r < r_2$, визначають, як і для точкового заряду, за формулою

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

де q – заряд сфери. За межами конденсатора, коли $r < r_1$ та $r > r_2$ напруженість електричного поля відсутня, $\vec{E} = 0$.

Шляхом інтегрування знайдемо різницю потенціалів між обкладками сферичного конденсатора:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}(-\frac{1}{r})\Big|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Скористаємось формулою означення ємності $C = q/\Delta\varphi$, в яку підставимо отриману різницю потенціалів, тоді вираз для ємності конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Коли відстань між обкладками, $d = r_2 - r_1$, мала, $d/r_1 << 1$, то вираз для ємності сферичного конденсатора буде таким самим, як і у випадку плоского конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1\ (r_1\ + d)}{d} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2 (1 + \frac{d}{r_1})}{d} \approx \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2}{d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

де $4\pi r_1^2 = S$ – площа поверхні внутрішньої обкладки сферичного конденсатора, і враховано, що $d/r_1 \to 0$.

2.2.9. Енергія зарядженого конденсатора

Розглянемо конденсатор, ємність якого C. Будемо його заряджати поступово, шляхом послідовного перенесення порцій елементарного заряду dq з одної обкладки на другу. При цьому одна обкладка буде заряджатися додатно, а друга – від'ємно. При такому заряджанні конденсатор набуває напруги U між його обкладками. Елементарна робота зовнішніх сил при перенесенні наступної порції елементарного заряду буде дорівнювати

$$dA = Udq .$$

Врахуємо, що $U = q / C$, де C – ємність конденсатора. Тепер елементарну роботу можна записати у вигляді:

$$dA = \frac{qdq}{C} .$$

Тоді робота зовнішньої сили при заряджанні конденсатора до заряду q може буде знайдена інтегруванням:

$$A = \int dA = \int_0^q \frac{qdq}{C} = \frac{q^2}{2C} .$$

Знову використовуючи формулу $U = q / C$, отримаємо, що робота зовнішньої сили при заряджанні конденсатора дорівнює добутку заряду конденсатора на напругу:

$$A = \frac{Uq}{2} .$$

Згідно з законом збереження і перетворення енергії, робота A має йти на зростання енергії конденсатора. Коли конденсатор був незаряджений (q = 0), то його електрична енергія дорівнювала нулю. Набута електрична енергія зарядженого конденсатора дорівнює виконаній роботі при заряджанні конденсатора W=A. Отже, енергія зарядженого конденсатора дорівнює

$$W = \frac{Uq}{2}, \text{ або } W = \frac{q^2}{2C} \text{ чи } W = \frac{CU^2}{2} .$$

Таким чином, конденсатор є пристроєм для накопичення електричної енергії.

2.2.10. Енергія електричного поля

Розглянемо заряджений плоский конденсатор. Енергія його електричного поля дорівнює

$$W = \frac{Uq}{2},$$

де q – заряд конденсатора, а U – напруга конденсатора. Врахуємо, що для плоского конденсатора заряд дорівнює добутку густини заряду на площу обкладки, $q = \sigma S$, напруга дорівнює добутку відстані між обкладками на напруженість електричного поля, $U = Ed$, а напруженість електричного поля пропорційна густині заряду, $E=\sigma/\varepsilon\varepsilon_0$ ($\sigma=\varepsilon\varepsilon_0 E$). Коли ці вирази підставити в формулу електричної енергії конденсатора, то отримаємо, що величина електричної енергії пропорційна об'єму, $V=Sd$, між обкладками конденсатора, де зосереджено електричне поле:

$$W=\frac{Uq}{2}=\frac{U\sigma S}{2}=\frac{U\varepsilon\varepsilon_0 ES}{2}=\frac{Ed\varepsilon\varepsilon_0 ES}{2}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}Sd=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}V .$$

Визначимо *густину енергії електричного поля* з відношення енергії поля до об'єму, $w_e=W/V$. Маємо, що густина енергії електричного поля дорівнює

$$w_e=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} .$$

Врахуємо, що напруженість електричного поля є векторною величиною, тому

$$w_e=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} .$$

Враховуючи вираз для вектора індукції, $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, отримаємо, що густина енергії електричного поля пропорційна скалярному добутку вектора індукції на вектор напруженості електричного поля:

$$w_e=\frac{\vec{D}\vec{E}}{2} .$$

Для довільного неоднорідного електричного поля його енергію в об'ємі V знаходять інтегруванням густини енергії по об'єму:

$$W=\int_V w_e dV=\int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}dV .$$

Наприклад, розглянемо металеву кулю, радіус якої R, а заряд q. Напруженість електричного поля в середині кулі, $r<R$, дорівнює нулю, а за межами кулі, $r>R$, вона дорівнює

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} ,$$

де r – відстань від центру кулі.

Густина енергії поля кулі дорівнює

$$w_e=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\right)^2=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^4} .$$

Оскільки модуль напруженості електричного поля і густина енергії залежать тільки від r, то елементарний об'єм можна вибрати у вигляді $dV=4\pi r^2 dr$.

Тепер розрахунок енергії поля можна провести шляхом інтегрування її густини по r:

$$W = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} dV = \int_R^\infty \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon\varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_R^\infty = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}.$$

Отриману енергію електричного поля зарядженої металевої кулі можна переписати у вигляді

$$W = \frac{q^2}{2C},$$

де C – ємність металевої кулі, оточеної діелектриком, яка, як було знайдено раніше, дорівнює $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$.

2.3. Основні формули для розв'язку задач

1. Дипольний момент електричного диполя:

$$\vec{p} = q\vec{l}, \qquad p = ql,$$

де q – заряд диполя l – плече диполя.

2. Енергія диполя в електричному полі:

$$W = -\vec{p}\vec{E}, \qquad W = -pE\cos\alpha.$$

3. Момент сили, що діє на електричний диполь в електричному полі:

$$\vec{M} = [\vec{p}\vec{E}], \qquad M = pE\sin\alpha.$$

4. Вектор електричної індукції:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

5. Теорема Гауса для вектора електричної індукції:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$$

6. Ємність віддаленого провідника:

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

7. Енергія електричного поля провідника:

$$W=\frac{\varphi q}{2},\ W=\frac{q^2}{2C},\ W=\frac{C\varphi^2}{2}.$$

8. Ємність конденсатора:

$$C=\frac{q}{U}.$$

9. Ємність плоского конденсатора:

$$C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

10. Ємність при паралельному та послідовному з'єднанні конденсаторів:

$$C=\sum_i C_i\ ,\quad \frac{1}{C}=\sum_i\frac{1}{C_i}.$$

11. Напруженість електричного поля в конденсаторі:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

де $\sigma=q/S$.

12. Енергія конденсатора:

$$W=\frac{Uq}{2},\quad W=\frac{q^2}{2C},\quad W=\frac{CU^2}{2}.$$

13. Густина енергії електричного поля:

$$w_e=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

24. Питання для самоконтролю

1. Дайте означення діелектрика.

2. Як діелектрики реагують на зовнішнє електричне поле?

3. Які є типи діелектриків?

4. Дайте означення диполя, плеча диполя, дипольного моменту.

5. Чому в однорідному електричному полі на диполь діє пара сил?

6. Напишіть формулу для моменту сил, яка діє на диполь.

7. За яких умов електричне поле діє з силою на електричний диполь?

8. Як з потенціальної енергії слідує, що стійкій рівновазі відповідає співнаправлена з полем орієнтація диполя?

9. Напишіть формулу означення вектора поляризації і поясніть, які величини входять в цю формулу.

10. Що таке діелектрична сприйнятливість?

11. Напишіть формулу зв’язку між вектором поляризації та напруженістю електричного поля.

12. Як вектор поляризації зв’язаний з поляризаційними зарядами?

13. Як складаються поля в середині діелектрика?

14. Чому електричне поле зменшується всередині діелектрика?

15. Як діелектрична проникність зв’язана з діелектричною сприйнятливістю?

16. Чи може діелектрична проникність бути меншою одиниці, і чому вона безрозмірна?

17. Чому діелектрична проникність більша одиниці? Коли вона дорівнює одиниці?

18. Як діелектрична проникність змінює вираз для формули закону Кулона?

19. Як визначається вектор електричної індукції?

20. Напишіть формулу зв’язку між вектором електричної індукції та вектором напруженості електричного поля.

21. Напишіть формулу зв’язку між вектором електричної індукції, напруженості електричного поля та вектором поляризації.

22. Які речовини називають провідниками?

23. Чому у зарядженого провідника заряд розміщується на поверхні?

24. Чому поверхня зарядженого провідника є еквіпотенціальною поверхнею?

25. Як напруженість електричного поля біля поверхні провідника зв’язана з поверхневим зарядом провідника?

26. Чому зовнішнє електричне поле не входить в провідник?

27. Як визначається електроємність віддаленого провідника?

28. Напишіть формули для енергії електричного поля зарядженого конденсатора та зарядженого віддаленого провідника.

29. За якою формулою визначається густина енергії електричного поля?

30. Коли ємність сферичного чи циліндричного конденсаторів можна розраховувати, вважаючи їх плоскими конденсаторами?

31. Як знайти енергію електричного поля в деякому довільному об’ємі?

3. ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

Електричним струмом називають явище перенесення електричного заряду в провідниках. В провідниках перенесення заряду електричним струмом здійснюється завдяки впорядкованому руху носіїв струму. В металах носіями струму є електрони, в розчинах електролітів носіями є іони, в плазмі – іони та електрони, в напівпровідниках – електрони та дірки.

Дія електричного струму на середовище та фізичні процеси визначається факторами, які супроводжують це явище. Наприклад, при проходженні струму провідник нагрівається. При проходженні струму в електроліті відбувається виділення речовини. Не відбувається нагрівання при проходженні струму в надпровіднику. Загальною ознакою електричного струму у будь-якому провіднику є утворення струмом магнітного поля.

В природі масштабні струми виникають в магнітосфері та іоносфері, вони є причиною збурення магнітного поля Землі і супроводжуються так званими магнітними бурями чи суббурями, а також полярним сяйвом, яке спостерігається на півночі і виникає у верхній атмосфері, точніше – в іоносфері.

Ще одне, також яскраве природне явище, при якому тече масштабний короткочасний струм, – це блискавка. В середньому на Землі кожну секунду відбувається біля 10^2 блискавок в основному в екваторіальній частині Землі. Блискавки заряджають Землю від'ємним зарядом, тому між поверхнею землі та іоносферою існує різниця потенціалів біля 500 кВ, а біля поверхні землі в умовах «спокійної» незабрудненої атмосфери є електричне поле, напруженість якого має величину приблизно 100 В/м. Під грозовою хмарою величина напруженості атмосферного електричного поля може зростати до декількох кіловольт на метр. Атмосферне електричне поле концентрується на вістрях-провідниках, наприклад, на щоглах кораблів чи шпилях соборів, де воно зростає по величині і призводить до ще одного феноменального природного явища – вогнів Ельма.

3.1. Сила струму

Електричний струм характеризують фізичною величиною, яку називають *силою струму*, – вона визначається як швидкість перенесення заряду через переріз провідника:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}\text{, або } I = \frac{dq}{dt},$$

де Δq – величина заряду, перенесеного через переріз провідника, Δt – час, за який було перенесено цей заряд.

Величина заряду, перенесеного струмом, дорівнює

$$dq = Idt\text{, або } q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt,$$

де $I(t)$ – миттєве значення струму, q – заряд перенесений через переріз провідника за інтервал часу $[t_1, t_2]$.

Середня величина сили струму $\overline{I}$ визначається з відношення перенесеного заряду до проміжку часу, протягом якого було перенесено заряд:

$$\overline{I} = \langle I \rangle = \frac{q}{t_2 - t_1}\text{, або } \overline{I} = \langle I \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt,$$

де середнє позначено або рискою зверху, або дужками.

Для *постійного* (стаціонарного) струму величина сили струму постійна, $I(t) = const$, тому перенесений заряд прямо пропорційний часу

$$q = I(t_2 - t_1)\text{, або } q = It,$$

де $t_1 = 0$, а t_2 – довільний момент часу, $t_2 = t$.

Напрямок струму визначається напрямком перенесення додатного заряду. Коли струм відбувається при впорядкованому русі електронів, які є від'ємно зарядженими частинками, то струм направлений протилежно до їх руху. Математично це означає, що коли в провіднику заряд переносять додатні і від'ємні носії, і коли вклади в струм від них співпадають за напрямком, то сила струму буде дорівнювати сумі

$$I = \frac{dq_+}{dt} + \frac{|dq_-|}{dt},$$

де в другому доданку цієї суми стоїть модуль від'ємного заряду, який під час струму рухається протилежно руху додатного заряду.

В СІ одиницею сили струму є ампер, 1 А = 1 Кл/с.

3.2. Густина електричного струму

Розглянемо провідник, в якому тече постійний електричний струм. Площа перерізу провідника *S*, а сила струму *I* (рис. 3.1). Через переріз провідника за час Δt буде перенесено заряд Δq. Величина перенесеного заряду дорівнює

$$\Delta q = I\Delta t .$$

Врахуємо, що заряд переносять носії струму. Нехай носії мають додатний заряд, який позначимо q_0. Швидкість впорядкованого руху носіїв позначимо v. Переріз *S* перетнуть тільки ті носії, що знаходяться від перерізу на відстані, меншій за $l = v\Delta t$. Кількість таких носіїв дорівнює $N = nSl = nSv\Delta t$, де *n* – концентрація носіїв. Перенесений за час Δt струмом заряд дорівнює добутку заряду одного носія на кількість носіїв, що пройшли через переріз:

$$\Delta q = q_0 N = q_0 nSv\Delta t .$$

З порівняння правих частин виразів для перенесеного струмом заряду отримаємо:

$$I\Delta t = q_0 nSv\Delta t .$$

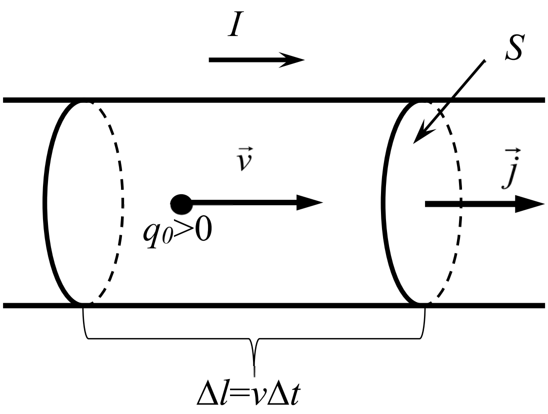


Рис. 3.1

Після скорочення множника Δt отримаємо вираз для величини сили струму:

$$I = q_0 nSv .$$

Відношення сили струму до площі перпендикулярного до струму перерізу називається *густиною електричного струму*. З попереднього виразу маємо:

$$j = q_0 nv ,$$

де *j* – густина електричного струму.

Густина електричного струму є векторною фізичною величиною, вектор якої колінеарний вектору швидкості впорядкованого руху носіїв струму. Вираз для вектора густини електричного струму можна записати у вигляді:

$$\vec{j} = q_0 n\vec{v} .$$

У випадку, наприклад, багатокомпонентної плазми вектор густини струму можна записати як суму

$$\vec{j} = \sum_i q_i n_i \vec{v}_i ,$$

де враховано, що під час протікання струму впорядковано рухаються декілька типів носіїв, заряди, концентрації і швидкість яких пронумеровано індексом *i*.

Величина сили струму через довільну елементарну поверхню дорівнює скалярному добутку вектора елементарної ділянки поверхні на вектор густини струму, або добутку площі ділянки на нормальну до неї складову вектора густини сили струму:

$$dI = \vec{j}d\vec{S} \text{ , або } dI = j_n dS .$$

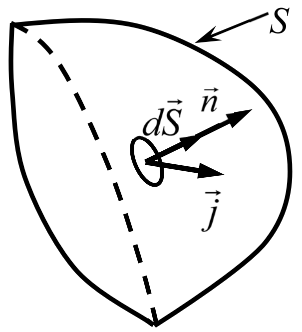


Рис. 3.2

Для будь-якої довільної поверхні (рис. 3.2) величину сили струму можна знайти інтегруванням

$$I = \int_S \vec{j}d\vec{S} \text{, або } I = \int_S j_n dS .$$

Таким чином, силу струму можна розглядати як потік вектора густини електричного струму через поверхню.

В системі СІ одиницею густини електричного струму є 1 А/м^2.

3.3. Рівняння неперервності заряду

Розглянемо речовину, в якій тече струм. Виберемо в ній довільну замкнуту поверхню, як показано на рис. 3.3. Сила струму через цю поверхню буде дорівнювати потоку

$$I = \oint_S \vec{j}d\vec{S} .$$

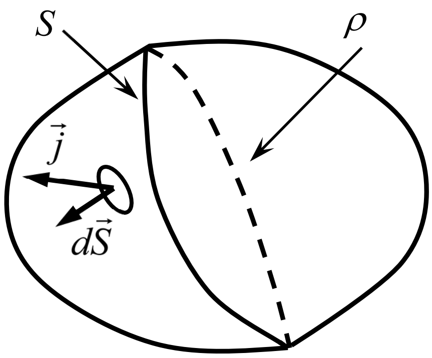


Рис. 3.3

Заряд, перенесений струмом через цю замкнуту поверхню за час Δt, буде рівним

$$\Delta q_S = I\Delta t = \Delta t \oint_S \vec{j}d\vec{S} .$$

У відповідності до закону збереження заряду, речовина, обмежена поверхнею, набуде заряду Δq, рівного за абсолютним значенням, але протилежного за знаком до перенесеного, $\Delta q = -\Delta q_S$. Таким чином, отримаємо рівняння:

$$\Delta q + \Delta t \oint_S \vec{j}d\vec{S} = 0 ,$$

яке перепишемо у наступному вигляді:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} + \oint_S \vec{j}d\vec{S} = 0 .$$

Коли $\Delta t \to 0$ прямує до нуля, отримаємо рівняння *неперервності в інтегральній формі:*

$$\frac{dq}{dt} + \oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 .$$

Заряд можна знайти інтегруванням по об’єму:

$$q = \int_V \rho dV ,$$

де ρ – густина заряду в об’ємі V, обмеженому замкнутою поверхнею S.

Тепер *інтегральне рівняння неперервності* можна записати у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 .$$

Математично інтеграл потоку вектора по замкнутій поверхні дорівнює інтегралу по об’єму від дивергенції цього вектора (теорема Остроградського-Гауса). Якщо з часом не змінюється форма та розміри поверхні, то похідну за часом можна внести під знак інтеграла. Здійснимо ці математичні дії, тоді отримаємо рівняння:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V div\vec{j} dV = 0 .$$

Внесена під знак інтеграла часова похідна стає частинною за часом, бо густина заряду є функцією багатьох змінних: часу та координат.

Це інтегральне рівняння виконується для будь-якої довільної поверхні. Тому рівність нулю суми інтегралів можлива, якщо сума підінтегральних виразів дорівнює нулю, тобто

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0 \text{, або } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\,\vec{j} = 0 .$$

Це рівняння називають *рівнянням неперервності в диференційній формі*. Воно означає, що зміна заряду в будь-якій точці середовища відбувається за рахунок струму.

3.4. Закон Ома

Закон Ома виконується для металевих лінійних однорідних провідників, коли до них прикладена напруга. Закон Ома було отримано експериментальним шляхом. Згідно з законом Ома, сила струму I в провіднику прямо пропорційна прикладеній напрузі U і обернено пропорційна опору провідника:

$$I = \frac{U}{R} ,$$

де R – опір провідника, U – напруга, яка дорівнює різниці потенціалів φ_1 та φ_2 на кінцях провідника.

На рис. 3.4 струм тече від більшого потенціалу до меншого, $\varphi_1 > \varphi_2$.

Для лінійного однорідного провідника опір пропорційний його довжині d і обернено пропорційний площі перерізу провідника S:

$$R = \rho \frac{d}{S} ,$$

де ρ – питомий опір речовини, з якої виготовлено провідник.

В системі СІ опір провідника вимірюється в омах, [R]=Ом, а питомий опір має розмірність [ρ]=Ом·м.

В лінійному однорідному провіднику завдяки прикладеній напрузі утворюється однорідне електричне поле. Напруга дорівнює $U = Ed$, де E – напруженість електричного поля всередині провідника зі струмом, до якого прикладено напругу U. Сила струму дорівнює добутку густини струму на площу перерізу провідника $I = jS$. Підставимо ці формули, а також формулу для опору, в формулу закону Ома:

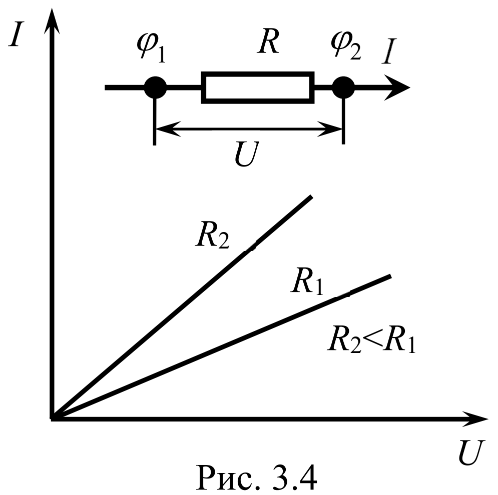


Рис. 3.4

$$jS = \frac{Ed}{\rho \frac{d}{S}} .$$

Після скорочення множників отримаємо, що густина струму прямо пропорційна напруженості електричного поля:

$$j = \frac{E}{\rho} .$$

Цей запис закону Ома здійснено за допомогою локальних характеристик, якими є густина струму та напруженість електричного поля. В загальному випадку закон Ома має векторний вигляд:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} ,$$

де σ – характеристика речовини, яку називають *питома електропровідність*, величина якої обернено пропорційна величині питомого опору $\sigma = 1/\rho$.

Порівняємо цей вираз для вектора густини струму з виразом для густини електричного струму, записаним з використанням швидкості впорядкованого руху носіїв, тоді отримаємо:

$$q_0 n\vec{v} = \sigma\vec{E}.$$

З цієї рівності маємо, що, коли в провіднику тече струм, швидкість впорядкованого руху носіїв прямо пропорційна напруженості електричного поля:

$$\vec{v} = \gamma\vec{E},$$

де коефіцієнт γ називають *рухливістю* носіїв, величина якої пропорційна провідності речовини, $\gamma = \sigma / q_0 n$.

3.5. Закон Ома в диференціальній формі

Врахуємо, що напруженість електричного поля є взятим зі знаком мінус градієнтом потенціалу:

$$\vec{E} = -grad\varphi \ .$$

Підставимо цей вираз в закон Ома. Отримаємо формулу, яку називають *законом Ома в диференціальній формі*:

$$\vec{j} = -\sigma grad\varphi.$$

Розглянемо випадок стаціонарного струму. Для стаціонарного струму рівняння неперервності для заряду має вигляд:

$$div\vec{j} = 0,$$

оскільки для стаціонарної системи $\partial\rho / \partial t = 0$.

Підставимо в це рівняння вираз для вектора густини струму з використанням диференціальної форми запису закону Ома:

$$div(\sigma grad\varphi) = 0.$$

Якщо середовище однорідне, і в кожній його точці величина провідності однакова, то σ можна винести з під символу дивергенції. Рівняння неперервності набуде вигляду:

$$div(grad\varphi) = 0, \text{ або } \Delta\varphi = 0,$$

де Δ – лапласіан.

Таким чином отримано, що у випадку струмової задачі потенціал електричного поля задовольняє рівнянню Лапласа, подібно до задач електростатики.

3.6. Максвелівська релаксація

В рівновазі електричний заряд розподіляється на поверхні відокремленого провідника. Якщо рівновагу порушено (збурено), наприклад, в середину провідника внесено заряд, то з часом відбудеться поновлення рівноваги, і величина густини об'ємного заряду стане рівною нулю. Характерний час відновлення рівноваги називають *часом релаксації* або *часом максвелівської релаксації*. Для знаходження цього часу скористаємось рівнянням неперервності в диференціальній формі:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\sigma \vec{E}) = 0,$$

де враховано, що вектор густини струму пропорційний напруженості електричного поля, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

Для однорідного провідника, $\sigma = const$, параметр провідність можна винести з під символу дивергенції:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma div\vec{E} = 0.$$

Врахуємо, що дивергенція напруженості електричного поля пропорційна густині заряду, $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, де ρ – густина заряду. В результаті отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є спадаюча з часом експонента:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}, \text{ або } \rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$ – час релаксації, ρ_0 – початкова величина об'ємної густини збуреного заряду. За час релаксації, коли $t = \tau$, величина збуреного заряду зменшується в *e*-разів.

Для провідників час максвелівської релаксації достатньо малий, $\tau \sim 10^{-14}$ с.

3.7. Робота струму

Електричний струм при перенесенні заряду в провіднику виконує роботу. Нехай U – напруга, прикладена до провідника, dq – заряд, перенесений струмом за час dt, величина якого дорівнює добутку сили струму на час $dq=Idt$,

R – опір провідника. Вираз для величини виконаної струмом роботи можна записати у вигляді:

$$dA = Udq = UIdt \text{, або } dA = RI^2 dt \text{,}$$

де в другому виразі враховано закон Ома, $U=RI$.

У випадку постійного струму, $I=const$, робота виконується рівномірно, і її величина пропорційна часу:

$$A = UIt \text{, або } A = RI^2 t \text{.}$$

Робота струму може йти на виконання провідником механічної роботи, на хімічні перетворення, на нагрівання провідника й оточуючого середовища.

Потужність струму визначається з відношення виконаної роботи до часу $P=dA/dt$. Звідси маємо, що потужність струму дорівнює

$$P = UI \text{, або } P = RI^2 \text{.}$$

Коли провідник не виконує механічної роботи, і під час проходження струму не відбувається хімічних перетворень, то робота струму йде тільки на нагрівання провідника. Кількість теплоти, якої набуває провідник при проходженні в ньому постійного струму, визначається за *законом Джоуля-Ленца*:

$$Q = RI^2 t \text{,}$$

де Q позначено кількість теплоти, яку отримує провідник з опором R за час t проходження електричного струму I.

Потужність сили струму може бути записана у вигляді:

$$P = UI = jSEd = EjV \text{, або } P = \rho j^2 V \text{,}$$

де враховано, що напруга дорівнює добутку напруженості електричного поля на довжину провідника, $U=Ed$, сила струму дорівнює добутку густини струму на площу перерізу провідника, $I=jS$, також враховано закон Ома, $j = E/\rho$, в якому ρ – питомий опір.

З цього виразу для потужності отримаємо формулу закону Джоуля-Ленца в диференціальній формі:

$$Q_V = \rho j^2 \text{,}$$

де Q_V – питома теплота, $Q_V = Q/Vt$. Питома теплота дорівнює кількості теплоти, яку отримує за одиницю часу провідник одиничного об'єму.

3.8. Сторонні сили, ЕРС

Електричне поле не в змозі забезпечити протікання постійного струму в замкнутому колі, оскільки для замкнутого кола циркуляція вектора напруженості електричного поля дорівнює нулю, $\oint \vec{E}d\vec{l} = 0$, де $\vec{E}$ – вектор напруженості електричного поля. Якщо робота поля дорівнює нулю, то воно не має можливості компенсувати теплоту, яка виділяється в провіднику при проходженні струму.

Для забезпечення існування струму в замкнутих колах використовують пристрої – *джерела струму*. В них на заряди носіїв струму, крім електричної сили, діють *сторонні* сили, які можуть мати, наприклад, хімічну природу, як в акумуляторах. Якщо поділити величину сторонньої сили $\vec{F}_c$, що діє на носій заряду, на величину заряду носія q_0, то отримаємо вектор $\vec{E}^* = \vec{F}_c / q_0$. Дія сторонньої сили на заряд та дія електричної сили на заряд складаються $q_0\vec{E} + \vec{F}_c = q_0\vec{E} + q_0\vec{E}^*$, тому будуть складатися і вектори $\vec{E}$ та $\vec{E}^*$, а їх суму можна розглядати, як результуючу напруженість, що діє на заряди. Закон Ома з урахуванням дії сторонньої сили можна записати у вигляді

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}(\vec{E} + \vec{E}^*),$$

де $\vec{j}$ – вектор густин струму, а ρ – питомий опір провідника.

Сумарна робота електричної сили та сторонньої сили при перенесенні заряду між точками 1, 2, якими позначено межі ділянки провідника, дорівнює

$$A_{12} = \int_1^2 (q\vec{E} + q\vec{E}^*)d\vec{l} = q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} + q\int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l}.$$

Перший інтеграл у цьому виразі є різницею потенціалів на ділянці провідника:

$$\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Другий інтеграл називають *електрорушійною силою* (ЕРС) на ділянці провідника

$$\int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l} = \mathcal{E}_{12}.$$

Отже, робота дорівнює

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}).$$

Врахуємо, що A_{12} – це робота, виконана струмом при перенесенні заряду за час t, дорівнює добутку напруги на заряд, $A_{12}=R_{12}I^2t$, а перенесений заряд дорівнює $q=It$. Отримаємо рівняння:

$$I^2 R_{12} t = It(\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}).$$

Після скорочень отримаємо вираз закона Ома для ділянки провідника з ЕРС:

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

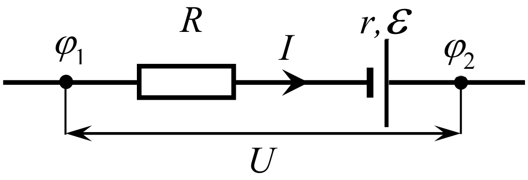


Рис. 3.5

Опір ділянки провідника з ЕРС часто представляють сумою опору R лінійного провідника та внутрішнього опору ЕРС, який позначають r. В цьому випадку закон Ома для зображеної на рис. 3.5 ділянки провідника з ЕРС записують у вигляді:

$$I(R + r) = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

В рівняння закону Ома для ділянка кола ЕРС входить зі знаком плюс, коли вона підтримує струм, тобто коли напрямок струму співпадає з переходом від «мінуса» батареї до її «плюса».

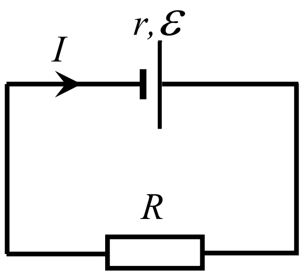


Рис. 3.6

Для замкнутого кола з ЕРС (див. рис. 3.6) закон Ома має вигляд

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

де враховано, що при утворенні замкнутого кола точка 1 збігається з точкою 2, тому $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, а ЕРС джерела струму позначено без індексів.

3.9. Правила Кірхгофа

При розрахунку сил струмів та напруг розгалужених електричних кіл користуються правилами Кірхгофа. Розгалужені кола містять точки, які носять назву *вузли*, до яких сходяться три або більша кількість провідників зі струмом. На рис. 3.7 показано вузол, до якого входить струм I_3, та струми I_1 та I_2, які виходять з вузла. Напрямки струмів на рисунку позначені стрілками. У вузлі не може накопичуватись заряд, бо вузол не є конденсатором, тому сума струмів I_1 та I_2 має дорівнювати силі струму I_3. Умова рівності сил струмів, що входять у вузол, силам струмів, що виходять з вузла, є наслідком закону збереження заряду.

Математична умова на струми для вузлів розгалужених кіл сформульована в першому правилі Кірхгофа.

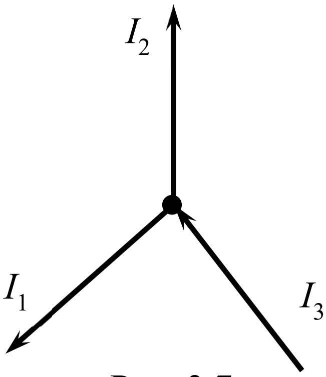


Рис. 3.7

Перше правило Кірхгофа: сума сил струмів на вузлі має бути рівною нулю

$$\sum_i I_i = 0,$$

де індекс i позначає номери струмів.

Виконання рівності нулю для суми сил струмів є можливим, якщо сили струмів додаються та віднімаються. Прийнято вважати, що для струмів, які входять у вузол, їх сили струмів входять в суму зі знаком плюс, а для струмів, які виходять з вузла, їх сили струмів входять в суму зі знаком мінус. Згідно з першим правилом Кірхгофа, рівняння для сил струмів для вузла, що зображений на рис. 3.7, має вигляд:

$$I_3 - I_1 - I_2 = 0.$$

Розглянемо ділянку кола, яка містить три вузли, як зображено на рис. 3.8. Вузли пронумеровані. Між вузлами знаходяться провідники та джерела струму. Виберемо на кожній з цих ділянок напрямки струмів, наприклад, за годинниковою стрілкою. Для кожної з ділянок можна застосувати закон Ома.

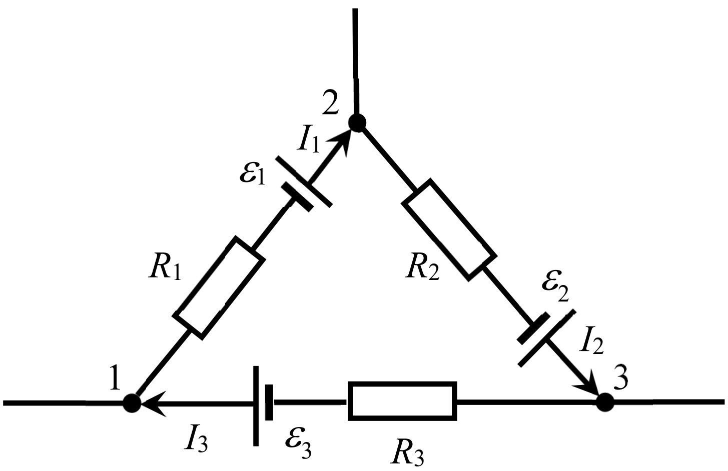


Рис. 3.8

Отримаємо систему рівнянь:

1-2: $I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1$,

2-3: $I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_2$,

3-1: $I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_1 + \varepsilon_3$.

Складемо ліві та праві частини цих рівнянь, тоді отримаємо:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Для кола на рис. 3.8 отримано рівняння, в лівій частині якого стоїть сума падінь напруги на ділянках контура, а в правій частині стоїть сума ЕРС ділянок контура. Цей результат узагальнено в другому правилі Кірхнофа.

Друге правило Кірхгофа: сума падінь напруги на опорах провідників в замкнутому контурі дорівнює сумі всіх ЕРС контуру

$$\sum_i I_i R_i = \sum_i \varepsilon_i ,$$

де зліва сума падінь напруги на провідниках представлена добутками сил струму на їх опори.

Слід зауважити, що сили струмів на ділянках замкнутого контуру можуть не співпадати з напрямком обходу контуру. У прикладі кола, що зображене на рис. 3.8, напрямок обходу було вибрано за годинниковою стрілкою. Якщо напрямок обходу на співпадає з напрямком струму, то цей струм в сумі враховують зі знаком мінус. Таке зауваження стосується і знаків ЕРС, коли напрямок струму співпадає з переходом з мінуса батареї (джерела струму) на плюс, то ЕРС входить в суму зі знаком плюс, а коли ні, то ЕРС входить в суму зі знаком мінус.

3.10. Основні формули для розв'язку задач

1. Формула означення сили струму:

$$I = \frac{dq}{dt} .$$

2. Заряд, перенесений струмом:

$$q(t) = \int_0^t I(t)dt .$$

3. Середнє значення сили струму:

$$\overline{I} = < I > = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt .$$

4. Сила струму як потік вектора густини струму:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} .$$

5. Закон Ома для однорідного провідника з струмом:

$$I = \frac{U}{R} .$$

6. Формула для опору провідника:

$$R=\rho\frac{d}{S}.$$

7. Опори при послідовному і паралельному з’єднанні провідників:

$$R=\sum_i R_i\,,\quad \frac{1}{R}=\sum_i\frac{1}{R_i}$$

8. Закон Ома в диференціальній формі:

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}\,.$$

9. Робота постійного струму:

$$A=UIt\,,\ A=RI^2t\,.$$

10. Потужність струму:

$$P=UI\,,\quad P=RI^2\,.$$

11. Закон Джоуля-Ленца:

$$Q=RI^2t\,.$$

12. Закон Ома для ділянки провідника з ЕРС:

$$IR_{12}=\varphi_1-\varphi_2+\mathcal{E}_{12}\,.$$

13. Закон Ома для замкнутого кола з ЕРС:

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R+r}\,.$$

14. Правила Кірхгофа:

$$\sum_i I_i=0\,,\qquad \sum_i I_iR_i=\sum_i\varepsilon_i\,.$$

3.11. Питання для самоконтролю

1. Дайте означення електричного струму.

2. Як визначають напрямок струму?

3. Дайте означення сили струму.

4. Як знайти перенесений струмом заряд, якщо відома сила струму?

5. Як сила струму залежить від швидкості впорядкованого руху носіїв?

6. Який струм називають постійним?

7. Як знаходять середнє значення сили струму?

8. Що таке густина струму?

9. Запишіть інтегральний зв'язок між силою струму та густиною струму.

10. Запишіть рівняння неперервності в інтегральному та диференціальному виглядах, поясніть які фізичні величини та математичні символи входять до цих рівнянь.

11. Запишіть закон Ома для однорідного провідника.

12. Сформулюйте, що таке опір провідника та запишіть формулу для нього.

13. Запишіть закон Ома за допомогою локальних характеристик струму.

14. Запишіть закон Ома в диференціальній формі.

15. Чому струмові задачі схожі з задачами електростатики?

16. Що таке Максвелівська релаксація?

17. Як визначається час Максвелівської релаксації?

18. Напишіть формули для роботи та потужності електричного струму.

19. Напишіть закон Джоуля-Ленца в інтегральній та диференційній формі.

20. Що таке джерела струму і сторонні сили?

21. Напишіть закон Ома за допомогою локальних характеристик, коли діють сторонні сили.

22. Напишіть закон Ома для ділянки провідника з ЕРС.

23. Як визначають ЕРС?

24. Напишіть закон Ома для замкнутого кола.

25. Дайте формулювання першого правила Кірхгофа і поясніть, які знаки мають струми.

26. Сформулюйте друге правило Кірхгофа і поясніть, як вибирають знаки для струмів і ЕРС.

Глава 4. МАГНЕТИЗМ

Провідники, в яких тече електричний струм, або тверді тіла – магніти, – проявляють особливий характер взаємодії, яку називають *магнітною взаємодією*, і яка здійснюється завдяки магнітному полю.

На Землі та в просторі навколо неї джерелом магнітного поля є її ядро. Магнітні полюси Землі не співпадають з географічними, вони мають добові нутації (обертання) і їх положення повільно зміщується зі швидкістю декілька десятків кілометрів на рік. На поверхні Землі її магнітне поле орієнтує магнітну стрілку компаса, чим користувалися, наприклад, вікінги, здійснюючи морські мандри. Під час сезонних перельотів птахи також орієнтуються за допомогою земного магнітного поля.

Магнітне поле струмів та магнітів і силова взаємодія між ними використовуються в техніці. Завдяки магнітній силовій дії працюють електродвигуни, і здійснюється механізація та автоматизація технологічних процесів. Наприклад, двигуни в електромобілях, підйомники стекол і підсилювачі керма в автомобілях, двигуни в холодильнику, пилососі, пральній машині працюють завдяки магнітній силовій дії.

Вивчення магнетизму починають з магнітостатики, в основі якої лежить закон Ампера. Роль закону Ампера в магнетизмі подібна до ролі закону Кулона в електростатиці. Пояснення закону Ампера спирається на ідеї про існування магнітного поля.

4.1. Магнітостатика

4.1.1. Закон Ампера

Розглянемо два паралельні тонкі провідники, в яких тече струм, і які зображені на рис. 4.1. Провідники тонкі, якщо їх поперечний розмір набагато менший за відстань між провідниками. За законом Ампера, на ділянку довжиною Δl кожного з провідників діє сила, величина якої пропорційна добутку сил струмів і обернено пропорційна відстані між ними:

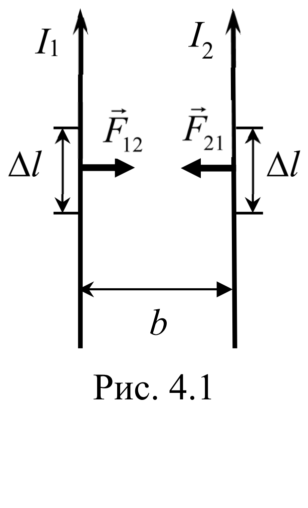


Рис. 4.1

$$F_{12} = F_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{b}\Delta l ,$$

де I_1, I_2 – сили струмів, b – відстань між провідниками, Δl – довжина ділянки першого або другого провідника, до яких прикладено сили $\vec{F}_{12}$ або $\vec{F}_{21}$, які рівні за величиною, $\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right|$, μ_0 – магнітна стала, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А^2.

Якщо струми співнаправлені, як на рисунку, то провідники притягуються, якщо ж струми направлені протилежно, то провідники відштовхуються.

4.1.2. Індукція магнітного поля

Провідники зі струмом не можуть безпосередньо діяти один на інший. Взаємодія між провідниками зі струмом здійснюється завдяки магнітному полю. Провідник зі струмом I_1 утворює в оточуючому просторі магнітне поле. Це магнітне поле чинить силову дію на провідник зі струмом I_2. І навпаки, провідник зі струмом I_2 утворює в оточуючому просторі магнітне поле, яке чинить силову дію на струм I_1. Тобто кожний зі струмів утворює магнітне поле.

Векторною характеристикою магнітного поля є індукція магнітного поля. Вектор індукції магнітного поля є силовою характеристикою магнітного поля. Його величину можна знайти завдяки силі, з якою магнітне поле діє на провідник, в якому тече струм, або завдяки крутному моменту сил, з яким магнітне поле діє на магнітну стрілку. На практиці для вимірювання індукції магнітного поля використовують датчики Хола. В них під дією магнітного поля виникає ЕРС, яка пропорційна величині індукції магнітного поля.

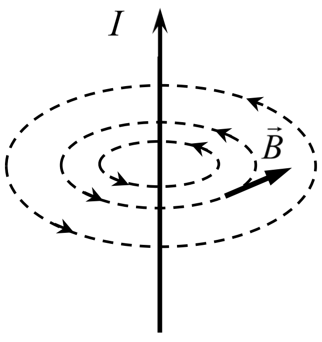


Рис. 4.2

Для індукції магнітного поля виконується принцип суперпозиції, за яким вектор індукції магнітного поля дорівнює геометричній сумі індукцій магнітного поля від кожного з джерел магнітного поля:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i ,$$

де $\vec{B}_i$ – індукція магнітного поля i-го джерела, яким може бути струм чи тверде тіло – магніт. Магніти, як і струми, створюють магнітні поля.

Просторовий розподіл магнітного поля ілюструють за допомогою ліній індукції магнітного поля. Лінії індукції магнітного поля замкнуті (рис. 4.2). Вектори індукції магнітного поля дотичні до ліній індукції.

На рис. 4.2 показано лінії індукції лінійного провідника зі струмом. Вони утворюють сукупність концентричних кіл з центром на провіднику, які лежать в перпендикулярній до провідника площині. Кількість ліній зменшуються при віддалені від струму і зменшується величина індукції магнітного поля.

Напрямок ліній індукції магнітного поля лінійного провідника зі струмом визначається за допомогою правила свердлика, поступальний рух якого суміщають з напрямком струму, а обертальний рух відповідає напрямку вектора індукції і ліній індукції.

В системі СІ одиницею вимірювання для вектора індукції магнітного поля є тесла, [B]=Тл, 1 Тл=1$\frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}}$.

4.1.3. Магнітне поле рухомого заряду

Електричний струм є джерелом магнітного поля. Оскільки струм виникає внаслідок впорядкованого руху зарядів, то можна припустити, що у відповідності до принципу суперпозиції, кожен рухомий заряд провідника, в якому тече струм, є джерелом магнітного поля, а поле, утворене струмом, є результуючим полем всіх носіїв струму. Тому індукція магнітного поля, утвореного рухомим зарядом, повинна бути пропорційною величині заряду, його швидкості, і вона має бути обернено пропорційною квадрату відстані. Останнє твердження маємо обговорити більш детально.

За законом Ампера на ділянку провідника діє сила, величина якої обернено пропорційна відстані між струмами. Тому величина індукції магнітного поля, яке утворене струмом, і яке чинить силову дію на інший провідник, також обернено пропорційна відстані між провідниками. Індукція магнітного поля, утвореного струмом провідника, є рівнодійною полів, створених рухомими носіями струму, тобто вона дорівнює сумі індукцій полів, утворених від всіх рухомих зарядів в провіднику. Отже, індукція магнітного поля струму визначається як сумарна (інтегральна) величина індукцій рухомих носіїв струму. Якщо поле одного заряду буде обернено пропорційне квадрату відстані, то після інтегрування по всім рухомим зарядам провідника (по довжині) провідника, сумарне (інтегральне) поле буде обернено пропорційне відстані до провідника, як в законі Ампера.

Таким чином, з закону Ампера слідує, що індукція рухомого точкового заряду пропорційна величині заряду, $B \sim q_0$, пропорційна швидкості руху заряду, $B \sim v$, і обернено пропорційна квадрату відстані від заряду, $B \sim 1/r^2$. Іншими словами,

$$B \sim q_0 v / r^2.$$

Врахуємо, що індукція магнітного поля, швидкість і радіус-вектор $\vec{r}$ точки простору (рис. 4.3), в якій рухомий точковий заряд утворює поле, є векторними величинами. Отримаємо вираз:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_0[\vec{v}\vec{r}]}{r^3},$$

де в чисельнику стоїть векторний добуток швидкості $\vec{v}$ заряду на радіус-вектор $\vec{r}$, початок якого знаходиться на заряді, а кінець знаходиться в точці простору, в якій рухомий заряд створює магнітне поле з індукцією $\vec{B}$, r – відстань від заряду до точки, $r = |\vec{r}\,|$.

Лініями індукції рухомого заряду є кола з центром на прямій, вздовж якої рухається заряд, і площини яких перпендикулярні до прямої, як показано на рис. 4.3. Кількість ліній є найбільшою у площині, центр якої співпадає з зарядом, і для неї $\vec{r} \perp \vec{v}$. На нескінченності від рухомого заряду індукція утвореного ним магнітного поля прямує до нуля. В точках прямої, вздовж якої рухається заряд, вектор індукції дорівнює нулю, $\vec{B} = 0$, оскільки для цієї прямої вектори $\vec{v}$ та $\vec{r}$ колінеарні, і тому їх векторний добуток дорівнює нулю, $[\vec{v}\vec{r}] = 0$.

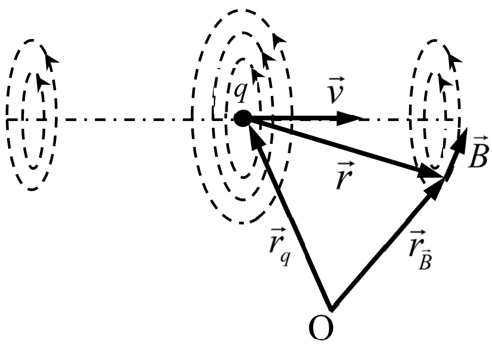


Рис. 4.3

Магнітне поле рухомого точкового заряду нестаціонарне, оскільки початок вектора $\vec{r}$ співпадає з рухомим зарядом. В лабораторній системі відліку з центром в т. О цей вектор дорівнює різниці векторів $\vec{r} = \vec{r}_{\vec{B}} - \vec{r}_q$, де $\vec{r}_q$ – радіус-вектор положення заряду в нерухомій системі відліку, а $\vec{r}_{\vec{B}}$ – радіус-вектор точки простору в цій системі відліку (див. рис. 4.3). Якщо заряд рухається з постійною швидкістю, то $\vec{r}_q = \vec{r}_0 + \vec{v}t$, де $\vec{r}_0$ – початкове положення заряду, то разом з зарядом рухається створене ним поле. Поширення ліній індукції схоже на рух веретена уздовж його осі.

4.1.4. Закон Біо-Савара-Лапласа

Розглянемо провідник, в якому тече струм (рис. 4.4). Силу струму позначимо *I*. Візьмемо маленьку ділянку провідника довжиною *dl*. Визначимо для цієї ділянки вектор $d\vec{l}$, модуль якого $|d\vec{l}|=dl$, і який направимо уздовж струму $d\vec{l}\uparrow\uparrow I$. Кожний з носіїв цієї ділянки утворює магнітне поле, вектор індукції $\vec{B}_0$ якого дорівнює

$$\vec{B}_0=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_0[\vec{v}\vec{r}]}{r^3},$$

де $\vec{v}$ – швидкість впорядкованого руху носіїв струму, заряди яких q_0, μ_0 – магнітна стала, початок радіус-вектора $\vec{r}$ знаходиться на ділянці провідника, а кінець – в точці простору поза межами провідника.

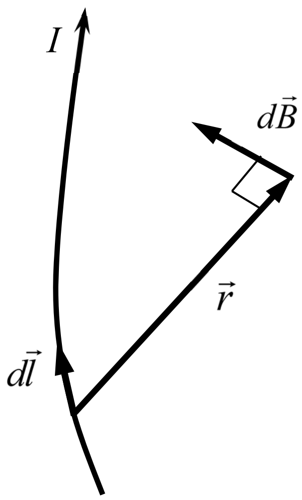


Рис. 4.4

Кількість носіїв струму ділянки позначимо *dN*. За принципом суперпозиції індукція магнітного поля, утвореного всіма носіями струму ділянки, дорівнює сумі індукцій кожного з них. Отже, індукція магнітного поля, утвореного ділянкою провідника, в якому тече струм, буде визначатися добутком:

$$d\vec{B}=\vec{B}_0 dN\text{, або } d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_0[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}dN.$$

Врахуємо, що кількість носіїв в провіднику дорівнює добутку їх концентрації *n* на об'єм ділянки, *dN*=*nSdl*, де *S* – площа перерізу провідника. Підставимо цю рівність у вираз для $d\vec{B}$ та внесемо заряд і концентрацію в дужки векторного добутку:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_0[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}nSdl=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[q_0n\vec{v}\vec{r}]}{r^3}Sdl.$$

Перший множник у векторному добутку є вектором густини струму $\vec{j}=q_0n\vec{v}$, тому вираз для індукції набуде вигляду:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3}Sdl.$$

Вектори $d\vec{l}$ та $\vec{j}$ співнаправлені, $\vec{j}\uparrow\uparrow d\vec{l}$, тому вираз для індукції магнітного поля можна записати у вигляді:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{jS[d\vec{l}\,\vec{r}\,]}{r^3}.$$

Врахуємо, що у чисельнику добуток густини струму на площу перерізу провідника дорівнює силі струму, *I=jS*.

В підсумку для індукції магнітного поля, утвореного ділянкою провідника, в якому тече струм, отримуємо формулу, яку називають *законом Біо-Савара-Лапласа:*

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec{l}\,\vec{r}\,]}{r^3}.$$

Вектор індукції магнітного поля ділянки провідника перпендикулярний вектору його елементарної ділянки, $d\vec{B}\perp d\vec{l}$, та перпендикулярний радіус-вектору, $d\vec{B}\perp\vec{r}$.

З закону Біо-Савара-Лапласа маємо, що для провідника, в якому тече струм, вектор індукції магнітного поля, утвореного його ділянкою кінцевої довжини, визначається криволінійним інтегралом:

$$\vec{B}=\int d\vec{B}=\int\limits_{(l)}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec{l}\,\vec{r}\,]}{r^3},$$

де інтегрування здійснюється вздовж провідника.

Зауважимо, що магнітне поле кожного окремого носія струму є нестаціонарним. А магнітне поле стаціонарного струму не змінюється з часом і також є стаціонарним. Це є наслідком того, що для постійного струму в кожній ділянці провідника кількість носіїв струму є незмінною, тому незмінним є і магнітне поле, $\vec{B}(t)=const$.

4.1.5 Індукція магнітного поля прямолінійного нескінченого провідника за струмом

Розглянемо прямолінійний провідник, в якому тече струм, рис. 4.5. Знайдемо величину індукції магнітного поля в точці, що віддалена від провідника на відстань *b*.

Позначимо силу струму *I*. Виберемо ділянку провідника $d\vec{l}$. Індукція магнітного поля, утвореного цією ділянкою, визначається за законом Біо-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec{l}\,\vec{r}\,]}{r^3}.$$

Величина вектора $dB = |d\vec{B}|$ дорівнює

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Irdl}{r^3}\sin\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\sin\alpha,$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ та $\vec{r}$.

Врахуємо, що

$$r = \frac{b}{\sin\alpha}, \text{ а } dl = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha} = \frac{bd\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Отримаємо

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ibd\alpha}{r^2\sin^2\alpha}\sin\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{bd\alpha}{b^2}\sin\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\sin\alpha d\alpha.$$

Вектори $d\vec{B}$ від всіх ділянок провідника направлені однаково. Тому величина вектора індукції магнітного поля, утвореного кінцевою ділянкою провідника зі струмом, може бути знайдена інтегруванням:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}(-\cos\alpha)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2),$$

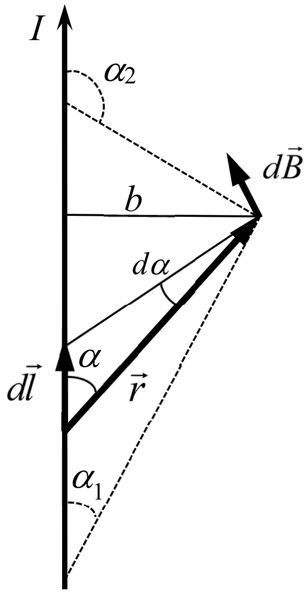


Рис. 4.5

де α_1 та α_2 – кути, під якими з точки, в якій розраховують величину вектора індукції, видно ділянку провідника (рис. 4.5).

Для нескінченно довгого прямолінійного провідника кути дорівнюють $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$. В підсумку, для нескінченно довгого провідника, в якому тече струм, маємо, що величина індукції прямо пропорційна силі струму і обернено пропорційна відстані до нього:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$

де *R* позначено найменшу відстань від точки до провідника, *R*=*b*, – саме так цю відстань частіше позначають в літературі. На рис. 4.5 та при виведенні формули використовували літеру *b*, щоб не було плутанини в позначеннях.

4.1.6. Сила Лоренца

За законом Ампера, сила, яка діє на провідник, прямо пропорційна силі струму в ньому. Струм утворюють рухомі заряди, і його величина пропорційна добутку заряду носія на його швидкість. Отже, можна припустити, що на рухомий заряд в магнітному полі діє сила, величина якої пропорційна добутку заряду на його швидкість. Величина цієї сили також має залежати від вектора індукції зовнішнього магнітного поля.

Розглянемо точковий заряд, величину якого позначимо q, і який рухається з швидкістю $\vec{v}$, рис. 4.6. Вектор індукції магнітного поля, в якому рухається заряд, позначимо $\vec{B}$.

На рухомий точковий заряд зі сторони магнітного поля діє *сила Лоренца*, величина якої визначається за формулою:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}] \ .$$

Сила Лоренца дорівнює векторному добутку вектора швидкості заряду на вектор індукції магнітного поля, помноженому на заряд. Вона перпендикулярна до швидкості, $\vec{F}_L \perp \vec{v}$, і перпендикулярна до вектора магнітної індукції, $\vec{F}_L \perp \vec{B}$.

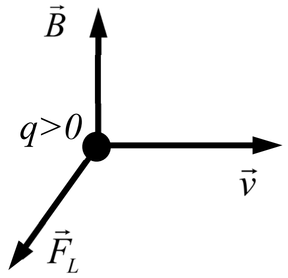


Рис. 4.6

Потужність сили Лоренца дорівнює нулю, оскільки нулю дорівнює скалярний добуток сили на швидкість, $\vec{F}_L\vec{v} = 0$. Отже сила Лоренца не виконує роботи, не змінює кінетичної енергії рухомого заряду, залишає модуль швидкості незмінним, $|\vec{v}| = const$. Під дією сили Лоренца змінюється напрямок руху заряду.

Напрямок сили Лоренца можна визначити за допомогою *правила лівої руки*, за яким ліву руку требу розташувати так, щоб лінії індукції магнітного поля входили в долоню, а пальці були направлені вздовж швидкості руху додатного заряду, тоді відігнутий великий палець буде вказувати на напрямок сили Лоренца. Якщо заряд від'ємний, то правило змінюється, пальці треба направляти протилежно до швидкості його руху.

4.1.7. Сила Ампера

Розглянемо провідник, в якому тече струм, і який розташований в магнітному полі з індукцією $\vec{B}$ (рис. 4.7). На кожний рухомий носій струму провідника, який рухається з швидкістю $\vec{v}$ впорядкованого руху, діє сила Лоренца $\vec{F}_0 = q_0[\vec{v}\vec{B}]$, де q_0 – заряд носія струму.

Візьмемо елементарну ділянку провідника $d\vec{l}$, довжина якої $l = |d\vec{l}|$, а площу перерізу провідника позначимо *S*. Кількість *dN* носіїв струму ділянки буде рівною *dN*=*nSdl*. На кожен з цих зарядів діє сила Лоренца. Тоді сумарна сила, з якою магнітне поле діє на провідник, дорівнює

$$d\vec{F} = \vec{F}_0 dN = q_0[\vec{v}\vec{B}]nSdl .$$

Перепишемо цей вираз інакше. Врахуємо, що густина струму дорівнює $\vec{j} = q_0 n\vec{v}$, а вектори $d\vec{l}$ та $\vec{j}$ співнаправлені, $\vec{j} \uparrow\uparrow d\vec{l}$. Отримаємо:

$$d\vec{F} = [q_0 n\vec{v}\vec{B}]Sdl = jS[d\vec{l}\vec{B}].$$

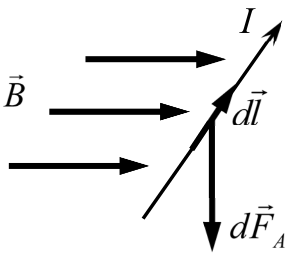


Рис. 4.7

Добуток вектора густини струму на площу перерізу провідника дорівнює силі струму, *I*=*jS*. Після підстановки отримуємо формулу для сили Ампера:

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l}\vec{B}].$$

Сила Ампера – це сила з якою магнітне поле діє на провідник зі струмом. Вона перпендикулярна до ділянки провідника, $d\vec{F}_A \perp d\vec{l}$, і перпендикулярна до вектора індукції, $d\vec{F}_A \perp \vec{B}$.

Якщо провідник прямолінійний, а магнітне поле однорідне, $\vec{B} = const$, то величина сили Ампера, що діє на довжину *l* ділянки провідника, дорівнює

$$F_A = BIl\sin\alpha ,$$

де α – кут між напрямком струму та вектором індукції магнітного поля.

Якщо провідник не прямолінійний, а магнітне поле неоднорідне, то сила, що діє на провідник, в якому тече струм, визначається шляхом інтегрування:

$$\vec{F}_A = \int d\vec{F}_A = \int\limits_{(l)} I[d\vec{l}\,\vec{B}],$$

де інтегрування здійснюється уздовж провідника.

У випадку замкнутого провідника, що знаходиться в однорідному магнітному полі, $\vec{B} = const$, сила Ампера дорівнює нулю. Дійсно, вектор індукції магнітного поля можна винести з під знаку інтеграла:

$$\vec{F}_A = I\oint\limits_{(l)}[d\vec{l}\,\vec{B}] = -I[\vec{B}\oint\limits_{(l)} d\vec{l}\,].$$

Врахуємо, що для замкнутого контуру сума всіх векторів елементарних ділянок дорівнює нулю, $\oint\limits_{(l)} d\vec{l} = 0$, тому для замкнутого провідника в однорідному магнітному полі $\vec{F}_A = 0$.

Порахуємо силу взаємодії між двома нескінченно довгими і паралельними провідниками, в яких течуть струми. Нехай в першому тече струм, силу струму якого позначимо I_1. Величина вектора індукції магнітного поля, утвореного цим струмом, в точках, що віддалені від провідника на відстань b, дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}.$$

Силу, з якою це поле діє на другий провідник, сила струму якого I_2, може бути визначена за допомогою формули для сили Ампера:

$$F_A = BI_2 \Delta l = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{b} \Delta l,$$

де враховано, що вектор індукції магнітного поля, утворений першим струмом, перпендикулярний до другого струму, тому кут в формулі для сили Ампера $\alpha = \pi / 2$.

Теоретично знайдений вираз для сили взаємодії між двома провідниками зі струмом повністю співпадає з законом Ампера, який було установлено експериментально. Таким чином, теорія і всі зроблені вище припущення є обґрунтованими і можна впевнено стверджувати, що вони підтверджуються експериментально.

4.1.8. Теорема Гауса для вектора індукції магнітного поля

Сформулюємо теорему Гауса для вектора індукції магнітного поля. В природі відсутні магнітні заряди. Джерелом магнітного поля є струми. Магнітне поле вихрове, лінії індукції магнітного поля замкнуті, тому кількість ліній магнітної індукції, що входять в будь-який об’єм, дорівнює кількості ліній, що виходять з нього. Математично цю рівність можна означити за допомогою потоку вектора магнітної індукції. Для довільної замкнутої поверхні потік вектора магнітної індукції поля дорівнює нулю:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0 .$$

Цю рівність називають *теоремою Гауса для вектора індукції магнітного поля в інтегральній формі*.

Врахуємо математичну теорему Остроградського-Гауса, за якою інтеграл по замкнутій поверхні будь-якого векторного поля можна порахувати інтегруванням по об'єму дивергенції вектора цього поля. Для вектора індукції магнітного поля можна записати:

$$\oint \vec{B}d\vec{S} = \int div\vec{B}dV,$$

де зліва стоїть інтеграл по замкнутій поверхні, а справа – інтеграл по об'єму, обмеженому замкнутою поверхнею. Отримуємо, що інтеграл від дивергенції вектора індукції магнітного поля по будь-якому об'єму дорівнює нулю:

$$\int div\vec{B}dV = 0.$$

З цієї рівності маємо, що дивергенція вектора індукції магнітного поля в будь-якій (кожній) точці простору дорівнює нулю:

$$div\vec{B} = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Це диференціальне рівняння називають теоремою Гауса для вектора індукції магнітного поля в диференціальній формі.

4.1.9. Циркуляція вектора індукції магнітного поля

Розглянемо нескінченно довгий прямолінійний провідник, в якому тече струм. Силу струму позначимо *I*. Охопимо провідник контуром, який співпадає з силовою лінією. Для прямолінійного провідника силовою лінією є коло з центром на провіднику, площина якого перпендикулярна до провідника (рис. 4.8). Позначимо *R* радіус контуру. Вектор магнітної індукції утвореного струмом магнітного поля в точках на цьому контурі є дотичним до кола і співнаправленим з вектором елементарної ділянки кола, $\vec{B} \uparrow\uparrow d\vec{l}$. Величина вектора індукції для всіх точок контуру дорівнює

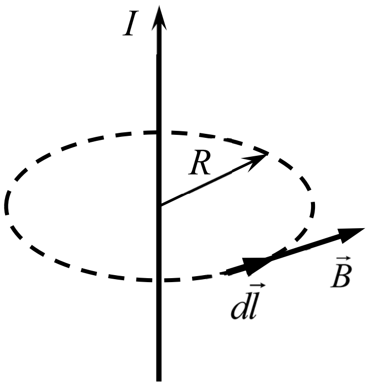


Рис. 4.8

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Порахуємо циркуляцію вектора індукції по обраному круговому контуру:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \oint Bdl = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi R}dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\oint dl.$$

Врахуємо, що величина інтеграла $\oint dl$ дорівнює довжині кола, $\oint dl = l = 2\pi R$. Отримаємо, що порахована вздовж лінії індукції величина циркуляції вектора магнітної індукції прямолінійного провідника зі струмом прямо пропорційна силі струму і не залежить від відстані від контуру до струму:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I .$$

Порахуємо тепер циркуляцію вектора індукції по довільному (рис. 4.9) замкнутому контуру, що охоплює провідник, в якому тече струм. Скалярний добуток $\vec{B}d\vec{l}$ дорівнює добутку $\vec{B}d\vec{l} = \vec{B}d\vec{l}_{\parallel}$, де $d\vec{l}_{\parallel}$ – складова вектора $d\vec{l}$, яка направлена уздовж вектора індукції магнітного поля, $d\vec{l}_{\parallel} \uparrow\uparrow \vec{B}$. Довжина цієї ділянки $dl_{\parallel} = |d\vec{l}_{\parallel}|$, а скалярний добуток дорівнює $\vec{B}d\vec{l} = Bdl_{\parallel}$, де $B = |\vec{B}|$. Тепер вираз для циркуляції можна записати у вигляді:

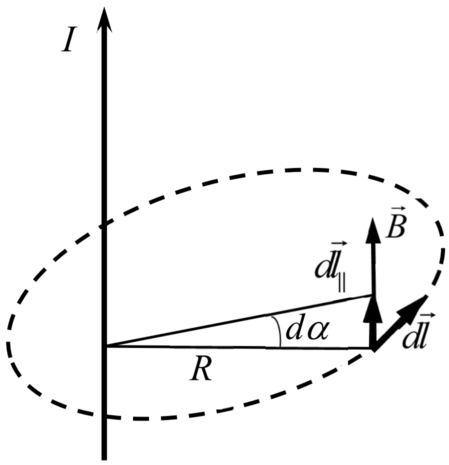


Рис. 4.9

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint B dl_{\parallel} .$$

Підставимо в інтеграл справа вираз для величини індукції, яка залежить від відстані R від ділянки контуру до провідника, та представимо довжину вектора $d\vec{l}_{\parallel}$ добутком $dl_{\parallel} = R d\alpha$, де $d\alpha$ – кут, на який спирається ділянка $d\vec{l}_{\parallel}$, і вершина якого розташована на провіднику (див. рис. 4.9). Отримаємо:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl_{\parallel} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I .$$

Якщо провідник з струмом знаходиться поза контуром інтегрування, то циркуляція вектора індукції дорівнює нулю, оскільки

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^0 d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot 0 = 0 .$$

Таким чином, якщо довільний замкнутий контур охоплює провідник, в якому тече струм, то циркуляція вектора індукції дорівнює добутку сили струму на магнітну сталу:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I .$$

Якщо маємо декілька струмів, то кожен з них є джерелом магнітного поля. Позначимо вектором $\vec{B}_j$ індукцію магнітного поля утвореного j-м струмом, I_j. Згідно з принципом суперпозиції, результуючий вектор індукції магнітного поля дорівнює сумі $\vec{B} = \sum_j \vec{B}_j$. Тому циркуляція для результуючого вектора індукції дорівнює сумі циркуляцій індукції для кожного з струмів:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \oint \sum_j \vec{B}_j d\vec{l} = \sum_j \oint \vec{B}_j d\vec{l} .$$

Врахуємо, що коли контур не охоплює провідника зі струмом, то циркуляція дорівнює нулю. В підсумку отримаємо вираз для циркуляції вектора індукції магнітного поля в *інтегральній формі*: циркуляція вектора індукції магнітного поля дорівнює сумі сил струмів в провідниках, охоплених контуром:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i ,$$

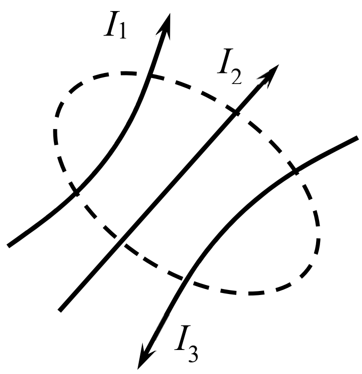


Рис. 4.10

де після знаку рівності стоїть сума сил струмів в провідниках, що охоплені замкнутим контуром, тому індекс суми змінено на i. Сума сил струмів розраховується з урахуванням їх знаків. Струми, які виходять з контуру, вважаються додатними, а ті, що входять в нього, – від'ємними. Для прикладу, зображеного на рис. 4.10, $\sum_i I_i = I_1 + I_2 - I_3$.

4.1.10. Циркуляція вектора індукції магнітного поля в диференціальній формі

Відповідно до математичної теореми Стокса, циркуляція вектора по замкнутому контуру може бути порахована за допомогою інтегрування ротора цього вектора по охопленій контуром поверхні. Отже, згідно з математичною теоремою Стокса для вектора індукції магнітного поля, можна записати рівність:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \int rot\vec{B}d\vec{S} ,$$

де зліва циркуляція, справа інтеграл по поверхні від ротора вектора індукції магнітного поля, границя поверхні обмежена контуром.

Сума сил струмів, охоплених замкнутим контуром, також може бути розрахована шляхом інтегрування по поверхні:

$$\sum_i I_i = \int \vec{j} d\vec{S} ,$$

де $\vec{j}$ – вектор густини струму в точках натягнутої на замкнутий контур поверхні.

Підставимо ці співвідношення в вираз для циркуляції вектора магнітної індукції в інтегральній формі. Отримаємо:

$$\int rot\vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{S} .$$

Ця інтегральна рівність виконується для будь-якого замкнутого контуру. Тому очевидно, що єдиною умовою її виконання є рівність підінтегральних виразів.

Таким чином, отримано, що ротор вектора індукції магнітного поля дорівнює добутку вектора густини струму на магнітну сталу:

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j} .$$

Записане диференціальне рівняння означає, що джерелом магнітного поля є електричний струм. Його називають рівнянням для циркуляції вектора індукції магнітного поля в *диференціальній формі*.

4.1.11. Магнітне поле в соленоїді

В електричних колах часто використовують провідники, що містять багато витків, і які часто називають *котушками індуктивності*. Якщо лінійні розміри котушки індуктивності набагато більші за поперечні розміріи, то її називають *соленоїдом* (рис. 4.11).

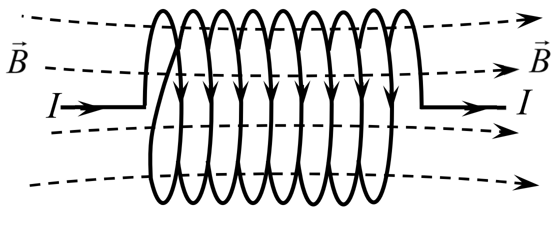


Рис. 4.11

Розглянемо соленоїд з однаково щільним уздовж його довжини розподілом витків та з незмінними формою і величиною площі перерізу. Позначимо I силу струму, що тече в соленоїді. Електричний струм утворює всередині соленоїда магнітне поле, лінії індукції якого майже паралельні до осі соленоїда, і які на рисунку зображені пунктирними стрілками. Магнітне поле всередині соленоїда можна вважати однорідним, $\vec{B} = const$, з вектором індукції магнітного поля, направленим уздовж осі соленоїда.

Розрахуємо величину вектора індукції магнітного поля всередині соленоїда. Розглянемо переріз соленоїда, який проходить через його вісь OO′, як показано на рис. 4.12. Перерізи витків позначено кружечками. Струми витків, які входять в площину рисунка, позначено хрестиками, а струми, що виходять з площини, позначені точками. Лінії індукції магнітного поля позначені пунктирними стрілками. Виділимо замкнутий контур у формі прямокутника, який позначено 1-2-3-4-1. На ділянці 1-2 елементарний вектор $d\vec{l}$ співнаправлений з вектором $\vec{B}$ індукції магнітного поля, тому скалярний добуток цих векторів дорівнює добутку їх модулів, $\vec{B}d\vec{l} = Bdl$. На ділянці 3-4 скалярний добуток дорівнює нулю, $\vec{B}d\vec{l} = 0$, оскільки за межами соленоїда його струм не утворює магнітного поля, $\vec{B} = 0$. На ділянках 2-3 та 4-1 скалярний добуток $\vec{B}d\vec{l} = 0$, оскільки за межами соленоїда $\vec{B} = 0$, а для тієї частини контуру, що знаходиться в середині соленоїда, $\vec{B} \perp d\vec{l}$. Отже, для контура 1-2-3-4-1 вклад в циркуляцію вектора магнітної індукції буде ненульовим тільки на ділянці 1-2:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \int\limits_{1-2} \vec{B}d\vec{l} + \int\limits_{2-3} \vec{B}d\vec{l} + \int\limits_{3-4} \vec{B}d\vec{l} + \int\limits_{4-1} \vec{B}d\vec{l} = B\int\limits_{0}^{l} dl + 0 + 0 + 0 = Bl,$$

де l – довжина ділянки 1-2.

Сума сил струмів витків соленоїда, охоплених контуром 1-2-3-4-1, дорівнює силі струму I в одному витку, помноженому на кількість $N_{охоп}$ охоплених контуром витків, $N_{охоп}I$.

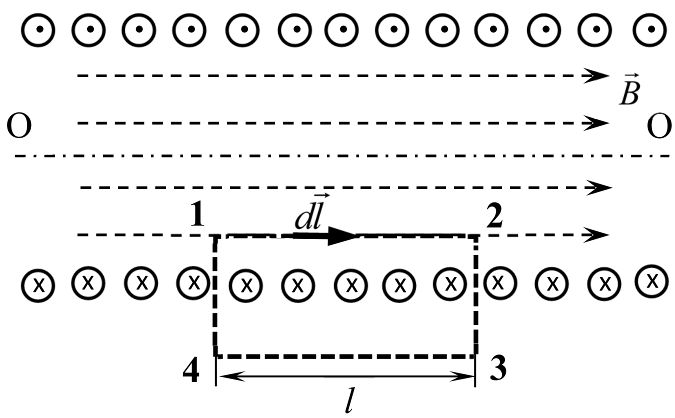


Рис. 4.12

Таким чином, застосовуючи для контура 1-2-3-4-1 рівняння для циркуляції вектора індукції магнітного поля в інтегральній формі, отримаємо рівність:

$$Bl = \mu_0 N_{охоп} I .$$

Кількість витків можна записати як добуток $N_{охоп}=nl$, де n – кількість витків, що припадає на одиницю довжини соленоїда. Після підстановки отримуємо рівняння:

$$Bl = \mu_0 nlI .$$

Після скорочення отримаємо вираз для величини індукції магнітного поля всередині соленоїда

$$B = \mu_0 nI \,.$$

Величина індукції магнітного поля всередині соленоїда прямо пропорційна силі струму.

На краю нескінченого соленоїда величина індукції буде зменшеною у два рази:

$$B_k = \frac{1}{2}\mu_0 nI \,.$$

За принципом суперпозиції, вектор індукції магнітного поля всередині соленоїда можна розглядати як суму двох однакових векторів, утворених двома половинами соленоїда, якщо умовно розділити соленоїд на дві частини. Кожна з цих частин повинна мати таку ж саму величину вектора індукції, як і на краю соленоїда. Це пояснює зменшення в два рази величини індукції на краю соленоїда порівняно з її величиною всередині соленоїда.

4.2. Магнітне поле в речовині

4.2.1. Закон Ампера в середовищі

Розглянемо два паралельні нескінченно тонкі оточені середовищем провідники, в яких течуть струми, як зображено на рис. 4.13. Експерименти дають, що сила взаємодії між провідниками зі струмами прямо пропорційна добутку сил струмів і обернено пропорційна відстані між ними, тобто $F \sim I_1 I_2 \Delta l / b$. Експерименти також показують, що величина коефіцієнта пропорційності залежить від роду речовини та її стану. В результаті узагальнень було установлено, що коли провідники знаходяться в середовищі, то закон Ампера для сили взаємодії між ними набуває вигляду:

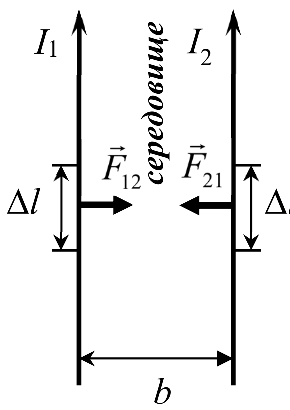


Рис. 4.13

$$F_{12} = F_{12} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{b}\Delta l \,,$$

де μ – параметр, який характеризує магнітні властивості речовини середовища, і який називають магнітною проникністю речовини, I_1, I_2 – сили струмів, b – відстань між провідниками, Δl – довжина ділянки першого чи другого провідника, до яких прикладено сили $\vec{F}_{12}$ чи $\vec{F}_{21}$. Магнітна проникність вакууму μ=1. Для середовищ магнітна проникність не дорівнює одиниці, $\mu \neq 1$, вона може бути більшою за одиницю (сила взаємодії зростає), або меншою за одиницю (сила взаємодії зменшується).

Магнітна взаємодія є польовою за своєю природою. Провідник зі струмом утворює в оточуючому його просторі магнітне поле, яке чинить силову дію на інший провідник. Зміна величини силової дії при розташуванні провідників зі струмом в середовищі означає, що в середовищі змінюється величина вектора індукції магнітного поля.

Індукція магнітного поля є векторною величиною, яка є характеристикою магнітного поля. Її величину можна змінити, якщо додати додаткових джерел поля. Ампер припустив, що зміна вектора магнітної індукції в речовинах відбувається за рахунок утворення в них замкнутих мікрострумів. Гіпотеза Ампера була підтверджена після з'ясування атомної будови речовин. Мікроструми в речовинах утворюються під дією зовнішніх магнітних полів, а коли зовнішнє магнітне поле виключають, то зникають і мікроструми. Мікроструми є джерелами магнітного поля, яке додатково додається до зовнішнього магнітного поля.

Згідно з принципом суперпозиції, вектор індукції зовнішнього магнітного поля $\vec{B}_0$ та вектор індукції магнітного поля мікростумів $\vec{B}'$ додаються, тому результуючий вектор індукції магнітного поля $\vec{B}$ в середовищі дорівнює сумі

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$$

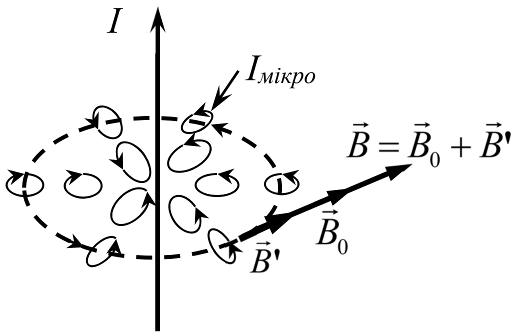


Рис. 4.14

На рис. 4.14 зображено провідник зі струмом, який є джерелом магнітного поля $\vec{B}_0$. Замкнуті мікроструми, сила струму яких $I_{мікро}$, утворюють магнітне поле $\vec{B}'$. Лінії індукції результуючого магнітного поля позначені пунктиром з стрілкою, його вектор позначено $\vec{B}$, він є дотичним до ліній індукції. Чим далі від провідника, тим меншими є мікроструми.

Для речовини з $\mu > 1$ напрямки мікрострумів визначаються так, щоб вони максимально підтримували зовнішнє магнітне поле. Коли $\mu < 1$, то мікроструми будуть направлені протилежно.

4.2.2. Магнітний диполь

Розглянемо замкнутий круговий контур (виток), площа якого S, як зображено на рис. 1.15. Силу струму в витку позначено I. Добуток сили струму на площу поверхні, натягнутої на виток, називають магнітним моментом, $p_m = IS$. Магнітний момент є векторною фізичною величиною:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n},$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор перпендикулярний до поверхні, а вектор магнітного моменту $\vec{p}_m$ співнаправлений з цим ортом, $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{n}$ і $p_m = |\vec{p}_m|$.

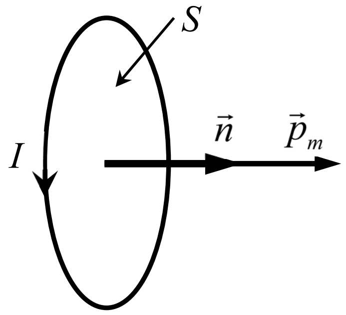


Рис. 4.15

Напрямок вектора магнітного моменту можна визначити за допомогою правила правого гвинта. Якщо гвинт обертати за струмом, то напрямок вектора магнітного моменту буде співпадати з напрямком поступального переміщення гвинта.

Виток зі струмом називають *магнітним диполем*. В магнітному полі енергія магнітного диполя визначається скалярним добутком вектора магнітного моменту на вектор індукції магнітного поля:

$$W = -\vec{p}_m\vec{B}, \quad \text{або} \quad W = -p_m B\cos\alpha,$$

де B – модуль вектора індукції магнітного поля $B = |\vec{B}|$, α – кут між векторами $\vec{B}$ та $\vec{p}_m$, (рис. 4.16).

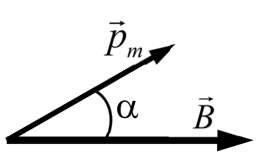


Рис. 4.16

В магнітному полі на диполь діє момент сили, величина якого дорівнює векторному добутку вектора магнітного моменту на вектор індукції магнітного поля:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m\vec{B}], \text{ або } M = p_m B\sin\alpha.$$

Якщо α=0, то вектори $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}$ співнаправлені, енергія мінімальна, а момент сили дорівнює нулю. Отже, в магнітному полі рівноважною є орієнтація, коли вектор магнітного моменту направлений уздовж вектора індукції магнітного моменту.

На кожну ділянку витка діє сила Ампера. Коли контур розташовано в однорідному магнітному полі, то сума всіх сил Ампера, розрахована по всім ділянкам контуру, дорівнює нулю. В цьому випадку дія сили Ампера призводить до виникнення внутрішніх механічних напружень у витку, через що він деформується (розтягується).

Явище виникнення моменту сили, що діє на замкнутий виток зі струмом, який розміщено у магнітному полі, має практичний інтерес. Завдяки цьому явищу створюється обертовий момент в електродвигунах, які використовуються в техніці і в побуті.

В системі СІ одиницею вимірювання для магнітного моменту є $[p_m]$ = А·м^2.

4.2.3. Намагніченість

За гіпотезою Ампера, в речовинах під дією зовнішнього магнітного поля виникають мікроструми. Мікроструми можуть утворювати, наприклад, електрони, що рухаються навколо ядра атома. Стан атома в магнітному полі характеризують магнітним моментом. Коли зовнішнього магнітного поля немає, то магнітний дипольний момент у атомів або відсутній, або його величина в середньому дорівнює нулю. В магнітному полі магнітні дипольні моменти атомів стають нерівними нулю. Під дією зовнішнього магнітного поля речовина намагнічується. Намагнічений стан речовини характеризують векторною фізичною величиною, яку називають намагніченістю.

Кількісною мірою намагніченості є магнітний момент одиниці об’єму речовини. Цю фізичну величину називають *вектором намагніченості*. Її позначають вектором $\vec{m}$. За визначенням, вектор намагніченості дорівнює

$$\vec{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{mi}}{V}$$

де $\vec{p}_{mi}$ – магнітний момент i-го атома; N - число атомів, що знаходяться в речовині об’ємом V. Суму в чисельнику називають магнітним моментом речовини об’ємом V:

$$\vec{J}_m = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{mi}\,.$$

У загальному випадку вектор $\vec{m}$ у точці середовища можна визначити як границю відношення магнітного моменту деякого об’єму ΔV речовини, що оточує дану точку, до об’єму, коли останній прямує до нуля, тобто

$$\vec{m} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{mi}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{J}_m}{\Delta V},$$

або

$$\vec{m} = \frac{d\vec{J}_m}{dV} \ ,$$

де dV – елементарний об'єм ділянки речовини, магнітний момент якої $d\vec{J}$.

Якщо магнітні моменти всіх мікрострумів однакові, то вектор магнітного моменту речовини дорівнює добутку магнітного моменту одного диполя $\vec{p}_m$ на їх кількість N в речовині

$$\vec{J}_m = \vec{p}_m N \, .$$

Намагніченість однорідної речовини дорівнює

$$\vec{m} = \vec{p}_m n \, ,$$

де n – концентрація магнітних дипольних моментів, тобто кількість дипольних моментів в одиниці об'єму речовини, $n=N/V$.

В системі СІ намагніченість вимірюють в [m]=А/м.

4.2.4. Циркуляція вектора індукції магнітного поля струмів в середовищі

Розглянемо провідники з силами струмів I_i, які оточені середовищем. На рис. 4.17 сили струмів в провідниках позначені I_1, I_2, I_3. Ці струми є джерелом магнітного поля з вектором індукції $\vec{B}_0$. Утворене струмами магнітне поле намагнічує середовище, в якому виникають мікроструми $I_{мікро}$, які на рис. 4.17 позначені кружечками зі стрілками. Мікроструми утворюють магнітне поле з вектором індукції $\vec{B}'$.

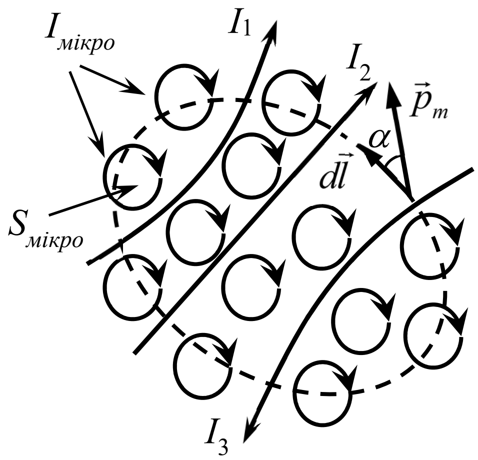


Рис. 4.17

Вектор індукції магнітного поля, утвореного струмами та мікрострумами, дорівнює сумі $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ (рис. 4.14), а його циркуляція дорівнює сумі циркуляцій:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint \vec{B}_0 d\vec{l} + \oint \vec{B}' d\vec{l} \ .$$

Циркуляція вектора індукції прямо пропорційна сумі сил струмів, охоплених контуром. Відповідно, циркуляція вектора $\vec{B}_0$ та циркуляція вектора $\vec{B}'$ дорівнюють:

$$\oint \vec{B}_0 d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i\,, \quad \oint \vec{B}' d\vec{l} = \mu_0 \sum_j I_{мікро,\,j}\,,$$

де i, j – індекси сил струмів, по яких йде підрахунок їх сум.

Суму $\sum_i I_i$ можна порахувати як потік вектора густини струму провідності:

$$\sum_i I_i = \int \vec{j} d\vec{S}\,,$$

де $\vec{j}$ – вектор густини струму.

При розрахунку суми сил мікростумів треба врахувати, що ці струми замкнуті, вони, як видно з рис. 4.17, входять і виходять з поверхні, натягнутій на контур, який на рис. 4.17 позначено пунктиром. Через це внесок в суму від мікрострумів, які охоплені контуром, і які двічі пронизують поверхню, що натянута на контур, дорівнює нулю. Ненульовим є внесок від мікрострумів, які нанизані на контур, і які тільки один раз пронизують поверхню. На рис. 4.17 такими є мікроструми, які перетинаються з контуром.

Кількість мікрострумів, що нанизані на елементарну довжину ділянки контуру, пропорційна концентрації мікрострумів, їх площі, довжині елементарної ділянки контуру та косинусу кута α між вектором $d\vec{l}$ та перепендикуляром до контуру мікроструму. Сума охоплених контуром мікрострумів дорівнює

$$\sum_j I_{мікро\, j} = \oint_l n I_{мікро} S_{мікро} \cos\alpha dl = \oint_l n p_m \cos\alpha dl = \oint_l n \vec{p}_m d\vec{l} = \oint_l \vec{m} d\vec{l}\,,$$

де в другому інтегралі враховано, що добуток сили струму мікроструму $I_{мікро}$ на площу його контуру $S_{мікро}$ дорівнює магнітному моменту мікроструму, $p_m = I_{мікро} S_{мікро}$; в третьому інтегралі враховано, що добуток величини магнітного моменту на довжину ділянки та на косинус кута між ними дорівнює скалярному добутку, $p_m \cos\alpha dl = \vec{p}_m d\vec{l}$; а в останньому інтегралі враховано, що добуток вектора магнітного моменту мікроструму на концентрацію мікрострумів дорівнює намагніченості, $n\vec{p}_m = \vec{m}$.

Циркуляція намагніченості може бути порахована інтегруванням ротора намагніченості по поверхні, натягнутій на контур:

$$\oint\limits_l \vec{m}d\vec{l} = \int rot\vec{m}\,d\vec{S}\,.$$

Таким чином, отримано, що циркуляція вектора індукції дорівнює

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0(\int \vec{j}d\vec{S} + \int rot\vec{m}\,d\vec{S}), \text{ або}$$

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\int(\vec{j} + rot\vec{m})d\vec{S}\,.$$

З цих виразів маємо, що джерелами магнітного поля є не тільки струми. Намагнічені речовини також є джерелами магнітного поля. Зауважимо, що магніти, якими є тверді тіла, в яких намагніченість не дорівнює нулю при відсутності зовнішнього магнітного поля, також є джерелами магнітного поля. Магніти взаємодіють між собою, відштовхуються чи притягуються один до одного.

4.2.5. Напруженість магнітного поля

За математичною теоремою Стокса, циркуляція вектора індукції магнітного поля дорівнює інтегралу від ротора вектора магнітної індукції, порахованому по поверхні, натягнутій на контур:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \int rot\vec{B}d\vec{S}\,.$$

Підставимо це математичне співвідношення у вираз для циркуляції вектора індукції магнітного поля:

$$\int rot\vec{B}d\vec{S} = \mu_0\int(\vec{j} + rot\vec{m})d\vec{S}\,.$$

Оскільки це рівняння виконується для довільних контурів і поверхонь, натягнутих на них, то має виконуватись рівність для підінтегральних виразів:

$$rot\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + rot\vec{m})\,.$$

Таким чином, вектор індукції магнітного поля прямо пропорційний сумі вектора густини струму провідності та ротору намагніченості.

Поділимо це рівняння на магнітну сталу та перенесемо ротор намагніченості наліво, тоді отримаємо рівняння:

$$rot\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{m}\right) = \vec{j}\,.$$

В цьому рівнянні під знаком ротора стоїть комбінація, що утворена з вектора індукції магнітного поля і вектора намагніченості, яка залежить тільки від вектора густини струму провідності.

Іншими словами, отримано можливість характеризації магнітного поля, утвореного струмами, не зважаючи на процес намагнічування середовища.

Напруженістю магнітного поля називають фізичну величину, вектор якої визначається у вигляді:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{m}.$$

Джерелом напруженості магнітного поля є струм:

$$rot\vec{H} = \vec{j}.$$

Циркуляція вектора напруженості магнітного поля дорівнює силі струму, охопленому контуром:

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = I.$$

Для ділянки провідника зі струмом вектор напруженості магнітного поля визначається за формулою:

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{I[d\vec{l}\,\vec{r}\,]}{r^3}.$$

Це – формула закону Біо-Савара-Лапласа для напруженості магнітного поля.

Напруженість магнітного поля всередині соленоїда дорівнює

$$H = nI.$$

У вакуумі, де намагніченість відсутня, $\vec{m} = 0$, вектори напруженості і намагніченості зв’язані між собою співвідношенням:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}.$$

В системі СІ напруженість магнітного поля вимірюється в [Н]=А/м.

4.2.6. Магнітна сприйнятливість

В лінійних середовищах намагніченість прямо пропорційна напруженості магнітного поля:

$$\vec{m} = \chi\vec{H},$$

де χ – коефіцієнт пропорційності, який називається *магнітною сприйнятливістю*.

Магнітна сприйнятливість є однією з фізичних характеристик речовин. Її величина залежить не тільки від роду речовини, вона також залежить від стану речовини.

Підставимо формулу лінійного зв'язку між намагніченістю та напруженістю у формулу $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0 - \vec{m}$. Отримаємо вираз:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H} \ .$$

Зробимо перетворення та отримаємо, що вектор індукції магнітного поля в лінійних середовищах прямо пропорційний вектору напружeності магнітного поля:

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} \ .$$

Звідси маємо, що завдяки поляризації вектор індукції магнітного поля зростає у μ-разів:

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \ , \quad \text{або} \quad \vec{B} = \mu \vec{B}_0 \ ,$$

де μ – магнітна проникність, величина якої дорівнює збільшеній на одиницю магнітній сприйнятливості, μ=1+χ, $\vec{B}_0$ – індукція магнітного поля у випадку, якби не відбувалося намагнічування середовища.

Збільшення у μ разів індукції магнітного поля за рахунок намагнічування пояснює зростання згідно з законом Ампера на таку ж саму величину сили взаємодії між струмами у середовищі.

Запишемо формулу закону Біо-Савара-Лапласа для індукції магнітного поля, утвореного ділянкою провідника, що оточений середовищем:

$$d\vec{B} = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l} \ \vec{r}\,]}{r^3} \ .$$

Формула для індукції магнітного поля для соленоїда з осердям також модифікується:

$$B = \mu \mu_0 n I \ ,$$

де μ – магнітна проникність речовини осердя, яке розташоване всередині соленоїда, і яке намагнічується при проходженні струму в соленоїді.

За магнітними властивостями речовини поділяють на діамагнетики, парамагнетики та феромагнетики. У діамагнетиків вектор намагніченості направлений протилежно до вектора напруженості, $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{H}$, магнітна сприйнятливість від'ємна, χ<0, а вектор індукції співнаправлений з вектором напруженості магнітного поля, $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{H}$, величина магнітної проникності додатна і менша за одиницю, 0<μ<1.

У парамагнетиків магнітна сприйнятливість додатна, χ>0, вектор поляризації співпадає за напрямком з вектором напруженості магнітного поля, $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{H}$, і магнітна проникність більша за одиницю, μ>1.

У феромагнетиків μ>>1, в них намагніченість існує навіть за відсутності зовнішнього магнітного поля.

4.3. Основні формули для розв'язку задач

1. Індукція магнітного поля заряду q, що рухається з швидкістю $\vec{v}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_0[\vec{v}\vec{r}]}{r^3},$$

де $r = |\vec{r}\,|$ – відстань від заряду до точки спостереження.

2. Закон Біо-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec{l}\ \vec{r}\,]}{r^3},$$

де $d\vec{B}$ – індукція магнітного поля, утворена ділянкою $d\vec{l}$ провідника з силою струму I в точці з радіус-вектором $\vec{r}$.

3. Індукція магнітного поля нескінченно довгого прямолінійного провідника зі струмом I:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R},$$

де R – найменша відстань від точки спостереження до провідника.

4. Сила Лоренца, що діє на рухомий заряд:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}]\ , \quad F_L = qvB\sin\alpha\ .$$

5. Сила Ампера:

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l}\vec{B}], \qquad F_A = BIl\sin\alpha\ .$$

6. Циркуляція вектора індукції магнітного поля:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I\ .$$

7. Індукція магнітного поля всередині соленоїда з струмом I:

$$B = \mu_0 nI\ .$$

8. Магнітний диполь витка площею S з струмом I:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}\,, \quad p_m = IS\ .$$

9. Енергія магнітного диполя в магнітному полі:

$$W = -\vec{p}_m\vec{B}, \quad W = -p_m B\cos\alpha\ .$$

10. Момент сили, який діє на магнітний диполь в магнітному полі:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m\vec{B}], \quad M = p_m B\sin\alpha\ .$$

11. Зв'язок між вектором індукції магнітного поля та вектором напруженості магнітного поля:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}.$$

12. Циркуляція вектора напруженості магнітного поля:

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = I.$$

4.4. Питання для самоконтролю

1. Запишіть формулу закону Ампера та дайте означення всіх величин та параметрів, що входять в цю формулу.

2. Дайте означення індукції магнітного поля.

3. Чому вектор індукції магнітного поля є силовою характеристикою магнітного поля?

4. Як направлені лінії індукції магнітного поля прямолінійного провідника зі струмом?

5. Поясніть, чому індукція магнітного поля рухомого заряду пропорційна добутку заряду на швидкість та обернено пропорційна квадрату відстані.

6. Чому магнітне поле рухомого заряду нестаціонарне?

7. Чому магнітне поле рухомого заряду має вигляд веретена, що рухається вздовж осі?

8. Напишіть формулу закону Біо-Савара-Лапласа та дайте означення параметрів, що входять у формулу.

9. Чому магнітне поле стаціонарного струму стаціонарне?

10. Поясніть, чому сила Лоренца визначається добутком заряду на його швидкість та на величину індукції магнітного поля.

12. Напишіть формулу для сили Ампера та дайте означення параметрів, що входять у формулу.

13. Чому потік вектора магнітної індукції для замкнутої поверхні дорівнює нулю?

14. Запишіть формулу для циркуляції вектора індукції магнітного поля.

15. Чому якщо контур не охоплює струм, то циркуляція вектора індукції дорівнює нулю?

16. Розпишіть по компонентах рівняння для циркуляції вектора індукції магнітного поля в диференціальній формі.

17. Чому на краю соленоїда індукція магнітно поля в два рази менша її величини в середині соленоїда?

18. Чому дорівнює циркуляція вектора магнітної індукції для замкнутого контура всередині соленоїда?

19. Як магнітна проникність впливає на взаємодією між провідниками зі струмом в середовищі?

20. В чому ідея гіпотези Ампера?

21. Дайте означення магнітного диполя.

22. Напишіть формули для енергії магнітного диполя в магнітному полі.

23. Як визначається момент сили, з яким магнітне поле діє на магнітний диполь?

24. Чому намагніченість пропорційна концентрації диполів?

25. Напишіть вираз для циркуляції вектора індукції магнітного поля з урахуванням намагнічування середовища.

26. Як визначається вектор напруженості магнітного поля?

27. Напишіть формулу закону Біо-Савара-Лапласа для провідника зі струмом, який оточений середовищем?

28. Як вектори індукції та напруженості магнітного поля зв’язані один з одним?

Глава 5. ІНДУКЦІЙНІ ЯВИЩА, ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ

Електромагнітне поле – це фізичне поле, яке здатне чинити силову дію на заряди, на електричні та магнітні диполі. Воно утворене електричним та магнітним полями, які у випадку електромагнітного поля не існують незалежно одне від одного і взаємно пов'язані між собою через індукцію – електричне поле породжує магнітне поле, а магнітне поле породжує електричне поле.

Електромагнітне поле може існувати без зарядів та струмів. Характеризується векторами напруженості електричного поля та індукції магнітного поля, $\vec{E}$ та $\vec{B}$ відповідно.

Описується електромагнітне поле рівняннями Максвела.

5.1. Явище електромагнітної індукції

Явищем електромагнітної індукції називають утворення електрорушійної сили в замкнутому контурі. Під дією електрорушійної сили в контурі виникає електричний струм, який називають індукційним струмом. Вперше це явище було установлене Фарадеєм, який розглянув всі можливі випадки індукування магнітним полем ЕРС.

Перший випадок: ЕРС і індукційний струм виникають, коли контур рухається в стаціонарному ($\vec{B}(t) = const$) магнітному полі, наприклад, обертається в магнітному полі. На рис. 5.1 напрямок обертання позначено стрілкою, а вісь обертання позначена пунктиром. Виникнення індукційного

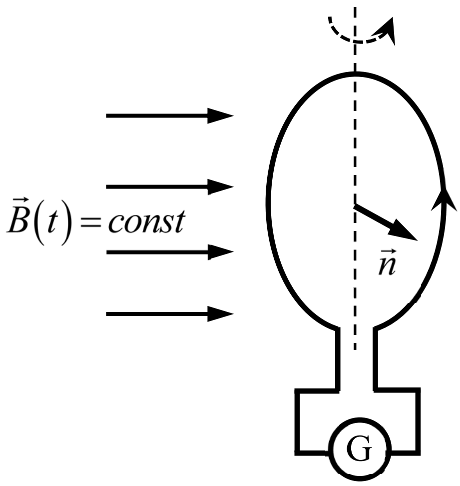


Рис. 5.1

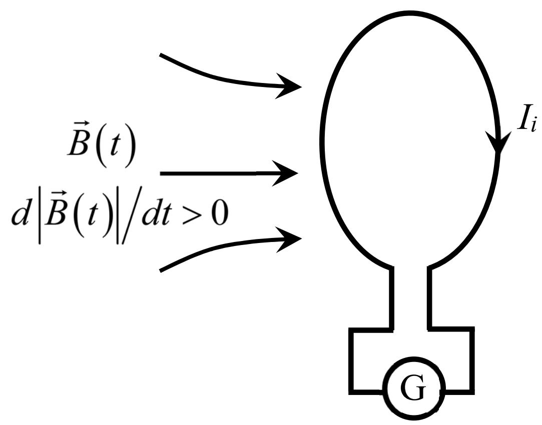


Рис. 5.2

струму можна зареєструвати за допомогою гальванометра – високочутливого до перенесення заряду приладу.

Другий випадок: ЕРС і індукційний струм виникають в нерухомому контурі, який розміщено в нестаціонарному магнітному полі, $\vec{B}(t) \neq const$, як показано на рис. 5.2.

Третій випадок: ЕРС і індукційний струм виникають, коли з часом змінюється форма контуру.

Спільною ознакою для всіх цих трьох різних по формі випадків є зміна потоку вектора магнітної індукції через поверхню контуру.

Експерименти показують, що сила індукційного струму, а отже і ЕРС, є тим більшою, чим більшою є зміна швидкості магнітного потоку.

Закон Фарадея можна сформулювати наступним чином: величина ЕРС індукції дорівнює швидкості зміни магнітного потоку, взятій з від'ємним знаком:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Величина магнітного потоку визначається інтегруванням по поверхні, натягнутій на контур:

$$\Phi = \int\limits_{(S)} \vec{B} d\vec{S}.$$

Закон Фарадея можна записати у вигляді:

$$\varepsilon_i = -\frac{d}{dt} \int\limits_{(S)} \vec{B} d\vec{S}.$$

Величину сили індукційного струму можна знайти за допомогою ділення ЕРС індукції на опір провідника у відповідності до закону Ома.

Напрямок індукційного струму визначається за правилом Ленца. Магнітне поле індукційного струму протидіє зміні магнітного потоку, компенсує його.

На рис. 5.1 напрямок індукційного струму відповідає зменшенню магнітного потоку через контур, оскільки в цей момент часу зменшується кут між вектором нормалі $\vec{n}$ до поверхні контуру та вектором $\vec{B}(t)$ індукції магнітного поля.

На рис. 5.2 індукційний струм компенсує зростання потоку індукції магнітного поля, оскільки з часом зростає величина вектора індукції магнітного поля, $d|\vec{B}(t)|/dt > 0$.

В законі Фарадея виконання правила Ленца математично забезпечується знаком «мінус» перед похідною від магнітного потоку.

Явище електромагнітної індукції використовується для отримання ЕРС, наприклад, в генераторах електростанцій, крім сонячних, в генераторах автомобілів з двигунами внутрішнього згорання.

5.2. Вихрове електричне поле

Виникнення індукційного струму означає, що на носії струму провідника діє стороння сила, утворена завдяки змінному магнітному полю. Коли явище магнітної індукції спостерігається для провідника, що рухається в магнітному полі, то сторонньою є сила Лоренца.

Розглянемо контур, який рухається з швидкістю $\vec{v}$ в магнітному полі, вектор індукції якого позначимо $\vec{B}$. На рухомий заряд-носій струму провідника діє сила Лоренца, $\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}]$. Вектор напруженості цієї сторонньої сили, як і раніше, визначимо з відношення сторонньої сили до заряду, $\vec{E}^* = \vec{F}_L / q = [\vec{v}\vec{B}]$. ЕРС індукції, яку утворює зовнішнє магнітне поле в рухомому провіднику, можна знайти шляхом інтегрування

$$\mathcal{E}_i = \oint_{(l)} \vec{E}^* d\vec{l} = \oint_{(l)} [\vec{v}\vec{B}] d\vec{l} .$$

Величина цієї ЕРС буде такою самою, якщо її розраховувати за допомогою закону Фарадея.

У випадку, коли нерухомий контур знаходиться в нестаціонарному магнітному полі, ЕРС виникає за рахунок вихрового електричного поля.

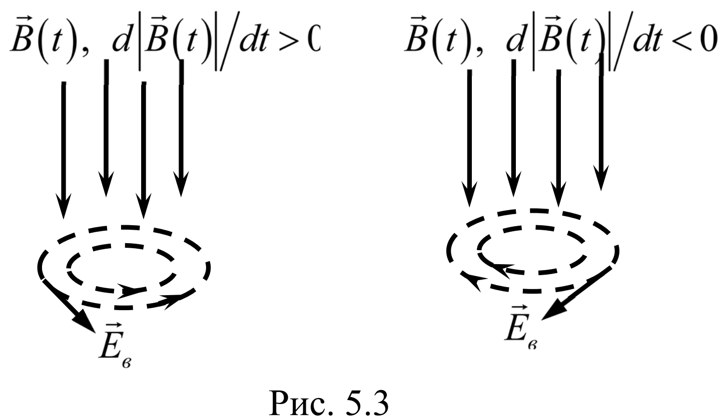


Рис. 5.3

Джерелом вихрового електричного поля є змінне з часом (нестаціонарне) магнітне поле, $\vec{B}(t) \neq const$ (рис. 5.3).

Силові лінії вихрового електричного поля є замкненими кривими. Вектор напруженості вихрового електричного поля дотичний до силових ліній. Напрямок силових ліній залежить від характеру часової зміни вектора індукції магнітного поля. Коли вектор індукції магнітного поля змінює зростання модуля вектора індукції магнітного поля, $d|\vec{B}(t)|/dt > 0$, на зменшення, $d|\vec{B}(t)|/dt < 0$, то напрямок силових ліній змінюється на протилежний, як показано на рис. 5.3.

Як видно з рис. 5.3, циркуляція вихрового електричного поля не дорівнює нулю:

$$\oint\limits_{(l)} \vec{E}_{в} d\vec{l} \neq 0 .$$

Отже, змінне магнітне поле є джерелом вихрового електричного поля. Вихрове електричне поле не є потенціальним.

Нагадаємо, що електричне поле, утворене нерухомими електричними зарядами, є потенціальним, а циркуляція його вектора напруженості дорівнює нулю.

Явище утворення ЕРС змінним магнітним полем є основним фізичним принципом, на основі якого створюють трансформатори, без яких важко уявити передачу електроенергії від електростанцій до мільйонів споживачів. Задачі управління, оптимізації та стійкості роботи електромереж є складними і стратегічними задачами економік держав.

5.3. Закон Фарадея у диференціальній формі

Розглянемо нестаціонарне магнітне поле $\vec{B}(t) \neq const$. Нестаціонарне магнітне поле утворює в оточуючому середовищі вихрове електричне поле. Це поле чинить силову дію на заряди, причому відповідна сила дорівнює $\vec{F} = q\vec{E}$ (тут опущено індекс «в», яким позначали вихрове поле в пункті 5.2.) Якщо заряд переміщувати по замкнутому контуру, то виконана цим полем робота буде дорівнювати

$$A = \oint\limits_{(l)} \vec{F} d\vec{l} = \oint\limits_{(l)} q\vec{E} d\vec{l} = q\oint\limits_{(l)} \vec{E} d\vec{l} .$$

З відношення роботи, виконаної вихровим електричним полем при переміщенні заряду по замкнутому контурі, до величини заряду отримаємо вираз для ЕРС:

$$\mathcal{E}_i = \oint_{(l)} \vec{E}d\vec{l}\ .$$

Підставимо цей вираз в закон Фарадея, тоді отримаємо:

$$\oint_{(l)} \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_{(S)} \vec{B}d\vec{S}\,.$$

Скористаємось математичною теоремою Стокса:

$$\oint_{(l)} \vec{E}d\vec{l} = \int_{(S)} rot\vec{E}d\vec{S}\,,$$

де S позначено поверхню, натягнуту на контур.

Отримаємо рівняння :

$$\int_{(S)} rot\vec{E}d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_{(S)} \vec{B}d\vec{S}\,.$$

Коли контур не змінюється з часом, то похідну за часом можна внести під знак інтегралу:

$$\int_{(S)} rot\vec{E}d\vec{S} = -\int_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S}\,,$$

де враховано, що вектор індукції магнітного поля є функцією від часу та координат, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t)$.

Отримана інтегральна рівність виконується для будь-якого контуру довільної форми, тому повинна виконуватися рівність для підінтегральних виразів.

В кожній точці простору ротор вектора напруженості електричного поля дорівнює взятій з від'ємним знаком частинній похідній за часом від вектора індукції магнітного поля:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,.$$

Отриманий вираз називають *законом Фарадея в диференціальній формі*, або *першим рівнянням Максвела*.

5.4. Індуктивність

Розглянемо замкнутий контур, в якому тече електричний струм (рис. 5.4). Позначимо I силу струму в контурі. За законом Біо-Савара-Лапласа, кожна ділянка $d\vec{l}$ цього контуру утворює магнітне поле, вектор індукції якого $d\vec{B}$ прямо пропорційний силі струму в контурі, $d\vec{B} \sim I$.

Результуючий вектор індукції $\vec{B}$ в кожній точці простору дорівнює інтегралу по контуру $\vec{B} = \oint\limits_{(l)} d\vec{B} \sim I$, і його величина також пропорційна силі струму.

Для натягнутої на контур поверхні можна визначити потік вектора магнітної індукції, який розраховують шляхом інтегрування вектора $\vec{B}$ по поверхні, $\Phi = \int\limits_{(S)} \vec{B}d\vec{S} \sim I$. Величина магнітного потоку також буде прямо пропорційною силі струму в контурі.

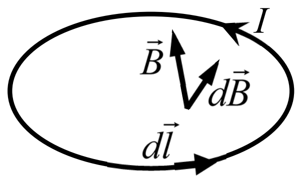


Рис. 5.4

Отже, величина потоку вектора магнітної індукції через поверхню, натягнуту на замкнутий контур, прямо пропорційна силі струму в цьому контурі:

$$\Phi = LI,$$

де L – коефіцієнт пропорційності, який називають індуктивністю.

Розрахуємо індуктивність соленоїда, площа перерізу якого S, довжина l, а кількість витків N (див. рис. 5.5). Величина індукції магнітного поля дорівнює

$$B = \mu\mu_0 nI,$$

де I – сила струму, μ – магнітна проникність речовини осердя соленоїда, а $n=N/l$ – кількість витків на одиницю довжини соленоїда.

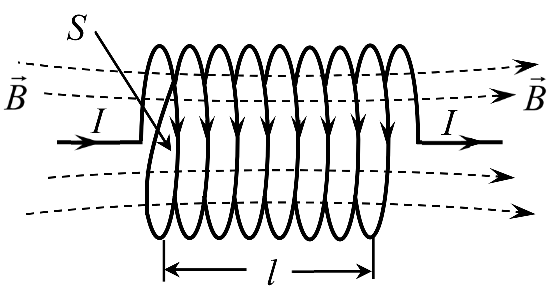


Рис. 5.5

Магнітне поле всередині соленоїда однорідне, тому потік вектора індукції через його один виток дорівнює

$$\Phi = BS = \mu\mu_0 nIS.$$

Магнітне поле пронизує всі витки, тому повний потік дорівнює

$$\Psi = N\Phi = N\mu\mu_0 nIS = \mu\mu_0 n^2 lSI.$$

Таким чином, індуктивність соленоїда визначається формулою:

$$L = \mu\mu_0 n^2 lS.$$

Чим більшими є величини магнітної проникності речовини осердя, кількість витків і площі перерізу соленоїда, тим більшою буде величина його індуктивності, і тим сильніше в ньому має проявлятися явище самоіндукції.

Як правило, соленоїди виготовляють з провідників з малим опором, наприклад з міді, які покриті лаком для ізоляції витків між собою, а осердя виготовляють з феромагнетиків з якомога більшим значенням магнітної проникності.

В системі СІ індуктивність вимірюють в [L]=Гн.

5.5. ЕРС самоіндукції

Якщо струм в замкнутому контурі нестаціонарний, $I(t) \neq const$, то утворене ним магнітне поле також буде нестаціонарним. Величина потоку його вектора магнітної індукції через поверхню, натягнуту на контур, буде залежати від часу, $\Phi(t) \neq const$, а тому $d\Phi(t)/dt \neq 0$. Зміна магнітного потоку призводить до виникнення в контурі ЕРС. Коли ЕРС в замкнутому контурі утворює змінне магнітне поле, джерелом якого є струм цього контуру, то таку ЕРС називають ЕРС самоіндукції.

Підставимо вираз для потоку в рівняння закону Фарадея, тоді отримаємо, що ЕРС самоіндукції прямо пропорційна швидкості зміни сили струму в контурі:

$$\varepsilon_{si} = -L\frac{dI}{dt}.$$

ЕРС самоіндукції виникає завдяки утворенню змінним магнітним полем вихрового електричного поля. Згідно з правилом Ленца, вихрове електричне поле в контурі протидіє зміні електричного струму. Якщо сила струму зростає, то вихрове електричне поле буде протилежним до струму, і, навпаки, коли сила струму зменшується, то вихрове електричне поле буде йому сприяти і буде направлене уздовж струму.

Коли швидкість зміни сили струму становить 1 А/с, то в котушці з індуктивністю 1 Гн утворюється ЕРС самоіндукції, величина якої дорівнює одному вольту, 1 В.

5.6. Енергія магнітного поля провідника з струмом

Розглянемо електричне коло, в якому котушка з індуктивністю L підключена до джерела постійного струму. Коли ключ знаходиться в положенні 1, в котушці тече постійний струм, силу струму якого позначимо I. Відключимо джерело струму від котушки, перемкнемо ключ з положення 1 в положення 2. Коли ключ знаходиться в положенні 2, то котушка «закорочена» через опір R, тому струм повинен зникнути. Але внаслідок явища самоіндукції струм не може зникнути миттєво, цього не дозволяє вихрове електричне поле, яке утворюється в котушці, і яке підтримує струм, що тече через котушку при її підключенні до опору.

Величина ЕРС самоіндукції, яка виникає в котушці, дорівнює

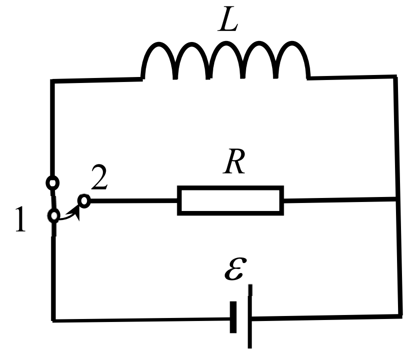


Рис. 5.6

$$\varepsilon_{si} = -L\frac{dI}{dt}.$$

ЕРС самоіндукції за час dt виконає роботу, величина якої дорівнює

$$dA = \varepsilon_{si}dq = -L\frac{dI}{dt}dq = -L\frac{dI}{dt}Idt = -LIdI,$$

де враховано, що за елементарний час dt в колі через котушку буде перенесено елементарний заряд dq, який дорівнює добутку сили струму на елементарний час, $dq=Idt$.

Роботу, яку виконає вихрове електричне поле до повного припинення струму, знайдемо інтегруванням:

$$A = \int dA = -\int_I^0 LIdI = \left(-\frac{LI^2}{2}\right)\Bigg|_I^0 = \left(\frac{LI^2}{2}\right)\Bigg|_0^I = \frac{LI^2}{2},$$

де враховано, що кінцева сила струму дорівнює нулю.

Роботу A виконано за рахунок енергії магнітного поля W, яку мала котушка з струмом, $W=A$, коли перемикач знаходився в положенні 1.

Таким чином, енергія магнітного поля провідника зі струмом визначається за формулою

$$W = \frac{LI^2}{2}, \text{ або } W = \frac{\Phi I}{2}, \text{ або } W = \frac{\Phi^2}{2L},$$

де враховано, що магнітний потік витка (провідника) зі струмом пропорційний силі струму, $\Phi = LI$.

5.7. Густина енергії магнітного поля

Всередині соленоїда зі струмом магнітне поле однорідне, і його індукція визначається за формулою:

$$B = \mu\mu_0 nI,$$

де I – сила струму, μ_0 – магнітна стала, μ – магнітна проникність речовини осердя соленоїда, n – кількість витків на одиницю довжини соленоїда.

Індуктивність соленоїда дорівнює

$$L = \mu\mu_0 n^2 l S,$$

де l – довжина соленоїда, S – площа його перерізу.

Енергія магнітного поля соленоїда зі струмом може бути записана у вигляді:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 n^2 l S I^2}{2} = \frac{\mu^2\mu_0^2 n^2 I^2}{2\mu\mu_0} l S = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} l S = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V,$$

де V – об'єм соленоїда, $V = lS$.

Скористаємось умовою однорідності магнітного поля всередині соленоїда та визначимо густину енергії магнітного поля з відношення енергії до об'єму:

$$w_m = \frac{W}{V}.$$

Таким чином отримаємо, що густина енергії магнітного поля дорівнює

$$w_m = \frac{\vec{B}^2}{2\mu\mu_0}, \text{ або } w_m = \frac{\vec{H}\vec{B}}{2}, \text{ або } w_m = \frac{\mu\mu_0 \vec{H}^2}{2},$$

де враховано, що величина вектора індукції магнітного поля прямо пропорційна вектору напруженості магнітного поля, $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$.

В загальному випадку енергія магнітного поля визначається шляхом інтегрування:

$$W = \int_V w_m dV = \int_V \frac{\vec{B}^2}{2\mu\mu_0} dV,$$

де вектор індукції магнітного поля не обов'язково є просторово однорідним, $\vec{B}(\vec{r}) \neq const$.

5.8. Явище магнітоелектричної індукції

Утворення магнітного поля змінним електричним полем називають явищем магнітоелектричної індукції.

Розглянемо приклад конденсатора, який підключений до кола зі струмом. Коли $I \neq 0$, то заряд обкладок конденсатора змінюється з часом, $dq / dt \neq 0$, наприклад, заряд додатно зарядженої обкладки зростає (див. рис. 5.7).

Як показують досліди та дані експериментальних вимірювань, якщо заряд конденсатора залежить від часу, $dq / dt \neq 0$, то в середині конденсатора утворюється нестаціонарне вихрове магнітне поле з замкнутими лініями індукції, які лежать в площинах, паралельних до обкладок конденсатора, (рис. 5.7, рис. 5.8). Зміна напрямку струму і знаків зарядів обкладок конденсатора супроводжується зміною напрямку магнітного поля на протилежний (рис. 5.8).

В конденсаторі обкладки розділені діелектриком, тому струму провідності всередині конденсатора немає. Спостережуване в експериментах магнітне поле всередині конденсатора, очевидно, не може бути утворене струмом провідності.

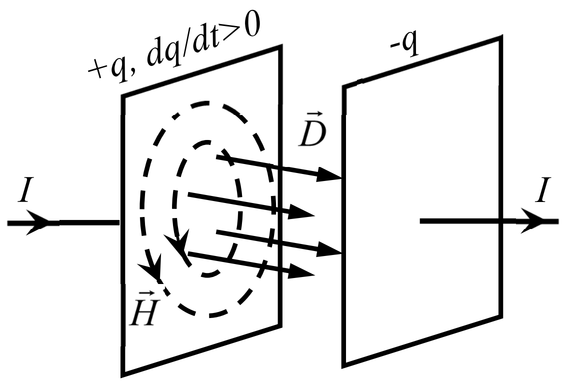


Рис. 5.7

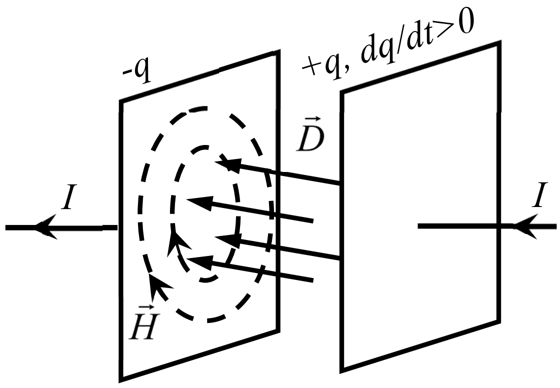


Рис. 5.8

Заряд обкладок конденсатора нерухомий і також не може стати джерелом магнітного поля.

Таким чином, можна припустити, що джерелом магнітного поля всередині конденсатора є його електричне поле, яке утворене зарядами обкладок. Цю ідею вперше сформулював Максвел.

Якщо заряд обкладок змінюється з часом, то в середині конденсатора між його обкладками утворюється нестаціонарне електричне поле. Воно просторово однорідне але змінюється з часом. Електричне поле характеризують вектором напруженості електричного поля або вектором індукції електричного поля. Експерименти показали, що магнітне поле, утворене нестаціонарним електричним полем, не залежить від поляризації діелектрика середовища між пластинами конденсатора. Це означає, що виникнення магнітного поля пов'язане з вектором індукції електричного поля $\vec{D}(t)$. Вектор $\vec{D}(t)$ не залежить від поляризації діелектрика і утворюється сторонніми зарядами. Для електричного поля всередині конденсатора сторонніми є заряди його обкладок, $\pm q(t)$.

5.9. Струм зміщення

Для опису явища магнітоелектричної індукції користуються поняттям струму зміщення. Оскільки джерелом магнітного поля є струм, то припускають, що в конденсаторі також тече струм (струм зміщення $I_{зм}$), який утворює магнітне поле подібно до струму провідності (рис. 5.9).

Струм зміщення забезпечує неперервність струму в колі. Сила струму, що тече в колі, дорівнює силі струму зміщення, $I=I_{зм}$. Швидкість зміни заряду конденсатора dq/dt дорівнює силі струму I, тому сила струму зміщення в конденсаторі дорівнює швидкості зміни його заряду

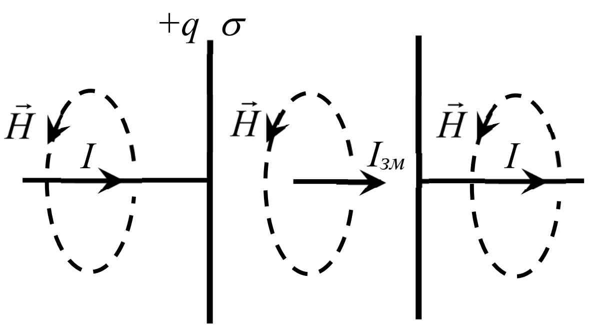


Рис. 5.9

$$I_{зм} = \frac{dq}{dt}.$$

Врахуємо, що заряд конденсатора дорівнює добутку густини заряду обкладки на її площу:

$$q = \sigma S,$$

де σ – густина заряду, S – площа обкладки.

Всередині конденсатора вектор індукції електричного поля дорівнює густині заряду обкладки:

$$D = \sigma.$$

З урахуванням цих співвідношень отримаємо, що в конденсаторі сила струму зміщення дорівнює

$$I_{зм} = S\frac{d\sigma}{dt} = S\frac{dD}{dt}.$$

Густина струму зміщення визначається з відношення сили струму зміщення до площі:

$$j_{зм} = I_{зм}/S.$$

Таким чином, вектор густини струму зміщення дорівнює похідній за часом вектора електричної індукції:

$$\vec{j}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

де враховано, що електричне поле може бути нестаціонарним і неоднорідним, $\vec{D}(\vec{r},t) \neq const$.

5.10. Закон повного струму

Циркуляція вектора напруженості електричного поля дорівнює сумі струмів, охоплених контуром, які є джерелами магнітного поля. Такими є струми провідності та струми зміщення, кожен з яких може бути джерелом магнітного поля. Отже, вираз для циркуляції вектора напруженості магнітного поля можна записати у вигляді

$$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = I + I_{зм},$$

де $\vec{H}$ – вектор напруженості магнітного поля, I та $I_{зм}$ – охоплені контуром сила струму провідності та сила струму зміщення, відповідно.

Сили струмів можна визначити як потоки векторів густин струмів через поверхню, натягнуту на контур:

$$I = \int_S \vec{j}d\vec{S}\ , \qquad I_{зм} = \int_S \vec{j}_{зм}d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}d\vec{S},$$

де враховано, що вектор густини струму зміщення прямо пропорційний похідній вектора електричної індукції:

$$\vec{j}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Таким чином, отримаємо математичний запис закону повного струму в інтегральній формі:

$$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S},$$

де інтегрування здійснюється по поверхні, натягнутій на контур.

Згідно з математичною теоремою Стокса, циркуляція вектора дорівнює інтегралу по поверхні від ротора вектора:

$$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = \int_S rot\vec{H}d\vec{S}.$$

Отже, отримуємо рівність:

$$\int_S rot\vec{H}d\vec{S} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

Ця інтегральна рівність виконується для будь-якої довільної поверхні. Вона можлива за умови рівності підінтегральних виразів:

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Це диференційне рівняння називають *рівнянням закону повного струму в диференційній формі* або *другим рівнянням Максвела*.

5.11. Рівняння Максвела в інтегральній формі

Рівняння Максвела в інтегральній формі містять чотири рівняння, які відповідають основним законам і явищам електромагнетизму. Перше рівняння – це закон Фарадея, друге рівняння – це закон повного струму, третє рівняння констатує відсутність магнітних зарядів і четверте рівняння є наслідком закону Кулона

$$\oint\limits_{(l)} \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(S)} \vec{B}d\vec{S},$$

$$\int\limits_{(l)} \vec{H}d\vec{S} = \int\limits_{(S)} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S},$$

$$\oint\limits_{(S)} \vec{B}d\vec{S} = 0,$$

$$\oint\limits_{(S)} \vec{D}d\vec{S} = q,$$

де $\vec{E}$, $\vec{H}$ – вектори напруженості електричного та магнітного полів, відповідно, $\vec{D}$, $\vec{B}$ – вектори індукції електричного та магнітного полів, відповідно, $\vec{j}$ - вектор густини струму.

Перше рівняння Максвела описує явище електромагнітної індукції. Змінне магнітне поле утворює вихрове електричне поле, циркуляція вектора напруженості вихрового електричного поля дорівнює швидкості зміни магнітного потоку, взятій з від’ємним знаком.

За другим рівнянням Максвела, циркуляція вектора напруженості магнітного поля дорівнює сумі потоків векторів густини струму провідності та густини струму зміщення.

Згідно з третім рівнянням Максвела, для магнітного поля виконується умова збереження ліній індукції магнітного поля: кількість ліній магнітної індукції, що виходять з замкнутої поверхні (виходять з об’єму), дорівнює кількості ліній магнітної індукції, що входять до цієї поверхні (входять в об’єм).

Четверте рівняння Максвела є наслідком закону Кулона. Джерелом електричної сили є заряди, її інтенсивність «строго» обернена квадрату відстані між зарядами.

5.12. Рівняння Максвела в диференціальній формі

Математичні теореми Стокса та Остроградського-Гауса дозволяють перейти від інтегрального запису рівнянь Максвела до їх диференціальної форми

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$div\vec{B} = 0,$$

$$div\vec{D} = \rho,$$

де ρ – густина сторонніх зарядів.

Згідно з першим рівнянням Максвела, змінне магнітне поле, $\vec{B}(t) \neq const$, породжує вихрове електричне поле, ротор вектора напруженості якого не дорівнює нулю, $rot\vec{E} \neq 0$.

За другим рівнянням Максвела, джерелом магнітного поля э струми провідності та змінне електричне поле.

З третього рівняння випливає, що не існує магнітних зарядів – джерел магнітного поля, а з четвертого – що електричні заряди створюють електричні поля.

Систему рівнянь Максвела доповнюють так звані матеріальні рівняння:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E},$$

де ε_0, μ_0 – електрична та магнітна сталі, ε, μ – діелектрична та магнітна проникність середовища, σ – його провідність, величина якої обернено пропорційна питомому опору.

Рівняння Максвела передбачають існування електромагнітного поля. Дійсно, запишемо перші два рівняння Максвела для вакууму, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, за умови відсутності джерел:

$$rot\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$rot\vec{H} = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Ці два рівняння дають в якості розв’язку взаємозв’язані між собою електричне і магнітне поля, вектори напруженостей яких нестаціонарні та просторово неоднорідні. Таке поле називають електромагнітним полем, в ньому електричне поле породжує магнітне і навпаки. Електромагнітне поле може існувати відокремлено від зарядів і струмів.

Електромагнітне поле поширюється в просторі у вигляді хвиль, які називають електромагнітними хвилями, і до яких зокрема належать світлові хвилі. За допомогою електромагнітних хвиль здійснюється зв’язок, в тому числі і цифровий, наприклад, у такий спосіб відбувається передача сигналів за допомогою бездротової технології Wi – Fi між роутером і ноутбуком.

5.13. Основні формули для розв’язку задач

1. Закон Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де Φ – потік вектора магнітної індукції, $\Phi = \int\limits_{(S)} \vec{B}d\vec{S}$.

2. Потік вектора магнітної індукції витка з струмом I:

$$\Phi = LI,$$

де L – індуктивність.

3. Індуктивність соленоїда:

$$L = \mu\mu_0 n^2 lS,$$

де n – кількість витків на одиницю довжини соленоїда, l – довжина соленоїда, S – площа його перерізу, μ – магнітна проникність осердя.

4. Формула для ЕРС самоіндукції:

$$\varepsilon_{si} = -L\frac{dI}{dt}.$$

5. Енергія магнітного поля провідника з струмом:

$$W = \frac{LI^2}{2}, \quad W = \frac{\Phi I}{2}, \quad W = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

6. Густина енергії магнітного поля:

$$w_m = \frac{\vec{B}^2}{2\mu\mu_0}, \quad w_m = \frac{\vec{H}\vec{B}}{2}, \quad w_m = \frac{\mu\mu_0\vec{H}^2}{2}.$$

7. Вектор густини струму зміщення:

$$\vec{j}_{зм} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

8. Закон повного струму:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I + I_{зм},$$

де $\vec{H}$ – вектор напруженості магнітного поля та охоплені контуром I – сила струму провідності, $I_{зм}$ – сила струму зміщення.

5.14. Питання для самоконтролю

1. Дайте означення явища самоіндукції.

2. Назвіть умови виникнення явища самоіндукції.

3. Сформулюйте закон Фарадея.

4. Як направлений індукційний струм?

5. Джерелом якої сторонньої сили є змінне магнітне поле?

6. Чому циркуляція вихрового електричного поля не дорівнює нулю?

7. Запишіть формулу закону Фарадея у диференціальній формі.

8. Напишіть формулу зв'язку між магнітним потоком і силою струму в замкнутому контурі.

9. Чому дорівнює індуктивність соленоїда?

10. Напишіть формулу для ЕРС самоіндукції.

11. Напишіть формули для густини енергії магнітного поля.

12. Дайте означення явища магнітоелектричної індукції.

13. Що таке струм зміщення?

14. Як вектор густини струму зміщення пов'язаний з вектором електричної індукції?

15. Сформулюйте закон повного струму в інтегральному і диференціальному виглядах.

16. Напишіть рівняння Максвела в інтегральній формі.

17. Напишіть рівняння Максвела в диференціальній формі.

18. Які рівняння називають матеріальними?

19. Що таке електромагнітне поле?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.2 Електрика і магнетизм. – К.: Техніка, 1999.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1989.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. - М.: Наука, 1979.
4. Ландсберг Г.С. Электричество. – М., Высшая школа, 1987.

ЗМІСТ