МОДУЛЬ № 1 Кінематика і динаміка матеріальної точки. Закони збереження

Вступ

Для того, щоб зрозуміти значення для цивілізації фізики – науки, яка пояснює явища природи, що оточують людину, корисно згадати основні історичні віхи, пройдені людством.

Аристотель (384 – 322 рр. до н.е.) – древньогрецький мислитель.

Які обставини сприяли появі великих цивілізацій, дивним завоюванням сусідніх племен, загибелі цих цивілізацій під ударами диких варварів і потім появі нових цивілізацій? На ці питання дає відповідь історія – наука про розвиток людства. Але поряд з природними факторами, які визначають розвиток людства – надлишок або недолік харчування, кліматичні умови, наявність копалень (мідь, срібло, залізо та ін.) – все сильніше на розвиткові людства позначалося використання інтелекту людини – здатності невеликої кількості людей за рахунок своєї спостережливості і кмітливості використовувати навколишню природу для створення приладів, що дозволяють одержати великий виграш порівняно з тим, що надає годуючий ландшафт. Першими досягненнями людства є визначення шляхом проб і помилок основних законів геометрії, зачатки астрономічних спостережень і створення простих механізмів, які дозволяють отримати виграш в роботі. Цей напрямок досліджень у древній Греції отримав назву $\mu\eta\chi\alpha\nu\eta$ - “механе” – от слова “хитрість”. У більш широкому змісті дослідження законів руху простих тіл складає зміст розділу фізики – “Механіки”, початок розвитку якої можна віднести до древніх цивілізацій. Необхідно відзначити вклад видатних древньогрецьких вчених Архімеда (287-212 рр. до н.е.), Аристотеля (384-322 рр. до н.е.), Демокрита (460-370 рр. до н.е.) та інших.

Оформлення механіки як науки відбувається в роботах Галілея (1564 – 1642 рр.), Декарта (1596 – 1650 рр.), а завершується працями І. Ньютона (1687 – 1717 рр.).

1.1 Кінематика матеріальної точки

Кінематика вивчає рух фізичних тіл. Для розв′язання цієї задачі вводять декілька припущень, що дозволяють записати закони руху незалежно від форми і будови фізичного тіла та відображають фундаментальні властивості простору та часу – їх однорідність.

Однією з основних моделей механіки є модель матеріальної точки, для якої формулюються основні закони руху. Матеріальною точкою називають тіло, розмірами якого в умовах задачі, яка розглядається, можна знехтувати. Закони руху, які використовують цю модель, відображають основні властивості руху, що притаманні всім тілам незалежно від їх геометричної форми і будови цих тіл.

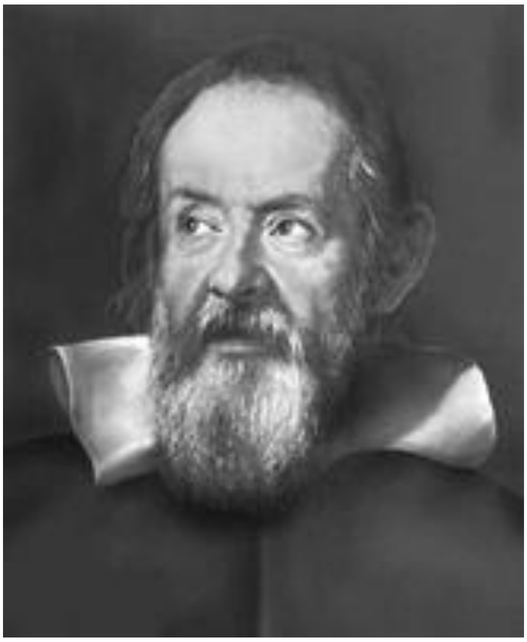
Архімед (287 – 212 рр. до н.е.) – древньогрецький математик і механік, встановив закони важеля, винайшов нескінченний гвинт, відкрив закон гідростатики, що носить його ім'я.

Великий фізик середньовіччя Галілей сформулював принцип відносності руху, який став одним з фундаментальних положень сучасної фізики. Згідно принципу Галілея абсолютний рух тіла не має сенсу. Опис руху тіла можливий тільки за умови, якщо задані тіла, відносно яких розглядається цей рух. Внаслідок принципу відносності Галілея обов′язково треба вибирати систему відліку, відносно якої розглядається рух тіл, що вивчаються.

Системою відліку називають тіло або сукупність тіл, що умовно прийняті за нерухомі, відносно яких розглядається рух.

Усі системи відліку є рівнозначними і можуть застосовуватися для опису руху тіл без будь-яких обмежень. Проте рівняння, які описують фізичні явища в різних системах відліку, відрізняються математичною формою. Існує лише один тип систем відліку, для яких закони природи не змінюють свого вигляду в залежності від переходу з однієї системи в іншу. Це так звані інерціальні системи відліку. Інерціальними системами називаються системи відліку, які пов'язані з тілами, що вільно рухаються у просторі. Інерціальні системи фізично тотожні одна до одної.

Принцип відносності, який ще називають першим законом Ньютона, можна сформулювати таким чином: закони природи в різних інерціальних системах відліку не змінюють свого вигляду. Інерціальні системи відліку рухаються прямолінійно і рівномірно відносно одна одної.



Галілео Галілей (1564-1642) – італійський фізик, відкрив закон інерції, винайшов зорову трубу і першим спостерігав небесні світила.

Для того, щоб описати рух тіла, вводять систему координат, яку пов'язують з вибраною системою відліку. Найпростішим прикладом системи координат є декартова (прямокутна) система координат.

Місцезнаходження матеріальної точки (м.т.) у декартовій системі координат описується радіусом-вектором .

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \qquad (1.1)$$

де x, y, z – координати, а $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - одиничні орти. Рухаючись, матеріальна точка змінює свої координати та описує траєкторію при переміщенні у просторі.

Рух тіла визначається декількома фізичними поняттями – траєкторією, переміщенням та шляхом.

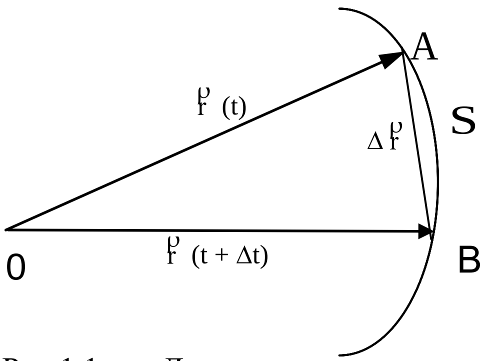


Рис.1.1. До визначення понять траєкторії, переміщення і шляху.

Траєкторією називається крива (рис.1), по якій переміщується матеріальна точка у просторі. Рівняння траєкторії задається функцією:

$$\vec{r} = r(t), \qquad (1.2а)$$

або
$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1.2б)$$

Переміщення $\Delta\vec{r}$ – це найкоротша відстань між двома точками траєкторії.

Шлях s – це відстань між початковою та кінцевою точками траєкторії.

Траєкторія однозначно визначає місцезнаходження матеріальної точки в будь-який момент часу. Для визначення кривини траєкторії вводять швидкість матеріальної точки $\vec{v}$, яку визначають як похідну радіуса-вектора за часом

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}. \qquad (1.3)$$

Враховуючи графічний сенс похідної, швидкість завжди спрямована по дотичній до траєкторії.

Середня швидкість співпадає за напрямком з переміщенням

$$v_{сер} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Абсолютне значення швидкості визначається за формулою

$$v = \frac{dS}{dt}. \qquad (1.4)$$

Шлях матеріальної точки за інтервал часу (t_1, t_2) виражається інтегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \qquad (1.5)$$

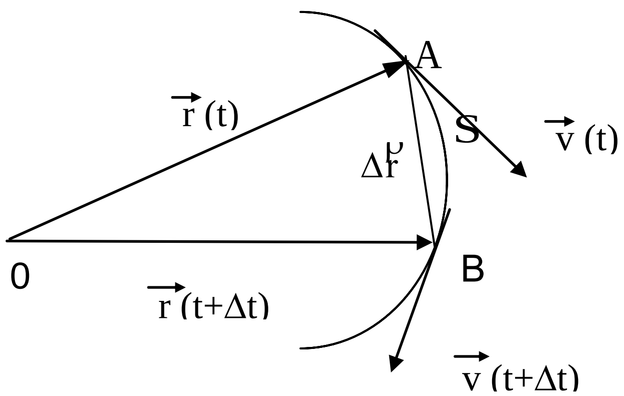


Рис.1.2. Швидкість завжди спрямована по дотичній до траєкторії.

На графіку швидкості від часу шлях чисельно дорівнює площі (рис. 1.3).

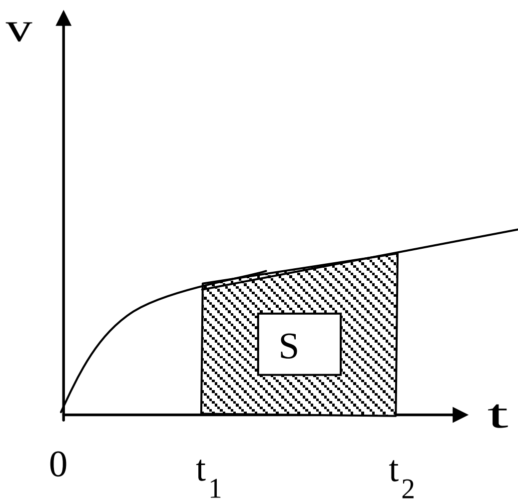


Рис. 1.3. Шлях S чисельно дорівнює площі, яка охоплюється при інтегруванні у межах t_1, t_2.

Для того, щоб описати закономірність зміни швидкості від часу вводять прискорення $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z = \vec{i}\frac{dv_x}{dt} + \vec{j}\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}\frac{dv_z}{dt}. \qquad (1.6)$$

Для наочного зображення вектора прискорення вводять спеціальну систему координат, яка суміщена з точкою, що переміщується по траєкторії (рис. 1.4).

Координати цієї системи спрямовані у напрямку дотичної (тангенціальний напрямок визначається одиничним вектором $\vec{\tau}$), і у напрямку нормалі до дотичної (напрямок нормалі визначається одиничним вектором $\vec{n}$). У цій системі координат вектор швидкості визначається такою формулою:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\ \frac{ds}{dt} = v\vec{\tau}, \qquad (1.7)$$

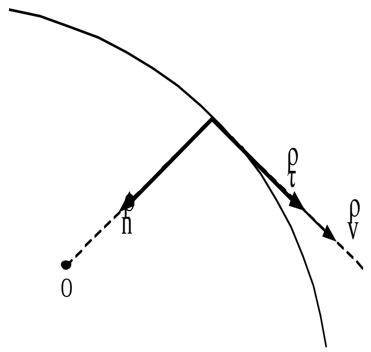


Рис.1.4.Система координат ($\vec{\tau}, \vec{n}$)

Де $v = \dfrac{ds}{dt}$ - абсолютне значення швидкості, а $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ - одиничний вектор, спрямований по дотичній,

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}. \qquad (1.8)$$

Тоді у цій системі координат прискорення $\vec{a}$ має дві складові

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = v\frac{d\vec{\tau}}{dt} + \vec{\tau}\frac{dv}{dt}. \qquad (1.9)$$

Доданок

$$\vec{a}_{\tau} = \vec{\tau}\frac{dv}{dt}, \qquad (1.10)$$

має назву тангенціального прискорення, де

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}, \qquad (1.11)$$

абсолютне значення тангенціального прискорення. Тангенціальне прискорення $\vec{a}_{\tau}$ спрямовано за напрямком дотичної $\vec{\tau}$.

Доданок

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \qquad (1.12)$$

має назву нормального прискорення.

Похідна $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$ визначається кутовою швидкістю матеріальної точки:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lambda im_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \lambda im_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\vec{n}, \qquad (1.13)$$

де $\Delta\varphi$ - приріст кута повороту (рис.4), а $\vec{n}$ - нормаль.

Похідна $\dfrac{d\varphi}{dt}$ може бути знайдена через приріст шляху ΔS (рис. 1.5)

$$\Delta S = v\cdot\Delta t = R\Delta\varphi. \qquad (1.14)$$

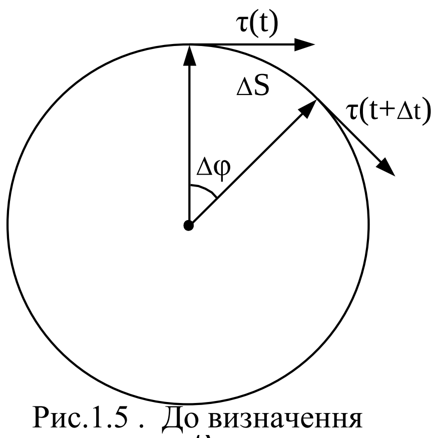


Рис.1.5 . До визначення похідної $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$.

Звідки $$\frac{d\varphi}{dt} \cong \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{v}{R}. \qquad (1.15)$$

Остаточно нормальне прискорення α_n має вигляд

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\,\vec{n}. \qquad (1.16)$$

Повне прискорення в цій системі координат знаходиться як сума векторів $\vec{a}_n$ і $\vec{a}_\tau$ (рис. 1.6):

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \qquad (1.17)$$

Модуль повного прискорення дорівнює

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}. \qquad (1.18)$$

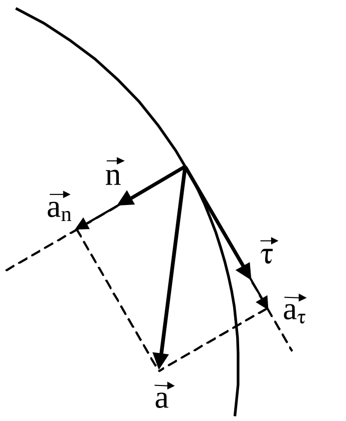


Рис.1.6. Вектор повного прискорення.

Відзначимо, що нормальна компонента прискорення не змінює абсолютного значення швидкості, а змінює лише її напрямок, тоді як тангенціальна складова прискорення змінює абсолютне значення швидкості.

Таким чином, кількісна зміна швидкості пов′язана з тангенціальним прискоренням, напрямок якого співпадає з напрямком швидкості. Якщо швидкість змінюється тільки за напрямком, то така зміна швидкості визначається нормальним прискоренням, при цьому вектор швидкості і прискорення взаємно перпендикулярні.

1.2 Кінематика обертового руху. Кутова швидкість. Кутове прискорення. Зв′язок із лінійною швидкістю та прискоренням

Траєкторія з сталим радіусом кривини відповідає обертовому руху матеріальної точки по колу. Кут оберту φ радіуса-вектора обертової точки виступає як єдина змінна руху.

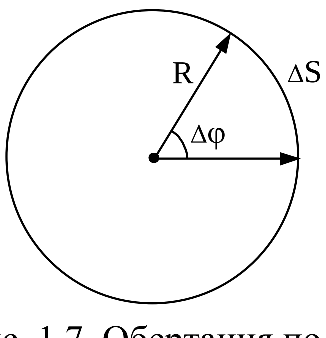


Рис. 1.7. Обертання по колу.

Приріст шляху при обертанні по колу (рис. 1.7) визначається за формулою

$$\Delta S = R\varphi , \tag{1.19}$$

звідки знаходимо лінійну швидкість матеріальної точки по колу

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega , \tag{1.20}$$

де

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} . \tag{1.21}$$

кутова швидкість.

Вираз (1.20) визначає зв′язок кутової та лінійної швидкостей

$$V = \omega \cdot R , \tag{1.22}$$

або у векторній формі:

$$\vec{V} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] .$$

Кутова швидкість – це “псевдовектор”, що має напрямок, який визначається за правилом “свердлика”.

Вектор $\vec{\omega}$ спрямований перпендикулярно площині обертання в напрямку вісі обертання свердлика (рис.1.8)

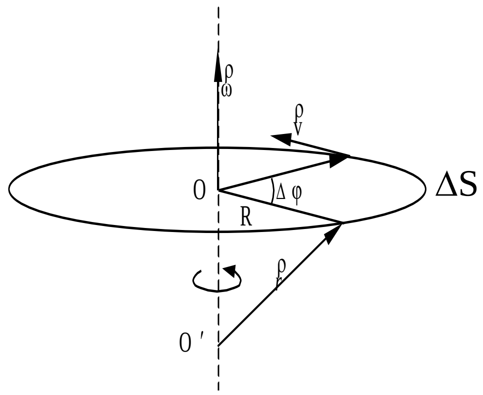


Рис.1.8. Напрямок вектора кутової швидкості.

Кутове прискорення визначається аналогічно лінійному прискоренню

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} . \tag{1.23}$$

Кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ також псевдовектор, спрямований за напрямком кутової швидкості.

Зв′язок між кутовим та лінійним прискореннями знаходять з співвідношень:

$$\mathrm{v} = \omega \cdot R , \qquad a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon . \tag{1.24}$$

тобто

$$a_\tau = R\varepsilon ,$$

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} = \omega^2 R . \tag{1.25}$$

1.3 Рівномірний та рівноприскорений поступальний рух

Рівномірний рух з постійною швидкістю описується рівнянням

$$S = v \cdot t. \qquad (1.26)$$

Графік шляху рівномірного руху визначається лінійною залежністю (рис.1.9).

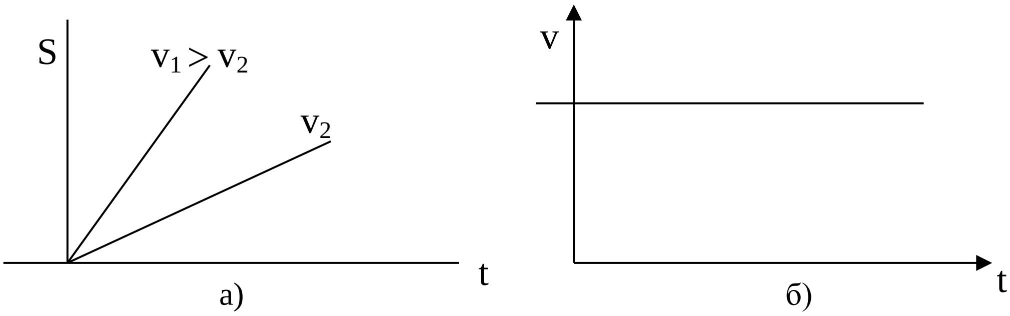


Рис. 1.9. Графік шляху і швидкості при рівномірному русі.

При рівноприскореному русі з початковою швидкістю закони руху описуються рівняннями

$$S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}, \qquad (1.27)$$
$$v = v_0 \pm at$$

де ”-“ відповідає рівносповільненому руху. Графік швидкості при рівноприскореному (рівносповільненому) русі зображений на рис. 1.10.

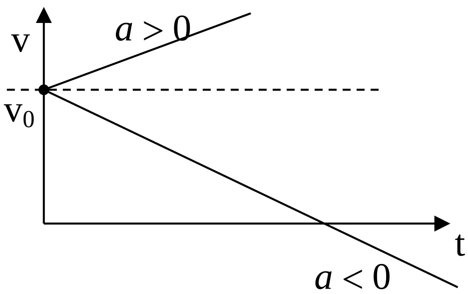


Рис.1.10. Графік швидкості при рівноприскореному русі.

Прикладом рівноприскореного руху є вільне падіння тіла. При вільному падінні тіла, кинутого без початкової швидкості з деякої висоти *h*, тіло рухається рівноприскорено з прискоренням, що дорівнює прискоренню вільного падіння g. Рівняння руху мають такий вигляд:

$$h = \frac{1}{2} gt^2, \qquad v = gt.$$

Вилучаючи час із цих рівнянь $t = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$,

отримуємо висоту падіння та швидкість тіла у момент падіння на землю:

$$h = \frac{v^2}{2g}, \qquad v = \sqrt{2gh}.$$

При русі тіла, кинутого вертикально вгору з початковою швидкістю v_0, рух рівносповільнений:

$$v = v_0 - gt, \qquad h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 .$$

Тіло рухається вгору до зупинення, якщо швидкість дорівнює нулю

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 - gt = 0 .$$

Звідки час руху вгору

$$t = \frac{\mathrm{v}_0}{g},$$

а висота найбільшого підйому дорівнює $h = \frac{\mathrm{v}_0^2}{2g}$.

1.3.1 Рух тіла, кинутого з висоти *h* з початковою швидкістю v_0

Це приклад криволінійного руху, так як одночасно з рівномірним рухом у напрямку x,

$$x = \mathrm{v}_0 \cdot t,$$

тіло рухається донизу з прискоренням вільного падіння (рис. 1.11):

$$y = \frac{1}{2} g t^2 .$$

Вилучаючи час з цих двох рівнянь, знаходимо траєкторію руху:

$$y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{\mathrm{v}_0^2},$$

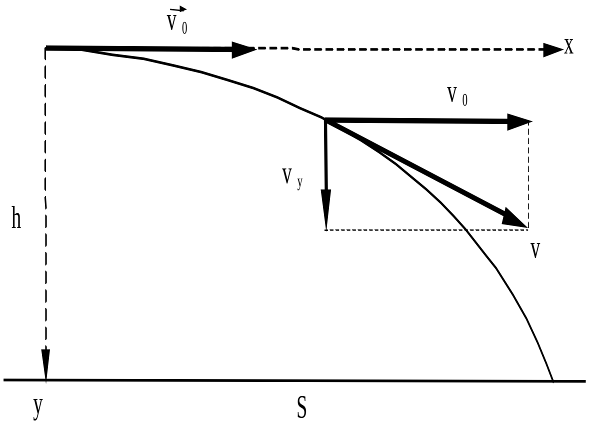


Рис.1.11.

що є параболою.

Знаючи початкову швидкість v_0 і висоту падіння $y = h$, можна знайти найбільшу дальність падіння S:

$$S = x = \mathrm{v}_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

Швидкість у довільну мить часу визначається за виразом $\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_0^2 + \mathrm{v}_y^2}$,

а вертикальна складова швидкості має значення $\mathrm{v}_y = \mathrm{g}t$.

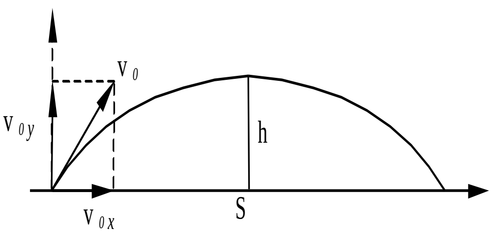


Рис. 1.12

1.3.2 Рух тіла, кинутого під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0

Цей рух, що складається з рівномірного руху у горизонтальному напрямку (x) з початковою швидкістю $\mathrm{v}_{0X} = \mathrm{v}_0 \cos\alpha$:

$$x = \mathrm{v}_{0X} \cdot t ,$$

і рівносповільненого руху у вертикальному напрямку (y) з початковою швидкістю $\mathrm{v}_{0y} = \mathrm{v}_0 \sin\alpha$ (рис. 1.12):

$$y = \mathrm{v}_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

$$\mathrm{v}_y = \mathrm{v}_{0y} - gt \ .$$

Час підйому до максимальної висоти t_0 знаходимо з другого рівняння ($\mathrm{v}_y = 0$), дорівнюючи його нулю:

$$\mathrm{v}_{0y} - gt = 0,$$

звідки $$t_0 = \frac{\mathrm{v}_{0y}}{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{v}_0 \sin\alpha}{\mathrm{g}} \ .$$

Тоді повний час руху до падіння дорівнює

$$t = 2 \cdot t_0 = \frac{2\mathrm{v}_0 \sin\alpha}{\mathrm{g}} \ .$$

Дальність польоту визначається рівнянням

$$x = S = \mathrm{v}_{0y} \cdot 2t_0 = \frac{2\mathrm{v}_0 \sin\alpha \cdot \mathrm{v}_0 \cos\alpha}{g} = \frac{\mathrm{v}_0^2}{\mathrm{g}} \sin 2\alpha .$$

Максимальна дальність польоту відповідає значенню $\sin 2\alpha = 1$ або $\alpha = 45^0$.
Максимальна висота підйому

$$h = \frac{\mathrm{v}_{0y}^2}{2g} = \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin^2\alpha}{2\mathrm{g}} .$$

1.4 Закони динаміки матеріальної точки

1.4.1 Основний закон динаміки

У динаміці враховуються зовнішні сили, що викликають рух матеріальної точки.

Спочатку розглянемо вільний рух матеріальної точки, коли вона не взаємодіє з іншими тілами. У цьому випадку швидкість м.т. в інерціальних системах залишається постійною. Якщо ж матеріальні точки взаємодіють одна з одною, з часом їх швидкості змінюються. В той же час зміна швидкостей м.т., що взаємодіють одна з одною, не є незалежною, а пов′язана між собою. Найпростішу взаємозалежність швидкостей взаємодіючих м.т. можна спостерігати у замкнених системах у вигляді фундаментальних законів збереження.

Замкненою системою називають сукупність матеріальних точок, які взаємодіють одна з одною, і які не взаємодіють з навколишнім середовищем.

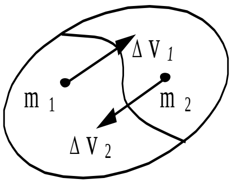


Рис.1.13. Система двух взаємодіючих частинок.

Розглянемо замкнену систему (рис. 1.13), що містить дві взаємодіючі частинки, кожну частинку розглядаємо як підсистему.

Для розглядуваних підсистем відношення мас взаємодіючих частинок, яке є мірою їх інертності, повинно бути обернено пропорційно відношенню зміни їх швидкостей Δv_1 і Δv_2

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{\Delta v_2}{\Delta v_1} = -\frac{v_2 - v_2^1}{v_1 - v_1^1}, \qquad (1.28)$$

де v_i, v_i^1 - значення швидкостей до і після взаємодії.

Якщо розкрити співвідношення (1.28), то для замкненої системи отримуємо рівняння

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1^1 + m_2 v_2^1 \qquad (1.29)$$

яке має сенс закону збереження імпульсу.

Вводячи позначення вектора імпульсу

$$\vec{p} = m\vec{v}, \qquad (1.30)$$

співвідношення (1.29) можна переписати у вигляді

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^{\,1} + \vec{p}_2^{\,1}$$

яке означає , що сумарний імпульс системи до взаємодії дорівнює сумарному імпульсу після взаємодії.

Це співвідношення, переписане у вигляді

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const \qquad (1.31)$$

є законом збереження імпульсу в найбільш загальній формі:

Повний імпульс $\vec{p}$ *замкненої системи залишається постійним незалежно від зміни швидкостей частинок всередині системи.*

Центр інерції замкненої системи має чудову властивість – це єдина точка системи, яка рухається з постійною швидкістю, в той час, як окремі частинки, що входять до складу замкненої системи, рухаються з змінними швидкостями. Радіус-вектор центру інерції визначається за формулою

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}, \qquad (1.32)$$

де $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ - радіуси-вектори окремих частинок. Тоді, диференціюючи за часом праву та ліву частини виразу (1.32), і враховуючи визначення повного імпульсу системи

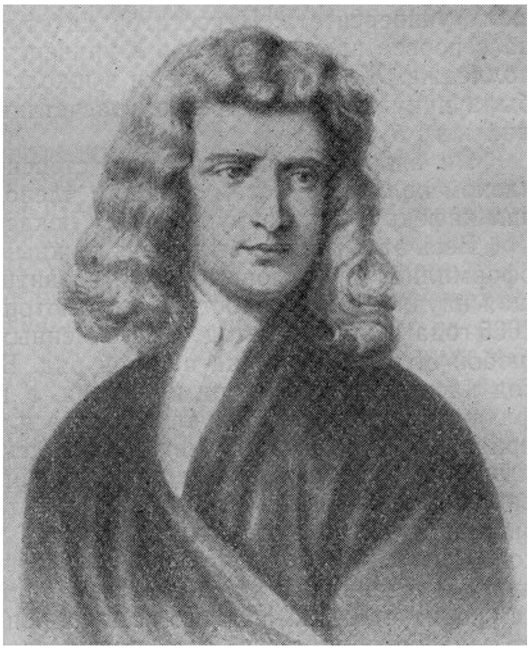
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i$$

отримуємо для швидкості центру інерції остаточний результат

$$\vec{V}_{ци} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\vec{P}}{M}, \qquad (1.33)$$

де
$$M = \sum_{i=1}^{N} mi, \qquad (1.34)$$

повна маса системи.



Ісак Ньютон (1643-1727) – англійський фізик, основоположник механіки і оптики.

Швидкість центру інерції $\vec{V}_{ці}$ не змінюється з часом, бо повний імпульс замкненої системи $\vec{p}$ завжди постійний.

Внаслідок цього, система відліку, що пов′язана з центром інерції, рухається рівномірно з швидкістю центру інерції.

Таким чином, система відліку центру інерції є інерціальною системою. У цій системі відліку швидкість поступального руху всієї системи дорівнює нулю і залишається тільки відносний рух частинок відносно центру цієї системи.

Замкнена система матеріальних точок не взаємодіє з навколишнім середовищем, і внаслідок того, імпульс замкненої системи залишається постійним, тобто зберігається. Коли оточуючі тіла взаємодіють з замкненою системою, то її імпульс змінюється і умова замкненості системи втрачає сенс. ***Швидкість зміни імпульсу називається силою.*** Сили взаємодії між частинками залежать від відстаней між ними і фізичної природи взаємодії, і не залежать від швидкостей частинок.

Рівняння руху має такий вигляд

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \qquad (1.35)$$

де $\vec{F}$ - сума усіх сил, що діють на замкнену систему у просторі.

Враховуючи формулу $\vec{p} = m\vec{v}$, рівняння руху можна записати у вигляді

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F},$$

(1.36)

або $m\vec{a}=\vec{F}$.

Ці рівняння визначають зміст другого закону Ньютона:

Сила, що діє на матеріальну точку, дорівнює добутку прискорення частинки на її масу.

Цей закон має сенс тільки тоді, коли визначена сила, як функція координат. У замкненій системі сума зовнішніх сил дорівнює нулю:

$$\vec{F}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=0. \qquad (1.37)$$

Умова (1.37) є умовою замкненої системи.

Наслідком цієї умови формулюється третій закон Ньютона: ***коли замкнена система містить тільки два тіла, то сила, з якою перше тіло діє на друге, дорівнює по величині і протилежна за напрямком силі, з якою друге тіло діє на перше.***

$$\vec{F}_1=-\vec{F}_2.$$

1.4.2 Потенціальна енергія силового поля

Силовим полем називають простір, в кожній точці якого визначено значення деякої сили. Такий простір називають силовим полем. Розглянемо рух матеріальної точки в деякому силовому полі (рис.1.14).

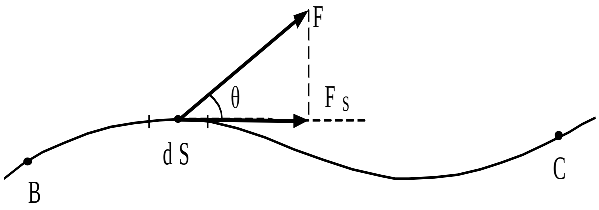


Рис.1.14. До визначення роботи сили F при переміщенні матеріальної точки на інтервалі dS.

S – напрямок дотичної на інтервалі dS,

F_s - проекція сили $\vec{F}$ на напрямок дотичної,

B,C – точки початку та кінця руху.

Якщо під дією сили матеріальна точка пройшла нескінченно малу відстань, то при цьому здійснюється нескінченно мала робота.

$$dA = F\cos\theta\cdot ds = F_s ds. \qquad (1.38)$$

При переміщенні матеріальної точки на кінцевому інтервалі BC робота визначається інтегралом:

$$A=\int_B^C F_s dS. \qquad (1.39)$$

Сила, яка спрямована перпендикулярно переміщенню, роботу не виконує.

Постійне силове поле, тобто поле, що не залежить від часу, називається консервативним або потенціальним.

Таке поле має надзвичайні властивості. Робота у такому полі по замкненому шляху завжди дорівнює нулю (рис. 1.15). Внаслідок цього, робота у консервативному полі не залежить від вигляду траєкторії, а залежить тільки від місцезнаходження початкової та кінцевої точок руху і відображає фундаментальні властивості цього поля.

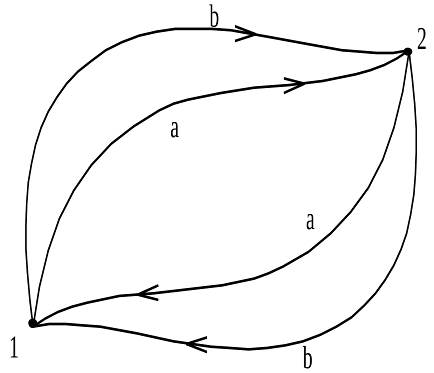


Рис.1.15. Робота по замкненому шляху.

Дійсно, оберемо початок відліку на нескінченності, і визначимо роботу, що здійснюється полем при переміщенні м.т. з нескінченності у деяку завдану точку простору.

Ця робота з знаком “-“ має назву потенціальної енергії у точці 1:

$$U_1 = U(x, y, z) = -\int_{\infty}^{1} F_s dS. \quad (1.40)$$

Робота, що виконується при перенесенні м.т. на інтервалі (1,2) визначається як різниця потенціальних енергій точок 1 і 2:

$$A_{12} = U_1 - U_2 = \int_1^2 F_s dS . \quad (1.41)$$

Потенціальна енергія визначається із точністю до довільної сталої. Звичайно прийнято вибирати початок відліку потенціальної енергії на нескінченності.

$$U_{(\infty)} = 0$$

Диференціюючи рівняння (1.40) , маємо,

$$F_s = -\frac{dU}{ds} . \quad (1.42)$$

З цього виразу можна зробити висновок, що сила завжди спрямована у бік зменшення потенціальної енергії.

Таким чином, потенціальна енергія визначає запас роботи, пов'язаний із місцезнаходженням частинки у силовому полі, і залежить тільки від координат частинки.

Потенціальна енергія дорівнює нулю, коли відстань між взаємодіючими частинками прямує до нескінченності, а має від'ємний знак при зближенні частинок та додатний знак, якщо частинки відштовхуються.

1.4.3 Кінетична енергія. Закон збереження енергії

Підрахуємо роботу, якщо сила визначена другим законом Ньютона

$$F_s = m\frac{dv}{dt} \ .$$

Тоді робота цієї сили на нескінченно малому шляху дорівнює

$$dA = F_s ds = m\frac{dv}{dt}ds \quad = mvdv \quad = \quad d(\frac{mv^2}{2}). \qquad (1.43)$$

Таким чином, робота дорівнює зміні величини $\frac{mv^2}{2}$. Ця величина

$$T(v) = \frac{mv^2}{2}$$

називається кінетичною енергією , яка визначає роботу, що запасається при русі частинки.

З іншого боку, робота дорівнює зменшенню потенціальної енергії

$$dA = -dU. \qquad (1.44)$$

Прирівнюючи (1.43) та (1.44) отримаємо рівність

$$-dU = d(\frac{1}{2}mv^2)$$

або

$$d(U + \frac{1}{2}mv^2) = 0$$

Тобто , у консервативному полі зберігається величина

$$E = U + \frac{1}{2}mv^2 = const, \qquad (1.45)$$

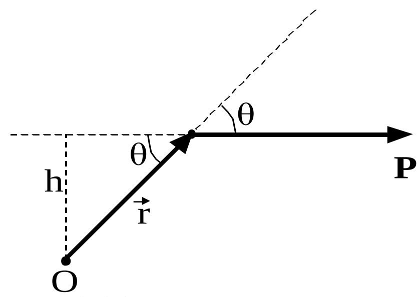


Рис.1.16. До визначення момента імпульсу: $\vec{r}$ - радіус-вектор м.т., 0 – положення центру інерції системи, h – плече імпульсу.

що називається повною енергією матеріальної точки. Таким чином, співвідношення (1.45) означає, що сума кінетичної енергії м.т., залежної тільки від її швидкості і потенціальної енергії, залежної від її координат, не змінюється внаслідок руху матеріальної точки в замкненій системі. Це один з фундаментальних законів природи – закон збереження енергії:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} + U(r_1, r_2 ...) = const \ . \qquad (1.46)$$

В системі СІ сила має розмірність

$$[F] = кг \cdot \frac{м}{с^2} = Н \ .$$

Одиниця сили називається Ньютоном (Н). Одиниця вимірювання енергії і роботи – Джоуль:

$$[E]=[A]=H \cdot м=\frac{кгм^2}{с^2}=Дж,$$

а одиниця вимірювання потужності P, тобто роботи в одиницю часу, називається Ватт:

$$[P]=\left[\frac{A}{t}\right]=\frac{Дж}{с}=Вт.$$

1.4.4 Одновимірний рух матеріальної точки в потенціальному полі

Одновимірний рух – частинний випадок руху вздовж одного обраного напрямку.

Для того, щоб задати положення частинки в такому випадку достатньо всього однієї координати, наприклад х. Потенціальна енергія частинки в цьому випадку є також функцією однієї координати $U=U(x)$.

Відповідно до закону збереження енергії частинки

$$E=\frac{m\text{v}^2}{2}+U(x)=const, \qquad (1.47)$$

повна енергія завжди повинна залишатися постійною. Характер руху частинки при E=const визначає поле сил, тобто потенціальна енергія U (х). Якщо задана потенціальна енергія U (х), кінетична енергія буде дорівнювати

$$\frac{m\text{v}^2}{2}=E-U(x), \qquad (1.48)$$

звідки можна знайти швидкість частинки v при заданих значеннях повної і потенціальної енергій:

$$\text{v}=\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}, \qquad (1.49)$$

Одержаний вираз для швидкості частинки дозволяє знайти умови руху частинки. Дійсно, рух можливий за умови

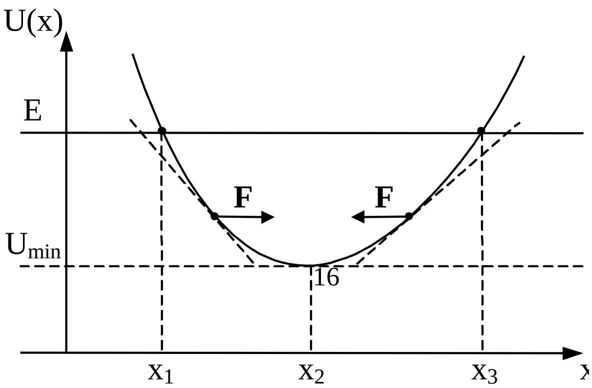
$$U(x) \le E, \qquad (1.50)$$

тому що в протилежному випадку швидкість стає уявною величиною, що неможливо для реальних фізичних систем.

Крім того, вираз (1.49) дозволяє знайти точки зупинки

$$E=U(x), \qquad (1.51)$$

тобто умову, за якої швидкість частинки обертається в нуль. Таким чином, закон збереження енергії (1.47) дозволяє, не розв’язуючи рівняння руху, дослідити загальні властивості руху частинки, порівнюючи значення повної і



потенціальної енергій E і $U(x)$. Дослідимо рух, коли потенціальна енергія має один мінімум (рис.1.17).

Рис. 1.17. Потенціальна яма.

Такий вид потенціальної енергії називається потенціальною ямою.

Для того, щоб знайти границі руху частинки в такому силовому полі, проведемо пряму $E=const$. Точки зупинки, що визначаються умовою (1.51) – це точки x_1, x_2 перетину прямої $E=const$ з залежністю $U(x)$. У границях

$$x_1 < x < x_2$$

потенціальна енергія менше повної енергії $U(x)<E$ і рух можливий між точками x_1, x_2. В область простору

$$x<x_1,$$
$$x>x_2,$$

частинка з заданою енергією E потрапити не може.

Рух, при якому частинка залишається в кінцевій області простору, називається фінітним, якщо ж рух незамкнений, то говорять про інфінітний рух.

Точка x_o, в якій потенціальна енергія мінімальна, визначається умовою

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_0} = 0, \qquad (1.52)$$

і є положенням ***стійкої рівноваги***. Дійсно, враховуючи визначення сили

$$F = -\frac{dU}{dx}, \qquad (1.53)$$

відзначаємо, що в т. x_o сила, що діє на частинку, дорівнює нулю. У випадку ж зміщення від точки x_o ліворуч, або праворуч виникає повертаюча сила, напрямок якої обернений за знаком похідної $\frac{dU}{dx}$, і завжди спрямований до положення мінімуму (рис.1.17). Це означає, що при зміщенні від положення рівноваги частинка буде здійснювати періодичний рух, період якого дорівнює подвоєному часу проходження частинки від точки x_1 до точки x_2.

Якщо розглядати потенціальну енергію, яка має максимум (рис. 1.18), то в точці максимуму x_o потенціальна енергія також обертається в нуль.

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x-x_0} = 0$$

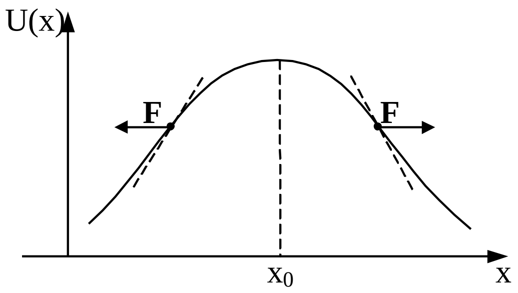


Рис. 1.18. Нестійка рівновага.

Однак при зміщенні від точки x_o ліворуч, або праворуч сила, що виникає, в обох випадках діє в сторону віддалення від цієї точки. Тому точки, в яких потенціальна енергія досягає максимуму, є положеннями ***нестійкої рівноваги.***

Розглянемо тепер рух частинки в більш складному полі, коли потенціальна енергія має мінімум і максимум (рис. 1.19).

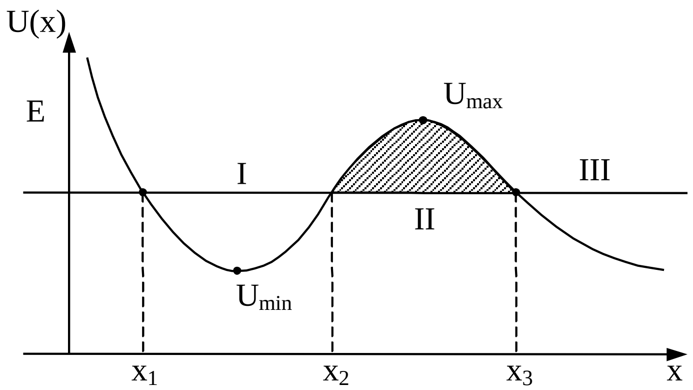


Рис. 1.19. Узагальнений потенціал.

Якщо частинка має енергію E, то рух можливий в двох областях, обмежених точками зупинки x_1, x_2, x_3: в області I ($x_1 \leq x \leq x_2$) виникає фінітний рух, а в області III ($x \geq x_3$) – інфінітний рух. В області I рух носить коливальний характер. В області III частинка може віддалитися як завгодно далеко від точки x_3, в якій швидкість частинки дорівнює нулю. При русі праворуч на частинку весь час діє сила $F = -\dfrac{dU}{dx}$, що прискорює її.

На нескінченності потенціальна енергія обертається в нуль, а швидкість частинки досягає значення

$$U_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}\ . \qquad (1.54)$$

Якщо, навпаки, частинка буде рухатися з нескінченності до точки x_3, то її швидкість буде поступово зменшуватися, поки в точці x_3 не обернеться на нуль. В цій точці частинка повинна повернути назад і піти на нескінченність.

Область $x_2 < x < x_3$ – це заборонена область для частинки. Ні ліворуч, ні праворуч частинка в цю область, що називається ***потенціальним бар'єром***, проникнути не може. З зростанням енергії E^1 ширина бар'єру зменшується, і при $E^1 \geq U_{мах}$ бар'єр зникає. При цьому існує одна точка зупинки

$$E^1 = U(x)\ ,$$

і рух частинки стає інфінітним.

ПРИКЛАДИ

1. Дослідіть рух матеріальної точки, на яку діє стала за часом сила $\vec{F} = F_y = F_0$, що не змінюється у просторі.

Розв'язок

Дослідження руху матеріальної точки означає, що необхідно знайти швидкість точки, рівняння руху і траєкторію.

Для розв'язання використаємо рівняння руху

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\ , \qquad (1.55)$$

яке розписуємо у координатах

$$m\frac{d\vec{v}_x}{dt} = 0, \quad m\frac{dv_y}{dt} = F_0, \quad m\frac{dv_z}{dt} = 0, \qquad (1.56)$$

Рух у площинах xy та yz має один і той же вигляд, бо сила визначена у напрямку y. Тому розглянемо рух тільки у площині xy:

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0, \qquad m\frac{dv_y}{dt} = F_0, \qquad (1.57)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1.57) знаходимо компоненти швидкості v_x, v_y:

$$\mathrm{v}_x = const = \mathrm{v}_{xo} \ ,$$

$$\mathrm{v_y} = \int_0^t \frac{F_0}{m} \quad dt = \frac{F_0}{m} \cdot t + \mathrm{v_{y0}} \ , \qquad (1.58)$$

де $\mathrm{v}_{xo}, \mathrm{v}_{yo}$ - початкові значення проекцій швидкості.

Рівняння (1.58) перепишемо, враховуючи явні значення швидкості :

$$\mathrm{v_x} = \frac{dx}{dt} = \mathrm{v}_{xo} \ , \quad \mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt} = \frac{F_o}{m} t + \mathrm{v}_{yo} \qquad (1.59)$$

і інтегруємо:

$$x = \int_0^t \mathrm{v}_{x0} dt = \mathrm{v}_{x0} t + x_0,$$

$$y = \int_0^t \frac{F_0 t}{m} dt + \int_0^t \mathrm{v}_{y0} dt = \frac{F_0 t^2}{2m} + \mathrm{v}_{y0} t + y_0, \qquad (1.60)$$

де x_o, y_o - початкові значення координат.

Рівняння (1.60) визначають траєкторію руху матеріальної точки. Вони спрощуються, коли початкові умови вибрати в вигляді

$$\mathrm{v}_{yo} = 0, \ \ \mathrm{x}_0 = y_o = 0 .$$

Тоді отримаємо

$$y = \frac{F_0 t^2}{2m} \ , \ \ x = \mathrm{v_{X0}} \cdot t \, . \qquad (1.61)$$

Вилучаючи час t, знаходимо рівняння траєкторії

$$y = \frac{F_o}{2m\mathrm{v}_{\mathrm{X0}}^2} \quad x^2 \qquad (1.62)$$

2. Розглядають співудар двох куль масою m_1 та m_2. Початкові швидкості v_1 та $v_2 = 0$. Знайдіть швидкості куль v_1', v_2' після удару.

Розв’язок:

При центральному ударі закони збереження енергії та імпульсу куль записуються у вигляді ($v_2 = 0$):

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2.$$

Перетворимо ці рівняння:

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2 v_2',$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2 v_2'^2,$$

і поділимо друге рівняння на перше: $\quad v_1 + v_1' = v_2'.$

Підставляючи цей результат у перше рівняння, маємо

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2 (v_1 + v_1'),$$

звідки $$v_1' = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

Використовуючи співвідношення $v_2' = v_1 + v_1'$, знаходимо v_2':

$$v_2' = v_1 + v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2}.$$

Якщо маси куль однакові $m_1 = m_2$,
то $v_1' = 0$, $v_2' = v_1$, тобто при зіткненні куль перша куля, що мала швидкість v_1, зупиняється, а друга набуває тієї ж швидкості v_1. Якщо $m_2 >> m_1$, то $v_1' = v_1$, v_2' =0. Це означає, що легша куля з масою m_1 відскочить у зворотному напрямку, а важка куля залишиться нерухомою.

При нецентральному ударі m_1=m_2 рівняння збереження приймають вигляд:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2',$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$

При цьому вектор початкової швидкості $\vec{v}_1$ представляє собою векторну суму кінцевих швидкостей (рис. 1.20).

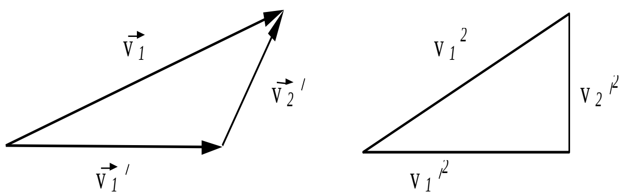


Рис. 1.20. Додавання швидкостей при нецентральному ударі.

Друге рівняння $v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$ показує, що трикутник швидкостей прямокутний, тобто частинки з однаковими масами при нецентральному ударі розлітаються під прямим кутом.

Закон збереження імпульсу при абсолютно непружному ударі означає, що сумарний імпульс куль після удару був таким же, як і до удару. Тому

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u} \tag{1.63}$$

де $\vec{u}$ - швидкість куль після удару. Звідки

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{1.64}$$

При центральному ударі необхідно спроектувати вектори на вісь x.

1.4.5 Закон збереження моменту імпульсу

Окрім енергії та імпульсу, для замкненої системи зберігається ще одна величина, яка називається моментом імпульсу.

Момент імпульсу має сенс вводити в тому випадку, коли продовження вектора імпульсу не проходить через центр O системи (рис. 1.21), тобто при обертовому русі м.т. відносно центру O. Якщо з центру системи 0 опустити перпендикуляр на продовження напрямку вектора $\vec{p}$, то момент імпульсу дорівнює величині:

$$L = hp = pr \cdot \sin\theta \qquad (1.65)$$

де h має назву плеча імпульсу.

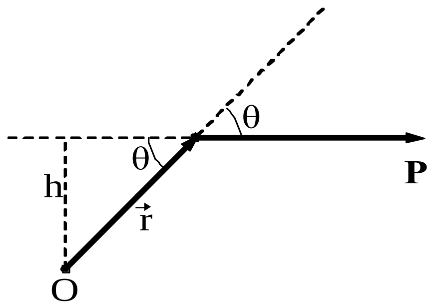


Рис. 1.21. До визначення моменту імпульсу: $\vec{r}$ - радіус-вектор м.т., O – положення центру інерції системи, h – плече імпульсу.

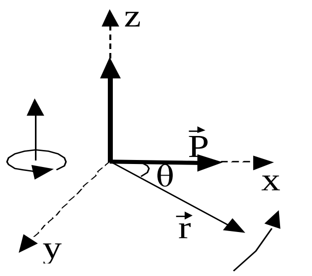


Рис.1.22. До визначення напрямку вектора моменту імпульсу.

Вираз (1.65) визначає модуль векторного добутку. Вектор моменту імпульсу визначається векторним добутком

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}\,], \qquad (1.66)$$

напрямок якого співпадає з напрямком переміщення свердлика (рис.1.22).

Закон збереження моменту імпульсу формулюється таким чином: сума моментів імпульсів окремих частинок замкненої системи не змінюється з часом.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i] = const. \qquad (1.67)$$

Таким же чином для сил, що діють на матеріальну точку, і які не проходять через вибраний центр відліку системи (центр інерції) визначають момент сил (рис.1.23), що чисельно рівний добутку плеча сили h на модуль сили:

$$M = hF = Fr\sin\theta. \qquad (1.68)$$

Таким чином, момент сили – це вектор, який визначається векторним добутком сили і радіуса-вектора $\vec{r}$:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]. \qquad (1.69)$$

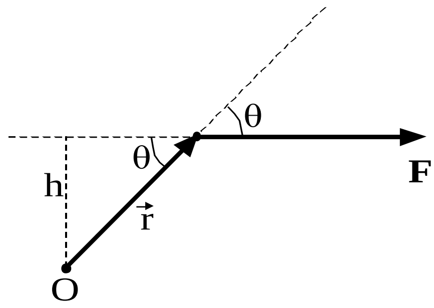


Рис.1.23. До визначення моменту сил.
h – плече сили F .

Напрямок моменту сил визначається також правилом свердлика.

Зрозуміло, що в замкненій системі сума моментів сил повинна дорівнювати нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i\right] = 0. \qquad (1.70)$$

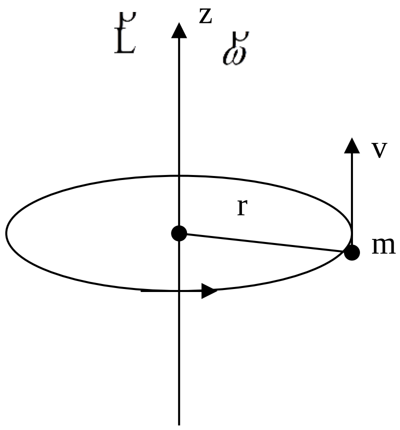
Якщо сумарний момент сил, що діють на систему, не дорівнює нулю, то змінюється як момент імпульсу кожної матеріальної точки, так і всієї системи. Для окремої матеріальної точки у цьому випадку справедливе рівняння, яке описує обертовий рух точки у системі центру інерції

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \qquad (1.71)$$

або в проекціях на координатні вісі

$$\frac{dL_x}{dt} = Mx, \quad \frac{dL_y}{dt} = My, \quad \frac{dL_z}{dt} = Mz. \qquad (1.72)$$

Як приклад розглянемо частинку масою m, яка обертається навколо



заданої вісі z з кутовою швидкістю ω по орбіті радіуса r (рис. 1.24).

Рис. 1.24.

Лінійна швидкість частинки визначається виразом v = ωr, а момент імпульсу $L = [\vec{p} \cdot \vec{r}]$ спрямований по вісі z і перпендикулярний площині, в якій лежить радіус r і імпульс p (швидкість v). Напрямок моменту імпульсу співпадає з напрямком вектора кутової швидкості ω. Модуль моменту імпульсу дорівнює

$$L = p \cdot r\sin\theta = mvr = m\omega r^2,$$

звідки частота обертання

$$\omega = \frac{L}{mr^2},$$

тому що кут θ між напрямком швидкості і радіусом r дорівнює 90°.

Якщо на частинку не діють які-небудь сили, момент імпульсу L залишається постійним, тобто зберігається напрямок моменту імпульсу і орієнтація орбіти, на якій обертається частинка. Кінетична енергія частинки може бути виражена через модуль моменту імпульсу:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2r^2}{2mr^2} = \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{m\omega^2r^2}{2}.$$

Ця формула показує, що обертальна енергія частинки не залежить від напрямку моменту імпульсу, а тільки від його абсолютного значення.

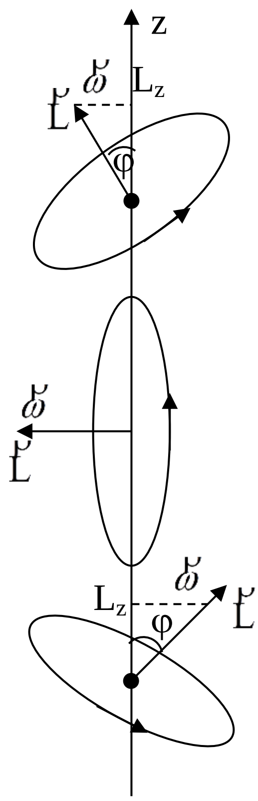


Рис. 1.25

Якщо напрямок моменту імпульсу $\vec{L}$ не співпадає з обраною віссю z (рис. 1.25), то при постійному значенні модуля L орієнтацію орбіти обертання частинки визначає проекція моменту імпульсу на задану вісь: $L_z = L\cos\varphi$. Тим самим, для однозначного визначення енергії і положення орбіти обертання частинки необхідно одночасно задавати модуль моменту імпульсу L і проекцію моменту імпульсу на обрану вісь обертання.

1. 4. 6 Рух абсолютно твердого тіла

Система матеріальних точок, які жорстко пов'язані між собою, має назву ***абсолютно твердого тіла.*** Це не суперечить тому, що тверді тіла в механіці розглядаються як суцільні, властивості яких не залежать від їх внутрішньої структури.

Для опису руху твердого тіла розглянемо дві системи координат – нерухому (інерціальну) з центром О і систему координат, пов'язану з центром інерції тіла Оц.і.

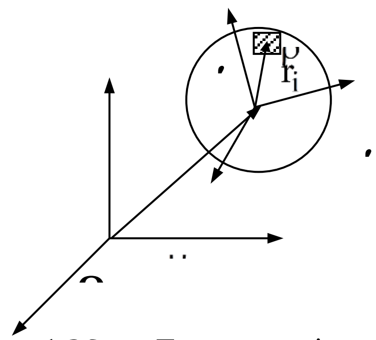


Рис.1.26. Тверде тіло в інерціальній системі x, y, z. О – центр інерціальної системи, Оц.і – початок відліку, пов'язаний з центром інерції, Rц.і – радіус-вектор центра інерції, x', r', z' - координати системи координат, що обертається, пов'язаної з системою центра інерції, mi – нескінченно малий елемент твердого тіла, $\vec{r}_i$ - радіус-вектор нескінченно малого елемента mi в системі центру інерції.

Найпростішим рухом твердого тіла є поступальний рух, при якому тіло переміщується паралельно самому собі. У вибраній системі координат цей рух здійснюється з швидкістю центру інерції

$$\vec{V}_{ц.і.} = \frac{d\vec{R}_{ц.і.}}{dt}. \qquad (1.73)$$

При поступальному русі твердого тіла всі його точки мають однакову швидкість і описують траєкторії однакової форми.

Крім поступального руху, тверде тіло може обертатися навколо вісі, яка проходить через центр інерції Оц.і. При обертанні різні точки тіла описують кола, що лежать у площинах, перпендикулярних вісі обертання.

У загальному випадку можна показати, що довільний рух твердого тіла можна звести до суми двох найпростіших рухів: поступального з швидкістю центру інерції та обертового в системі центру інерції. Енергія руху твердого тіла тоді дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху

$$E_{кін} = \frac{1}{2} M V_{ц.і.}^2, \qquad (1.74)$$

де М – повна маса тіла та кінетичної енергії обертання $E_{оберт.}$

$$E_{оберт} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \mathrm{v}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2}, \qquad (1.75)$$

де кінетична енергія обертання визначається як сума енергій нескінченно малих мас mi, що обертаються з однаковою кутовою швидкістю ω навколо центру інерції.

Лінійна швидкість нескінченно малої маси m_i дорівнює

$$\mathrm{v}_i = \omega r_i.$$

Таким чином, кінетичній енергії обертання можна надати вигляду:

$$E_{оберт} = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2, \qquad (1.76)$$

де величина

$$\mathrm{I} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^{\,2}, \qquad (1.77)$$

характеризує розподіл мас твердого тіла та вибрану вісь обертання. Величина I має назву ***моменту інерції тіла відносно обраної вісі*** і визначає інертність тіла при обертовому русі.

Тоді кінетична енергія обертання твердого тіла має вигляд

$$E_{оберт} = \frac{\mathrm{I}\omega^2}{2}, \qquad (1.78)$$

а повна кінетична енергія

$$E_{кін} = \frac{MV_{ц.і}^2}{2} + \frac{\mathrm{I}\omega^2}{2}. \qquad (1.79)$$

Якщо тіло має безперервний розподіл мас, то момент інерції визначається за формулою

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m$$

де інтегрування проводиться по всьому об'єму тіла. Величина r в цьому випадку є функція місцезнаходження точки з координатами x, y, z.

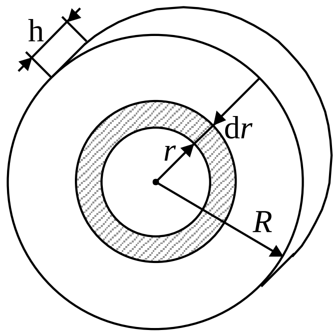


Рис. 1.27
До визначення моменту інерції циліндра.

Знайдемо момент інерції однорідного суцільного циліндра висотою h та радіусом R, відносно його геометричної вісі (рис.1.27). Для цього розіб'ємо циліндр на окремі концентричні циліндри нескінченно малої товщини dr з внутрішнім радіусом r та зовнішнім − r+dr. Момент інерції кожного концентричного циліндра $\mathrm{d}J=r^2\mathrm{d}m$ (припускаємо, що відстань всіх точок циліндра від вісі дорівнює r, тому що dr<<r, а dm — маса всього концентричного циліндра). Масі dm можна надати вигляду

$$\mathrm{d}m = \rho 2\pi r h\, dr,$$

де $2\pi rh$ dr – об'єм циліндра, ρ — густина матеріалу циліндра.

Момент інерції концентричного циліндра з нескінченно малою товщиною стінок дорівнює

$$dJ = 2\pi\rho h r^3 \mathrm{d}r,$$

а момент інерції суцільного циліндра

Т а б л и ц я 1.1

Тіло	Положення вісі обертання	Момент інерції
Порожнистий тонкостінний циліндр радіусом R	Вісь симетрії	mR^2
Суцільний циліндр або диск радіусом R	Вісь симетрії	$^1/_2\, mR^2$
Прямий тонкий стрижень довжиною l	Вісь перпендикулярна стрижню і проходить посередині стрижня	$^1/_{12}\, ml^2$
Прямий тонкий стрижень довжиною l	Вісь перпендикулярна стрижню і проходить через його кінець	$^1/_3\, ml^2$
Куля радіусом R	Вісь проходить через центр кулі	$^2/_5\, mR^2$

$$J = \int \mathrm{d}J = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \tfrac{1}{2}\pi h R^4 \rho \,.$$

Враховуючи, що $\pi R^2 h$ — об'єм суцільного циліндра, а його маса $m = \pi R^2 h\rho$, момент інерції циліндра дорівнює виразу

$$J = \tfrac{1}{2} m R^2 \,.$$

Якщо момент інерції тіла відносно вісі, яка проходить через центр інерції, підрахований, то момент інерції відносно будь-якої іншої паралельної вісі визначається **теоремою Штейнера**: ***момент інерції тіла J відносно будь-якої вісі обертання дорівнює моменту інерції J_C відносно паралельної вісі, яка проходить через центр мас С тіла, що додається до добутку маси m тіла на квадрат відстані а між осями:***

$$J = J_C + ma^2 \qquad (1.80)$$

Надамо значення моментів інерції (табл. 1.1) для деяких тіл (тіла вважаються однорідними, m - маса тіла)

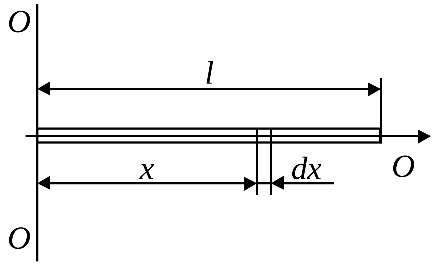


Рис.1.28. До підрахування моменту інерції тонкого стрижня.

Знайдемо момент інерції тонкого однорідного стрижня масою m і довжиною l відносно перпендикулярної вісі ОО, що проходить через його кінець.

Враховуючи, що максимальний поперечний розмір стрижня набагато менший довжини l, момент інерції цього стрижня підрахуємо за формулою

$$J = \int R^2 dm = \int x^2 dm = \frac{m}{l}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} m l^2 \,.$$

За допомогою теореми Штейнера можна знайти момент інерції I_C стрижня відносно перпендикулярної до нього вісі, яка проходить через його центр. Відповідно (1.80)

$$J = J_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m l^2 \,,$$

звідки $$J_C = \frac{1}{12} m l^2 \,.$$

1.4.7 Закон збереження моменту імпульсу

Розглянемо обертання твердого тіла навколо закріпленої вісі Z, яка проходить через центр інерції. Розіб'ємо тіло на окремі елементи mi. Момент імпульсу i-го елементу в проекції на вісь Z дорівнює

$$L_{zi} = m_i r_i \mathrm{v}_i ,$$

де v_i – лінійна швидкість обертання.

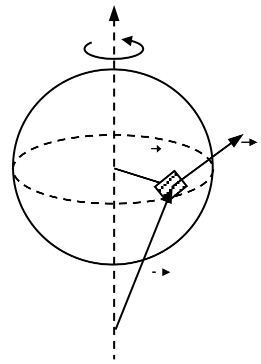


Рис.1.29.**Обертання тіла навколо вісі Z**

Переходячи до кутової швидкості, постійної для усіх елементарних мас, маємо

$$L_{zi} = m_i r_i^2 \omega .$$

Проекція моменту імпульсу твердого тіла (обертовий момент) має вигляд

$$\mathrm{L_z} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{L_{zi}} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{m}_i \mathrm{r}_i^2 \omega = \mathrm{I}\omega \ , \qquad (1.81)$$

де I – момент інерції твердого тіла.

Якщо на тіло не діють зовнішні сили, обертовий момент тіла залишається постійним.

$$\mathrm{I}\omega = \mathrm{const} . \qquad (1.82)$$

Вираз (1.82) визначає закон збереження моменту імпульсу твердого тіла.

Якщо виникають сили, що лежать у площині, перпендикулярній вісі обертання, то такі сили створюють момент сил

$$M_z = hF = F \cdot r \sin\theta ,$$

який призводить до обертання навколо вісі Z.

Згідно з рівнянням руху для матеріальної точки, рівняння руху тіла, що обертається навколо вісі Z, приймає вигляд

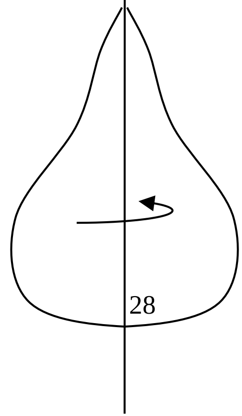
$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathrm{I}\omega) = \mathrm{I}\frac{d\omega}{dt} = M_z ,$$

або

$$\mathrm{I}\varepsilon = M_z , \qquad (1.83)$$

де ω та ε - кутова швидкість та кутове прискорення.

В загальному випадку тіло, що вільно рухається, має три незалежні



обертальні ступені вільності, тобто може здійснювати незалежні обертання навкруг трьох перпендикулярних осей. Практично інтерес представляє вивчення обертання твердого тіла при задаванні визначених осей обертання. Найбільш простим є обертання тіла навкруг однієї (закріпленої) вісі, тобто при одній обертальній ступені вільності. Якщо при цьому тіло, що обертається, симетрично відносно вісі обертання (рис. 1.30),

Рис. 1.30.

то вектор моменту імпульсу $\vec{L}$ співпадає з вектором кутової швидкості і, при відсутності зовнішніх моментів сил, зберігає відповідно до закону збереження

$$L = I\omega = \text{const}, \qquad E = \frac{L^2}{2I} = \frac{I^2\omega^2}{2I} = \frac{\omega^2 I}{2}$$

свій напрямок.

Напрямок моменту імпульсу зберігається для всіх тіл, що володіють певною ступінню симетрії. Так, для симетричного вовчка, у якого моменти інерції $I_x = I_y = I_z$ рівні, будь-яка вісь, що проходить через центр вовчка, є віссю симетрії і напрямок моменту імпульсу буде зберігатися для будь-якої вісі (при відсутності зовнішніх моментів сил).

Обертальна енергія дорівнює при цьому

$$E_{об} = \frac{L^2}{2I} = \frac{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}{2I} = \frac{\omega^2 I}{2}.$$

У випадку симетрії другого порядку (ротатор $I_z = 0$, $I_x = I_y$) є дві обертальні ступені вільності і обертальна енергія дорівнює

$$E_{об} = \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I}.$$

Момент імпульсу зберігається для двох осей обертання x і y:

$$L_x = I_x\omega = const$$
$$L_y = I_y\omega = const$$

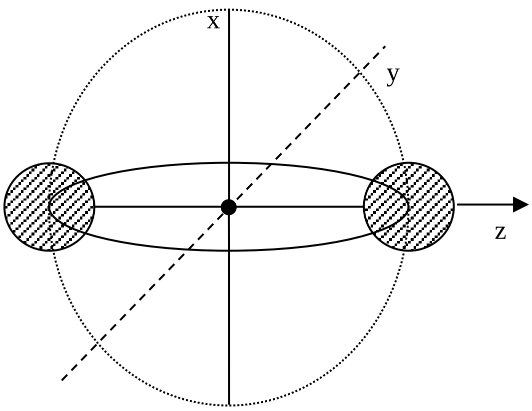


Рис. 1.31.

Для несиметричного тіла при виконанні закону збереження моменту імпульсу необхідно враховувати, що вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ (напрямок вісі обертання) не співпадає з напрямком вектора моменту імпульсу і зберігається проекція моменту імпульсу на вісь обертання.

Розглянемо обертання тіла, що являє собою симетричну гантель (рис. 1.32). Якщо взяти симетрично розташовані елементарні маси Δm_i, то вектори моментів імпульсу, визначені для кожної з цих мас відносно т. O на вісі обертання, спрямовані перпендикулярно площині, в якій лежать лінійна швидкість $\vec{v}$ і радіус вектор $\vec{r}$.

При цьому через симетрію тіла обертання перпендикулярні складові моменту імпульсу L_{xi} взаємно компенсуються і не скомпенсованою залишається лише проекція моменту імпульсу на вісь z (вісь обертання). Це ж справедливо і для результуючого моменту імпульсу $\vec{L}$, який спрямований за напрямком вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$.

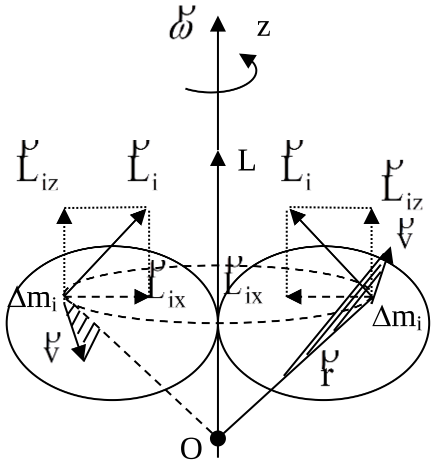


Рис. 1.32.

Інакше обстоїть справа при несиметричному розподілі мас тіла (рис.1.33). Дійсно, приберемо одну половину гантелі (рис. 1.33). Тоді перпендикулярні складові моменту імпульсу L_{xi} не компенсуються, в результаті чого результуючий вектор $\vec{L}$ буде спрямований під деяким кутом до вісі z і при обертанні тіла буде описувати конус навкруг вісі z (рис. 1.33). При цьому зберігається проекція вектора $\vec{L}$ на вісь z:

$$L_z = L\cos\theta = \text{const}.$$

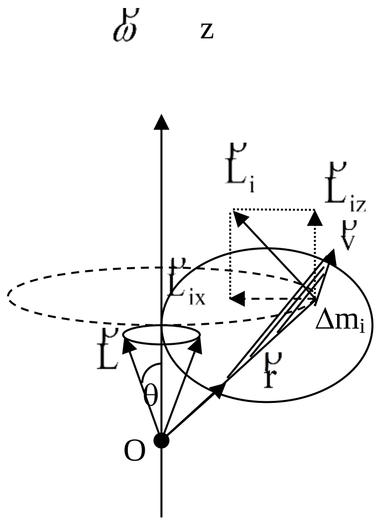


Рис. 1.33.

Виконання закону збереження моменту імпульсу L при зміні напрямку вектора $\vec{L}$ ілюструє дослід з лавою Жуковського (рис. 1.34), яка має одну обертальну ступінь вільності, пов'язану з обертанням навкруг вісі z. На початку демонстратор стає на нерухому лаву. Демонстратору дають велосипедне колесо на довгому шківі, що обертається з кутовою швидкістю ω, напрямок якої співпадає з віссю z. Момент інерції колеса I_0, тоді момент імпульсу колеса $L_0 = I_0 \cdot \omega$. Момент імпульсу системи лава + демонстратор дорівнює L_0.

Якщо демонстратор нахиляє вісь колеса на кут θ, проекція моменту імпульсу колеса на напрямок z стає $L_0 \cos\theta$. При цьому момент імпульсу системи збільшується на величину

$$L_{сист} = L_0 - L_0 \cos\theta = L_0(1 - \cos\theta) \qquad (1.84)$$

Враховуючи, що момент колеса $L_0 = I_0 \cdot \omega$, момент імпульсу системи можна записати у вигляді

$$L_{сист} = J\Omega,$$

де J – момент інерції системи лава + демонстратор, Ω - кутова швидкість системи. Перетворюючи вираз (1.84), маємо

$$J\Omega = I_0 \omega(1 - \cos\theta),$$

звідки кутова швидкість обертання лави з демонстратором

$$\Omega = \omega \frac{I_0}{J}(1 - \cos\theta) \qquad (1.85)$$

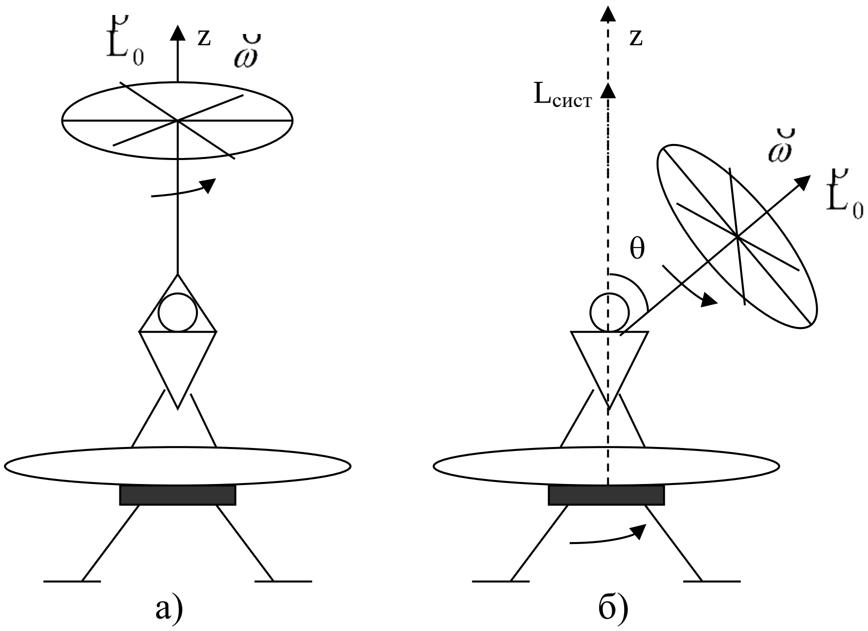


Рис. 1.34.

Частинний випадок, що витікає з результату (1.85):

а) кут $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$,
частота обертання лави $\Omega = 0$.

б) кут $\theta = \pi/2$, $\cos\theta = 0$,
частота обертання лави $\Omega = \omega \frac{I_0}{J}$.

в) кут $\theta = \pi$, $\cos\theta = -1$,
частота обертання лави $\Omega = 2\omega \frac{I_0}{J}$,

тобто збільшується в два рази порівняно з випадком б);

г) кут $\theta = 2\pi$, $\cos\theta = 1$,
частота обертання лави $\Omega = 0$, тобто лава зупиняється.

1.4.8 Прецесія гіроскопа

Тіло з вільними осями обертання називається гіроскопом. Найбільш вивчені – симетричні гіроскопи.

Симетричний гіроскоп має симетрію обертання відносно деякої вісі, яка називається геометричною віссю. Звичайно одна з точок вісі гіроскопа закріплена. Така точка називається точкою опори гіроскопа.

Теорія гіроскопа побудована на рівнянні моментів $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$. Якщо момент зовнішніх сил дорівнює нулю, то гіроскоп називають вільним. Для вільного гіроскопа

$$\vec{L} = I_{//}\omega_{//} + I_{\perp}\omega_{\perp} = const,$$

з чого виходить, що довжина векторів $\omega_{//}$ і $\omega_{\perp}$ залишається постійною

$$L_{//} = I_{//}\omega_{//}, \qquad L_{\perp} = I_{\perp}\omega_{\perp},$$

де $L_{//}$ і $L_{\perp}$ - проекція моментів імпульсу на поперечну і поздовжню осі.
Отже, залишається постійним кут між векторами $\vec{L}$ і $\vec{\omega}$, а також залишається постійним кут між вектором $\vec{L}$ і віссю гіроскопа.

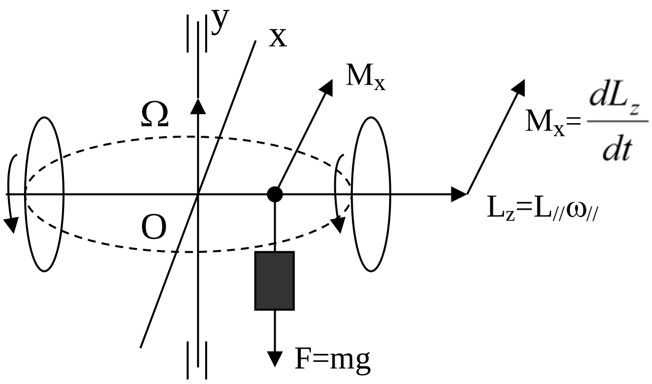


Рис. 1.35.

Якщо розглядати гіроскоп, що обертається навкруг вісі z, і на який в напрямку вісі у діє сила F = mg, то ця сила створює момент сил, спрямований по вісі х.
Цей момент сил приводить до зміни моменту імпульсу відповідно до рівняння (рис.1.35)

$$M_x = \frac{dL_z}{dt},$$

що приводить до повороту вісі обертання z, тобто моменту імпульсу L_z навкруг вісі y. Таким чином, виникає додатковий обертальний рух гіроскопа, тобто прецесія.

ПРИКЛАДИ

1. Закон руху матеріальної точки заданий рівняннями

$$\left.\begin{aligned} x &= at, \\ y &= bt^2 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1.86)}$$

де α, b -сталі. Знайдіть траєкторію частинки.

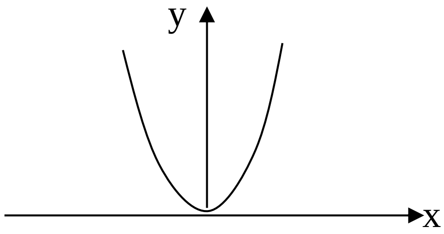


Рис.1.36. Траєкторія матеріальної точки у прикладі 1.

Розв'язок

У двомірному просторі траєкторія матеріальної точки задається функцією y = y (x). Для того, щоб отримати траєкторію з закону руху, необхідно у рівняннях (1.68) вилучити час:

$$t = \frac{x}{a}, \qquad y = \frac{b}{a^2}x^2 .$$

Таким чином, траєкторія частинки задається параболою $y = \dfrac{b}{a^2}x^2$ (рис. 1.36).

2. Закон руху заданий рівняннями

$$\begin{aligned} y &= a\sin\omega t, \\ x &= b\sin\omega t. \end{aligned} \qquad \textbf{(1.87)}$$

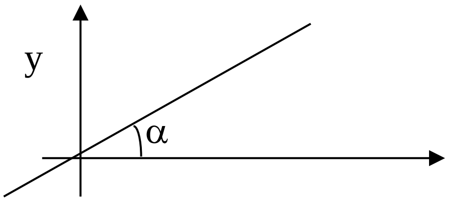


Рис.1.37. Траєкторія частинки у прикладі 2.

Знайдіть траєкторію частинки.

Розв'язок

Вилучаючи час у системі рівнянь (1.87), знайдемо рівняння прямої (рис. 1.37):

$$y = \frac{a}{b}x$$

Тангенс кута нахилу прямої

$$tg\alpha = \frac{a}{b}.$$

3. Радіус-вектор частинки задається рівнянням $\vec{r} = \vec{i}at^4 + \vec{j}bt^2 + \vec{k}ct$ **. Знайдіть вектор швидкості, прискорення частинки і траєкторію частинки у площині (xy), (yz).**

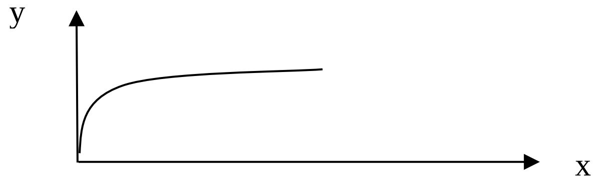


Рис.1.38. Траєкторії частинки у площині (xy).

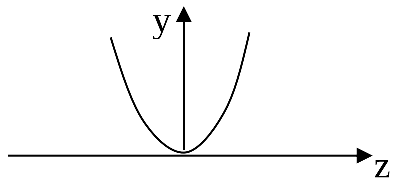


Рис.1.39. Траєкторія частинки у площині (yz).

Розв'язок

Швидкість $\qquad \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}4at^3 + \vec{j}2bt + \vec{k}c$.

Прискорення $\qquad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}12at^2 + \vec{j}2b$. Рівняння траєкторії у площині (x,y):

$$\left.\begin{array}{l} x = at^4 \\ y = bt^2 \end{array}\right\}, \quad t^2 = (\frac{y}{b}), \quad x = \frac{a}{b^2}y^2, \quad y = \frac{b}{a^{1/2}}\sqrt{x}\ .$$

Рівняння траєкторії у площині yz

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{y} - = \mathrm{bt}^2 \\ \mathrm{z} = \mathrm{bt} \end{array}\right\} \quad , \ \mathrm{t} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{c}} \ , \quad \mathrm{y} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}^2}\mathrm{z}^2$$

4. Автомобіль починає рухатися рівноприскорено в той момент, коли повз нього минає велосипедист, рухаючись рівномірно зі швидкістю $\mathbf{v_0}$. Знайдіть швидкість автомобіля в той момент, коли він дожене велосипедиста.

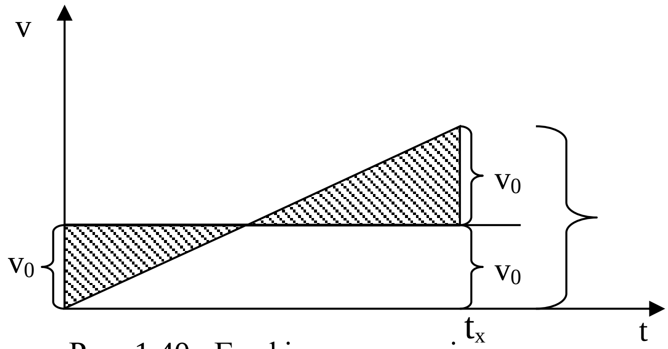


Рис. 1.40. Графік швидкості.

Розв'язок

Побудуємо спочатку графіки швидкості рухів (рис.1.40).

Очевидно, що автомобіль дожене велосипед в той момент, коли шляхи, що вони проходять, будуть рівні

$$S_B = \mathrm{v}_0 t = S_A = \frac{at^2}{2},$$

звідки час зустрічі $t_X = \dfrac{2\mathrm{v}_0}{a}$.

Швидкість автомобіля в момент зустрічі $\mathrm{v} = at_X = 2\mathrm{v}_0$

Цей же результат легко отримати графічно з рисунка (рис.1.40).

5. Камінь, що падає вільно без початкової швидкості, пролетів другу половину шляху за 1 с. Визначте, з якої висоти він падає?

Розв'язок

Час падіння $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. Час руху на першій половині шляху: $t_{1/2} = \sqrt{\dfrac{h}{g}}$.

Тоді виникає рівняння $t - t_{1/2} = 1$, або $\sqrt{\dfrac{2h}{g}} - \sqrt{\dfrac{h}{g}} = 1$.

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо висоту $h = \dfrac{g}{3 - 2\sqrt{2}}$.

6. Яка максимальна висота підняття каменя, кинутого вертикально вгору, якщо через час t_0 його швидкість зменшилась вдвічі.

Розв'язок

Швидкість каменя, кинутого догори змінюється за законом $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 - gt$.

За час $t = t_0$, швидкість v зменшилась до $\frac{\mathrm{v}_0}{2}$.

Тоді рівняння швидкості приймає вигляд: $\frac{\mathrm{v}_0}{2} = \mathrm{v}_0 - gt_0$,

звідки початкова швидкість дорівнює $\mathrm{v}_0 = 2gt_0$.

Максимальна висота підйому визначається за формулою $h = \frac{\mathrm{v}_0^2}{2\mathrm{g}} = 2gt_0^2$

7. Закон руху заданий рівняннями

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sin\omega t, \\ y &= a\cos\omega t \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1.88)}$$

Знайдіть рівняння траєкторії і швидкість частинки.

Розв'язок

Подамо систему (1.88) у вигляді $\frac{x}{a} = \sin\omega t,$ $\frac{y}{a} = \cos\omega t$

Піднесемо в квадрат праву та ліву частини кожного рівняння і додамо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = \sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1.$$

Отримане рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (1.89)

є рівнянням кола з радіусом R = a.

Знайдемо проекції швидкості

$$V_x = \frac{dx}{dt} = a\omega \cdot \cos\omega t,$$
$$V_y = \frac{dy}{dt} = -a\omega \cdot \sin\omega t.$$

Модуль швидкості визначаємо за формулою $\mathrm{V} = \sqrt{\mathrm{V}_x^{\ 2} + \mathrm{V}_y^2} = a\omega = R\omega$,

де стала a відіграє роль радіуса, а ω - кутова швидкість (частота обертання точки).

8. Закон руху частинки по колу $\varphi = \alpha t^4 + \beta t^3$. R – радіус кола. Знайдіть нормальне та тангенціальне прискорення.

Розв'язок

Спочатку знайдемо кутову швидкість $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = 4\alpha t^3 + 3\beta t^2$,

і кутове прискорення $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 12\alpha t^2 + 6\beta t$.

Тангенціальне прискорення визначаємо за формулою $a_\tau = R_\varepsilon = R\left(2\alpha t^2 + 6\beta t\right)$.

Нормальне прискорення: $a_\varepsilon = \omega^2 R = R\left(4\alpha t^3 + 3\beta t^2\right)$.

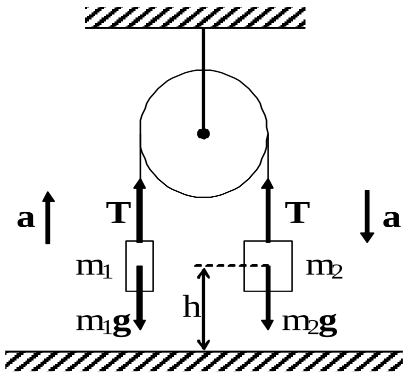


Рис.1.41. До прикладу 9.

9. На кінцях нерозтяжної нитки, що перекинута через блок, висять на висоті h = 2м від підлоги два вантажі, маса яких m_1 = 100г, m_2= 200г. У початкову мить вантажі покояться. Визначте силу натягу нитки і час, за який маса m_2 досягне підлоги.

Розв'язок

Запишемо рівняння руху для кожного вантажу, враховуючи, що маса m_2 рухається донизу, а маса m_1 угору з прискоренням a:

$$\begin{array}{c|l} m_2 & m_1 a = T - m_1 g \\ m_1 & m_2 a = m_2 g - T \end{array}\Bigg\} \qquad (1.90)$$

Додамо ліві та праві частини цих двох рівнянь:

$(m_1 + m_2)\, a = (m_2 - m_1)\, g$,

звідки знаходимо прискорення вантажів $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, g$.

Помножимо перше рівняння (1.90) на m_2 , а друге на m_1 та віднімаємо від першого друге. Тоді отримаємо

$$m_2 T - m_1 m_2 g - m_2 m_1 g + T m_1 = 0 \,,$$

звідки $T(m_1 + m_2) - 2\, m_1 g\, m_2 = 0$,

і знаходимо натяг нитки

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \,. \qquad (1.91)$$

Час руху визначимо, використовуючи закон руху тіла, кинутого вертикально униз із прискоренням a без початкової швидкості: $h = a\dfrac{t^2}{2}$,

звідки $t = \sqrt{\dfrac{2h}{a}} = \sqrt{\dfrac{2h}{g} \cdot \dfrac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1}}$.

10. Диск масою m і радіусом R скочується з похилої площини. Момент інерції диска відносно т. О дорівнює I_0. Знайдіть повне прискорення диска і силу тертя.

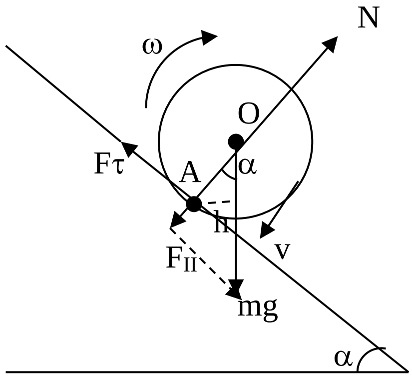


Рис. 1.42.

Розв'язок

Сила тертя Fτ буде дорівнювати kN, де N - нормальний тиск, а k – коефіцієнт тертя тільки для нерухомого диска. При русі диска без ковзання сила тертя може приймати будь-які значення в інтервалі $0 < F\tau < kN$.

Запишемо рівняння моментів відносно вісі обертання, що проходить через т. A:

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = M_A$$

Де I_A - момент інерції диска відносно т. A, M_A - момент сил відносно т. A. Момент сили відносно т. A створює тільки сила тяжіння

$$M_A = mgh = mgr\sin\alpha$$

Тоді рівняння моментів приймає вигляд

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = mgr\sin\alpha, \tag{1.92}$$

а, враховуючи, що лінійна швидкість $v = \omega \cdot r$, для лінійного прискорення т. O одержуємо

$$a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}.$$

Крім того, згідно з теоремою Штейнера, момент інерції відносно т. A дорівнює

$$I_A = I_0 + mr^2$$

Тоді рівняння моментів (1.92) приймає вигляд

$$\left(I_0 + mr^2\right)\frac{a}{r} = mgr\sin\alpha$$

Або

$$a = \frac{mgr^2\sin\alpha}{I_0 + mr^2} = \frac{g\sin\alpha}{\frac{I_0}{mr^2} + 1}$$

Для визначення сили тертя запишемо рівняння моментів відносно вісі, що проходить через центр О:

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = \mathrm{M}_0$$

Де M_0 – момент зовнішніх сил відносно вісі О. Цей момент створює сила тертя

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = rF\tau \tag{1.93}$$

Запишемо також рівняння руху центра мас в проекції на напрямок руху (сила тяжіння mg розкладається на нормальну складову N і повздовжню складову F_{II} = mgsinα):

$$m\frac{d\mathrm{v}}{dt} = F_{II} - F_\tau = mg\sin\alpha - F_\tau \tag{1.94}$$

Враховуючи, що $\frac{d\mathrm{v}}{dt} = a = r\frac{d\omega}{dt}$, з рівняння (1.93) і (1.94) маємо

$$\left.\begin{aligned} & I_0 a = r^2 F_\tau \\ & a = g\sin\alpha - \frac{F_\tau}{m} \end{aligned}\right\} \tag{1.95}$$

Звідки, виключаючи прискорення τ, одержуємо для прискорення

$$a = g\sin\alpha - \frac{I_0 a}{mr^2}$$

або

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I_0}{mr^2}}$$

Підставляючи це значення в перше рівняння (1.95), маємо

$$F_\tau = \frac{I_0 a}{r^2} = \frac{I_0 g\sin\alpha mr^2}{mr^2 + I_0} = \frac{I_0 mr^2 g\sin\alpha}{I_0 + mr^2} = \frac{I_0 mr^2}{I_0 + mr^2} g\sin\alpha\,.$$