

## 5.3 Електричні коливання

### 5.3.1 Коливальний електричний контур

Розглянемо електричний контур, що має конденсатор з ємністю  $C$  та соленоїд з індуктивністю  $L$ . Припустимо, що ми зарядили конденсатор при розімкненому контурі. Між пластинами конденсатора виникає електричне поле  $E$ , з енергією

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2. \quad (5.64)$$

Замкнемо контур. Конденсатор почне розряджатися, а його електричне поле буде зменшуватися.

Одночасно в контурі виникає електричний струм завдяки розряду конденсатора, а в соленоїді виникає магнітне поле. Через деякий час, що дорівнює четвертій частці періоду коливань, конденсатор розряджається повністю й електричне поле зникає, а магнітне поле досягає максимуму. При цьому енергія електричного поля (5.64) переходить в енергію магнітного поля

$$U = \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (5.65)$$

У подальший момент часу магнітне поле зменшується, що породжує струм самоіндукції, який спрямований у тому ж напрямку, що і струм розряду конденсатора. Таким чином, конденсатор перезаряджається і між пластинами з'являється електричне поле протилежного напрямку. За час, що дорівнює половині періоду коливань, магнітне поле зникає зовсім, електричне поле досягає максимального значення, при цьому енергія магнітного поля перетворюється в енергію електричного поля. Процес розрядження конденсатора повторюється нескінченно, а з ним і коливання заряду та струму в контурі (за умови, що опір провідників дорівнює нулю).

Виведемо рівняння вільних коливань в електричному контурі. Згідно з законом збереження енергії (другий закон Кірхгофа) сума спадів напруги в контурі дорівнює сумі е.р.с. Спад напруги на конденсаторі

$$U_c = \frac{q}{C}, \quad (5.66)$$

а е.р.с. самоіндукції

$$\varepsilon_c = -L \frac{dJ}{dt}. \quad (5.67)$$

Тоді закон збереження енергії в контурі матиме вигляд:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{dJ}{dt}. \quad (5.68)$$

Перетворюючи це рівняння відносно заряду  $q$ :

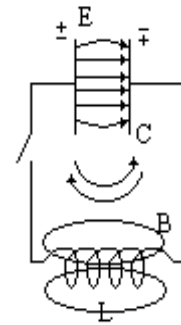


Рис.5.18. Коливальний процес в електричному контурі.

$$J = \frac{dq}{dt},$$

одержуємо

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0,$$

або

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (5.69)$$

Вираз

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC}, \quad (5.70)$$

$\omega_o$  має сенс частоти вільних коливань, а рівняння (5.69) збігається з рівнянням гармонічних коливань

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_o^2 q = 0, \quad (5.71)$$

розв'язок якого визначається гармонічною функцією:

$$q = A \cdot \cos(\omega_o t + \varphi). \quad (5.72)$$

Враховуючи початкові умови:

$$q(t=0) = q_o, \quad J = \left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0} = 0,$$

розв'язок (5.72) має вигляд

$$q = q_o \cdot \cos \omega_o t. \quad (5.73)$$

Таким чином, заряд в електричному контурі змінюється за гармонічним законом (рис.5.19).

де  $q_o$  - амплітуда коливань - повний заряд конденсатора,

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (5.74)$$

- власна частота коливань контуру, період коливань контуру  $T$  визначається формулою:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (5.75)$$

Напруга на конденсаторі

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_o}{C} \cos \omega_o t = U_o \cos \omega_o t, \quad (5.76)$$

де  $U_o = \frac{q_o}{C}$  - амплітуда напруги, яка дорівнює початковій напрузі на конденсаторі.

Сила струму в контурі визначається рівнянням

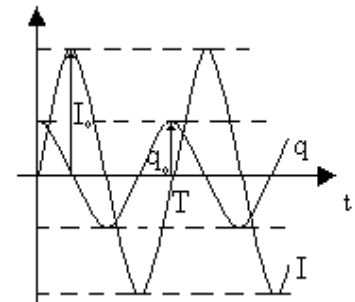


Рис.5.19. Коливання заряду і струму у контурі.

$$J = -\frac{dq}{dt} = q_o \omega_o \sin \omega_o t = J_o \sin \omega_o t, \quad (5.77)$$

де  $J_o = q_o \cdot \omega_o$  - амплітуда струму. Знак мінус у рівнянні (5.77) обраний тому, що напрямок струму відповідає зменшенню заряду конденсатора.

Тому що  $\sin(\omega_o t) = \cos(\omega_o t - \frac{\pi}{2})$ , то коливання струму

$$J = J_o \cos(\omega_o t - \frac{\pi}{2}) \quad (5.78)$$

відстають від коливання заряду на  $\frac{\pi}{2}$  (рис.5.19).

### 5.3.2 Згасаючі коливання

Розглянемо контур, який має опір  $R$  (рис.5.20).

Якщо опір контуру не дорівнює нулю, то при коливаннях заряду енергія, накопичена у контурі, розсіюється у вигляді тепла Джоуля-Ленца, що спричиняє згасання коливань. У цьому контурі сума спадів напруги включає спад напруги на ємності

$$U_c = \frac{q}{C},$$

та спад напруги на опорі:

$$U_R = JR.$$

Тоді, у відповідності до другого закону Кірхгофа,

$$JR + \frac{q}{C} = -L \frac{dJ}{dt}. \quad (5.79)$$

Враховуючи рівняння  $J = \frac{dq}{dt}$ , з (5.79) маємо

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (5.80)$$

Використовуючи позначення

$$\frac{R}{L} = 2\alpha, \quad \frac{1}{LC} = \omega_o^2, \quad (5.81)$$

одержуємо рівняння згасаючих коливань:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq}{dt} + \omega_o^2 q = 0. \quad (5.82)$$

Характеристичне рівняння, що відповідає диференційному рівнянню (5.82) має такий вигляд

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_o^2 = 0, \quad (5.83)$$

корені якого

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}. \quad (5.84)$$

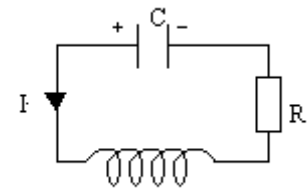


Рис.5.20. Власний контур з опором.

Розглянемо спочатку випадок, коли опір контуру настільки малий, що згасання коливань незначне

$$\alpha^2 < \omega_0^2. \quad (5.85)$$

За умови (5.85) корені характеристичного рівняння комплексні:

$$r_{1,2} = -\alpha \pm i\omega, \quad (5.86)$$

де

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (5.87)$$

частота згасаючих коливань, а розв'язок рівняння (5.82) має вигляд (рис.5.21)

$$q = q_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (5.88)$$

Амплітуда згасаючих коливань  $q_0 e^{-\alpha t}$  зменшується з часом, де  $\alpha = \frac{R}{2L}$  - коефіцієнт згасання. Якщо  $q_0$  та  $q_1$  - значення заряду конденсатора в двох послідовних максимумах, визначених у моменти часу, різниця між якими дорівнює періоду згасаючих коливань  $T$ , то вводять декремент згасання

$$\Delta = \frac{q_0}{q_1} = e^{\alpha T}. \quad (5.89)$$

Логарифмічний декремент згасання

$$\delta = \ln \Delta = \alpha T. \quad (5.90)$$

Логарифмічний декремент - це величина, зворотна числу коливань, за які амплітуда зменшується в "е" разів:

$$\delta = \frac{1}{N}.$$

Використовують також добротність контуру  $Q$ :

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N. \quad (5.91)$$

яка тим більше, чим менше згасання.

Якщо опір контуру досить великий та нерівність (5.85) порушена

$$\alpha^2 > \omega_0^2, \quad (5.92)$$

тоді корені характеристичного рівняння дійсні, а коливання вироджуються у аперіодичну залежність.

### 5.3.3 Вимушені електричні коливання

Розглянемо коливання в електричному контурі, який підживлюється змінною з часом е.р.с.:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \Omega t, \quad (5.93)$$

де  $\varepsilon_0$  - амплітуда е.р.с.,  $\Omega$  - частота коливань е.р.с. (рис.5.22)

Тоді рівняння коливань (5.82) з урахуванням е.р.с. (5.93) має вигляд:

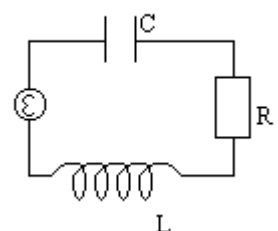


Рис. 5.22. Контур, який містить е.р.с.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq}{dt} + \omega_o^2 q = \frac{\varepsilon_o}{L} \sin \Omega t. \quad (5.94)$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (5.94), визначається як сума розв'язку однорідного рівняння (5.82) та часткового розв'язку неоднорідного рівняння у вигляді правої частини:

$$q = q_o e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \psi) + q_n(\Omega) \sin(\Omega t + \varphi). \quad (5.95)$$

де  $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}$ , а  $q_n$  - амплітуда стаціонарних вимушених коливань. Після замикання кола виникають коливання складної форми, подібні сумі коливань з різними частотами. З часом власні коливання згасають та залишаються тільки стаціонарні коливання з частотою вимушених коливань  $\Omega$ .

Амплітуда стаціонарних вимушених коливань залежить від частоти  $\Omega$ , і ця залежність має резонансний характер. Для визначення частотної залежності амплітуди вимушених коливань  $q_n(\Omega)$  шукатимемо частинний розв'язок рівняння (5.94) у комплексному вигляді:

$$q_n(t) = q_n^o e^{i\Omega t}. \quad (5.96)$$

Тоді  $\mathcal{L}\{q_n(t)\} = i\Omega q_n^o e^{i\Omega t}$ ,  $\mathcal{L}\{q_n(t)\} = -\Omega^2 q_n^o e^{i\Omega t}$  і рівняння (5.94) має вигляд, де права частина рівняння (5.94) записана у вигляді

$$\frac{\varepsilon_o}{L} e^{i\Omega t} \quad (e^{i\Omega t} = \cos \Omega t + i \sin \Omega t):$$

$$[-\Omega^2 + 2i\Omega\alpha + \omega_o^2] q_n^o = \frac{\varepsilon_o}{L}. \quad (5.97)$$

Розв'язок рівняння (5.94) дає амплітуду стаціонарних вимушених коливань

$$q_n^o = \frac{\varepsilon_o / L}{\omega_o^2 - \Omega^2 + 2i\alpha\Omega} = \frac{\varepsilon_o / L}{(\omega_o - \Omega)(\omega_o + \Omega) + 2i\alpha\Omega}. \quad (5.98)$$

Розглядаючи залежність амплітуди (5.98) від частоти  $\Omega$  поблизу резонансу, коли  $\Omega \sim \omega_o$ , заміною  $\omega_o + \Omega \cong 2\Omega$ , у (5.98) спрощується

$$q_n^o = \frac{\varepsilon_o}{2L\Omega} = \frac{\varepsilon_o / 2L\Omega ((\omega_o - \Omega) - i\alpha)}{(\omega_o - \Omega)^2 + \alpha^2}. \quad (5.99)$$

Залишаючи в цьому розв'язку уявний доданок, одержуємо амплітуду

$$q_n^o = \frac{\varepsilon_o}{2L\Omega} \frac{\alpha}{(\omega_o - \Omega)^2 + \alpha^2}, \quad (5.100)$$

яка має вигляд лоренцівської кривої з шириною  $\alpha$  (рис.5.23).

Ширина резонансної кривої  $\alpha$  зв'язана з добротністю контуру  $Q$ . Добротність  $Q$  дорівнює

$$Q = \frac{\pi}{\delta}, \quad (5.101)$$

де  $\delta$  - логарифмічний декремент згасання:

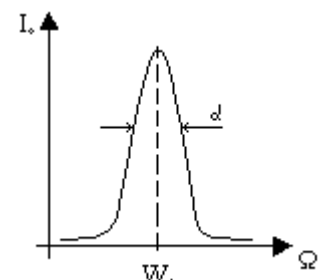


Рис.5.23. Резонансна лінія.

$$\delta = \alpha T = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{\omega_0}. \quad (5.102)$$

Звідки знаходимо

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega_0}{2\alpha}. \quad (5.103)$$

Таким чином, ширина резонансної кривої зворотна добротності контуру.

### 5.3.4 Опір у колі змінного струму

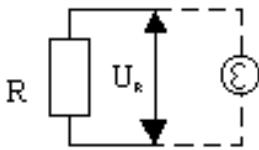


Рис. 5.24. Опір у колі змінного струму.

Розглянемо частинний випадок, коли генератор змінного струму замкнений на опір  $R$  (рис. 5.24). Струм визначається формулою  $I = I_0 \sin \Omega \cdot t$ . Тоді спад напруги на опорі дорівнює

$$U_R = IR = I_0 R \sin \Omega \cdot t.$$

Максимальна напруга (амплітудне значення) дорівнює

$$U_R^0 = I_0 R,$$

а зміна напруги знаходиться у фазі з зміною струму (рис. 5.25)

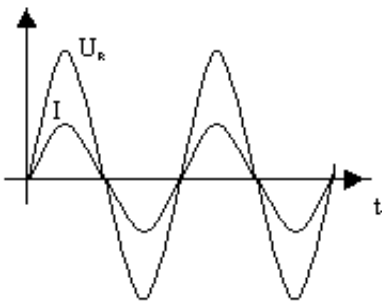


Рис. 5.25. Коливання струму і напруги на опорі.

Використовуючи метод векторних діаграм, оберемо напрямком вектора струму за вісь відліку. Тоді вектор коливання напруги  $U_R$  буде спрямований за віссю струмів, тому що різниця фаз між струмом та

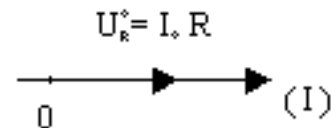


Рис. 5.26. Векторна діаграма напруги на опорі.

напругою  $U_R$  дорівнює нулю (рис.5.26).

### 5.3.5 Ємність у колі змінного струму

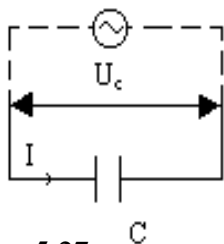


Рис.5.27. Конденсатор у колі змінного струму.

Розглянемо напругу на конденсаторі, який знаходиться в колі, що має є.р.с. Струм у колі визначається законом  $I = I_0 \sin \Omega \cdot t$ . Спад напруги на

конденсаторі дорівнює  $U = \frac{q}{C}$ .

Зважаючи на те, що струм дорівнює зміні заряду:

$$I = \frac{dq}{dt},$$

то заряд на конденсаторі визначається через силу струму

$$q = \int Idt = I_0 \int \sin \Omega \cdot t dt = -\frac{I_0}{\Omega} \cos \Omega \cdot t.$$

Отже, спад напруги

$$U_c = -\frac{I_0}{\Omega C} \cos \Omega \cdot t = \frac{I_0}{\Omega C} \sin\left(\Omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Порівнюючи з законом зміни струму

$$I = I_0 \sin \Omega \cdot t,$$

бачимо, що коливання на конденсаторі відбувається за законом синуса, але фаза відстає на  $\frac{\pi}{2}$  (рис.5.28)

Тоді амплітуда напруги на конденсаторі дорівнює

$$U_c^0 = I_0 \frac{1}{\Omega C} = I_0 R_c,$$

де величина  $R_c = \frac{1}{\Omega C}$

відіграє роль опору на ділянці кола з ємністю C.

Векторна діаграма коливання напруги на конденсаторі зображена на рис.5.29.

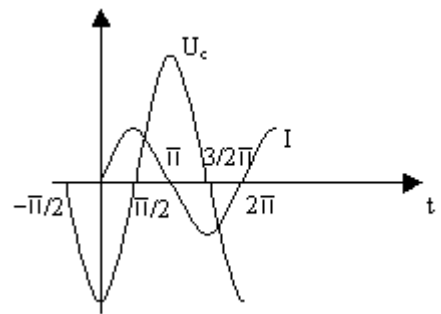


Рис. 5.28. Коливання струму у колі і напруги на конденсаторі.

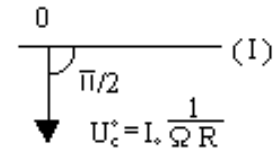


Рис. 5.29. Векторна діаграма напруги на ємності.

### 5.3.6 Індуктивність у колі змінного струму

Розглянемо ділянку кола, яка має індуктивність L (рис.5.30). Спад напруги на індуктивності дорівнює

$$U_L = -\varepsilon = L \frac{dI}{dt}.$$

Якщо сила струму у колі змінюється за законом

$$I = I_0 \sin \Omega \cdot t,$$

тоді

$$U_L = I_0 \Omega L \cos \Omega \cdot t = I_0 \Omega L \sin\left(\Omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Порівнюючи цей вираз з законом зміни струму, бачимо, що фаза коливання напруги на індуктивності випереджає фазу коливання струму на  $\frac{\pi}{2}$ , а коливання напруги на ємності на  $\pi$  (рис. 5.31).

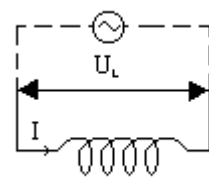


Рис.5.30 Індуктивність у колі змінного струму.

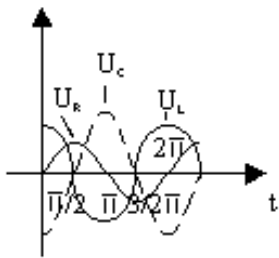


Рис. 5.31.  
Коливання  $U_C$ ,  
 $U_L$ ,  $U_R$ .

Амплітуда напруги на індуктивності дорівнює

$$U_L^0 = I_0 \Omega L,$$

де

$$R_L = \Omega L$$

називається умовним опором індуктивності.

Векторна діаграма напруги на індуктивності зображена на рис.5.32.

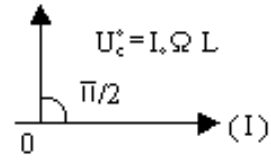


Рис. 5.32. Векторна діаграма напруги на індуктивності.

### 5.3.7 Закон Ома у колі змінного струму

Розглянемо послідовне електричне коло, що включає опір, ємність та індуктивність (рис.5.33).

Нехай струм у колі змінюється за законом

$$I = I_0 \sin \Omega \cdot t,$$

тоді знайдемо повну напругу електричного кола. Шукана напруга  $U$  дорівнює сумі трьох напруг:

$$U = U_C + U_R + U_L.$$

Використовуючи векторну діаграму (рис.5.34) додамо усі три коливання. Різниця амплітуд напруги на ємності та індуктивності називається реактивною

складовою напруги

$$U_p^0 = U_L^0 - U_C^0,$$

тоді як напруга  $U_R^0$  називається активною складовою.

Для повної напруги  $U_0$  з рис. (5.34) одержуємо

$$U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left( \Omega \cdot L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2}.$$

Ця формула називається законом Ома для змінного струму. Він визначає тільки амплітуду напруги, а не миттєве значення напруги. Повний опір

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \Omega \cdot L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2}$$

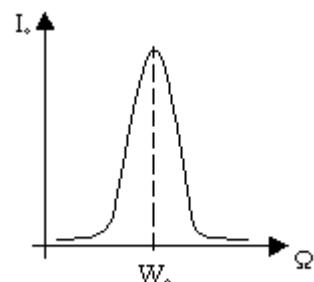


Рис. 5.35. Резонансна крива при резонансі напруг.



називається опором кола змінного струму,  $R$  називають активним опором, а

$$X = \Omega \cdot L - \frac{1}{\Omega C} = R_L - R_C$$

називають реактивним опором електричного кола. За умови, що реактивний опір дорівнює нулю

$$X = \Omega \cdot L - \frac{1}{\Omega C} = 0$$

звідки виходить формула

$$\Omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

що визначає умову резонансу напруги, при якій реактивна напруга

$$U_P = U_L^0 - U_C^0 = 0$$

дорівнює нулю, або амплітуди коливання на ємності та індуктивності дорівнюють одна одній, а різниця фаз їх дорівнює  $\pi$ . Тобто, в умовах резонансу електричне коло має тільки активний опір. Такий резонанс називають резонансом напруги (рис. 5.35).