

А. С. КЛЮЕВ

АВТОМАТИЧЕСКОЕ
РЕГУЛИРОВАНИЕ

УДК. 62-50

6П2.154

К 52

Клюев А. С.

К 52 Автоматическое регулирование. М., «Энергия»,
1967

344 с. с илл.

В книге излагаются систематизированные и методически переработанные основы теории линейных и нелинейных систем автоматического регулирования

Рассматриваются методы определения динамических характеристик объектов и выделения в плоскости параметров настройки регуляторов областей с необходимым запасом устойчивости систем автоматического регулирования

Даются рекомендации в части улучшения качества процесса автоматического регулирования. Проводится анализ основных структурных схем промышленных автоматических регуляторов

Книга предназначена для инженеров и техников, работающих в области автоматизации различных технологических процессов.

Она может быть также полезной для студентов при изучении курса автоматического регулирования

3-3-13

179-67

6П2.154

«Автоматизация и комплексная механизация служат материальной основой постепенного перерастания социалистического труда в труд коммунистический».

(Из программы КПСС)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Технический прогресс характеризуется непрерывным ростом автоматизации производства во всех отраслях народного хозяйства.

От автоматизации отдельных установок и агрегатов в настоящее время переходят к комплексной и полной автоматизации и созданию автоматических цехов и заводов-автоматов, обеспечивающих максимальное повышение производительности труда, снижение себестоимости продукции и повышение культуры производства.

Только благодаря автоматизации стало возможным осуществление ряда наиболее прогрессивных технологических процессов, создание новых современных видов сообщений и средств связи.

Для разработки и эффективной эксплуатации систем автоматического регулирования необходимо знать общие законы их построения и действия, методы исследования и настройки. Эти вопросы изучает наука о системах автоматического управления, в частности один из ее разделов, охватывающий системы автоматического регулирования.

В настоящее время теория автоматического регулирования продолжает интенсивно развиваться. При этом она обогащается не только новыми теоретическими исследованиями, но и новыми прикладными методами инженерного расчета и настройки, которые находят все большее применение в повседневной практике инженерно-технических работников, занимающихся проектированием, наладкой и эксплуатацией средств автоматизации.

При написании книги автор попытался в достаточно простой форме, с использованием элементарных сведений из высшей математики, изложить основы теории автоматического регулирования.

При изложении материала особое внимание уделяется прикладному значению того или иного теоретического по-

ложения или метода, использование которого иллюстрируется конкретными примерами с цифровыми расчетами и практическими рекомендациями.

Книга состоит из семи глав. Первая глава является вводной. В ней дается определение системы автоматического регулирования, приводятся основные термины, определения и понятия.

В гл. 2—5 излагается теория линейных систем автоматического регулирования. Даются инженерные методы их расчета и определения параметров настроек.

Глава 6 посвящена проблеме улучшения качества процесса автоматического регулирования.

В гл. 7 рассматриваются нелинейные системы автоматического регулирования.

Автор выражает глубокую признательность Е. М. Гордину за ряд ценных замечаний, сделанных им при рецензировании рукописи, а также доценту Московского вечернего машиностроительного института Н. А. Плевако, выполнившему большую творческую работу при редактировании книги.

Автор

ГЛАВА ПЕРВАЯ

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

1-1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

Всякий технологический процесс характеризуется определенными физическими величинами. Для обеспечения требуемого режима работы эти величины необходимо поддерживать постоянными или изменять по тому или иному закону.

Так, для обеспечения нормальной работы котлоагрегата необходимо поддерживать постоянным давление пара в барабане котла путем подачи количеств топлива, зависящих от внешней нагрузки котла. Помимо того, воздух в топку должен подаваться в соответствии с количеством и качеством сжигаемого топлива, так как недостаток воздуха приводит к неполному сгоранию топлива, а его избыток — к затрате излишнего топлива на нагрев избыточного воздуха. Необходимо также поддерживать постоянным разрежение в топке котла, так как избыток давления ведет к выбиванию газов и пламени из топки в помещение котельной, а чрезмерное разрежение снижает экономичность работы котла в связи с подсосом воздуха из помещения котельной.

Физические величины, определяющие ход технологического процесса, называются *параметрами технологического процесса*.

Так, параметрами технологического процесса могут быть давление, температура, уровень жидкости, концентрация вещества, расход вещества или энергии, скорость изменения какой-либо величины и т. п.

Параметр технологического процесса, который необходимо поддерживать постоянным или изменять по опреде-

ленному закону, называется *регулируемой величиной* или *регулируемым параметром*.

Значение регулируемой величины (параметра), которое согласно заданию должно иметь место в данный момент времени, называется *заданным значением регулируемой величины*. Действительное же значение регулируемой величины в данный момент времени называется *текущим значением регулируемой величины*.

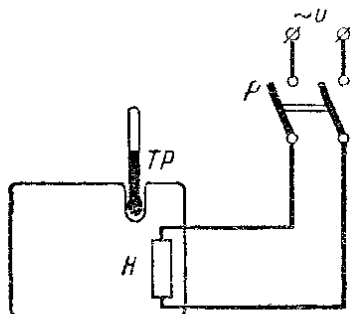


Рис. 1-1. Схема ручного регулирования температуры сушильного шкафа.

На рис. 1-1 представлена схема, позволяющая путем регулирования вручную поддерживать заданное значение Θ температуры в сушильном шкафу. Человек-оператор в зависимости от показания ртутного технического термометра $ТР$ включает или выключает нагревательный элемент $Н$ рубильником $Р$.

Характерной особенностью ручного регулирования является разомкнутость системы, т. е. то, что выход не оказывает никакого влияния на вход системы. Так, в данном случае величина температуры в сушильном шкафу (выход)

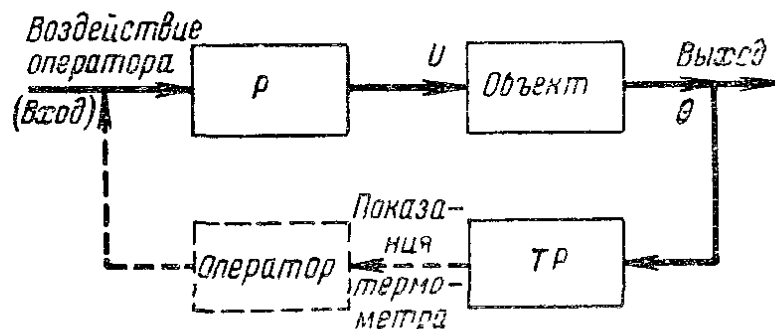


Рис. 1-2 Функциональная блок-схема системы по рис. 1-1.

не вызывает включения или выключения рубильника (вход) без участия оператора. Функциональная блок-схема системы на рис. 1-1 представлена на рис. 1-2.

Состояние входа системы приводится в соответствие с состоянием ее выхода действиями оператора. Таким образом, лишь благодаря работе оператора система регулирования замыкается. Следовательно, для того чтобы полностью автоматизировать процесс регулирования, необходимо систему сделать замкнутой без вмешательства оператора. Простей-

шая схема автоматического регулирования температуры представлена на рис. 1-3. Здесь для измерения температуры применен технический ртутный термометр ТРК с контактами. При повышении температуры до заданной контакты замыкаются столбиком ртути, катушка реле n возбуждается и цепь нагревательного элемента H разрывается из-за размыкания размыкающего контакта реле.

При понижении температуры контакты ртутного термометра размыкаются, реле n обесточивается, возобновляя подачу энергии в объект. Рубильник P остается в процессе работы все время включенным. Таким образом, заданное значение температуры в сушильном шкафу поддерживается автоматически, без участия оператора. Функциональная схема системы автоматического регулирования по рис. 1-3 представлена на рис. 1-4.

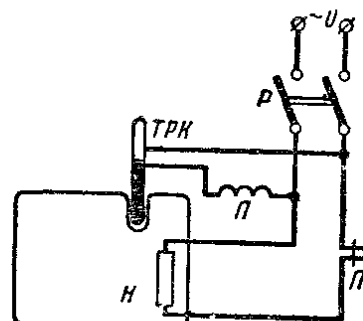


Рис. 1-3. Простейшая схема автоматического регулирования температуры.

Таким образом, в замкнутой системе автоматического регулирования наличие или отсутствие *входного воздействия* (для системы на рис. 1-3 — включение или отключение реле n , коммутирующего подачу энергии в объект) непосредственно зависят

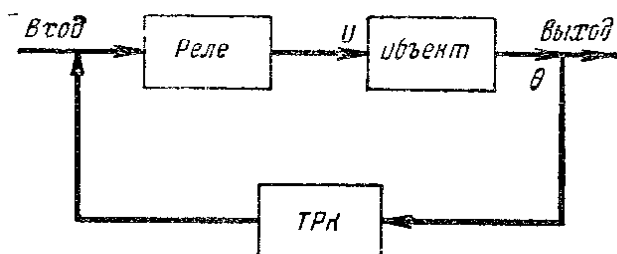


Рис 1-4. Функциональная блок-схема системы по рис 1-3

от выходной регулируемой величины (для схемы по рис. 1-3 — от температуры объекта).

Основным преимуществом разобранной системы автоматического регулирования является ее простота.

Однако она имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что регулируемая величина непрерывно колеблется около заданного значения даже при отсутствии возмущающих воздействий в связи с периодическим полным прекращением подачи энергии в объект.

Возмущающими воздействиями называются всякие изменения нерегулируемых величин технологического процесса, влияющие на регулируемую величину. Так, для системы, изображенной на рис. 1-3, возмущающими воздействиями могут быть: изменение напряжения сети, уве-

личение теплоотдачи шкафа в момент его загрузки, изменение температуры окружающей среды и т. п.

На рис. 1-5 представлена система автоматического регулирования, свободная от указанных выше недостатков.

При температуре объекта, равной заданной, измерительный мостик M уравновешен, на вход электронного усилителя $ЭУ$ сигнал не поступает и система находится в равновесии. При отклонении температуры (например, в результате изменения напряжения сети) изменяется сопротивление

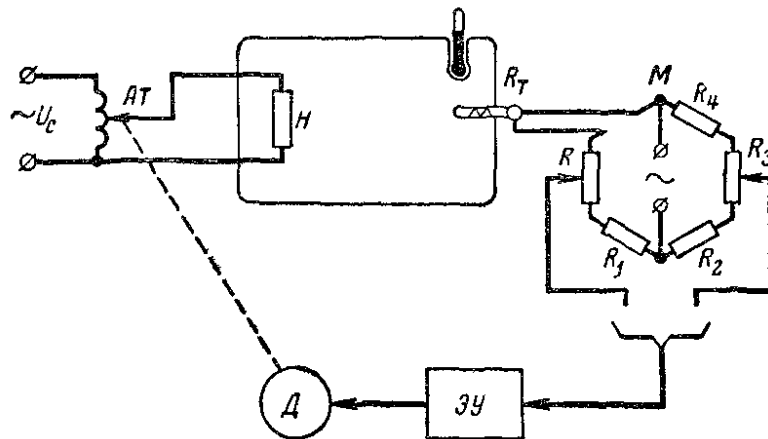


Рис. 1-5. Одноконтурная система автоматического регулирования температуры.

термометра сопротивления R_T и равновесие мостика нарушается. На входе электронного усилителя $ЭУ$ появляется напряжение, фаза которого зависит от знака отклонения температуры объекта от заданной. Напряжение, усиленное в блоке $ЭУ$, подается на электродвигатель $Д$, который начинает вращаться со скоростью, пропорциональной этому напряжению. Направление вращения двигателя зависит от фазы подаваемого напряжения.

Двигатель будет перемещать движок автотрансформатора $АТ$ или в сторону увеличения напряжения, подаваемого на нагревательный элемент $Н$ при уменьшении температуры объекта, или в сторону уменьшения напряжения при ее увеличении. По достижении заданной температуры измерительный мостик сбалансирован и двигатель отключится. При установившемся режиме и отсутствии возмущающих воздействий в объект подается ровно столько энергии, сколько ее необходимо для поддержания заданной температуры, и система находится в равновесии. Величина заданного значения температуры устанавливается перемещением движка сопротивления R_3 .

Функциональная блок-схема системы, показанной на рис. 1-5, представлена на рис. 1-6. Таким образом, система автоматического регулирования в общем случае состоит из следующих основных элементов или устройств (рис. 1-7): регулируемого объекта, измерительного устройства ИУ,

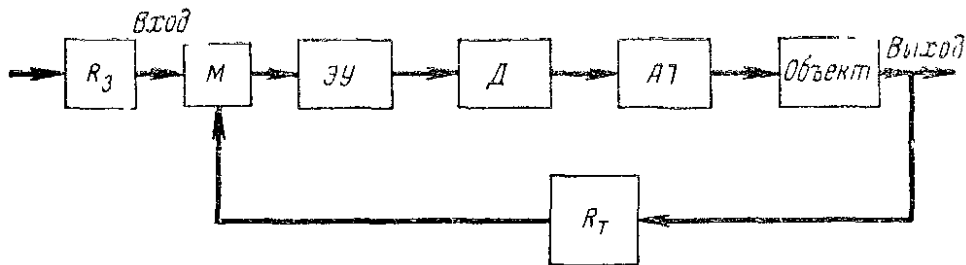


Рис. 1-6. Функциональная блок-схема системы на рис. 1-5.

задающего устройства ЗУ, суммирующего устройства СУ, усилителя У, исполнительного механизма ИМ и регулирующего органа РО. Воздействие выхода системы регулирования на ее вход называется главной обратной связью.

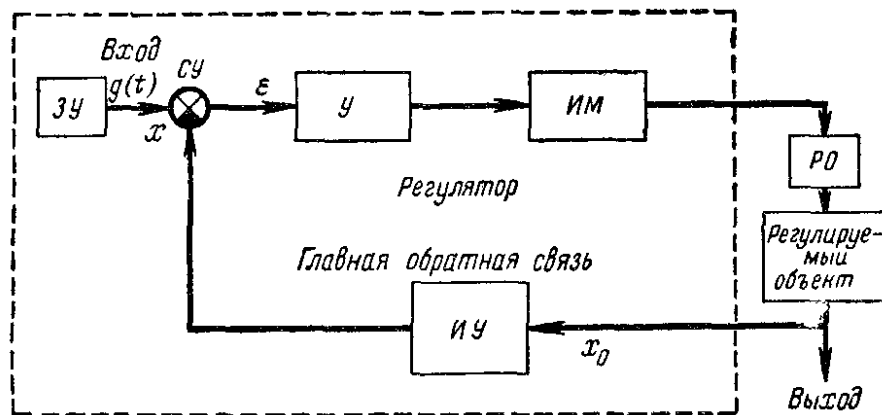


Рис 1-7. Типовая функциональная блок-схема одноконтурной системы автоматического регулирования.

Задающее устройство оказывает *управляющее* (задающее) воздействие $g(t)$ на вход системы. Управляющее воздействие может иметь постоянную заданную величину при необходимости поддержания постоянного заданного значения регулируемой величины x_0 или же изменяться по определенному закону, если в технологическом процессе по этому закону должна изменяться регулируемая величина.

На функциональной схеме на рис. 1-7 круг, разделенный на секторы, изображает суммирующее устройство. Вход сигнала в зачерненный сектор СУ означает, что этот сигнал вычитается из остальных. Физически это означает, что главная обратная связь подается на вход системы с противоположным знаком относительно задающего входного воздействия, т. е. является *отрицательной обратной связью*. Благодаря этому при значении регулируемой величины, равном заданному, на вход усилителя системы сигнала не поступает и система находится в равновесии. В случае неравенства величины сигнала x заданию (управляющему воздействию) $g(t)$ рассогласование (ошибка) $\varepsilon = g(t) - x$ подается на вход усилителя системы, которая реагирует на это таким образом, чтобы рассогласование уменьшалось.

Комплекс устройств, присоединяемых к регулируемому объекту и обеспечивающих или автоматическое поддержание заданного значения его регулируемой величины, или автоматическое изменение ее по определенному закону, принято называть *автоматическим регулятором*. Автоматический регулятор присоединяется к выходу объекта и воздействует на его вход через регулирующий орган (рис. 1-7).

Как следует из изложенного выше, *система автоматического регулирования* есть совокупность автоматического регулятора и регулируемого объекта, взаимодействующих между собой.

Следует отметить, что комплекс устройств, входящих в регулятор, не является постоянным: некоторые элементы в регуляторе могут быть конструктивно объединены или же отсутствовать. Так, в системе на рис. 1-3 реле выполняет роль усилителя, исполнительного механизма и регулирующего органа.

Все отдельно взятые элементы системы, как правило, обладают направленностью действия, которая заключается в том, что сигнал проходит только от входа к выходу элемента. Направление прохождения сигнала по контуру регулирования на схемах обозначается стрелками.

Так, температура объекта в схеме, изображенной на рис. 1-5, определяет сопротивление термометра сопротивления R_T , но изменение его сопротивления не влияет на температуру объекта. Перемещение движка автотрансформатора АТ вызывает изменение напряжения на его выходе, но это напряжение не воздействует на движок автотрансформатора.

1-2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. Классификация по основному признаку

Системы автоматического регулирования (САР) являются составной частью более общей группы систем автоматического управления. Вследствие большого разнообразия систем автоматического регулирования, широкого диапазона их функциональных возможностей и принципов построения и учитывая множество форм конструктивной реализации САР, в настоящее время в качестве их основного классификационного признака принимается используемая системой информация (совокупность сведений о технологическом процессе и регуляторе); другие, ранее применявшиеся классификации становятся слишком узкими и не могут охватить всех новых разрабатываемых и внедряемых в практику систем автоматического регулирования. Основными классификационными признаками приняты начальная и рабочая информация.

Начальной информацией называется совокупность сведений о технологическом процессе, подлежащем автоматизации, и системе регулирования этого процесса, известная до построения и начала функционирования системы. Так, при разработке системы автоматического регулирования сушильного шкафа (см. рис. 1-3 и 1-5) необходимо знать теплоемкость объекта, температуру окружающей среды, характер ожидаемых возмущающих воздействий, допустимые отклонения температуры от заданного значения, требования, предъявляемые к системе регулирования, и пр.

Если имеется достаточная начальная информация в объеме, позволяющем разработать систему, обеспечивающую требуемую точность регулирования, такая информация называется *полной начальной информацией*.

Системы регулирования, требующие для своей разработки полной начальной информации, называются обыкновенными системами автоматического регулирования.

Если до построения системы регулирования нет достаточных сведений о ней самой или технологическом процессе или если стабильность работы отдельных элементов системы при тех или иных условиях недостаточна и какие-либо их параметры могут быть подвержены непредвиденным значительным отклонениям, то такая начальная информация будет неполной.

Системы регулирования, разработанные с таким расчетом, что они обеспечивают необходимую точность регулирования при неполной начальной информации, называются *самонастраивающимися системами автоматического регулирования*.

Самонастраивающиеся системы регулирования обладают способностью приспособливаться к непредвиденно изменяющимся свойствам технологического процесса или отдельных элементов системы и перестраиваются таким образом, чтобы компенсировать эти изменения, продолжая обеспечивать требуемую точность регулирования. Обыкновенные системы автоматического регулирования при возникновении таких изменений, если они не учтены при разработке системы, не смогут их компенсировать, что приведет или к снижению точности регулирования, или при существенных нарушениях в системе к аварийному режиму.

Следует отметить, что хотя самонастраивающиеся системы и являются более совершенными, однако обыкновенные системы находят очень широкое применение. Так как о большинстве технологических процессов можно получить полную начальную информацию, то в этом случае применение более сложных самонастраивающихся систем экономически нецелесообразно.

Вторым основным классификационным признаком является *рабочая информация*; это понятие охватывает совокупность сведений о текущем состоянии технологического процесса, получаемых и используемых при осуществлении процесса автоматического регулирования. Рабочая информация передается в виде сигналов, содержащих сведения о изменениях параметров, характеризующих протекание технологического процесса, и соответствии их управляющим воздействиям.

Так, рабочей информацией системы, представленной на рис. 1-5, является отклонение температуры сушильного шкафа от заданного значения. В качестве вспомогательного сигнала, заключающего в себе информацию о величине температуры, используется величина сопротивления термометра сопротивления R_T . Сигналом, содержащим основную рабочую информацию, является напряжение, подаваемое с измерительного мостика на вход электронного усилителя. Из рис. 1-7 видно, что носителями рабочей информации являются сигналы x и $g(t)$.

По виду закона изменения управляющего воздействия $g(t)$ обыкновенные системы автоматического регулирования

подразделяются на стабилизирующие, системы программного регулирования и следящие системы.

Стабилизирующими системами называются системы, в которых регулируемая величина должна иметь постоянное заданное значение. Примером такой системы автоматического регулирования являются системы, изображенные на рис. 1-3 и 1-5. Управляющее воздействие в стабилизирующих САР имеет постоянное заданное значение.

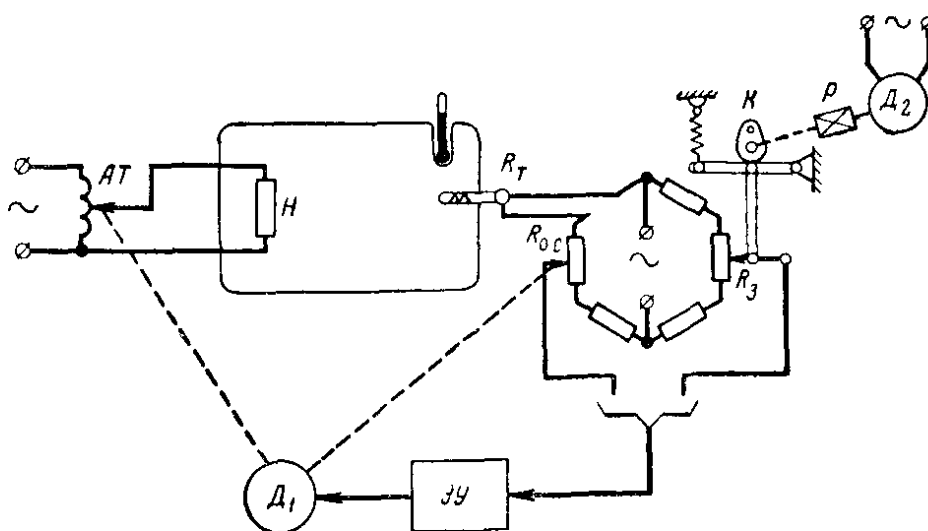


Рис 1-8 Программная система автоматического регулирования.

Системами программного регулирования называются системы, в которых заданное значение регулируемой величины не является постоянным, а изменяется по определенному, заданному закону (программе). Требуемое изменение регулируемой величины по времени обеспечивается в этих системах изменением управляющего воздействия по строго определенной программе. Если, например, необходимо, чтобы температура нагревательной печи после загрузки ее материалами или изделиями медленно поднималась до определенной величины, которая далее выдерживалась бы некоторое время постоянной и затем медленно снижалась, то чтобы автоматизировать технологический процесс, следует по этому закону менять во времени управляющее воздействие на регулятор. Программная система регулирования, обеспечивающая требуемый закон изменения регулируемой величины, может быть, например, выполнена по схеме, показанной на рис. 1-8, где двигатель D_2 вращает с определенной скоростью через редуктор P кулачок K , профиль которого соответствует программе регулирования;

кулачок изменяет управляющее воздействие в соответствии с этой программой, перемещая движок сопротивления R_3 .

Следящими системами автоматического регулирования называются системы, в которых закон изменения регулируемой величины заранее неизвестен и определяется независимыми изменениями какой-либо другой величины, называемой «ведущей» величиной. В следящих системах регулируемая величина (ведомая) повторяет в определенном масштабе все изменения ведущей величины, или как бы «следит» за

ней. В таких системах ведущая величина является управляющим воздействием.

Простейшей следящей системой является равновесный мост, изображенный на рис. 1-9. Входом системы является перемещение движка сопротивления R_3 , а выходом — перемещение движка сопротивления R_{oc} . При сбалансированном измерительном

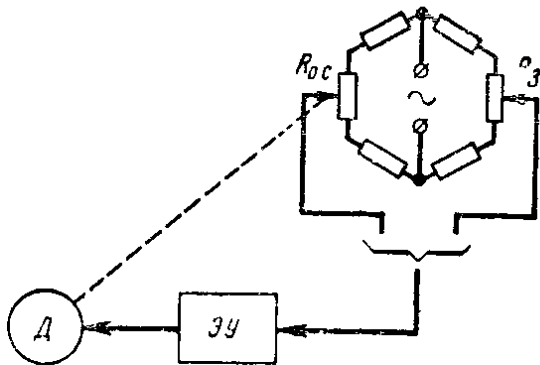


Рис 1-9 Простейшая следящая система автоматического регулирования.

мостике система находится в равновесии. При перемещении движка R_3 по любому заранее неизвестному закону нарушается равновесие измерительного мостика и двигатель $Д$ будет перемещать движок R_{oc} в сторону восстановления этого равновесия. Таким образом, движок сопротивления R_{oc} будет повторять все перемещения движка сопротивления R_3 .

По виду рабочей информации самонастраивающиеся системы подразделяются на системы экстремального регулирования и системы регулирования с самонастраивающимися устройствами.

Системами экстремального регулирования называются системы, автоматически поддерживающие экстремальное (максимальное или минимальное) значение регулируемой величины. Практически такими регулируемыми величинами могут быть к. п. д. установки, производительность, экономичность, расход вещества или энергии и пр. Экстремальная величина их обычно соответствует оптимальным условиям протекания регулируемого технологического процесса. Рабочей информацией в этих системах является отклонение регулируемой величины от максимального значения, опре-

деляемого законом изменения управляющего воздействия. На это отклонение система реагирует таким образом, чтобы оно было минимальным.

Система работает в режиме постоянного поиска. С помощью специального устройства на вход системы непрерывно подаются возмущающие воздействия; в зависимости от того, как при этом изменяется регулируемая величина, соответственно меняется управляющее воздействие, обеспечивая экстремальное значение регулируемой величины.

Пусть, например, в результате термической обработки исходного сырья получается продукт, выход которого зависит от температуры и состава исходного сырья. Технологический процесс непрерывный. Максимальный выход продукта получается при различных температурах в зависимости от физического и химического состава сырья, который меняется произвольным образом. В этом случае мы не имеем полной начальной информации для разработки системы, поскольку закон изменения состава сырья неизвестен и, следовательно, запроектировать обыкновенную систему регулирования невозможно. Применение экстремальной системы регулирования может решить вопрос автоматизации такого технологического процесса. Система автоматического регулирования в этом случае разрабатывается, исходя из среднего состава сырья. Вместе с тем конструкция системы должна давать возможность при ее работе с помощью специального устройства постоянно менять температуру обработки сырья и в зависимости от того, как при этом изменяется выход продукта, воздействовать на объект в направлении обеспечения максимального выхода продукта. Если при данном составе сырья, например, рост температуры приводит к увеличению выхода продукта, то система воздействует в этом направлении на температуру до тех пор, пока выход продукта не начнет уменьшаться. Таким образом, приводя постоянно температуру термообработки сырья в соответствие с его химическим и физическим составом, экстремальная система автоматически поддерживает технологический режим близким к заданному, повышая экономичность технологического процесса.

Системы автоматического регулирования с самонастраивающимися корректирующими устройствами позволяют обеспечить требуемое качество процесса регулирования при отсутствии точных данных о свойствах регулируемого объекта и характере возмущающих воздействий.

Обыкновенные системы в зависимости от свойств того или иного объекта регулирования имеют вполне определенную структуру. Если, например, свойства объекта изменились против расчетных, то системы этого класса не могут обеспечить заданную точность регулирования и, следовательно, систему необходимо перепроектировать с учетом новых свойств объекта. Отличительной особенностью системы с самонастраивающимися корректирующими устройствами является то, что она может автоматически менять свою структуру и свойства отдельных устройств таким образом, чтобы

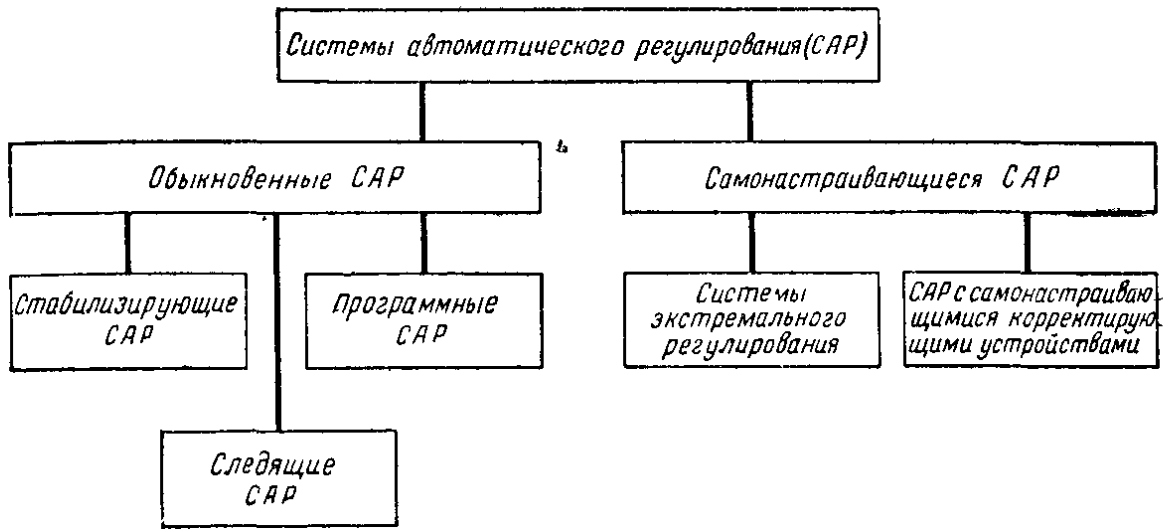


Рис. 1-10. Классификация систем автоматического регулирования.

обеспечивалось требуемое качество регулирования при изменении свойств объекта и характера возмущающих воздействий. Такая система может воздействовать не только на регулируемый объект, но и на отдельные устройства регулятора, меняя его характеристики и компенсируя тем самым изменения в свойствах регулируемого объекта. Классификация систем автоматического регулирования по информационному признаку представлена на рис. 1-10.

2. Классификация по другим признакам

Кроме классификации по используемой информации, системы автоматического регулирования классифицируются и по ряду других признаков. Так, в зависимости от вида закономерности изменений сигналов, используемых в регулирующих системах, последние подразделяются на линейные и нелинейные. *Линейными системами регулирования* называются системы, в которых процесс регулирования ма-

тематически описывается с помощью линейных дифференциальных уравнений. Все остальные системы называются *нелинейными*.

В частности, нелинейными являются системы, в которых сигнал на выходе по крайней мере одного из элементов изменяется скачкообразно или представляет собой последовательность импульсов, в которой могут изменяться длительность, амплитуда и частота импульсов.

Примером нелинейной системы регулирования является система, приведенная на рис. 1-3.

Системы, содержащие один замкнутый контур (см. рис. 1-3 и 1-5), называются *одноконтурными системами* автоматического регулирования. Системы с несколькими замкнутыми контурами называются *многоконтурными*.

Поясним необходимость применения многоконтурных систем на примере. В системе, показанной на рис. 1-5, при появлении разбаланса измерительного мостика (например, в результате уменьшения температуры объекта) он может быть снова сбалансирован только при достижении температурой заданного значения. Однако при большой инерционности объекта восстановление температуры до заданного значения происходит медленно. Поэтому может наступить момент, когда движок автотрансформатора, хотя и будет передвинут двигателем до такого положения, что в объект будет поступать достаточно энергии для восстановления заданного значения температуры, но в силу большой инерционности объекта его температура будет еще меньше заданной. Следовательно, в этот момент измерительный мостик еще не будет сбалансирован и двигатель будет продолжать перемещение движка в сторону дальнейшего увеличения подачи энергии в объект.

По достижении температурой заданного значения двигатель остановится. Однако к этому времени в объект будет поступать энергии больше, чем требуется для поддержания заданной температуры; поэтому температура будет продолжать повышаться и двигатель будет вновь включен, но уже в сторону уменьшения подачи энергии в объект. Только после нескольких колебаний температуры подача энергии в объект придет в соответствие с потребностью в ней для поддержания заданной температуры. Во избежание больших колебаний температуры необходимо уменьшать скорость перемещения движка автотрансформатора, но тогда увеличивается инерционность системы в целом на это в свою

очередь при значительных возмущающих воздействиях может снова привести к увеличению колебаний температуры.

Для того чтобы увеличить быстродействие системы и в то же время снизить колебания регулируемой величины, можно дополнительно соединить двигатель с движком сопротивления обратной связи R_{oc} (см. рис. 1-8), которое включено в мостовую схему. Тогда при отклонении температуры от заданного значения двигатель D_1 изменит количество энергии, подаваемой в объект, перемещая движок автотрансфор-

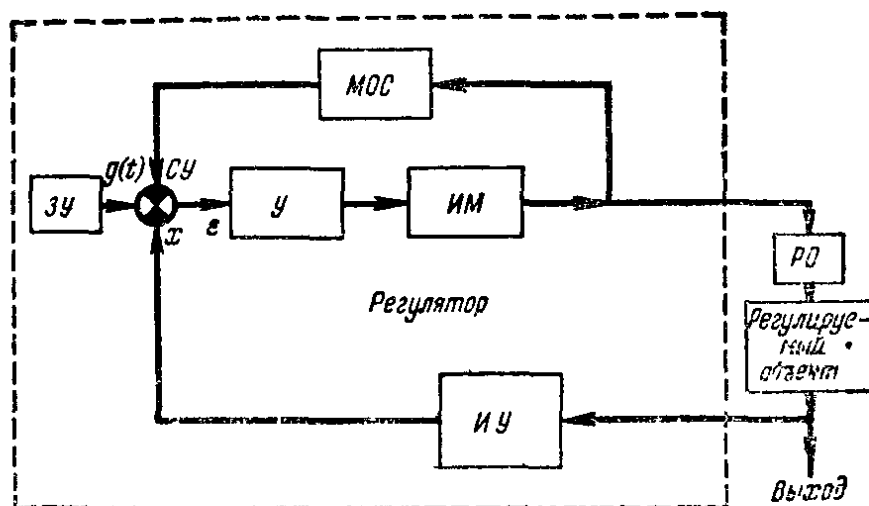


Рис 1-11 Типовая функциональная блок-схема многоконтурной системы автоматического регулирования.

матора, и одновременно восстановит равновесие измерительного мостика, перемещая движок сопротивления R_{oc} . Поэтому отключение двигателя произойдет раньше, чем температура объекта достигнет заданного значения. Функциональная блок-схема такой системы представлена на рис. 1-11. Воздействие выхода одного из последующих устройств системы на вход одного из предыдущих устройств называется *местной обратной связью* (МОС). Таким образом, система по рис. 1-8 содержит два замкнутых контура, определяемых наличием главной и местной обратной связи (рис. 1-11).

В зависимости от числа регулируемых величин системы подразделяются на одномерные и многомерные.

Одномерной системой автоматического регулирования называется система с одной регулируемой величиной.

Многомерными системами называются системы с несколькими регулируемыми величинами.

Многомерные системы в свою очередь подразделяются на системы несвязанного и связанного регулирования.

Системами несвязанного регулирования называются такие, в которых регуляторы непосредственно не связаны и могут взаимодействовать только через общий для них объект регулирования.

Системами связанного регулирования называются системы, в которых регуляторы различных параметров одного и того же технологического процесса связаны между собой вне объекта регулирования. Если этими связями исключается влияние регулируемых величин друг на друга, система связанного регулирования называется *автономной*.

Существует классификация систем автоматического регулирования по функциональному назначению, делящая их на системы регулирования температуры, давления, расхода, уровня, напряжения и т. п.

Возможно также деление систем по виду энергии, используемой для регулирования. Различают электрические, гидравлические, пневматические, механические и другие системы.

ГЛАВА ВТОРАЯ

СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ, УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЗВЕНЬЕВ И СИСТЕМ

2-1. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ И УРАВНЕНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

При возмущающих воздействиях на систему в ней возникают переходные процессы, которые в функции времени описываются дифференциальными уравнениями.

Переходным процессом системы называется изменение во времени ее состояния (параметров) с момента появления управляющего или возмущающего воздействия на систему, находившуюся в установившемся (равновесном) состоянии, до момента установления в ней вновь установившегося состояния.

Переходный процесс системы зависит от ее динамических свойств, действие которых проявляется в переходных режимах и которые определяются внутренними физическими и конструктивными особенностями системы: инерционно-

стью, способностью запасать энергию, запаздыванием реакции на возмущающее воздействие и т. д.

При проектировании системы автоматического регулирования какого-либо технологического процесса, а также при определении параметров настройки или исследовании поведения существующей системы необходимо знать характер переходных процессов в ней, для чего необходимо определить математические зависимости, которыми описывается процесс автоматического регулирования.

Для облегчения решения задачи при определении уравнения процесса автоматического регулирования систему разбивают на отдельные элементарные звенья, переходные процессы в которых описываются достаточно простыми дифференциальными уравнениями.

По дифференциальным уравнениям отдельных звеньев находят уравнения укрупненных блоков (узлов) системы, а по ним — и уравнение процесса автоматического регулирования системы в целом.

Схематическое изображение системы, состоящее из изображений отдельных звеньев с указанием всех связей между ними, называется *структурной схемой системы регулирования*.

При появлении возмущающих воздействий, вызывающих отклонения регулируемого параметра от заданного значения, система реагирует на эти возмущения таким образом, чтобы восстановилось заданное значение регулируемого параметра.

В правильно спроектированной системе регулирования даже в случае возникновения наибольших возможных возмущающих воздействий отклонение регулируемого параметра от заданной величины при протекании переходных процессов не должно быть значительным; только в этом случае система регулирования будет должным образом выполнять свои функции.

При составлении уравнений за начало отсчета координат берут параметры равновесного состояния системы, а сами уравнения для отдельных звеньев и системы в целом составляют в отклонениях от состояния равновесия (приращенях).

Таким образом, в уравнения входят не абсолютные значения величин, а их отклонения от заданных равновесных значений.

Одно или несколько звеньев системы в общем случае могут быть нелинейными, т. е. описываться нелинейными

дифференциальными уравнениями, решение которых в общем виде невозможно.

Однако если в переходном процессе при изменениях входной величины изменение выходной величины звена является непрерывной функцией времени, то, учитывая, что в процессе регулирования отклонения всех изменяющихся величин от их установившихся значений малы, можно допустить линеаризацию нелинейных зависимостей. В этом случае замена исходных нелинейных уравнений приближенными

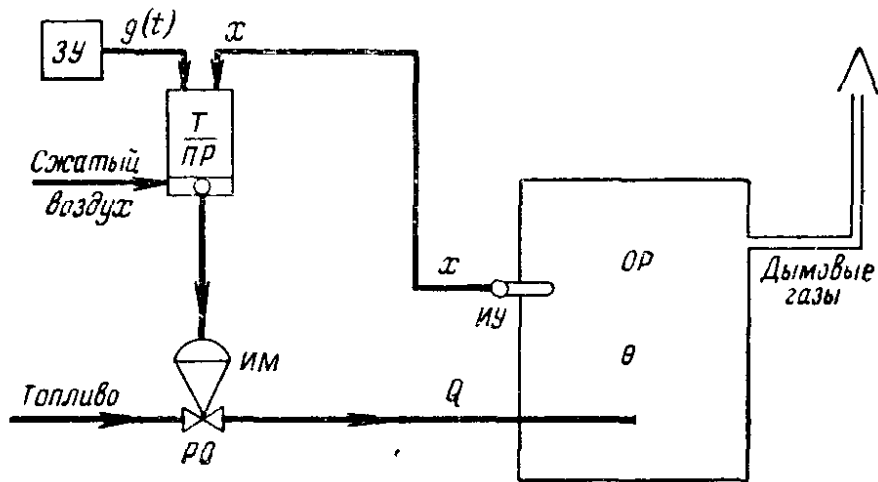


Рис. 2-1. Принципиальная схема автоматического регулирования нагревательной печи.

линейными не вносит существенных погрешностей в результаты исследований и в то же время позволяет применять достаточно простые инженерные методы расчета.

В результате линеаризации нелинейностей и составления уравнений в отклонениях от состояния равновесия дифференциальное уравнение, характеризующее работу системы при нулевых начальных условиях, является однородным линейным уравнением, прямые и косвенные методы решения и исследования которого разработаны в достаточной степени.

Разберем физическую сущность метода линеаризации нелинейностей на примере системы автоматического регулирования температуры нагревательной печи (рис. 2-1).

При отклонении регулируемой температуры от заданного значения (например, в результате повышения теплоотдачи печи во время ее загрузки деталями, подлежащими нагреву) регулятор воздействует на регулирующий клапан, который изменяет количество Q газа, подаваемого в печь, восстанавливая заданное значение температуры.

Рабочая характеристика клапана $Q = f(S)$ (расход газа в зависимости от хода клапана S) в общем случае является нелинейной (рис. 2-2).

В равновесном состоянии заданное значение температуры обеспечивается подачей в печь газа в количестве Q_0

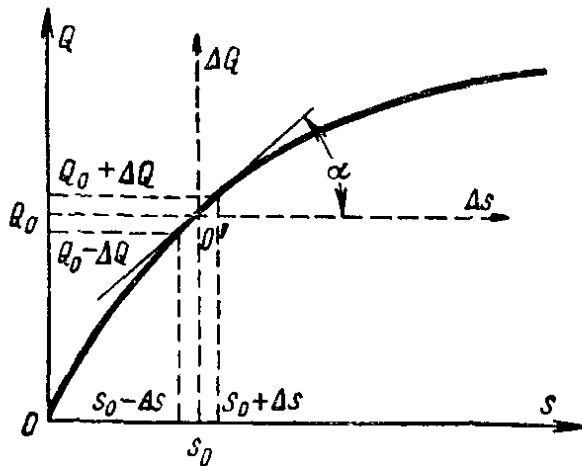


Рис. 2-2. Линеаризация нелинейной характеристики клапана в точке равновесного состояния.

при степени открытия клапана S_0 . При появлении возмущающих воздействий заданное значение температуры восстанавливается путем изменения подачи газа в печь на величину ΔQ дополнительным перемещением клапана на величину ΔS .

Учитывая малость отклонений, можно в окрестностях точки O' (соответствующей равновесному состоянию) заменить участок

кривой $Q = f(S)$ прямой, касательной к этой кривой в точке O' . При этой замене получаем линейную зависимость между ходом клапана и расходом около равновесного состояния:

$$Q = Q_0 + \left(\frac{dQ}{dS} \right)_{\substack{Q=Q_0 \\ S=S_0}} \Delta S. \quad (2-1)$$

Путем переноса начала координат в точку равновесного состояния O' получим еще более простую линейную зависимость между дополнительным перемещением клапана ΔS и изменением подачи газа в печь ΔQ :

$$\Delta Q = K \Delta S, \quad (2-2)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta Q &= Q - Q_0 \\ \Delta S &= S - S_0 \end{aligned} \quad K = \left(\frac{dQ}{dS} \right)_{\substack{Q=Q_0 \\ S=S_0}} = \operatorname{tg} \alpha;$$

Следует отметить, что величина K имеет постоянное значение только вблизи точки равновесного состояния O' . При удалении от точки O' погрешность возрастает тем быстрее, чем больше кривизна нелинейной зависимости.

При большой кривизне в случае перенастройки системы на новый режим работы, значительно отличающийся от

расчетного, необходимо выполнить линеаризацию нелинейной зависимости $Q = f(S)$ для области нового равновесного состояния.

Аналитически линеаризация нелинейной зависимости выполняется путем разложения функции $Q = f(S)$ в ряд Тейлора для точки равновесного состояния системы

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} \Delta x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \Delta x^3 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} \Delta x^n + \dots \quad (2-3)$$

и исключения из ряда членов «высших порядков малости», т. е. содержащих отклонения величины Δx в степенях, больших n . В большинстве случаев практически достаточная точность линеаризации достигается при отбрасывании членов разложения со степенями Δx выше первой. При этом выражение (2-3) принимает вид:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \Delta x, \quad (2-4)$$

или, переходя к отклонениям,

$$\Delta f(x) = f'(x_0) \Delta x. \quad (2-5)$$

Выражение (2-5) и представляет собой линеаризованную функцию $f(x)$, представленную в отклонениях от равновесного состояния. Производная $f'(x_0)$ этой функции в точке равновесного состояния равна тангенсу угла наклона α линеаризованного участка в окрестности этой точки.

Характер переходного процесса зависит не только от свойств системы, но и от вида возмущающих воздействий. Для составления уравнения процесса регулирования и расчета системы обычно задаются мгновенным скачкообразным возмущающим воздействием на систему, так как этот случай наиболее неблагоприятен для работы системы.

2-2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Дифференциальное уравнение элемента регулирующей системы в общем случае имеет вид:

$$a_n \frac{d^n x_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 x_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} +$$

$$\begin{aligned}
& + a_1 \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + a_0 x_{\text{ВЫХ}} = b_m \frac{d^m x_{\text{ВХ}}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x_{\text{ВХ}}}{dt^{m-1}} + \dots \\
& \dots + b_2 \frac{d^2 x_{\text{ВХ}}}{dt^2} + b_1 \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} + b_0 x_{\text{ВХ}}, \quad (2.6)
\end{aligned}$$

где $x_{\text{ВЫХ}}$ — выходная величина элемента (в отклонениях от состояния равновесия);

$x_{\text{ВХ}}$ — входная величина элемента (в отклонениях от состояния равновесия);

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_2, b_1, b_0$ — постоянные коэффициенты, определяемые конструктивными особенностями и параметрами настройки элемента.

Так как аналитическое решение дифференциального уравнения в общем случае является очень трудоемкой задачей, то в современной теории регулирования широко используются средства описания динамических свойств системы, более удобные для практического применения.

Если в уравнение (2-6), содержащее функции времени $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ и $x_{\text{ВХ}}(t)$, ввести функции $X_{\text{ВЫХ}}(p)$ и $X_{\text{ВХ}}(p)$ комплексного переменного p , поставив условием, что эти функции связаны зависимостями

$$\begin{aligned}
X_{\text{ВЫХ}}(p) &= \int_0^{\infty} x_{\text{ВЫХ}}(t) e^{-pt} dt && \text{и} \\
X_{\text{ВХ}}(p) &= \int_0^{\infty} x_{\text{ВХ}}(t) e^{-pt} dt, && (2-7)
\end{aligned}$$

то оказывается, что дифференциальное уравнение, содержащее функции $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ и $x_{\text{ВХ}}(t)$, равносильно линейному алгебраическому уравнению, содержащему функции $X_{\text{ВЫХ}}(p)$ и $X_{\text{ВХ}}(p)$:

$$\begin{aligned}
& a_n p^n X_{\text{ВЫХ}}(p) + a_{n-1} p^{(n-1)} X_{\text{ВЫХ}}(p) + \dots \\
& \dots + a_1 p X_{\text{ВЫХ}}(p) + a_0 X_{\text{ВЫХ}}(p) = b_m p^m X_{\text{ВХ}}(p) + \\
& + b_{m-1} p^{m-1} X_{\text{ВХ}}(p) + \dots + b_1 p X_{\text{ВХ}}(p) + b_0 X_{\text{ВХ}}(p). \quad (2-8)
\end{aligned}$$

Такой переход от дифференциального уравнения к однозначно соответствующему ему алгебраическому уравнению называется преобразованием Лапласа. Интеграл (2-7) называется интегралом Лапласа.

Комплексное переменное p называется оператором. Соответственно с этим алгебраическое уравнение (2-8) является записью исходного дифференциального уравнения (2-6) в операторной форме.

Функция $X(p)$ называется *изображением функции* $x(t)$. Функция $x(t)$ называется *оригиналом функции* $X(p)$.

Операция перехода от искомой функции $x(t)$ к ее изображению $X(p)$ (нахождение изображения от оригинала) называется прямым преобразованием Лапласа. Математически прямое преобразование Лапласа записывается условно с помощью символа L :

$$L[x(t)] = X(p).$$

Операция перехода от изображения $X(p)$ к искомой функции $x(t)$ (нахождение оригинала по изображению) называется обратным преобразованием Лапласа. Математически обратное преобразование Лапласа записывается условно с помощью символа L^{-1} :

$$L^{-1}[X(p)] = x(t).$$

Практически переход от дифференциального уравнения к алгебраическому происходит без каких-либо вычислений.

Если сравнить уравнение (2-6) с уравнением (2-8), то нетрудно заметить, что формально переход от дифференциального уравнения к алгебраическому операторному уравнению при нулевых начальных условиях¹, обычных для большинства САУ, получается путем замены символов дифференцирования оригиналов функций:

$$\frac{d^n}{dt^n}, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{d}{dt}$$

соответственно символами p^n, p^{n-1}, \dots, p и функций $x(t)$ их изображениями $X(p)$.

С оператором p можно, как и с другими членами алгебраического уравнения, производить различные действия: умножение, деление, вынесение за скобки и т. д.

Возможность записи дифференциального уравнения в операторной алгебраической форме значительно упрощает все расчеты систем автоматического регулирования.

¹ Нулевые начальные условия для дифференциального уравнения n -го порядка характеризуются тем, что для $t = 0$ значения самой функции $x(t)$ и всех ее производных до $(n - 1)$ -й включительно равны нулям, т. е. $x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = x^{n-1}(0) = 0$.

Каждый элемент системы в общем случае описывается дифференциальным уравнением вида (2-6). Следовательно, при выводе дифференциального уравнения системы в целом необходимо совместно решить несколько дифференциальных уравнений высших порядков.

Запись дифференциальных уравнений в операторной форме позволяет свести задачу к решению системы алгебраических уравнений. Определив из алгебраических уравнений изображение $X(p)$ искомой функции $x(t)$, определяющей переходный процесс в системе, находят эту функцию, пользуясь таблицами формул изображений функций (см. приложение 1) или графическим путем.

Кроме того, запись дифференциальных уравнений элементов системы в операторной форме дает возможность ввести чрезвычайно удобное понятие передаточной функции, характеризующей любой элемент системы; с помощью передаточных функций расчет систем автоматического регулирования еще более упрощается и становится доступным широкому кругу инженерно-технических работников, не требуя применения сложного математического аппарата.

Вынеся в уравнении (2-8) $X_{\text{ВЫХ}}(p)$ и $X_{\text{ВХ}}(p)$ за скобки, получим:

$$\begin{aligned} & (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) X_{\text{ВЫХ}}(p) = \\ & = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) X_{\text{ВХ}}(p). \end{aligned} \quad (2-9)$$

Определим из уравнения (2-9) отношение изображения выходной величины к изображению входной:

$$\begin{aligned} & \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \\ & = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = W(p). \end{aligned} \quad (2-10)$$

Отношение $W(p)$ изображения выходной величины элемента системы к изображению его входной величины называется *передаточной функцией элемента системы*.

Соответственно отношение изображения выходной величины звена к изображению его входной величины называется *передаточной функцией звена*.

Передаточная функция $W(p)$ является дробно-рациональной функцией оператора p :

$$W(p) = \frac{Q(p)}{P(p)}, \quad (2-11)$$

где

$$P(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

называется оператором левой части дифференциального уравнения, а

$$Q(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0$$

— оператором правой части его.

Из уравнения (2-10) следует, что передаточная функция элемента системы $W(p)$ и изображение его входной величины определяют изображение выходной величины:

$$X_{\text{вых}}(p) = W(p) X_{\text{вх}}(p). \quad (2-12)$$

По известному изображению выходной величины с помощью формул обратного преобразования Лапласа или из готовых табличных выражений (см. приложение 1) можно найти оригинал функции $x_{\text{вых}}(t)$. Заметим, что постоянную величину можно выносить как множитель за знак преобразования Лапласа:

$$L[ax(t)] = aL[x(t)].$$

2-3. ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ И ИХ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Разбиение систем регулирования на звенья существенно упрощает их исследование, расчет и конструирование. Звенья — это элементарные ячейки, из которых строится система и динамические свойства которых определяют поведение системы в целом.

Общим свойством всех звеньев систем регулирования является однонаправленность их действия, т. е. сигнал в любом звене проходит только от входа к выходу и, следовательно, выход звена не оказывает никакого воздействия на его вход. Вход каждого последующего звена является выходом предыдущего.

Звенья систем регулирования могут иметь самую разнообразную физическую основу (электрические, гидравлические, механические и т. п.) и конструктивное выполнение, но при этом относиться к одной функциональной группе. Соотношение входного и выходного сигналов в звеньях одной и той же группы описывается одинаковыми дифференциальными уравнениями. Это свидетельствует о том, что такие звенья имеют одинаковые динамические свойства.

Так как процесс автоматического регулирования определяется только динамическими свойствами системы (а, следовательно, и ее звеньев), то в основу классификации звеньев положены их динамические свойства. Такая классификация звеньев по виду описывающих эти звенья дифференциальных уравнений дает возможность разработать стройную теорию систем автоматического регулирования и единые методы их исследования и расчета, не зависящие от различий в физических процессах и конструктивных решениях, принятых в основу при проектировании САР и ее элементов.

Простейшими типовыми звеньями систем автоматического регулирования являются: усилительное, интегрирующее, инерционное звено первого порядка, инерционное звено второго порядка, дифференцирующее, интегро-дифференцирующее и запаздывающее звенья.

1. Усилительное звено

В усилительном звене выходная величина в каждый момент времени пропорциональна входной величине:

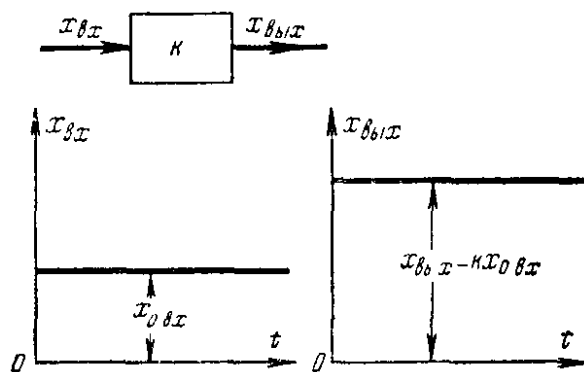


Рис 2-3 Передаточная функция и переходный процесс усилительного звена

$$x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}^* \quad (2-13)$$

Коэффициент пропорциональности k называется коэффициентом усиления или коэффициентом передачи звена.

Уравнение усилительного звена (2-13) алгебраическое. Это свидетельствует о том, что усилительное звено передает сигнал мгновенно, без динамических переходных процессов и искажений.

На рис. 2-3 представлен характер изменения по времени выходной величины усилительного звена при подаче на его вход постоянной входной величины $x_{0 \text{ вх}}$.

* Здесь и в дальнейшем для сокращения символики выражения $x_{\text{вых}}(t)$ и $x_{\text{вх}}(t)$ записываются как $x_{\text{вых}}$ и $x_{\text{вх}}$.

Передаточная функция звена с учетом выражения (2-10) имеет вид:

$$W(p) = k. \quad (2-14)$$

Примерами усилительных звеньев могут служить механические пружины, рычажные передачи, безынерционные усилители (например, электронные и т. п.).

2. Интегрирующее звено

Дифференциальное уравнение интегрирующего звена имеет вид:

$$\frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} = k x_{\text{ВХ}}. \quad (2-15)$$

Коэффициент k называется коэффициентом усиления интегрирующего звена.

При нулевых начальных условиях (т. е. если при $t = 0$ имеем $x_{\text{ВЫХ}} = 0$) у интегрирующего звена выходная величина пропорциональна интегралу входной величины:

$$x_{\text{ВЫХ}} = k \int_0^t x_{\text{ВХ}} dt.$$

Записав дифференциальное уравнение звена (2-15) в алгебраической операторной форме, получим:

$$pX_{\text{ВЫХ}}(p) = kX_{\text{ВХ}}(p),$$

откуда находим передаточную функцию звена:

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{k}{p}. \quad (2-16)$$

Дифференциальное уравнение интегрирующего звена иногда записывают в другой форме:

$$\frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} = \frac{1}{T} x_{\text{ВХ}},$$

где $T = 1/k$.

При этом передаточная функция звена примет вид:

$$W(p) = \frac{1}{Tp}. \quad (2-17)$$

На рис. 2-4 представлен характер изменения выходной величины интегрирующего звена при подаче на его вход

постоянной входной величины $x_{0 \text{ вх}}$, изображение которой (см. п. 4 в приложении 1) $X_{\text{вх}}(p) = x_{0 \text{ вх}}/p$. Тогда из уравнения (2-16) получим (см. п. 7 в приложении 1):

$$x_{\text{вых}} = L^{-1} [X_{\text{вых}}(p)] = L^{-1} \left[kx_{0 \text{ вх}} \frac{1}{p^2} \right] = kx_{0 \text{ вх}} t.$$

Примером интегрирующего звена может служить гидравлический сервомотор (рис. 2-5, а), который находит широкое применение в современных системах регулирования в качестве исполнительного механизма.

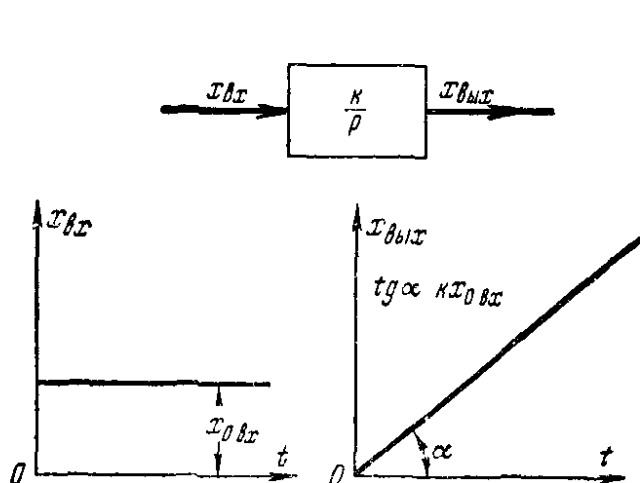


Рис 2-4 Передаточная функция и переходный процесс усилительного звена

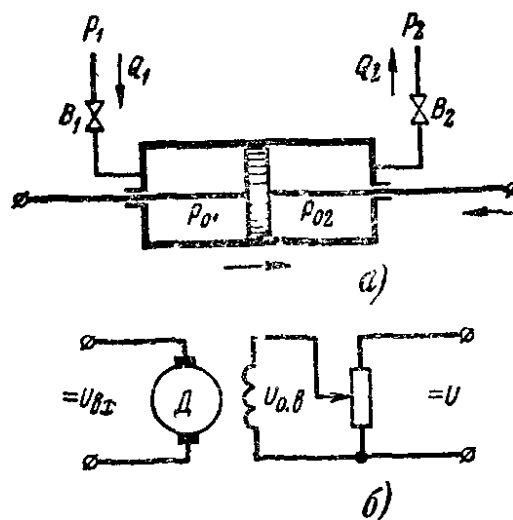


Рис 2-5 Примеры интегрирующих звеньев

Входной величиной для сервомотора является перепад давлений $\Delta p_{\text{вх}} = p_1 - p_2$, а выходной — перемещение $\Delta S_{\text{вых}}$ поршня.

Сила давления на поршень равна $f_{\text{п}} = (p_{01} - p_{02}) F$, где F — эффективная площадь поршня сервомотора.

Если пренебречь трением и инерцией поршня и связанных с ним масс, то можно считать, что это усилие целиком расходуется на преодоление внешней нагрузки, приложенной к поршню (сопротивление перемещению регулирующего органа, заслонки, шибера и т. п.):

$$f_{\text{в п}} = (p_{01} - p_{02}) F. \quad (2-18)$$

При небольших отклонениях от состояния равновесия расходы жидкости через вентили B_1 и B_2 пропорциональны перепадам давлений на вентилях:

$$Q_1 = K_1 (p_1 - p_{01}), \quad Q_2 = K_2 (p_{02} - p_2). \quad (2-19)$$

Так как $Q_1 = Q_2$, то, решив уравнения (2-18) и (2-19), получим:

$$p_{01} = \frac{F(K_1 p_1 + K_2 p_2) + K_2 f_{вн}}{F(K_1 + K_2)}. \quad (2-20)$$

Поступление жидкости за бесконечно малый отрезок времени в левую полость сервомотора при расходе Q_1 составляет $Q_1 dt$. За счет этого поршень переместится на величину $d\Delta S_{\text{вых}}$.

Так как объем поступившей жидкости равен приращению объема левой полости сервомотора, то можно записать:

$$Q_1 dt = F d\Delta S_{\text{вых}},$$

или

$$\frac{d\Delta S_{\text{вых}}}{dt} = \frac{Q_1}{F}.$$

Подставив из (2-19) значение Q_1 , а из (2-20) значение p_{01} , получим

$$\frac{d\Delta S_{\text{вых}}}{dt} = \frac{K_1 K_2 F (p_1 - p_2) - K_1 K_2 f_{вн}}{F^2 (K_1 + K_2)}.$$

В случае, если можно пренебречь величиной внешней нагрузки $f_{вн}$, уравнение примет вид:

$$\frac{d\Delta S_{\text{вых}}}{dt} = k \Delta p_{вх},$$

где

$$k = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \cdot \frac{1}{F}$$

— коэффициент передачи интегрирующего звена, величину которого можно изменять в широких пределах с помощью вентилях B_1 и B_2 .

Таким образом, дифференциальное уравнение гидравлического сервомотора имеет вид (2-15) и, следовательно, в динамическом отношении он является интегрирующим звеном.

Другим примером интегрирующего звена может служить электродвигатель постоянного тока D (рис 2-5, б) с независимым возбуждением и малой электромеханической инерцией, если входной величиной является напряжение $U_{вх}$, а выходной величиной — угол поворота якоря $\beta_{в1}$. В этом случае при изменении напряжения якоря на величину

$\Delta U_{\text{вх}}$ изменение числа оборотов двигателя Δn в единицу времени будет пропорционально $\Delta U_{\text{вх}}$:

$$\Delta n = K_1 \Delta U_{\text{вх}}.$$

Увеличение угла поворота двигателя $d\Delta\beta_{\text{вых}}$ за бесконечно малый отрезок времени dt пропорционально изменению числа оборотов за этот отрезок времени: $d\Delta\beta_{\text{вых}} = K_2 \Delta n dt$, или $\frac{d\Delta\beta_{\text{вых}}}{dt} = K_2 \Delta n$.

Подставив значение Δn , получим дифференциальное уравнение интегрирующего звена:

$$\frac{d\Delta\beta_{\text{вых}}}{dt} = K_1 K_2 \Delta U_{\text{вх}}.$$

Коэффициент передачи рассмотренного интегрирующего звена $k = K_1 K_2$ может изменяться путем изменения величины напряжения U_0 в, подаваемого на обмотку возбуждения двигателя.

3. Инерционное звено первого порядка

Инерционному звену первого порядка соответствует дифференциальное уравнение

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}. \quad (2-21)$$

В операторной форме:

$$TpX_{\text{вых}}(p) + X_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{вх}}(p).$$

Передаточная функция инерционного звена первого порядка

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (2-22)$$

Определим характер изменения выходной величины при подаче на вход в виде скачка входной величины $x_{0\text{вх}}$.

Дифференциальное уравнение (2-21) достаточно просто решается обычным методом. Однако в качестве примера найдем его решение через передаточную функцию звена.

По таблицам преобразования Лапласа (см. п. 4 в приложении 1) находим изображение входной величины:

$$X_{\text{вх}}(p) = L[x_{0\text{вх}}] = \frac{x_{0\text{вх}}}{p}.$$

Согласно формуле (2-12) изображение выходной величины равно:

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = W(p) X_{\text{ВХ}}(p),$$

или

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{kx_{0 \text{ ВХ}}}{p(Tp + 1)}.$$

Выразим оригинал функции $x_{\text{ВЫХ}}$ через ее изображение, вынеся постоянную величину за знак преобразования Лапласа:

$$x_{\text{ВЫХ}} = L^{-1}[X_{\text{ВЫХ}}(p)] = \frac{kx_{0 \text{ ВХ}}}{T} L^{-1}\left[\frac{1}{p\left(p + \frac{1}{T}\right)}\right].$$

Полагая $1/T$ равным α , по таблицам преобразований Лапласа (см. п. 9 в приложении 1) находим:

$$x_{\text{ВЫХ}} = kx_{0 \text{ ВХ}} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right). \quad (2-23)$$

Переходный процесс инерционного звена первого порядка представлен на рис. 2-6. Кривые переходных процес-

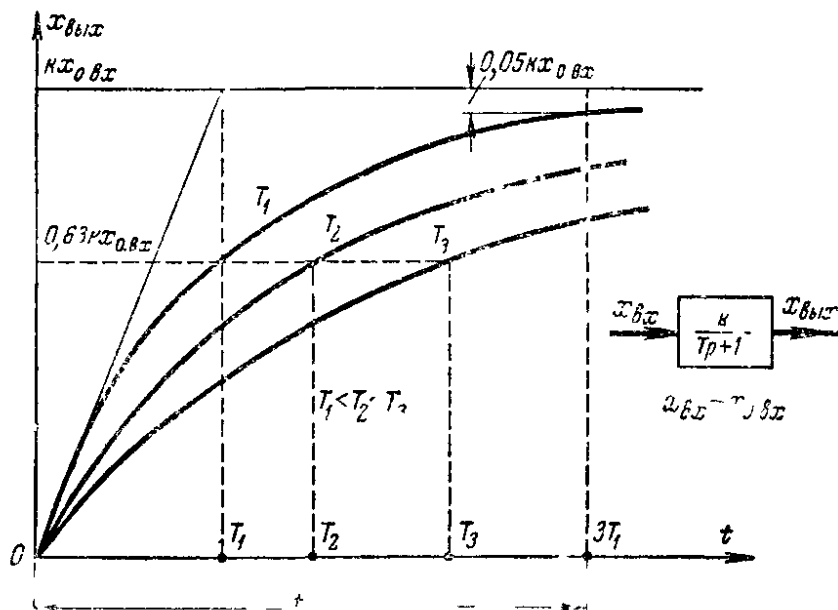


Рис. 2-6. Передаточная функция и переходные процессы инерционного звена первого порядка при различных значениях постоянной времени.

сов имеют вид экспонент, т. е. время, необходимое для того, чтобы выходная величина $x_{\text{ВЫХ}}$ достигла установившегося значения $kx_{0 \text{ ВХ}}$, теоретически бесконечно велико, следовательно, в любой момент времени величина $x_{\text{ВЫХ}}$ будет меньше $kx_{0 \text{ ВХ}}$.

Динамической ошибкой в процессе регулирования называется разность между теоретическим установившимся значением выходной величины по окончании переходного процесса и действительным ее значением в данный момент времени.

Динамическая ошибка инерционного звена первого порядка уменьшается по экспоненциальному закону.

Величина T имеет размерность времени и называется *постоянной времени*. На рис. 2-6 представлены переходные процессы инерционного звена первого порядка при различных значениях постоянной времени.

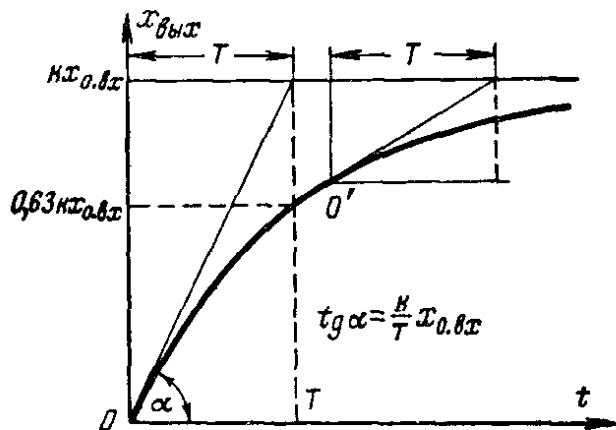


Рис. 2-7 Графическое определение постоянной времени инерционного звена первого порядка.

Из кривых переходного процесса ясен физический смысл постоянной времени звена. Она может быть определена как время, в течение которого выходная величина достигла бы своего нового установившегося значения,

если бы она изменялась с постоянной скоростью, равной скорости изменения ее в начальный момент времени.

Постоянная времени инерционного звена первого порядка определяет динамические свойства звена. Чем она больше, тем медленнее протекает переходный процесс в звене, и наоборот. В частности, при $T = 0$ процесс протекает в звене мгновенно и инерционное звено превращается в безынерционное усилительное. *Время регулирования*, т. е. время, в течение которого выходная величина практически будет равна новому установившемуся значению $x_{\text{вых}} = 0,95 kx_{0 \text{ вы}}$, равно примерно трем постоянным времени: $t_p = 3T$. По истечении этого времени динамическая ошибка регулирования составляет всего 5% нового установившегося значения выходной величины.

Следует отметить также, что при $t = T$ значение выходной величины составляет 63% нового установившегося значения.

Постоянная времени звена геометрически (рис. 2-7) определяется как проекция на ось времени отрезка касательной к экспоненте, заключенного между точкой касания

и точкой пересечения касательной с линией установившегося значения выходной величины. Длина этой проекции одинакова для касательных, проведенных в любой точке экспоненты (точки O и O' на рис. 2-7).

На рис. 2-8 приведены примеры инерционных звеньев первого порядка. Входной величиной этих звеньев является напряжение $U_{вх}$, а выходной — напряжение $U_{вых}$, снимаемое с емкости C .

Согласно второму закону Кирхгофа для электрической цепи по рис. 2-8, а можно записать:

$$u_{вх} = iR_1 + u_{вых}; \quad u_{вых} = \\ = \frac{1}{C} \int i_c dt; \quad u_{вых} = i_{R_2} R_2,$$

откуда

$$i_c = C \frac{du_{вых}}{dt}; \quad i_{R_2} = \frac{u_{вых}}{R_2}.$$

По первому закону Кирхгофа

$$i = i_c + i_{R_2} = C \frac{du_{вых}}{dt} + \frac{u_{вых}}{R_2}.$$

Подставив значение i в выражение для $U_{вх}$, получим:

$$U_{вх} = R_1 C \frac{du_{вых}}{dt} + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) u_{вых}.$$

Записав дифференциальное уравнение в операторной форме и преобразовав его, получим:

$$U_{вх}(p) = \left(\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} p + 1 \right) \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) U_{вых}(p),$$

откуда находим передаточную функцию звена:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

где

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad T = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} = k R_1 C.$$

Таким образом, электрическая цепь, изображенная на рис. 2-8, а, является инерционным звеном первого порядка.

Коэффициент передачи звена регулируется величинами сопротивлений R_1 и R_2 . При этом пропорционально коэффициенту передачи изменяется и постоянная времени.

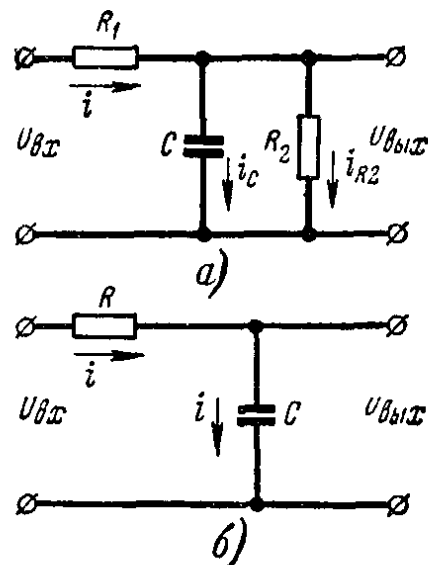


Рис 2-8. Примеры инерционных звеньев первого порядка.

При $R_2 = \infty$ получаем электрическую цепь по рис. 2-8, б. Коэффициент передачи, постоянная времени и передаточная функция в этом случае будут равны:

$$k = 1; \quad T = RC; \quad W(p) = \frac{1}{Tp + 1}.$$

Постоянная времени изменяется путем изменения величины сопротивления R .

Электрическая цепь, представленная на рис. 2-8, б, является инерционным звеном первого порядка при коэффициенте передачи, равном единице.

4. Дифференцирующее звено

Дифференцирующее звено может быть идеальным и реальным. Выходная величина идеального дифференцирующего звена пропорциональна скорости изменения входной величины:

$$x_{\text{вых}} = k \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}. \quad (2-24)$$

Передаточная функция дифференцирующего звена

$$W(p) = kp. \quad (2-25)$$

В идеальном дифференцирующем звене скачкообразное изменение входной величины должно вызвать мгновенное изменение выходной величины от 0 до ∞ и немедленный спад ее обратно до 0. Но практически осуществить такой закон невозможно, так как все физические процессы в природе инерционны.

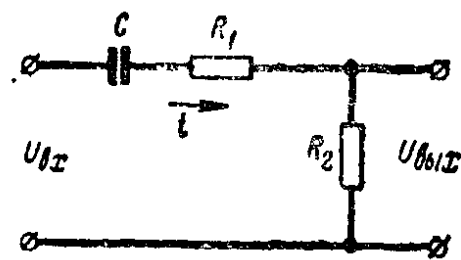


Рис. 2-9. Пример дифференцирующего звена.

Реальные дифференцирующие звенья могут быть получены из некоторых сочетаний типовых элементарных звеньев

при условии, что величины некоторых входящих в дифференциальные уравнения этих звеньев коэффициентов передач k и постоянных времени T стремятся к бесконечности или нулю. В этих условиях дифференциальное уравнение звена приближается к виду уравнения (2-24).

Примером реального дифференцирующего звена служит цепь, показанная на рис. 2-9,

Для этой цепи

$$u_{\text{вх}} = \frac{1}{C} \int i dt + iR_1 + u_{\text{вых}}; \quad u_{\text{вых}} = iR_2.$$

Решая эти уравнения, в операторной форме получаем:

$$R_2 C p U_{\text{вх}}(p) = [1 + C(R_1 + R_2)p] U_{\text{вых}}(p).$$

Передаточная функция звена:

$$W(p) = \frac{kTp}{Tp + 1}. \quad (2-26)$$

Постоянная времени и коэффициент передачи звена:

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

$$T = C(R_1 + R_2).$$

Изображение выходной величины при скачкообразном изменении входной величины до $x_{0 \text{ вх}}$ будет:

$$\begin{aligned} X_{\text{вых}}(p) &= W(p) X_{\text{вх}}(p) = \\ &= \frac{kTp}{Tp + 1} \cdot \frac{x_{0 \text{ вх}}}{p}. \end{aligned}$$

Из таблиц (см. п. 9 в приложении 1) находим по изображению оригинал:

$$x_{\text{вых}} = kx_{0 \text{ вх}} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (2-27)$$

Переходный процесс реального дифференцирующего звена представлен на рис. 2-10.

Чем больше k и меньше T , тем ближе реальное дифференцирующее звено приближается к идеальному. Так, если k будет стремиться к бесконечности, а T — к нулю, но при этом их произведение kT будет конечной постоянной величиной, получим идеальное дифференцирующее звено с коэффициентом передачи kT .

Чем больше постоянная времени, тем ближе реальное дифференцирующее звено приближается к усилительному звену; при $T = \infty$ реальное дифференцирующее звено превращается в усилительное.

Таким образом, реальное дифференцирующее звено занимает промежуточное положение между усилительным и идеальным дифференцирующим звеньями и приближается к тому или другому в зависимости от соотношения T и k .

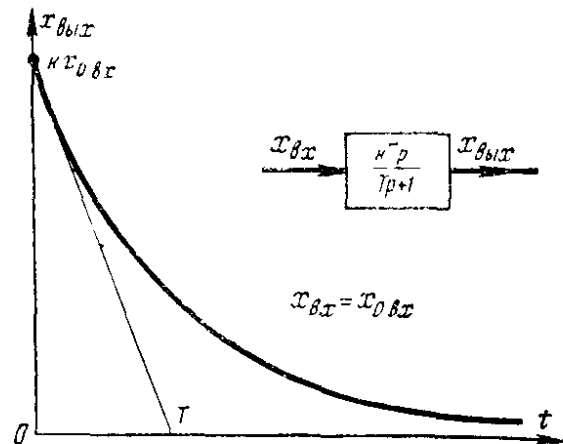


Рис 2-10 Передаточная функция и переходный процесс реального дифференцирующего звена.

5. Интегро-дифференцирующее звено

Интегро-дифференцирующее звено имеет дифференциальное уравнение

$$T_{\text{н}} \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = k \left(T_{\text{п}} \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + x_{\text{вх}} \right). \quad (2-28)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = k \frac{T_{\text{п}} p + 1}{T_{\text{н}} p + 1}. \quad (2-29)$$

Постоянная времени $T_{\text{п}}$ характеризует степень влияния производной $dx_{\text{вх}}/dt$ на закон регулирования.

Постоянная времени $T_{\text{н}}$ отражает зависимость закона регулирования от интегральной составляющей.

Определим характер переходного процесса интегро-дифференцирующего звена при скачкообразном изменении входной величины на $x_{0 \text{ вх}}$.

Изображение входной величины

$$\begin{aligned} X_{\text{вых}}(p) &= W(p) X_{\text{вх}}(p) = k \frac{T_{\text{п}} p + 1}{T_{\text{н}} p + 1} \cdot \frac{x_{0 \text{ вх}}}{p} = \\ &= \frac{T_{\text{п}} k x_{0 \text{ вх}}}{T_{\text{н}} p + 1} + \frac{k x_{0 \text{ вх}}}{p(T_{\text{н}} p + 1)}. \end{aligned}$$

По таблице преобразований Лапласа находим аналитическое выражение переходного процесса (см. пп. 8 и 9 в приложении 1):

$$x_{\text{вых}} = k x_{0 \text{ вх}} \left[1 + \left(\frac{T_{\text{п}}}{T_{\text{н}}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{T_{\text{н}}}} \right]. \quad (2-30)$$

Переходный процесс интегро-дифференцирующего звена представлен на рис. 2-11.

Как следует из рис. 2-11 и выражений для переходного процесса (2-30) и передаточной функции (2-29), интегро-дифференцирующее звено при определенных относительных величинах постоянных $T_{\text{п}}$, $T_{\text{н}}$ и k может приобрести динамические свойства, приближающие его к интегрирующему, дифференцирующему или инерционному звену первого порядка. При $T_{\text{п}} > T_{\text{н}}$ интегро-дифференцирующее звено по своим динамическим свойствам больше приближается к дифференцирующему звену, а при $T_{\text{н}} > T_{\text{п}}$ — к интегрирующему звену.

Так, если T_{Π} близко к нулю, а k и T_{Π} стремятся к бесконечности, но при этом отношение kT_{Π} — конечная постоянная величина, получаем интегрирующее звено с коэффициентом передачи k/T_{Π} и передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{T_{\Pi}} \left(\frac{1}{p + \frac{1}{T_{\Pi}}} \right) \approx \frac{k}{T_{\Pi} p}.$$

Если T_{Π} и k стремятся к нулю, а T_{Π} — к бесконечности, но произведение kT_{Π} конечно и постоянно, получаем идеальное дифференцирующее звено с коэффициентом передачи kT_{Π} .

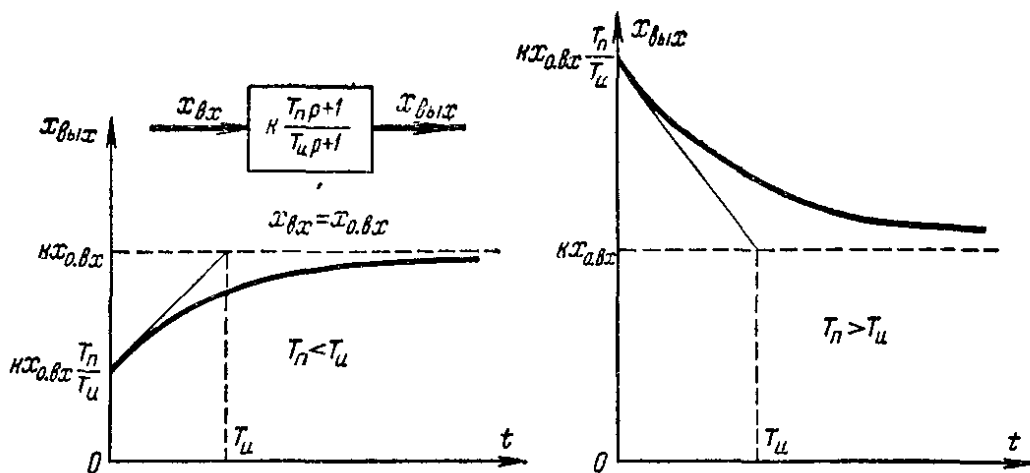


Рис 2-11 Передаточная функция и переходные процессы интегро-дифференцирующего звена.

Если $T_{\Pi} = 0$, а k и T_{Π} являются конечными величинами, получаем инерционное звено первого порядка с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{T_{\Pi} p + 1}.$$

Таким образом, интегро-дифференцирующее звено имеет больше возможностей для настройки в целях получения необходимых динамических свойств систем регулирования.

На рис. 2-12 даны примеры интегро-дифференцирующих звеньев.

Для электрической цепи рис. 2-12, а можно записать:

$$U_{\text{вх}} = i_{R_1} R_1 + U_{\text{вых}}; \quad U_{\text{вых}} = i R_2,$$

$$U_{\text{вх}} = \frac{1}{C} \int i_c dt + U_{\text{вых}}; \quad i = i_{R_1} + i_c.$$

Решив эти уравнения, найдем:

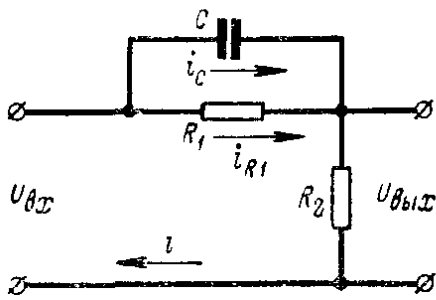
$$\frac{CR_1R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} + u_{\text{ВЫХ}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(CR_1 \frac{du_{\text{ВХ}}}{dt} + u_{\text{ВХ}} \right).$$

Передаточная функция звена соответствует выражению (2-29).

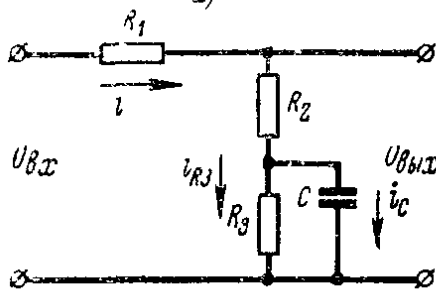
При этом

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

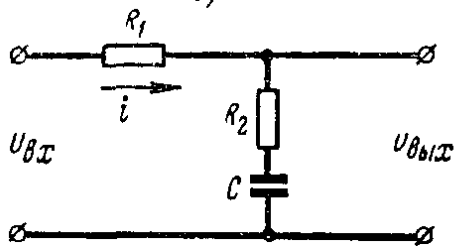
$$T_{\text{И}} = \frac{CR_1R_2}{R_1 + R_2}; \quad T_{\text{П}} = CR_1.$$



а)



б)



в)

Для электрической цепи по рис 2-12, б согласно второму закону Кирхгофа можно записать:

$$u_{\text{ВХ}} = iR_1 + iR_2 + \frac{1}{C} \int i_c dt;$$

$$u_{\text{ВХ}} = iR_1 + u_{\text{ВЫХ}};$$

$$i_{R_3} R_3 = \frac{1}{C} \int i_c dt;$$

$$U_{\text{ВЫХ}} = iR_2 + \frac{1}{C} \int i_c dt.$$

Определив из этих уравнений значения токов через напряжения и учитывая, что по первому закону Кирхгофа

$$i = i_c + i_{R_3},$$

найдем дифференциальное уравнение цепи, изображенной на рис. 2-12, б:

$$\begin{aligned} & \frac{CR_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} + u_{\text{ВЫХ}} = \\ & = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \left(\frac{CR_2R_3}{R_2 + R_3} \cdot \frac{du_{\text{ВХ}}}{dt} + u_{\text{ВХ}} \right). \end{aligned}$$

Передаточная функция определяется выражением (2-29).

Коэффициент передачи звена:

$$k = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Постоянные времени:

$$T_{\text{и}} = \frac{CR_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad T_{\text{п}} = \frac{CR_2R_3}{R_2 + R_3}.$$

При $R_3 = \infty$ (схема на рис. 2-12, в)

$$k = 1; \quad T_{\text{и}} = C(R_1 + R_2); \quad T_{\text{п}} = CR_2.$$

Коэффициент передачи и постоянные времени звеньев (в схемах, показанных на рис. 2-12) изменяются путем изменения величин сопротивлений R_1 , R_2 и R_3 .

6. Инерционное звено второго порядка

Инерционное звено второго порядка имеет дифференциальное уравнение

$$T_2^2 \frac{d^2 x_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + T_1 \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = kx_{\text{ВХ}}. \quad (2-31)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}. \quad (2-32)$$

Переходный процесс инерционного звена можно исследовать путем аналитического решения дифференциального уравнения (2-31), которое является неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Для получения общего решения неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots \\ \dots + a_1 \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + a_0 x_{\text{ВЫХ}} = F(x_{\text{ВХ}}) \end{aligned} \quad (2-33)$$

достаточно к какому-либо частному решению его прибавить общее решение однородного с ним уравнения, т. е. уравнения (2-33), в котором $F(x_{\text{ВХ}}) = 0$.

Одним из частных решений неоднородного уравнения (2-33) при скачкообразном изменении $x_{\text{ВХ}} = x_{0\text{ВХ}}$ будет новое значение $x_{0\text{ВЫХ}}$, установившееся после окончания переходного процесса.

Так как производная от постоянной величины равна нулю, то частное решение уравнения (2-33) при новом состоянии равновесия системы будет:

$$x_{0 \text{ Вых}} = \frac{1}{a_0} F(x_{0 \text{ Вых}}). \quad (2-34)$$

Однородное дифференциальное уравнение получим из уравнения (2-33) при $F(x_{\text{Вых}}) = 0$:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x_{\text{Вых}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_{\text{Вых}}}{dt^{n-1}} + \dots \\ \dots + a_1 \frac{dx_{\text{Вых}}}{dt} + a_0 x_{\text{Вых}} = 0. \end{aligned} \quad (2-35)$$

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0, \quad (2-36)$$

т. е. получается, если приравнять нулю оператор левой части неоднородного дифференциального уравнения, или, что то же самое, приравнять нулю знаменатель передаточной функции $W(p)$ звена.

Характеристическое уравнение в общем случае может иметь i одинаковых корней p_i и, помимо того, $n - i$ неодинаковых корней

$$p_1, p_2, \dots, p_{n-i}.$$

Определив все корни характеристического уравнения, общее решение однородного дифференциального уравнения можно найти по известной формуле:

$$\begin{aligned} x_{\text{Вых}}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_{n-i} e^{p_{n-i} t} + \\ + e^{p_i t} (A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + \dots + A_i t^{i-1}), \end{aligned} \quad (2-37)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_{n-i}, A_1, A_2, \dots, A_i$ — постоянные интегрирования, которые находятся из начальных условий.

Описанный метод общего решения дифференциального уравнения (2-33) и формулы (2-34)—(2-37) могут быть использованы также для исследования переходных процессов всех ранее рассмотренных звеньев.

Для дифференциального уравнения (2-31) характеристическое уравнение (2-36) принимает вид:

$$T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0. \quad (2-38)$$

Его корни:

$$p_{1,2} = -\frac{T_1}{2T_2^2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^4} - \frac{1}{T_2^2}}. \quad (2-39)$$

Частное решение дифференциального уравнения (2-31) инерционного звена второго порядка согласно (2-34) будет:

$$x_{0 \text{ Вых}} = kx_{0 \text{ Вх}}. \quad (2-40)$$

Характер переходного процесса инерционного звена второго порядка зависит от знака подкоренного выражения (2-39). Здесь могут возникнуть три случая.

1. При $T_1/T_2 > 2$ оба корня характеристического уравнения вещественные отрицательные: $p_1 = -\alpha_1$; $p_2 = -\alpha_2$. Тогда согласно уравнению (2-37) общее решение однородного уравнения инерционного звена второго порядка имеет вид:

$$x_{\text{Вых}}(t) = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}.$$

Прибавив к нему частное решение неоднородного дифференциального уравнения (2-40), получим общее решение дифференциального уравнения (2-31), определяющее переходный процесс инерционного звена второго порядка при $T_1/T_2 > 2$:

$$x_{\text{Вых}} = kx_{0 \text{ Вх}} + x_{\text{Вых}}(t) = kx_{0 \text{ Вх}} + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}.$$

Так как до подачи входной величины система находилась в равновесии, то при $t = 0$ имеем: $x_{\text{Вых}} = 0$; $\frac{dx_{\text{Вых}}}{dt} = 0$.

Следовательно, для начальных условий находим:

$$x_{\text{Вых}} = kx_{0 \text{ Вх}} + C_1 + C_2 = 0$$

и

$$\left(\frac{dx_{\text{Вых}}}{dt}\right)_{t=0} = -\alpha_1 C_1 - \alpha_2 C_2 = 0.$$

Решив эти уравнения, получим:

$$C_1 = -kx_{0 \text{ Вх}} \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad C_2 = kx_{0 \text{ Вх}} \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Таким образом, переходный процесс звена при $\frac{T_1}{T_2} > 2$ определяется выражением

$$x_{\text{Вых}} = kx_{0 \text{ Вх}} \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_1 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_2 t}\right). \quad (2-41)$$

2. При $T_1/T_2 = 2$ характеристическое уравнение имеет два равных вещественных отрицательных корня:

$$p_1 = p_2 = -\alpha = -\frac{1}{T_2}.$$

Согласно (2-37) находим:

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = e^{-\alpha t} (A_1 + A_2 t).$$

Общее решение уравнения (2-31) для этого случая будет ($i=2$):

$$x_{\text{ВЫХ}} = kx_{0\text{ВХ}} + (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}.$$

Производная выходной величины

$$\frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} = -\alpha (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t}.$$

Так как при $t=0$ $x_{\text{ВЫХ}}=0$ и $dx_{\text{ВЫХ}}/dt=0$, то из уравнений

$$\begin{aligned} kx_{0\text{ВХ}} + A_1 &= 0; \\ -\alpha A_1 + A_2 &= 0 \end{aligned}$$

находим:

$$A_1 = -kx_{0\text{ВХ}}; \quad A_2 = -\alpha kx_{0\text{ВХ}}.$$

Таким образом, переходный процесс звена при $T_1/T_2 = 2$ описывается выражением

$$x_{\text{ВЫХ}} = kx_{0\text{ВХ}} \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T_2} \right) e^{-\frac{t}{T_2}} \right]. \quad (2-42)$$

3. При $T_1/T_2 < 2$ характеристическое уравнение имеет два сопряженных комплексных корня:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega,$$

где

$$\alpha = \frac{T_1}{2T_2^2}; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{T_2^2} - \frac{T_1^2}{4T_2^4}}.$$

Согласно (2-37) запишем:

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = e^{-\alpha t} (C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t}).$$

Используя формулы Эйлера

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t; \quad e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t,$$

получим:

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = e^{-\alpha t} [C_1 (\cos \omega t + j \sin \omega t) + C_2 (\cos \omega t - j \sin \omega t)],$$

или

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = e^{-\alpha t} [(C_1 + C_2) \cos \omega t + j (C_1 - C_2) \sin \omega t].$$

Выражение в квадратных скобках может быть представлено через параметры одной синусоиды, имеющей амплитуду D и начальную фазу φ :

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = D e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (2-43)$$

Это выражение и представляет собой решение однородного уравнения рассматриваемого звена при $T_1/T_2 < 2$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения, описывающее переходный процесс звена, примет вид:

$$x_{\text{ВЫХ}} = kx_{0\text{ВХ}} + D e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (2-44)$$

Производная выходной величины

$$\frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} = D\omega e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) - D\alpha e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi).$$

Для начальных условий

$$t = 0; \quad x_{\text{ВЫХ}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} = 0$$

оба последних уравнения запишутся так:

$$kx_{0\text{ВХ}} + D \sin \varphi = 0; \quad D\omega \cos \varphi - D\alpha \sin \varphi = 0.$$

Решив эти уравнения, найдем:

$$\varphi = \arctg \frac{\omega}{\alpha}; \quad D = -\frac{kx_{0\text{ВХ}}}{\sin \varphi}.$$

Отсюда следует:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2}}{\frac{T_1}{2T_2^2}} = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{T_1}$$

и

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2} = \omega T_2.$$

Подставив полученное выражение для $\sin \varphi$ в формулу для D , получим:

$$D = -\frac{kx_{0\text{вх}}}{\omega T_2}.$$

Подставив значения φ и D в выражение (2-44), найдем:

$$x_{\text{вых}} = kx_{0\text{вх}} \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\omega T_2} \sin \left(\omega t + \arctg \frac{\omega}{\alpha} \right) \right]. \quad (2-45)$$

Переходный процесс звена при $T_1/T_2 < 2$, характеризуемый уравнением (2-45), периодичен и представляет собой затухающую синусоиду, амплитуда которой убывает

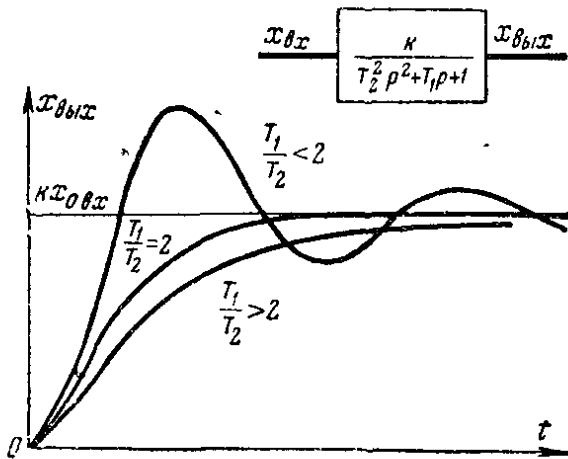


Рис. 2-13 Передаточная функция и переходные процессы инерционного звена второго порядка при различных значениях отношения постоянных времени.

от полупериода к полупериоду по экспоненциальному закону, определяемому величиной $e^{-\alpha t}$. В связи с этим инерционное звено второго порядка, характеристическое уравнение которого имеет два сопряженных комплексных корня, называют *колебательным звеном*. Если же эти корни вещественные отрицательные (равные или неравные), то звено называется *апериодическим звеном второго порядка* [см. уравнения (2-41) и (2-42)].

Переходные процессы инерционного звена второго порядка в зависимости от величины отношения T_1/T_2 представлены на рис. 2-13.

Как следует из выражения (2-45), мнимая составляющая ω корней характеристического уравнения является круговой частотой колебательного звена. Период колебаний $T = 2\pi/\omega$. Оценкой переходного процесса колебательного звена служит степень затухания колебаний. *Степенью затухания* ψ называется отношение разности двух соседних амплитуд одного знака (взятых относительно среднего положения $kx_{0\text{вх}}$) к первой из них (рис. 2-14, а):

$$\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1}. \quad (2-46)$$

Как следует из рис. 2-14,а,

$$A_1 = \frac{kx_{0\text{вх}}}{\omega T_2} e^{-\alpha t_1}, \quad A_2 = \frac{kx_{0\text{вх}}}{\omega T_2} e^{-\alpha t_2}.$$

Так как $t_2 - t_1 = T$, то, подставив значения A_1 и A_2 в (2-46), получим:

$$\psi = 1 - e^{-2\pi \frac{\alpha}{\omega}}. \quad (2-47)$$

Чем ближе к единице величина ψ , тем быстрее затухают колебания переходного процесса.

Степень затухания зависит от отношения вещественной составляющей комплексных корней характеристического уравнения α к их мнимой составляющей ω . В свою очередь это отношение определяется отношением постоянных времени T_1/T_2 :

$$\frac{\alpha}{\omega} = \frac{T_1}{2T_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{T_1}{2T_2}\right)^2}}.$$

4. При $T_1 = 0$; $T_1/T_2 = 0$ вещественная и мнимая составляющие корней характеристического уравнения будут:

$$\alpha = 0; \quad \omega = \frac{1}{T_2}.$$

Подставив эти значения в выражение (2-45) для переходного процесса колебательного звена, получим:

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}} &= kx_{0\text{вх}} \left[1 - \sin \left(\frac{t}{T_2} + \text{arctg } \infty \right) \right] = \\ &= kx_{0\text{вх}} \left(1 - \cos \frac{t}{T_2} \right). \end{aligned} \quad (2-48)$$

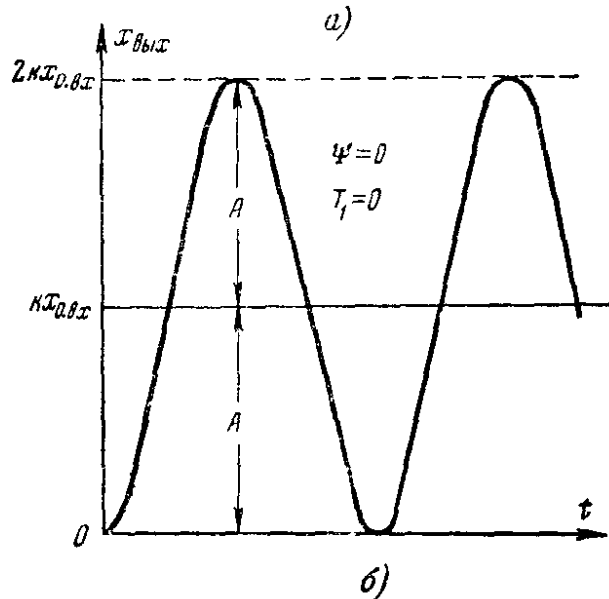
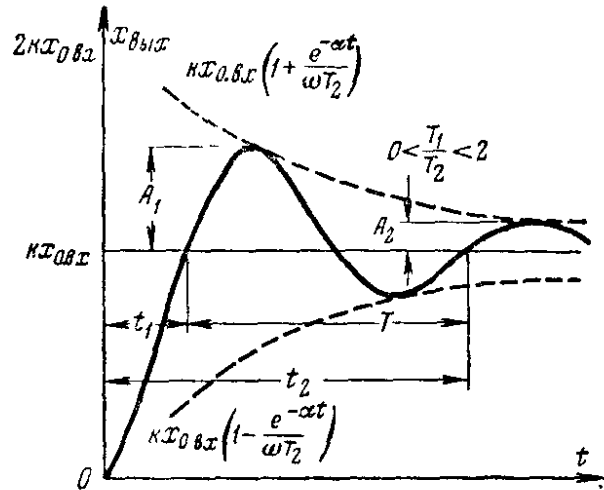


Рис. 2-14. Переходные процессы колебательного звена при $1 > \psi > 0$ и $\psi = 0$.

Переходный процесс будет в этом случае незатухающим колебательным (так как $\psi = 0$) с частотой $\omega_0 = 1/T_2$, периодом $T = 2\pi T_2$ и амплитудой $A = kx_{0\text{вх}}$ (рис. 2-14, б).

Чем больше T_1 и меньше T_2 , тем больше степень затухания колебательного звена.

Следовательно, для уменьшения колебательности систем регулирования в инерционных звеньях второго порядка

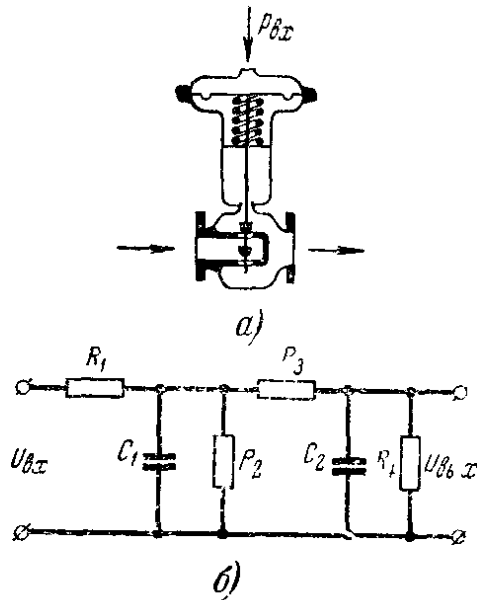


Рис 2-15 Примеры инерционных звеньев второго порядка

штаoka клапана (отсчет ведется в малых приращениях от равновесного состояния).

Если нельзя пренебречь инерцией подвижной системы клапана и силами трения, то условие равновесия сил, действующих на клапан, запишется как

$$f_{\text{и}} + f_{\text{тр}} + f_{\text{пр}} = f_{\text{вх}}.$$

Входное усилие при площади F мембраны равно:

$$f_{\text{вх}} = \Delta p_{\text{вх}} F.$$

Сила инерции $f_{\text{и}}$ равна произведению массы m подвижной системы на ускорение $a = \frac{d^2 \Delta S_{\text{вх}}}{dt^2}$:

$$f_{\text{и}} = m \frac{d^2 \Delta S_{\text{вх}}}{dt^2}.$$

Учитывая только силу вязкого трения, которая пропорциональна скорости перемещения подвижной системы, получим:

$$f_{\text{тр}} = b \frac{d\Delta S_{\text{ВЫХ}}}{dt}.$$

Сила противодействия пружины пропорциональна ее сжатию:

$$f_{\text{пр}} = c\Delta S_{\text{ВЫХ}},$$

где c — жесткость пружины.

Подставив значения сил в уравнение равновесия, получим:

$$m \frac{d^2 \Delta S_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + b \frac{d\Delta S_{\text{ВЫХ}}}{dt} + c\Delta S_{\text{ВЫХ}} = \Delta p_{\text{ВХ}} F.$$

В настоящее время принято составлять дифференциальные уравнения звеньев в безразмерных (относительных) единицах.

Безразмерной единицей давления будем считать отношение $\Delta p_{\text{ВХ}}$ к максимальной величине давления $p_{\text{макс}}$ на мембрану, при котором клапан полностью закрывается; безразмерной единицей перемещения штока клапана примем отношение $\Delta S_{\text{ВЫХ}}$ к полному ходу $S_{\text{макс}}$:

$$p_{\text{ВХ}}^* = \frac{\Delta p_{\text{ВХ}}}{p_{\text{макс}}}; \quad s_{\text{ВЫХ}}^* = \frac{\Delta S_{\text{ВЫХ}}}{S_{\text{макс}}},$$

откуда

$$\Delta p_{\text{ВХ}} = p_{\text{ВХ}}^* p_{\text{макс}}; \quad \Delta S_{\text{ВЫХ}} = s_{\text{ВЫХ}}^* S_{\text{макс}};$$

$$\frac{d\Delta S_{\text{ВЫХ}}}{dt} = S_{\text{макс}} \frac{ds_{\text{ВЫХ}}^*}{dt}; \quad \frac{d^2 \Delta S_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} = S_{\text{макс}} \frac{d^2 s_{\text{ВЫХ}}^*}{dt^2}.$$

Подставив эти значения в дифференциальное уравнение, получим выражение его в безразмерных единицах:

$$m S_{\text{макс}} \frac{d^2 s_{\text{ВЫХ}}^*}{dt^2} + b S_{\text{макс}} \frac{ds_{\text{ВЫХ}}^*}{dt} + c S_{\text{макс}} s_{\text{ВЫХ}}^* = p_{\text{макс}} F p_{\text{ВХ}}^*.$$

С учетом того, что $c S_{\text{макс}} = p_{\text{макс}} F$, можно записать:

$$\frac{m}{c} \cdot \frac{d^2 s_{\text{ВЫХ}}^*}{dt^2} + \frac{b}{c} \cdot \frac{ds_{\text{ВЫХ}}^*}{dt} + s_{\text{ВЫХ}}^* = p_{\text{ВХ}}^*.$$

Таким образом, при учете инерции подвижной системы и вязкого трения мембранный пневматический клапан является инерционным звеном второго порядка, так как его дифференциальное уравнение аналогично уравнению (2-31).

Постоянные времени и коэффициент передачи будут равны:

$$T_2 = \sqrt{\frac{m}{c}}; \quad T_1 = \frac{b}{c}; \quad k = 1.$$

Из этого примера следует, что в элементах систем регулирования вязкое трение не всегда является нежелательным. В данном случае достаточно высокое вязкое трение обеспечивает устойчивую работу клапана, так как постоянная времени T_1 пропорциональна коэффициенту вязкого сопротивления b .

Практически когда силы вязкого трения в механических элементах САР недостаточны, применяют дополнительное демпфирование подвижной системы, т. е. вводят дополнительную силу, противодействующую перемещению подвижной системы и пропорциональную скорости этого перемещения.

Если пневматический клапан применяется в системе с инерционным объектом, в котором переходные процессы протекают медленно, т. е. скорости изменения $p_{\text{вх}}^*$ и $s_{\text{вых}}^*$ небольшие, то величина ускорения $d^2 s_{\text{вых}}^* / dt^2$ с точностью, достаточной для практических расчетов, может быть принята равной нулю. Тогда дифференциальное уравнение клапана примет вид:

$$T_1 \frac{ds_{\text{вых}}^*}{dt} + s_{\text{вых}}^* = p_{\text{вх}}^*.$$

Следовательно, в этом случае можно пренебречь инерционностью подвижных частей пневматического клапана и представлять его в динамическом отношении, как инерционное звено первого порядка с передаточной функцией, определяемой формулой (2-22).

На рис. 2-15, б приведена электрическая схема, переходный процесс которой также описывается дифференциальным уравнением инерционного звена второго порядка.

Постоянные времени и коэффициент передачи в этом случае равны:

$$T_2 = \sqrt{\frac{R_1 R_2 R_3 R_4 C_1 C_2}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)}},$$

$$T_1 = \frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4) C_1 + R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) C_2}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)},$$

$$k = \frac{R_2 R_4}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)}.$$

Все эти три параметра выражаются через одни и те же величины четырех сопротивлений и двух емкостей. Это является недостатком схемы, так как параметры настройки, определяющие динамические свойства звена, взаимозависимы. Поэтому установка оптимальной величины одного из трех параметров настройки в большинстве случаев не дает возможности получить оптимальные значения также для двух остальных параметров. Кроме этого, такая настройка трудоемка и требует высокой квалификации наладчика.

7. Запаздывающее звено

Выходная величина в запаздывающем звене точно повторяет входную величину, но с некоторым запаздыванием по времени τ :

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = x_{\text{ВХ}}(t - \tau).$$

Для определения передаточной функции звена найдем изображение выходной величины по Лапласу;

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = L[x_{\text{ВХ}}(t - \tau)] = \int_0^{\infty} x_{\text{ВХ}}(t - \tau) e^{-pt} dt.$$

Введя новую переменную $\lambda = t - \tau$, запишем:

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = \int_0^{\infty} x_{\text{ВХ}}(\lambda) e^{-p(\lambda + \tau)} d(\lambda + \tau).$$

Вынеся постоянную величину $e^{-p\tau}$ за знак интеграла и учитывая, что дифференциал $d\tau$ постоянной величины равен нулю, получим:

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} x_{\text{ВХ}}(\lambda) e^{-p\lambda} d\lambda.$$

Так как согласно формуле (2-7) интеграл в этом выражении является изображением $X_{\text{вх}}(p)$ функции $x_{\text{вх}}(\lambda) = x_{\text{вх}}(t - \tau)$, получим

$$X_{\text{вых}}(p) = e^{-p\tau} X_{\text{вх}}(p).$$

Таким образом, запаздывающее звено имеет передаточную функцию

$$W(p) = e^{-p\tau}. \quad (2-49)$$

Переходный процесс запаздывающего звена при скачкообразном изменении входной величины на $x_{0\text{вх}}$ представлен на рис. 2-16.

Типичными примерами запаздывающих звеньев являются поточно-транспортные устройства, если за входную величину принято поступление сырья, продукции и т. д. на транспортер, а за выходную — съем их с транспортера.

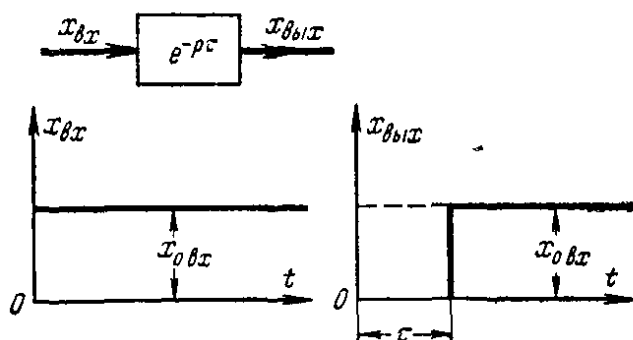


Рис 2-16 Передаточная функция и переходный процесс запаздывающего звена

На рис. 2-17 представлено устройство подачи продукта в объект регулирования. Продукт из загрузочного бункера 1 поступает на транспортер 3, который ссыпает его в приемный бункер 4 регулируемого объекта. Количество поступающего продукта на транспортер регулируется шибером 2.

При рабочей длине транспортера l и скорости его перемещения v время запаздывания звена будет:

$$\tau = \frac{l}{v}.$$

Передаточная функция

$$W(p) = e^{-\frac{l}{v}p}.$$

В заключение следует отметить, что при рассмотрении реального элемента системы регулирования как типового звена необходимо учитывать все особенности его работы в конкретных условиях.

В зависимости от условий протекания исследуемого процесса один и тот же элемент с достаточной степенью точности может рассматриваться как то или иное типовое звено. Так,

если регулирующий клапан на рис. 2-15, *a* находится под воздействием медленно изменяющегося входного давления, то ускорения при перемещении подвижной системы клапана будут небольшим, что позволяет пренебречь силами инерции ($T_2 = 0$); в данном случае с достаточной для практики точностью можно считать клапан инерционным звеном первого порядка с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{T_1 p + 1}.$$

Если одновременно с этим инерционность объекта много больше инерционности клапана ($T_1 \ll T_{об}$), можно пренебречь инерционностью клапана, т. е. считать, что $T_1 = 0$, и рассматривать звено как усилительное, тогда

$$W(p) = k.$$

При резких изменениях величины давления, подаваемого к клапану, когда значения постоянных T_2 , T_1 и $T_{об}$ сопоставимы, клапан следует рассматривать как инерционное звено второго порядка.

Таким образом, прежде чем приступить к составлению уравнений звеньев системы регулирования необходимо всесторонне изучить реальные условия их работы в данной системе. При этом, если с достаточной для конкретного случая точностью можно понизить порядок уравнения того или иного звена системы, это всегда надо делать, так как в этом случае понижается порядок уравнения процесса регулирования системы в целом и резко упрощаются ее расчет и исследование.

Можно считать постоянные времени отдельных звеньев равными нулю только в тех случаях, когда они в несколько десятков раз меньше постоянных времени остальных звеньев системы автоматического регулирования.

2-4. СОЕДИНЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СОЕДИНЕНИЙ

В системах автоматического регулирования звенья могут соединяться в самых различных сочетаниях. Однако систему любой сложности можно всегда рассматривать как сово-

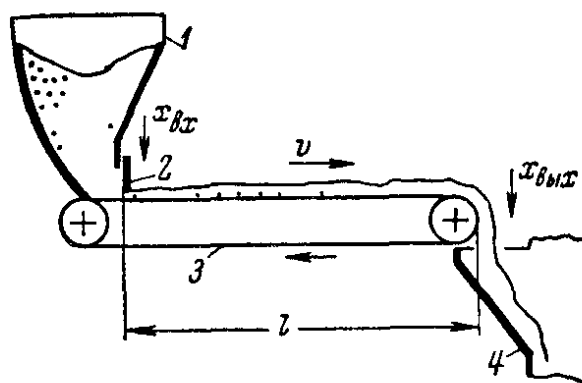


Рис 2 17 Пример запаздывающего звена

купность трех видов соединений элементарных звеньев: последовательного, параллельного и встречно-параллельного.

1. Последовательное соединение звеньев

При последовательном соединении звеньев выходная величина предыдущего звена является входной величиной последующего.

Так, для трех последовательно соединенных звеньев, изображенных на рис. 2-18, можно записать:

$$x_{\text{ВЫХ}1} = x_{\text{ВХ}2}; \quad x_{\text{ВЫХ}2} = x_{\text{ВХ}3}.$$

Входной величиной $x_{\text{ВХ}}$ всего соединения служит входная величина первого звена.

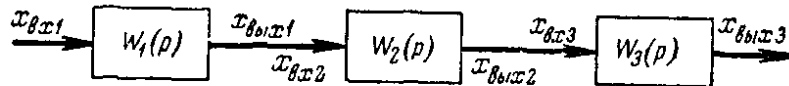


Рис 2-18 Последовательное соединение звеньев.

Выходной величиной $x_{\text{ВЫХ}}$ соединения является выходная величина последнего звена.

В соответствии с выражением (2-12) имеем:

$$X_{\text{ВЫХ}1}(p) = W_1(p) X_{\text{ВХ}1}(p);$$

$$X_{\text{ВЫХ}2}(p) = W_2(p) X_{\text{ВХ}2}(p);$$

$$X_{\text{ВЫХ}3}(p) = W_3(p) X_{\text{ВХ}3}(p).$$

Учитывая, что $X_{\text{ВХ}3}(p) = X_{\text{ВЫХ}2}(p)$ и $X_{\text{ВХ}2}(p) = X_{\text{ВЫХ}1}(p)$, находим:

$$\begin{aligned} X_{\text{ВЫХ}3}(p) &= W_3(p) W_2(p) X_{\text{ВХ}2}(p) = \\ &= W_3(p) W_2(p) W_1(p) X_{\text{ВХ}1}(p). \end{aligned}$$

Так как передаточная функция соединения в целом равна $W(p) = X_{\text{ВЫХ}}(p)/X_{\text{ВХ}}(p)$, то с учетом того, что $X_{\text{ВЫХ}3}(p) = X_{\text{ВЫХ}}(p)$ и $X_{\text{ВХ}1}(p) = X_{\text{ВХ}}(p)$, получим:

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p). \quad (2-50)$$

Таким образом, передаточная функция системы последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев.

В качестве примера определим передаточную функцию системы, состоящей из двух последовательно соединенных инерционных звеньев первого порядка:

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}.$$

Передаточная функция всей системы

$$\begin{aligned} W(p) &= W_1(p) W_2(p) = \\ &= \frac{k_1 k_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} = \frac{k}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}. \end{aligned}$$

Из этого примера следует важный для практики вывод, что два последовательно соединенных инерционных звена первого порядка создают одно инерционное звено второго порядка. При этом оно не может быть колебательным, так как корни его характеристического уравнения вещественны и отрицательны:

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}; \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}.$$

Коэффициент передачи системы $k = k_1 k_2$.

В свою очередь любое апериодическое (неколебательное) инерционное звено второго порядка можно разбить на два элементарных инерционных звена первого порядка.

Как следует из примера, коэффициент передачи системы, состоящей из последовательно соединенных звеньев, равен произведению коэффициентов передачи этих звеньев.

2. Параллельное соединение звеньев

Входная величина системы, состоящей из параллельно соединенных звеньев, одновременно подается на входы всех звеньев, а ее выходная величина равна сумме выходных величин отдельных звеньев.

На рис. 2-19 представлена система, состоящая из трех параллельно соединенных звеньев: $x_{\text{вых}} = x_{\text{вых1}} + x_{\text{вых2}} + x_{\text{вых3}}$. Изображения выходных величин звеньев через их передаточные функции запишутся так:

$$\begin{aligned} X_{\text{вых1}}(p) &= W_1(p) X_{\text{вх}}(p); \\ X_{\text{вых2}}(p) &= W_2(p) X_{\text{вх}}(p); \\ X_{\text{вых3}}(p) &= W_3(p) X_{\text{вх}}(p). \end{aligned}$$

Так как $X_{\text{вых}}(p) = X_{\text{вых1}}(p) + X_{\text{вых2}}(p) + X_{\text{вых3}}(p)$, то находим: $X_{\text{вых}}(p) = [W_1(p) + W_2(p) + W_3(p)] X_{\text{вх}}(p)$.

Передаточная функция системы

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + W_3(p). \quad (2-51)$$

Таким образом, передаточная функция системы, состоящей из параллельно соединенных звеньев, равна сумме передаточных функций этих звеньев.

Например, при параллельном соединении инерционного звена первого порядка с усилительным звеном получим:

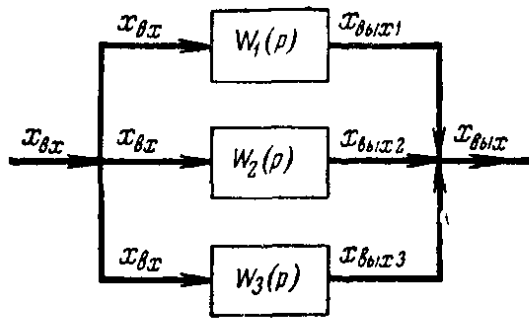


Рис. 2-19. Параллельное соединение звеньев.

$$\begin{aligned} W(p) &= W_1(p) + W_2(p) = \\ &= \frac{k_1}{T_1 p + 1} + k_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} W(p) &= \\ &= \frac{(k_1 + k_2) \left(\frac{k_2}{k_1 + k_2} T_1 p + 1 \right)}{T_1 p + 1} = \\ &= k \frac{T_{\Pi} p + 1}{T_{\Pi} p + 1}. \end{aligned}$$

Это интегро-дифференцирующее звено [см. выражение (2-29)], постоянные времени и коэффициент передачи которого равны:

$$T_{\Pi} = T_1; \quad k = k_1 + k_2; \quad T_{\Pi} = T_1 \frac{k_2}{k_1 + k_2}.$$

Коэффициент передачи системы при параллельном соединении звеньев равен сумме их передаточных коэффициентов.

Из приведенного примера следует, что любое интегро-дифференцирующее звено можно представить в виде инерционного звена первого порядка и усилительного звена, соединенных параллельно.

3. Встречно-параллельное соединение звеньев, или соединение с обратной связью

При встречно-параллельном соединении звеньев на вход звена одновременно с входной величиной системы подается ее выходная величина, прошедшая через звено обратной связи с передаточной функцией $W_{o.c.}(p)$.

На рис. 2-20, а представлена система из встречно-параллельно включенных звеньев; как видно из схемы,

$$x_{вх1} = x_{вх} \mp x_{o.c.}$$

При отрицательной, наиболее распространенной обратной связи ее величина вычитается из входной величины. При положительной обратной связи ее величина суммируется с входной величиной.

Передаточная функция системы в этом случае запишется как

$$X_{\text{вых}}(p) = W_1(p) X_{\text{вх1}}(p) = W_1(p) [X_{\text{вх}}(p) \mp X_{\text{о.с}}(p)].$$

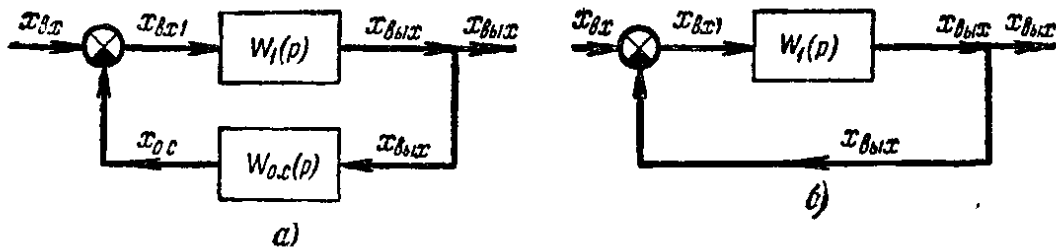


Рис. 2-20. Встречно-параллельное соединение звеньев.

Разделив это равенство на $X_{\text{вых}}(p)$ и учитывая, что $W_{\text{о.с}}(p) = \frac{X_{\text{о.с}}(p)}{X_{\text{вых}}(p)}$, а передаточная функция системы $W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)}$, получим:

$$1 = W_1(p) \left[\frac{1}{W(p)} \mp W_{\text{о.с}}(p) \right],$$

откуда

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p) W_{\text{о.с}}(p)}. \quad (2-52)$$

В знаменателе знак «+» относится к отрицательной обратной связи, когда

$$X_{\text{вх1}} = X_{\text{вх}} - X_{\text{о.с}}.$$

Знак «—» относится к положительной обратной связи, когда

$$X_{\text{вх1}} = X_{\text{вх}} + X_{\text{о.с}}.$$

В системах регулирования для обеспечения устойчивости их работы обычно применяется отрицательная обратная связь; тогда

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) W_{\text{о.с}}(p)}.$$

На схемах принято в случае наличия отрицательной обратной связи зачернять тот сектор изображения суммирующего устройства, к которому подводится линия, изображающая канал обратной связи (рис. 2-20).

Если выход системы подать в качестве отрицательной обратной связи, не пропуская ни через какое звено, прямо на вход системы (рис. 2-20, б), то

$$W_{o. c}(p) = 1 \text{ и } x_{o. c} = x_{\text{вых}}.$$

Следовательно, для этого случая передаточная функция системы будет равна:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)}. \quad (2-53)$$

Если в качестве звена обратной связи применяется усилительное звено, то такая связь называется жесткой обратной связью.

Система, показанная на рис. 2-20, б, является частным случаем жесткой отрицательной обратной связи с коэффициентом передачи усилительного звена, равным единице.

В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из интегрирующего звена с передаточной функцией $W_1(p) = k_1/p$, охваченного жесткой отрицательной обратной связью, для которой

$$W_{o. c}(p) = k_{o. c}.$$

Согласно (2-52) передаточная функция системы будет равна:

$$W(p) = \frac{\frac{k_1}{p}}{1 + \frac{k_1}{p} k_{o. c}} = \frac{k}{Tp + 1},$$

где $k = \frac{1}{k_{o. c}}$; $T = \frac{1}{k_1 k_{o. c}}$.

Таким образом, при охвате интегрирующего звена жесткой отрицательной обратной связью в виде усилительного звена получаем инерционное звено первого порядка.

В случае охвата такой жесткой отрицательной обратной связью инерционного звена первого порядка, для которого

$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}$, находим:

$$W(p) = \frac{\frac{k_1}{T_1 p + 1}}{1 + \frac{k_1 k_{o. c}}{T_1 p + 1}} = \frac{k}{Tp + 1},$$

где

$$k = \frac{k_1}{1 + k_1 k_{o.c}}; \quad T = \frac{T_1}{1 + k_1 k_{o.c}}.$$

Получаем также инерционное звено первого порядка, но коэффициент усиления и постоянная времени звена при этом уменьшаются в $(1 + k_1 k_{o.c})$ раз.

2-5. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Структурную схему системы автоматического регулирования можно получить из ее функциональной схемы (см. рис. 1-7) путем определения передаточных функций для всех элементов, образующих функциональную схему.

Назначение измерительного устройства (ИУ) регулятора заключается в том, чтобы привести регулируемую величину в соответствие с входом регулятора, так как в большинстве случаев регулируемая величина (температура, давление, уровень и т. п.) по своей физической природе не может быть подана на суммирующее устройство регулятора, не будучи преобразована в эквивалентный сигнал вполне определенного вида.

Так как в выходном сигнале ИУ однозначно закодирована регулируемая величина объекта, то измерительное устройство регулятора можно отнести к регулируемому объекту, рассматривая выходную величину объекта в уже преобразованном виде, непосредственно воздействующем на последующие звенья регулятора.

Регулируемый объект воспринимает воздействие регулятора через регулирующий орган. В связи с этим РО также целесообразно отнести к регулируемому объекту. Полная передаточная функция объекта регулирования $W_{об}(p)$ в этом случае охватывает последовательное соединение регулирующего органа с передаточной функцией $W_{р.о}(p)$, собственно объекта регулирования с передаточной функцией $W_{о.р}(p)$ и измерительного устройства с передаточной функцией $W_{и.у}(p)$:

$$W_{об}(p) = W_{р.о}(p) W_{о.р}(p) W_{и.у}(p).$$

Передаточная функция собственно регулятора для схемы рис. 1-7 имеет вид:

$$W_{р}(p) = W_{у}(p) W_{и.м}(p),$$

где $W_y(p)$ — передаточная функция усилителя У;
 $W_{и.м}(p)$ — передаточная функция исполнительного механизма ИМ.

Структурная схема системы по рис. 1-7 представлена на рис. 2-21.

В общем случае любая одномерная система автоматического регулирования с главной обратной связью путем

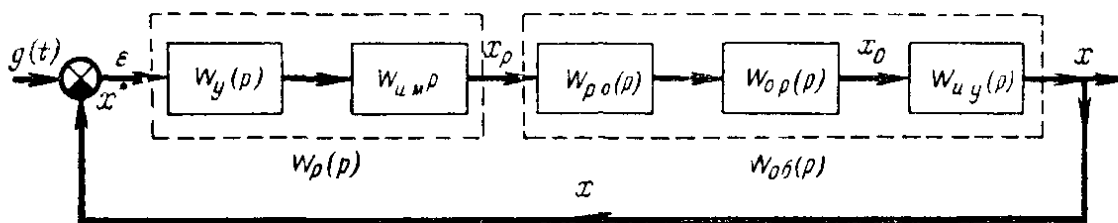


Рис. 2-21. Преобразование функциональной блок-схемы по рис. 1-7 в структурную схему.

постепенного укрупнения звеньев может быть приведена к простейшему виду, изображенному на рис. 2-22, а. Если выход этой системы не подавать на ее вход, то получим разомкнутую систему регулирования (рис. 2-22, б) тоже в наиболее общем виде.

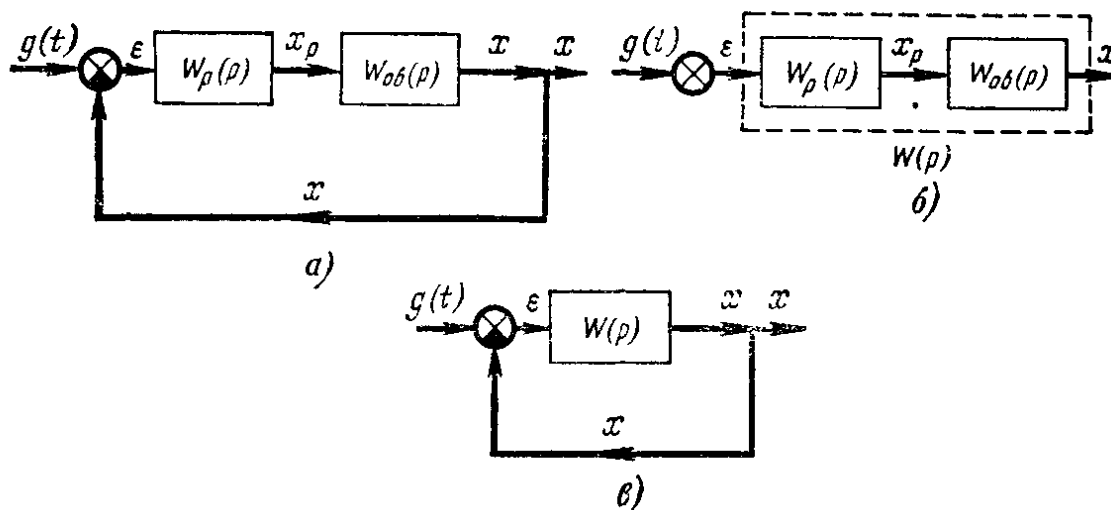


Рис. 2-22. Структурные схемы систем автоматического регулирования.

а и в — замкнутые системы; б — разомкнутая система.

Передаточная функция разомкнутой системы будет равна:

$$W(p) = W_p(p) W_{об}(p). \quad (2-54)$$

Очевидно, что последовательность звеньев с передаточными функциями $W_p(p)$ и $W_{об}(p)$ может быть заменена

одним звеном с передаточной функцией $W(p)$. При этом структурная схема на рис. 2-22, а примет вид, изображенный на рис. 2-22, в.

Передаточная функция разомкнутой системы характеризует зависимость выходной величины x системы от управляющего воздействия $g(t)$ [величина $g(t)$ понимается как *отклонение* управляющего воздействия от его первоначального значения, соответствующего установившемуся состоянию системы].

Передаточную функцию замкнутой системы регулирования принято обозначать символом $\Phi(p)$.

В соответствии с соотношением (2-53) передаточная функция замкнутой системы регулирования, изображенной на рис. 2-22, в, выразится через передаточную функцию $W(p)$ разомкнутой системы регулирования следующим образом:

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}, \quad (2-55)$$

или с учетом формулы (2-54) и рис. 2-22, а:

$$\Phi(p) = \frac{W_p(p) W_{об}(p)}{1 + W_p(p) W_{об}(p)}. \quad (2-56)$$

Передаточная функция $\Phi(p)$ замкнутой системы, определяющая зависимость выходной величины x от управляющего воздействия $g(t)$, является основной передаточной функцией системы и называется передаточной функцией системы автоматического регулирования по каналу управляющего воздействия.

Если в системе, находящейся в установившемся состоянии, изменить управляющее воздействие на величину $g(t)$, т. е. задать новую величину регулируемого параметра, то переходный процесс в системе определяется передаточной функцией по каналу управляющего воздействия. При этом предполагается, что процесс регулирования свободен от влияния внешних возмущающих воздействий. Эти возмущающие воздействия в большинстве случаев приложены ко входу объекта. Если же эти воздействия приложены не ко входу объекта (назовем их промежуточными), то при расчетах системы их можно всегда заменить эквивалентными по влиянию на процесс регулирования возмущающими воздействиями, приложенными ко входу объекта.

Например, изменение напряжения в сети для системы автоматического регулирования температуры сушильного шкафа по рис. 1-5 является возмущающим воздействием,

приложенным ко входу объекта. Обозначим передаточную функцию сушильного шкафа $W_{об}(p)$.

Другим возмущающим воздействием на тот же объект является увеличение его теплоотдачи в момент выгрузки изделий из шкафа; это воздействие является промежуточным. Обозначим его в операторной форме $f_1(p)$. В результате воздействия $f_1(p)$ температура сушильного шкафа понизит-

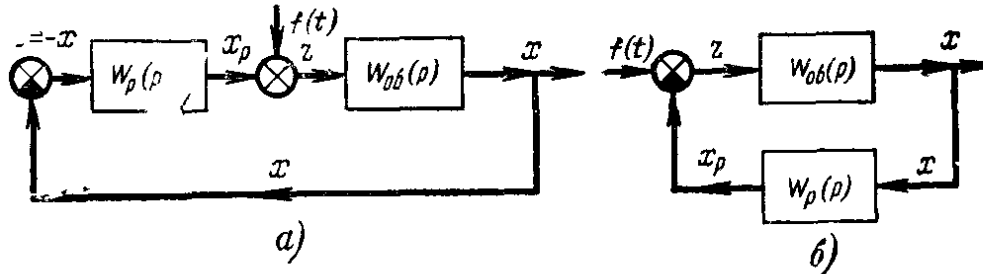


Рис 2-23. Преобразование структурной схемы при возмущающем действии.

а — исходная схема, б — преобразованная схема по каналу возмущающего воздействия

ся, т. е. на выходе объекта появляется величина $X_{вых1}(p)$. Передаточная функция объекта для процесса, вызванного промежуточным возмущением, равна:

$$W_{об f_1}(p) = \frac{X_{вых1}(p)}{f_1(p)} = W_{об пр}(p),$$

откуда

$$X_{вых1}(p) = f_1(p) W_{об пр}(p).$$

Рассмотрим некоторое возмущение $f(p)$, приложенное ко входу объекта и вызывающее появление на его выходе такого же изменения $X_{вых1}(p)$, как и при действии промежуточного возмущения $f_1(p)$. Для этого возмущения

$$X_{вых1}(p) = f(p) W_{об}(p).$$

Следовательно, промежуточное возмущение $f_1(p)$ можно заменить возмущающим воздействием: равным:

$$f(p) = f_1(p) \frac{W_{об пр}(p)}{W_{об}(p)},$$

но приложенным ко входу объекта. Поэтому в расчеты всегда можно ввести все возмущающие воздействия так, чтобы они были приложены ко входу объекта.

При установившемся состоянии системы по рис. 2-23, а будем иметь $g(t) = 0$ и $\varepsilon = 0$. Если теперь на входе объекта появится возмущающее воздействие $f(t)$, то на выходе

объекта возникнет отклонение x , которое с обратным знаком (отрицательная обратная связь) будет подано на вход регулятора; выходная величина регулятора x_p поступит на вход объекта, суммируясь с возмущающим воздействием:

$$z = x_p + f(t).$$

Система приобретает структурную схему, изображенную на рис. 2-23, б.

В соответствии с формулой (2-52) и рис. 2-23, б передаточная функция замкнутой системы по каналу возмущающего воздействия выразится через передаточные функции регулятора и объекта следующим образом:

$$\Phi_f(p) = \frac{W_{об}(p)}{1 + W_p(p) W_{об}(p)}. \quad (2-57)$$

Передаточная функция $\Phi_f(p)$ замкнутой системы по каналу возмущающего воздействия определяет зависимость выходной величины x от возмущающего воздействия $f(t)$, т. е. динамические свойства замкнутой системы при поступлении на вход объекта возмущающих воздействий.

В качестве примера определим передаточные функции системы автоматического регулирования, состоящей из объекта регулирования с передаточной функцией $W_{об}(p) = k_{об}/T_{об}p + 1$, и регулятора, для которого

$$W_p(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_n p} \right).$$

Передаточная функция разомкнутой системы согласно формуле (2-54) имеет вид:

$$W(p) = \frac{k_p k_{об}(T_n p + 1)}{T_n p (T_{об} p + 1)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по каналу регулирующего воздействия определяется формулой (2-55):

$$\Phi(p) = \frac{T_n p + 1}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1},$$

где

$$T_1 = T_n \frac{1 + k_p k_{об}}{k_p k_{об}} \quad \text{и} \quad T_2 = \sqrt{\frac{T_n T_{об}}{k_p k_{об}}}.$$

Подставив значения $W_p(p)$ и $W_{об}(p)$ в выражение (2-57), получим передаточную функцию замкнутой системы по каналу возмущающего воздействия:

$$\Phi_f(p) = \frac{kT_n p}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1},$$

где $k = 1/k_p$.

Значения постоянных времени T_1 и T_2 определяются теми же выражениями, что и для $\Phi(p)$.

2-6. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

Разбивка дифференциального уравнения (2-6), определяющего процесс автоматического регулирования в системе, на дифференциальные уравнения элементарных звеньев в общем случае может быть выполнена различным образом. Следовательно, один и тот же процесс автоматического регулирования может быть осуществлен с помощью систем, расчлененных на различное число элементарных звеньев с различными структурными связями между ними.

Имея в качестве исходной какую-либо одну из таких систем и определив передаточные функции всех ее элементарных звеньев, можно в дальнейшем упростить структурную схему системы путем эквивалентных преобразований ее. Во всех различных структурных схемах, полученных в результате эквивалентных преобразований первоначальной схемы (эквивалентные структурные схемы), передаточная функция системы в целом не изменяется независимо от того, на сколько и каких элементарных звеньев разбита система и какие структурные связи имеются между ее звеньями.

Основные правила эквивалентного преобразования структурных схем следующие:

1. Согласно формуле (2-50) и рис. 2-18 звенья, соединенные последовательно, могут быть заменены одним звеном с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций последовательно соединенных звеньев.

2. Согласно формуле (2-51) и рис. 2-19 звенья, соединенные параллельно, могут быть заменены одним звеном с передаточной функцией, равной сумме передаточных функций параллельно соединенных звеньев.

3. Звенья, соединенные встречно-параллельно (см. рис. 2-20, а), могут быть заменены одним звеном с передаточной функцией, определяемой по формуле (2-52).

4. Внешнее воздействие f , приложенное к выходу звена (рис. 2-24 а) с передаточной функцией $W_1(p)$, можно перенести на его вход (рис. 2-24, б), поместив между воздействием и входом звена дополнительное звено с передаточной функцией $1/W_1(p)$.

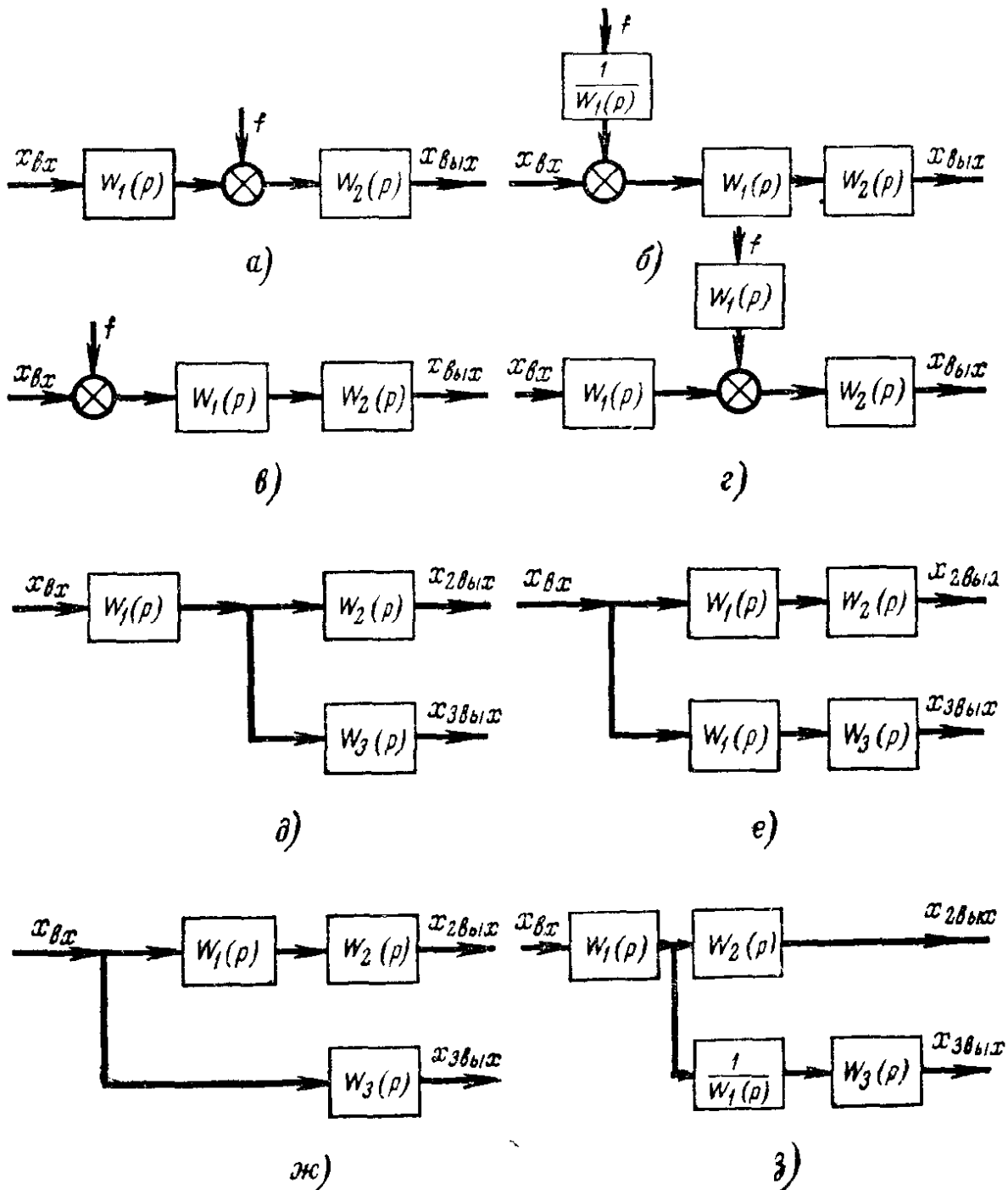


Рис. 2-24. Преобразование структурных схем

5. Внешнее воздействие f , приложенное ко входу звена (рис. 2-24, в) с передаточной функцией $W_1(p)$, можно перенести на его выход (рис. 2-24, г), поместив между воздействием и выходом звена дополнительное звено с той же передаточной функцией $W_1(p)$.

6. Точку присоединения любой структурной связи к выходу звена, имеющего передаточную функцию $W_1(p)$ (рис. 2-24, д), можно перенести на его вход, включив в эту связь дополнительное звено с той же передаточной функцией $W_1(p)$ (рис. 2-24, е).

7. Точку присоединения любой структурной связи ко входу звена с передаточной функцией $W_1(p)$ (рис. 2-24, ж) можно перенести на его выход, включив в эту связь дополнительное звено с передаточной функцией $1/W_1(p)$ (рис. 2,24, з).

С помощью перечисленных правил структурные схемы с перекрестными связями можно преобразовать в структурные схемы без перекрестных связей, заменять многоконтурные системы автоматического регулирования одноконтурными, а также выделять линейную часть в нелинейных системах автоматического регулирования.

2-7. ТИПОВЫЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ АВТОМАТИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ

Автоматические регуляторы по своим динамическим свойствам подразделяются на линейные и нелинейные.

При проектировании наиболее часто применяемых линейных автоматических регуляторов используют пропорциональный, интегральный, пропорционально-интегральный и пропорционально-интегрально-дифференциальный законы регулирования.

1. Пропорциональные регуляторы

Пропорциональные регуляторы (П-регуляторы) воздействуют на регулируемый орган пропорционально отклонению регулируемой величины от заданного значения:

$$x_p = k_p x.$$

Передаточная функция этого регулятора выразится как

$$W_p(p) = k_p. \quad (2-58)$$

Коэффициент k_p называется коэффициентом передачи регулятора. В динамическом отношении П-регуляторы аналогичны усилительному звену (см. рис. 2-3).

2. Интегральные регуляторы

Интегральные регуляторы (И-регуляторы) воздействуют на регулирующий орган пропорционально интегралу от отклонения регулируемой величины:

$$x_p = k_p \int x dt. \quad (2-59)$$

Сообразно с формулой (2-16) передаточная функция И-регулятора запишется как

$$W_p(p) = \frac{k_p}{p}, \quad (2-60)$$

где k_p — коэффициент передачи регулятора.

Выражение (2-59) можно записать в виде:

$$\frac{dx_p}{dt} = k_p x.$$

Следовательно, в И-регуляторе скорость перемещения исполнительного механизма (скорость воздействия на регулирующий орган) пропорциональна отклонению регулируемой величины.

Коэффициент передачи регулятора k_p численно равен скорости перемещения исполнительного механизма при отклонении регулируемой величины на единицу ее измерения.

В динамическом отношении И-регуляторы представляют собой интегрирующее звено (см. рис. 2-4).

3. Пропорционально-интегральные регуляторы

ПИ-регуляторы оказывают воздействие на регулирующий орган пропорционально отклонению и интегралу от отклонения регулируемой величины:

$$x_p = k_p \left(x + \frac{1}{T_i} \int x dt \right). \quad (2-61)$$

Постоянная времени T_i называется временем изодрома. Она определяет величину составляющей регулирующего воздействия, пропорциональной интегралу от отклонения регулируемой величины x и численно равна «времени удвоения» регулятора, т. е. времени, в течение которого первоначальное значение выходной величины регулятора, равное $k_p x_0$, удваивается вследствие действия одной только его интегральной части (рис. 2-25).

Выражение (2-61) можно записать в виде:

$$\frac{dx_p}{dt} = k_p \left(\frac{dx}{dt} + \frac{1}{T_n} x \right),$$

откуда следует, что скорость перемещения исполнительного механизма в ПИ-регуляторе пропорциональна как скорости изменения регулируемой величины, так и самому изменению регулируемой величины.

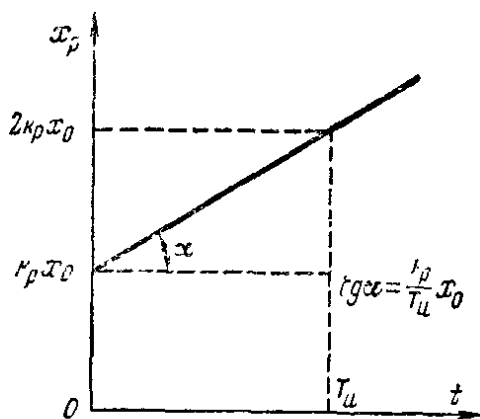


Рис. 2-25. Закон регулирования ПИ-регулятора.

Передаточная функция ПИ-регулятора

$$W(p) = k_p \frac{T_n p + 1}{T_n p}. \quad (2-62)$$

В динамическом отношении ПИ-регулятор эквивалентен П-регулятору с коэффициентом передачи k_p и И-регулятору с коэффициентом передачи k_p/T_n , соединенным параллельно.

Если при настройке ПИ-регулятора установить очень большую величину времени изодрома T_n , то он превратится в П-регулятор.

Если при настройке регулятора установить очень малые значения k_p и T_n , но при этом так, чтобы их отношение k_p/T_n имело существенную величину, получим И-регулятор с коэффициентом передачи k_p/T_n .

Закон регулирования ПИ-регулятора представлен на рис. 2-25.

При скачкообразном изменении регулируемой величины на величину $x = x_0$ идеальный ПИ-регулятор вначале мгновенно перемещает исполнительный механизм на величину $k_p x_0$, пропорциональную отклонению x_0 регулируемой величины, после чего исполнительный механизм регулятора дополнительно перемещается в ту же сторону со скоростью $\frac{k_p}{T_n} x_0$, пропорциональной отклонению регулируемой величины. Следовательно, в ПИ-регуляторе при отклонении регулируемой величины от заданного значения мгновенно срабатывает пропорциональная (статическая) часть регулятора, а затем воздействие на объект постепенно увеличивается под действием интегральной части регулятора, называемой астатической.

Параметрами настройки регулятора являются коэффициент передачи k_p и время изодрома T_n . При изменении регулируемой величины скорость воздействия на объект астатической части регулятора определяется величиной отношения k_p/T_n .

4. Пропорционально-интегрально-дифференциальные регуляторы

ПИД-регуляторы воздействуют на регулирующий орган пропорционально отклонению x регулируемой величины, интегралу этого отклонения и скорости изменения регулируемой величины:

$$x_p = k_p \left(x + \frac{1}{T_n} \int x dt + T_{пр} \frac{dx}{dt} \right). \quad (2-63)$$

Постоянная времени $T_{пр}$ определяет степень влияния производной dx/dt (скорости изменения регулируемой величины) на закон регулирования и называется временем предварения.

Передаточная функция регулятора.

$$W_p(p) = k_p \frac{T_{пр} T_n p^2 + T_n p + 1}{T_n p}. \quad (2-64)$$

При скачкообразном изменении регулируемой величины идеальный ПИД-регулятор в начальный момент времени оказывает мгновенное бесконечно большое воздействие на регулирующий орган; затем величина воздействия мгновенно падает до значения, определяемого пропорциональной частью регулятора, после чего, как и в ПИ-регуляторе, постепенно начинает оказывать свое влияние астатическая часть регулятора.

Параметрами настройки регулятора являются коэффициент передачи регулятора k_p , время изодрома T_n и время предварения $T_{пр}$.

ПИД-регулятор по возможностям настройки является более универсальным по сравнению с другими регуляторами. С его помощью можно осуществлять различные законы регулирования.

Так, при $T_{пр} = 0$ и бесконечно большой величине T_n получаем П-регулятор. При $T_{пр} = 0$, устанавливая достаточно малые значения k_p и T_n , но так, чтобы отношение k_p/T_n было существенным, получаем И-регулятор. При $T_{пр} = 0$ и конечных значениях k_p и T_n имеем ПИ-регулятор.

2-8. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЗВЕНЬЕВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Пример 1. Определение передаточной функции системы автоматического регулирования температуры сушильного шкафа.

Структурная схема системы изображена на рис. 2-26.

На структурной схеме рис. 2-26 для более удобного определения передаточных функций система регулирования разбита на более простые элементарные звенья, чем это сделано на структурной схеме рис. 2-21. Так, регулирующий орган с передаточной

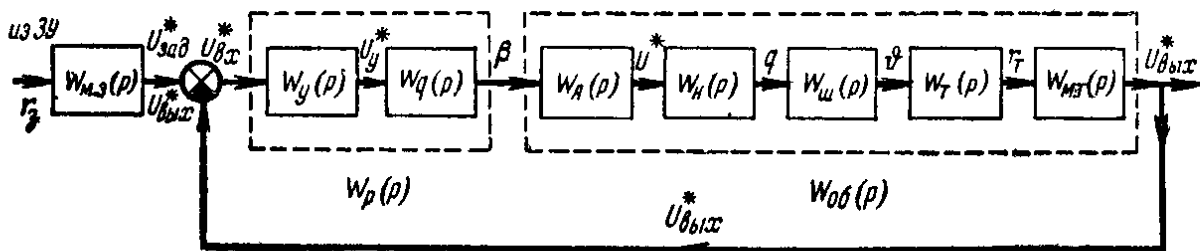


Рис. 2-26. Структурная схема системы автоматического регулирования по рис. 1-5.

функцией $W_{р.о.}(p)$ разбит на два звена (автотрансформатор и нагревательный элемент) с передаточными функциями $W_A(p)$ и $W_H(p)$, соединенные последовательно.

Измерительное устройство с передаточной функцией $W_{и.у.}(p)$ также разбито на два последовательно соединенных звена (термометр сопротивления и измерительный мостик с каналом прохождения сигнала от термометра сопротивления) с передаточными функциями $W_T(p)$ и $W_{м.т.}(p)$.

Заданное значение температуры (см. рис. 1-5) устанавливается перемещением движка сопротивления R_3 .

При нарушении равновесия моста на его выходе появится напряжение $U_{вх}$, которое подается на вход электронного усилителя с передаточной функцией $W_y(p)$. На выходе усилителя появляется напряжение U_y , которое подается на электродвигатель (исполнительный механизм), изображенный на структурной схеме как элемент с передаточной функцией $W_d(p)$. Выходной величиной двигателя является угол поворота β его ротора. Электродвигатель перемещает движок автотрансформатора АТ с передаточной функцией $W_A(p)$, выходной величиной которого является напряжение U , а входной — угол поворота β ротора двигателя. Напряжение U с автотрансформатора подается (вход) на нагревательный элемент Н с передаточной функцией $W_H(p)$, в котором за единицу времени выделяется тепловая энергия Q [ккал/сек] (выход). Энергия Q поступает (вход) в сушильный шкаф (объект регулирования) с передаточной функцией $W_{ш}(p)$, в результате чего в нем устанавливается температура Θ °С (выход). В зависимости от температуры Θ шкафа изменяется сопротивление R_T термометра сопротивления, передаточная функция которого $W_T(p)$. Входной величиной является температура Θ

шкафа, а выходной — сопротивление R_T . Каждому значению сопротивления R_T соответствует определенная величина напряжения $U_{\text{вых}}$ на выходе измерительного моста (рис. 2-27).

Измерительный мост как элемент системы с входной величиной R_T и выходной $U_{\text{вых}}$ представлен в виде звена с передаточной функцией $W_{\text{м.т}}(p)$.

Каждому положению движка задающего сопротивления R_3 между точками B и D измерительного моста соответствует определенная величина напряжения $U_{\text{зад}}$. Измерительный мост как элемент системы с входной величиной R_3 и выходной $U_{\text{зад}}$ представим в виде звена с передаточной функцией $W_{\text{м.з}}(p)$.

Выход системы $U_{\text{вых}}$ подается с обратным знаком на ее вход и сравнивается с заданием $U_{\text{зад}}$. Это сравнение происходит в измерительном мосте системы.

Если действительное значение температуры сушильного шкафа равно заданному, то $U_{\text{вых}} = U_{\text{зад}}$; тогда потенциалы точек C и D одинаковы, измерительный мост находится в равновесии, на вход электронного усилителя (вход системы) напряжение не поступает и система регулирования в целом находится в равновесии.

Если температура шкафа не равна заданной, то $U_{\text{вых}} \neq U_{\text{зад}}$; равновесие моста нарушается; на вход электронного усилителя подается напряжение ошибки $U_{\text{вх}} = U_{\text{зад}} - U_{\text{вых}}$, которое усиливается, и электродвигатель начинает вращаться в сторону восстановления заданного значения температуры сушильного шкафа. Определим передаточную функцию сушильного шкафа.

За элементарный отрезок времени dt нагревательным элементом в сушильный шкаф будет выделено количество энергии $Q dt$ ккал. Эта энергия будет израсходована на повышение температуры сушильного шкафа и компенсацию теплоотдачи шкафа в окружающую среду.

При теплоемкости сушильного шкафа, равной C ккал/ $^{\circ}\text{C}$, для повышения температуры шкафа на $d\theta$ $^{\circ}\text{C}$ потребуется $C d\theta$ ккал энергии, так как теплоемкостью называется количество тепла, потребное для нагрева шкафа на 1°C .

При коэффициенте теплоотдачи сушильного шкафа, равном $k_{\text{то}} \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{сек} \cdot ^{\circ}\text{C}}$, и теплоотдающей поверхности шкафа $F_{\text{ш}} \text{ м}^2$ количество

тепла, отдаваемого шкафом в окружающую среду, будет равно $k_{\text{то}} F_{\text{ш}} \theta dt$, так как коэффициент теплоотдачи равен количеству тепла в (ккал), передаваемому в окружающую среду с 1 м^2 поверхности шкафа за 1 сек при разности температур 1°C .

Теплоотдача сушильного шкафа в целом за 1 сек при разности температур 1°C будет равна $A = k_{\text{то}} F_{\text{ш}} \text{ ккал/сек} \cdot ^{\circ}\text{C}$.

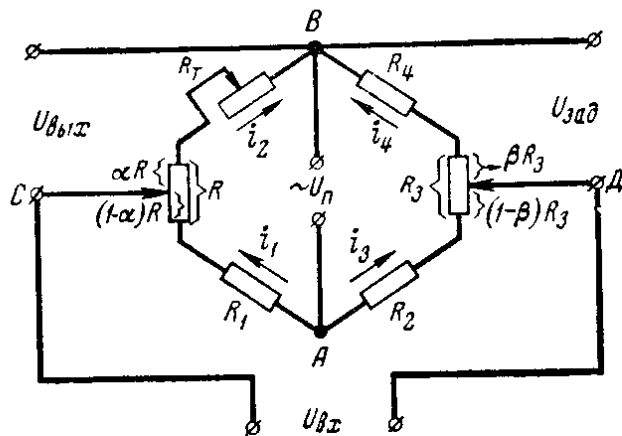


Рис. 2-27. Схема измерительного моста.

Тепловой баланс сушильного шкафа запишется как

$$Q dt = C d\Theta + A\Theta dt,$$

или

$$\frac{C}{A} \cdot \frac{d\Theta}{dt} + \Theta = \frac{Q}{A}.$$

Обозначив

$$\frac{C}{A} = T_{ш} \text{ и } \frac{1}{A} = k_{ш},$$

получим:

$$T_{ш} \frac{d\Theta}{dt} + \Theta = k_{ш} Q, \quad (2-65)$$

Вследствие аналогии уравнений (2-65) и (2-21) сушильный шкаф в динамическом отношении может быть представлен инерционным звеном первого порядка.

При теплоемкости шкафа, например, $C = 16,2 \text{ ккал/}^\circ\text{С}$ и теплоотдаче $A = 0,009 \text{ ккал/сек}\cdot^\circ\text{С}$ постоянная времени шкафа и его коэффициент передачи будут соответственно равны:

$$T_{ш} = \frac{C}{A} = 1800 \text{ сек};$$

$$k_{ш} = \frac{1}{A} = 111 \text{ сек}\cdot^\circ\text{С/ккал}.$$

В установившемся режиме, когда температура шкафа будет равна заданной, потребляемая им энергия будет расходоваться только на восполнение количества тепла, отдаваемого шкафом в окружающую среду:

$$Q_0 dt = A\Theta_0 dt,$$

или

$$\Theta_0 = k_{ш} Q_0.$$

Энергия Q_0 , поступающая в шкаф в единицу времени и необходимая для поддержания заданной номинальной температуры, например $\Theta_0 = 400^\circ\text{С}$, будет равна:

$$Q_0 = \frac{\Theta_0}{k_{ш}} = \frac{400}{111} = 3,6 \text{ ккал/сек}.$$

Величины параметров Q и Θ системы при отклонении их на ΔQ и $\Delta\Theta$ от значений, соответствующих равновесному состоянию, будут равны $Q = Q_0 + \Delta Q$ и $\Theta = \Theta_0 + \Delta\Theta$. Подставив их в уравнение (2-65), получим:

$$T_{ш} \frac{d(\Theta_0 + \Delta\Theta)}{dt} + \Theta_0 + \Delta\Theta = k_{ш} (Q_0 + \Delta Q).$$

Учитывая, что производная от постоянной величины равна нулю, а $\Theta_0 = k_{ш} Q_0$, получим дифференциальное уравнение сушильного шкафа в приращениях от состояния равновесия:

$$T_{ш} = \frac{d\Delta\Theta}{dt} + \Delta\Theta = k_{ш} \Delta Q.$$

Введя в расчет относительные единицы $\Delta\Theta/\Theta_0 = \vartheta$ и $\Delta Q/Q_0 = q$ и подставив в выведенное уравнение $\Delta\Theta = \vartheta\Theta_0$ и $\Delta Q = qQ_0$, получим:

$$T_{ш} \frac{d\vartheta}{dt} + \vartheta = q.$$

Передачная функция сушильного шкафа, согласно формуле (2-22) имеет вид (если в качестве входной и выходной величин принять соответственно относительные величины q и ϑ и иметь в виду, что при этом относительный коэффициент передачи звена равен $k_{ш}^* = 1$):

$$W_{ш}(p) = \frac{1}{T_{ш} p + 1}. \quad (2-66)$$

В качестве термометра сопротивления берем платиновый термометр (градуировка 21). По градуировочной таблице на рис. 2-28 построена зависимость сопротивления платинового термометра от температуры.

В точке O' равновесного состояния системы при температуре $\Theta_0 = 400^\circ\text{C}$ аналогично выражению (2-2) находим.

$$\Delta R_T = k_T \Delta\Theta,$$

где

$$k_T = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta R_T}{\Delta\Theta} = 0,16 \text{ ом}/^\circ\text{C}.$$

Пользуясь относительными единицами $r_T = \Delta R_T/R_{T0}$ и $\vartheta = \Delta\Theta/\Theta_0$, получим: $r_T = k_T \frac{\Theta}{R_{T0}} \vartheta$,

или

$$r_T = k_T^* \vartheta,$$

где $k_T^* = k_T \frac{\Theta_0}{R_{T0}} = \frac{r_T}{\vartheta}$ — относительный коэффициент передачи термометра сопротивления.

В состоянии равновесия системы при $\Theta_0 = 400^\circ\text{C}$ сопротивление термометра $R_{T0} = 114,72 \text{ ом}$, следовательно

$$k_T^* = 0,16 \frac{400}{114,72} = 0,558.$$

Передачная функция термометра сопротивления равна:

$$W_T(p) = k_T^*,$$

т. е. термометр является усилительным звеном.

Найдем передачные функции измерительного моста. При изменении величины сопротивления R_T термометра изменяется вели-

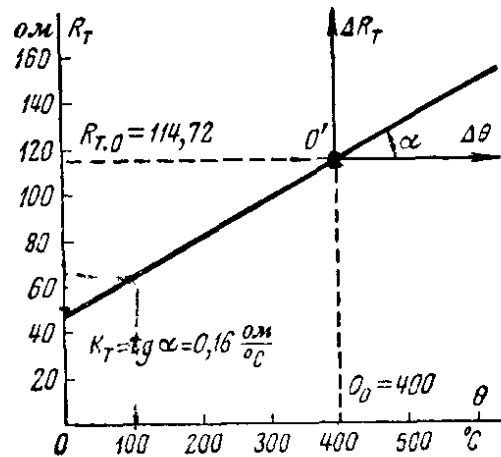


Рис. 2-28. Зависимость сопротивления платинового термометра сопротивления от температуры.

чина выходного напряжения $U_{\text{вых}}$, равного разности потенциалов между точками С и В (см рис 2 27)

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{С}} - U_{\text{В}}$$

Передаточная функция измерительного моста, если принять за входную величину изменение величины сопротивления R_{T} , а за выходную изменение напряжения $U_{\text{вых}}$, будет равна

$$W_{\text{м т}}(p) = \frac{\Delta U_{\text{вых}}(p)}{\Delta R_{\text{T}}(p)}$$

При изменении заданного значения регулируемой величины путем перемещения движка задающего сопротивления R_3 изменится величина управляющего воздействия (напряжения) $g(t) = U_{\text{зад}}$, равного разности потенциалов (см рис 2 27) между точками Д и В

$$U_{\text{зад}} = U_{\text{Д}} - U_{\text{В}}$$

Передаточная функция измерительного моста, если принять за входную величину изменение той части сопротивления R_3 , которая вводится в плечо моста с сопротивлением R_4 , а за выходную изменение напряжения $U_{\text{зад}}$, будет равна

$$W_{\text{м з}}(p) = \frac{\Delta U_{\text{зад}}(p)}{\Delta \beta R_3(p)},$$

где βR_3 — доля сопротивления R_3 , включенная в плечо сопротивления R_4

Вычтя из напряжения $U_{\text{зад}}$ напряжение $U_{\text{вых}}$, получим

$$U_{\text{зад}} - U_{\text{вых}} = U_{\text{Д}} - U_{\text{В}} - U_{\text{С}} + U_{\text{В}} = U_{\text{Д}} - U_{\text{С}} = U_{\text{вх}}$$

Таким образом, напряжение, снимаемое со второй диагонали моста, является разностью напряжений $U_{\text{зад}}$ и $U_{\text{вых}}$, т е входным напряжением $U_{\text{вх}}$ системы регулирования

При значении регулируемой величины, равном заданному, т е при $U_{\text{зад}} = U_{\text{вых}}$, измерительный мост находится в равновесии и на вход электронного усилителя напряжение не подается ($U_{\text{вх}} = 0$)

Так как вход электронного усилителя является высокоомным, то практически $i_1 = i_2$ и, следовательно (см рис 2 27),

$$U_{\text{вых}} = \frac{R_{\text{T}} + \alpha R}{R_{\text{T}} + R + R_1} U_{\text{п}} \quad (2 67)$$

При изменении величины сопротивления R_{T} на величину ΔR_{T} получим

$$U_{\text{вых}} + \Delta U_{\text{вых}} = \frac{R_{\text{T}} + \Delta R_{\text{T}} + \alpha R}{R_{\text{T}} + \Delta R_{\text{T}} + R + R_1} U_{\text{п}}$$

Так как в состоянии равновесия $R_{\text{T}} = R_{\text{то}}$, а вблизи состояния равновесия ΔR_{T} имеет небольшое значение, то, пренебрегая этой

величиной в знаменателе и вычтя из последнего уравнения уравнение (2 67), получим

$$\Delta U_{\text{ВЫХ}} = \frac{U_{\text{П}}}{R_{\text{T0}} + R + R_1} \Delta R_{\text{T}} = k_{\text{М Т}} \Delta R_{\text{T}}, \quad (2\ 68)$$

где $k_{\text{М Т}} = \frac{U_{\text{П}}}{R_{\text{T0}} + R + R_1}$ — коэффициент передачи

Выбрав в качестве базовых значений напряжение питания измерительного моста $U_{\text{П}}$ и величину сопротивления термометра в равновесном состоянии R_{T0} при температуре $\Theta_0 = 400^\circ \text{C}$, введем в расчет относительные единицы

$$\Delta U_{\text{ВЫХ}}/U_{\text{П}} = u_{\text{ВЫХ}}^* \quad \text{и} \quad \Delta R_{\text{T}}/R_{\text{T0}} = r_{\text{T}}.$$

Получив из этих равенств величины $\Delta U_{\text{ВЫХ}}$ и ΔR_{T} и подставив их в уравнение (2 68), найдем

$$u_{\text{ВЫХ}}^* = k_{\text{М Т}}^* r_{\text{T}},$$

где $k_{\text{М Т}}^*$ — коэффициент передачи в относительных единицах

$$k_{\text{М Т}}^* = \frac{R_{\text{T0}}}{R_{\text{T0}} + R + R_1}$$

Передающая функция измерительного моста при входном воздействии ΔR_{T} будет равна

$$W_{\text{М Т}}(\rho) = k_{\text{М Т}} \quad (2\ 69)$$

Если из условий технологии требуются, например, пределы настройки температуры сушильного шкафа от 300 до 500°C , то, выполнив расчет измерительного моста при напряжении питания $U_{\text{П}} = 6,3 \text{ в}$, получим значения сопротивлений его плеч $R_1 = 120 \text{ ом}$, $R = 820 \text{ ом}$, $R_2 = 510 \text{ ом}$, $R_3 = 15,3 \text{ ом}$, $R_4 = 505 \text{ ом}$

Коэффициент передачи для равновесного состояния при температуре нагревательной печи $\Theta_0 = 400^\circ \text{C}$ будет равен

$$k_{\text{М Т}} = \frac{6,3}{114,72 + 820 + 120} = 0\ 00598 \text{ в/ом}$$

В относительных единицах

$$k_{\text{М Т}}^* = \frac{114,72}{114,72 + 820 + 100} = 0,109$$

Аналогично уравнению (2 67) из рис 2-27 можно заключить, что

$$U_{\text{зад}} = \frac{R_4 + \beta R_3}{R_2 + R_3 + R_4} U_{\text{П}} \quad (2\ 70)$$

Из этого уравнения легко получить зависимость, аналогичную формуле (2 68)

$$\Delta U_{\text{зад}} = k_{\text{М з}} \Delta \beta R_3, \quad (2-71)$$

где

$$k_{мз} = \frac{U_{\Pi}}{R_2 + R_3 + R_4}.$$

При использовании относительных единиц

$$\Delta U_{\text{зад}}/U_{\Pi} = u_{\text{зад}}^* \quad \text{и} \quad \Delta \beta R_3/R_3 = r_3 = \Delta \beta$$

выражение (2-71) запишется так:

$$u_{\text{зад}}^* = k_{мз}^* r_3, \quad (2-72)$$

где $k_{мз}^*$ — коэффициент передачи в относительных единицах:

$$k_{мз}^* = \frac{R_3}{R_2 + R_3 + R_4}.$$

Передаточная функция измерительного моста, если за его вход принято перемещение $\Delta \beta R_3$ движка сопротивления R_3 , равна:

$$W_{мз}(p) = k_{мз}.$$

Абсолютное значение коэффициента передачи для равновесного состояния, при котором $\Theta = \Theta_0$ равно $k_{мз} = 0,0061$ в/ом, а относительное $k_{мз}^* = 0,0148$.

При коэффициенте усиления электронного усилителя k_y^* его выходное напряжение при подаче на вход напряжения $U_{\text{вх}}$ будет равно:

$$U_y = k_y U_{\text{вх}}.$$

Разделив правую и левую части этого выражения на величину напряжения питания измерительного мостика U_{Π} , получим зависимость между входным и выходным значениями напряжения электронного усилителя в относительных единицах:

$$\frac{U_y}{U_{\Pi}} = k_y^* \frac{U_{\text{вх}}}{U_{\Pi}},$$

откуда

$$k_y^* = \frac{U_y U_{\Pi}}{U_{\Pi} U_{\text{вх}}} = k_y.$$

Следовательно, для электронного усилителя абсолютное и относительное значения коэффициента усиления будут одинаковыми.

Передаточная функция электронного усилителя

$$W_y(p) = k_y.$$

Берем в качестве исполнительного механизма конденсаторный двигатель (рис. 2-29, а) с числом пар полюсов, равным единице.

Число оборотов в минуту n конденсаторного двигателя в зависимости от напряжения на управляющей обмотке U_y определяется выражением

$$n = \frac{2U_y U_c}{U_y^2 + U_c^2} \left(1 - \frac{M_{\Pi}}{M_{кз}} \right) n_{\text{макс}}, \quad (2-73)$$

где U_c — напряжение сети;
 M_H — момент сопротивления нагрузки,
 $M_{к.з}$ — максимальный момент нагрузки, при котором двигатель затормаживается (момент короткого замыкания);

n_{\max} — максимальное число оборотов двигателя при $U_y = U_c$.
 Из выражения (2-73) следует, что число оборотов является нелинейной функцией относительно управляющего напряжения.

Для линеаризации выражения (2-73) находим производную:

$$\left(\frac{dn}{dU_y}\right) = \frac{(U_c^2 - 2U_y^2) 2U_c}{(U_y^2 + U_c^2)^2} \times \left(1 - \frac{M_H}{M_{к.з}}\right) n_{\max}.$$

В состоянии равновесия выходное напряжение электронного усилителя равно нулю и, следовательно, $U_y = 0$ и $n = 0$.

Производная dn/dU_y в точке равновесного состояния равна.

$$\begin{aligned} \left(\frac{dn}{dU_y}\right)_{U_y=0} &= \\ &= 2 \left(1 - \frac{M_H}{M_{к.з}}\right) \frac{n_{\max}}{U_c}. \end{aligned}$$

Так как в состоянии равновесия $U_y = 0$ и $n = 0$, то при отклонении, от состояния равновесия величины приращений числа оборотов и управляющего напряжения соответственно равны числу оборотов и управляющему напряжению $\Delta n = n$ и $\Delta U_y = U_y$.

С учетом этих условий находим по формуле (2-5) линеаризованное выражение нелинейной функции $n = f(U_y)$ в окрестности точки равновесного состояния (рис 2-29, б).

$$n = 2 \left(1 - \frac{M_H}{M_{к.з}}\right) \frac{n_{\max}}{U_c} U_y. \quad (2-74)$$

Угол поворота β_d выходного вала двигателя в градусах за время t в секундах можно выразить через число его оборотов n в минуту:

$$\beta_d = \frac{360^\circ}{60} nt = 6nt^\circ.$$

Поворот выходного вала двигателя на элементарный угол $d\beta_d$ произойдет за бесконечно малый отрезок времени dt :

$$d\beta_d = 6n dt.$$

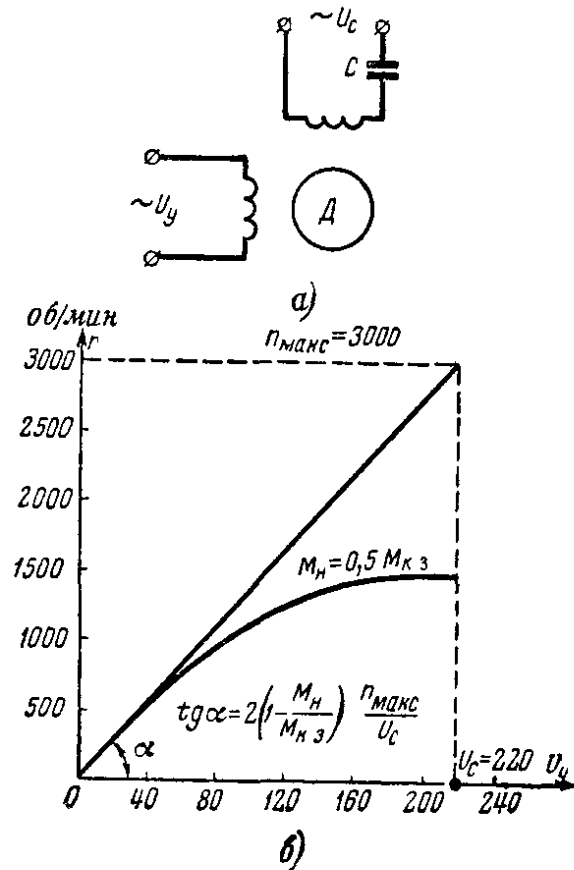


Рис 2-29. Конденсаторный электродвигатель.
 а — схема, б — регулировочная характеристика.

Следовательно,

$$n = \frac{1}{6} \cdot \frac{d\beta_{\text{д}}}{dt}.$$

Подставив значение n в формулу (2-74), получим:

$$\frac{d\beta_{\text{д}}}{dt} = k_{\text{д}} U_{\text{у}},$$

где

$$k_{\text{д}} = 12 \left(1 - \frac{M_{\text{н}}}{M_{\text{к.з}}} \right) \frac{n_{\text{макс}}}{U_{\text{с}}}.$$

Абсолютное напряжение $U_{\text{у}}$ на выходе электронного усилителя через относительное напряжение $u_{\text{у}}^* = U_{\text{у}}/U_{\text{п}}$ определяется выражением

$$U_{\text{у}} = u_{\text{у}}^* U_{\text{п}}.$$

Принимая за базовое значение для угла поворота двигателя максимальный угол поворота движка автотрансформатора $\gamma_{\text{макс}}$ и обозначив $\beta_{\text{д}}/\gamma_{\text{макс}} = \beta^*$, получим дифференциальное уравнение двигателя в безразмерной форме:

$$\frac{d\beta^*}{dt} = k_{\text{д}}^* u_{\text{у}}^*,$$

где

$$k_{\text{д}}^* = 12 \left(1 - \frac{M_{\text{н}}}{M_{\text{к.з}}} \right) \frac{U_{\text{п}}}{U_{\text{с}}} \cdot \frac{n_{\text{макс}}}{\gamma_{\text{макс}}}.$$

Таким образом, конденсаторный двигатель с малой электро-механической инерцией в динамическом отношении является интегрирующим звеном, поскольку его дифференциальное уравнение совпадает с уравнением (2-15), если за входную величину принята относительная величина напряжения управляющей обмотки $u_{\text{у}}^*$, а за выходную — относительный угол поворота выходного вала β^* .

Передаточная функция двигателя

$$W_{\text{д}}(p) = \frac{k_{\text{д}}^*}{p}.$$

При стандартной частоте сети и одной паре полюсов двигателя

$$n_{\text{макс}} = 3000 \text{ об/мин.}$$

Определяя экспериментально или расчетом момент сопротивления нагрузки, например $M_{\text{н}} = 0,5 M_{\text{к.з}}$ при $U_{\text{с}} = 220 \text{ в}$ и $\gamma_{\text{макс}} = 300^\circ$, находим коэффициент усиления:

$$k_{\text{д}} = 12 (1 - 0,5) \frac{3000}{220} = 81,7 \text{ град/в}\cdot\text{сек.}$$

В относительных единицах получим:

$$k_{\text{д}}^* = K_{\text{д}} \frac{U_{\text{п}}}{\gamma_{\text{макс}}} = 81,7 \cdot \frac{6,3}{300} = 1,72 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Выходное напряжение автотрансформатора U пропорционально углу поворота γ его движка: $U = k_{\text{А.Т}} \gamma$.

В приращениях от состояния равновесия запишем:

$$\Delta U = k_{\text{А.Т}} \Delta \gamma.$$

При $\gamma = \gamma_{\text{макс}}$ напряжение $U = U_{\text{с}}$, следовательно коэффициент передачи автотрансформатора равен:

$$k_{\text{А.Т}} = \frac{U_{\text{с}}}{\gamma_{\text{макс}}}.$$

Обозначив передаточное число кинематической связи (редуктора) от вала двигателя к движку автотрансформатора через $K_{\text{А}}$, можно записать:

$$\Delta \gamma = K_{\text{А}} \beta_{\text{д}}.$$

Таким образом,

$$\Delta U = k_{\text{А.Т}} K_{\text{А}} \beta_{\text{д}}.$$

Подставив сюда значение $k_{\text{А.Т}} = U_{\text{с}}/\gamma_{\text{макс}}$, используя относительные единицы $\Delta U/U_{\text{с}} = u^*$; $\beta_{\text{д}}/\gamma_{\text{макс}} = \beta^*$ и учитывая, что кинематический коэффициент передачи $K_{\text{А}}$ в абсолютных единицах равен его значению в относительных единицах $k_{\text{А}}^*$, получим:

$$u^* = k_{\text{А}}^* \beta^*.$$

Таким образом, если в качестве входной и выходной величин принять соответственно относительные величины угла поворота двигателя β^* и приращения выходного напряжения автотрансформатора U^* , то передаточная функция автотрансформатора совместно с кинематической связью приобретает вид:

$$W_{\text{А}}(p) = k_{\text{А}} = k_{\text{А}}^*.$$

При передаточном отношении от вала двигателя к движку автотрансформатора 1 : 1350 будем иметь:

$$k_{\text{А}}^* = K_{\text{А}} = \frac{1}{1350} = 74 \cdot 10^{-5}.$$

Мощность, выделяющаяся в нагревательном элементе шкафа,

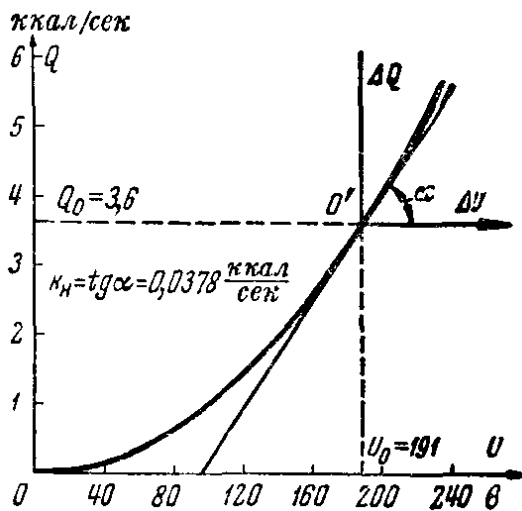
$$P = \frac{U^2}{R_{\text{н}}},$$

где $R_{\text{н}}$ — сопротивление спирали нагревательного элемента, *ом*;
 P — мощность, *вт*;
 U — напряжение, подаваемое с автотрансформатора на нагревательный элемент, *в*.

При исчислении мощности в тепловых единицах (ккал/сек) на основании известного соотношения $Q_H = 0,24 P$ получим:

$$[Q_H = 0,24 \frac{U^2}{R_H} *$$

Таким образом мощность, выделяющаяся в нагревательном элементе, является нелинейной функцией подводимого напряжения (рис. 2-30). Произведя линеаризацию этой нелинейности в точке равновесного состояния, согласно формуле (2-5) получим:



$$\begin{aligned} \Delta Q_H &= \left(\frac{dQ_H}{dU} \right)_{\substack{Q_H=Q_0 \\ U=U_0}} \Delta U = \\ &= 0,48 \frac{U_0}{R_H} \Delta U \end{aligned}$$

При $R_H = 2420$ ом найдем напряжение, которое необходимо подвести к нагревательному элементу, чтобы подать в единицу времени количество энергии, равное $Q_0 = 3,6$ ккал/сек, обеспечивающее постоянную температуру шкафа, равную 400°C :

$$\begin{aligned} U_0 &= \sqrt{\frac{Q_0 R_H}{0,24}} = \\ &= \sqrt{\frac{3,6 \cdot 2420}{0,24}} = 191 \text{ в.} \end{aligned}$$

Рис. 2-30. Зависимость мощности, потребляемой нагревательным элементом, от подводимого напряжения и ее линеаризация в точке равновесного состояния.

Тепловой баланс нагревательного элемента запишется так:

$$Q_H dt = C_H d\Theta_H + A_H \Theta_H dt,$$

где C_H A_H и Θ_H — соответственно теплоемкость, секундная удельная теплоотдача и температура нагревательного элемента.

Так как произведение $A_H \Theta_H$ является энергией Q , отдаваемой нагревательным элементом в рабочее пространство шкафа за 1 сек, то можем записать

$$Q_H = T_H \frac{dQ}{dt} + Q,$$

где $T_H = C_H/A_H$ — постоянная времени нагревательного элемента.

Дифференциальное уравнение нагревательного элемента вращениях от состояния равновесия имеет вид:

$$T_H \frac{d\Delta Q}{dt} + \Delta Q = 0,48 \frac{U_0}{R_H} \Delta U = k_H \Delta U.$$

Выбрав относительные единицы $\Delta Q/Q_0 = q$ и $\Delta U/U_0 = u^*$, получим:

$$T_H \frac{dq}{dt} + q = k_H^* u^*,$$

где

$$k_H^* = 0,48 \frac{U_0 U_c}{R_H Q_0}.$$

Передаточная функция нагревательного элемента, принимая в качестве входной и выходной величин соответственно U^* и q , будет равна:

$$W_H(p) = \frac{k_H^*}{T_H p + 1}.$$

Передаточный коэффициент нагревательного элемента в относительных единицах равен:

$$k_H^* = 0,48 \frac{191 \cdot 220}{2420 \cdot 3,6} = 2,31,$$

а в абсолютных единицах

$$k_H = 0,48 \cdot \frac{191}{2420} = 0,0378 \text{ ккал/сек} \cdot \text{в}.$$

Согласно (2-50) передаточная функция регулятора будет равна:

$$W_P(p) = W_Y W_D(p) = \frac{k_D^* k_Y}{p} = \frac{k_P^*}{p}. \quad (2-75)$$

Таким образом, в качестве регулятора в рассматриваемой системе авторегулирования применен интегральный регулятор (И-регулятор).

Параметром настройки регулятора является коэффициент его передачи $k_P^* = k_D^* k_Y$, который изменяется путем изменения коэффициента усиления k_Y электронного усилителя.

Подставив в выражение для k_P^* величину k_D^* , получим:

$$k_P^* = 1,72 k_Y.$$

Передаточная функция объекта будет:

$$W_{об}(p) = W_A(p) W_H(p) W_T(p) W_{ш}(p) W_{M_T}(p).$$

Коэффициент передачи объекта

$$k_{об}^* = k_A^* k_H^* k_T^* k_{ш}^* k_{M_T}^* = 74 \cdot 10^{-5} \cdot 2,31 \cdot 0,558 \cdot 1 \cdot 0,109 = 10,45 \cdot 10^{-5}.$$

При постоянной времени нагревательного звена T_H , равной, например, 300 сек, получим:

$$\begin{aligned} W_{об}(p) &= \frac{k_{об}^*}{(T_{ш} p + 1)(T_H p + 1)} = \\ &= \frac{10,45 \cdot 10^{-5}}{(1800 p + 1)(300 p + 1)}. \end{aligned} \quad (2-76)$$

Следовательно, объект в динамическом отношении является инерционным звеном второго порядка.

Передаточная функция разомкнутой системы найдется по формуле (2-54):

$$W(p) = W_p(p) W_{об}(p) = \frac{k_p^* k_{об}^*}{(T_{ш} p + 1)(T_{н} p + 1) p} = \frac{18 \cdot 10^{-5} k_y}{(1800 p + 1)(300 p + 1) p} \quad (2-77)$$

Согласно формуле (2-56) находим передаточную функцию замкнутой системы по каналу управляющего воздействия:

$$\Phi(p) = \frac{k_{об}^* k_p^*}{T_{ш} T_{н} p^3 + (T_{ш} + T_{н}) p^2 + p + k_{об}^* k_p^*} = \frac{18 \cdot 10^{-5} k_y}{540000 p^3 + 2100 p^2 + p + 18 \cdot 10^{-5} k_y} \quad (2-78)$$

В соответствии с (2-57) передаточная функция замкнутой системы по каналу возмущающего воздействия имеет вид:

$$\Phi_f(p) = \frac{k_{об}^* p}{T_{ш} T_{н} p^3 + (T_{ш} + T_{н}) p^2 + p + k_{об}^* k_p^*} = \frac{10,45 \cdot 10^{-5} p}{540000 p^3 + 2100 p^2 + p + 18 \cdot 10^{-5} k_y} \quad (2-79)$$

Если инерционностью нагревательного элемента можно пренебречь и принять $T_{н} = 0$ (например, в случае, когда электроспираль расположена непосредственно в рабочем пространстве шкафа), то передаточная функция объекта имеет вид:

$$W_{об}(p) = \frac{k_{об}^*}{T_{ш} p + 1} = \frac{10,45 \cdot 10^{-5}}{1800 p + 1} \quad (2-80)$$

Следовательно, в этом случае объект является инерционным звеном первого порядка.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k_p^* k_{об}^*}{(T_{ш} p + 1) p} = \frac{18 \cdot 10^{-5}}{(1800 p + 1) p} \quad (2-81)$$

Передаточная функция замкнутой системы по каналу регулирующего воздействия

$$\Phi(p) = \frac{1}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}, \quad (2-82)$$

где

$$T_1 = \frac{1}{k_p^* k_{об}^*}; \quad T_2 = \sqrt{\frac{T_{ш}}{k_p^* k_{об}^*}} = \sqrt{T_{ш} T_1}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по каналу возмущающего воздействия будет:

$$\Phi_f(p) = \frac{k_f^* p}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}, \quad (2-83)$$

где $k_f^* = 1/k_p^*$.

При проектировании сушильного шкафа как объекта регулирования необходимо стремиться к уменьшению инерционности нагревательного элемента.

Пример 2. Определение передаточной функции системы автоматического регулирования температуры нагревательной печи.

Принципиальная схема системы представлена на рис. 2-1. Температура печи Θ измеряется термопарой. Термо-э. д. с. x термопары, пропорциональная температуре печи, воспринимается регулятором и сравнивается с напряжением задатчика $g(t)$, пропорциональным заданному значению температуры.

При отклонении температуры печи от заданной на регулирующее устройство поступает рассогласование ε , в результате чего изменяется давление сжатого воздуха на мембрану клапана, который в зависимости от знака рассогласования увеличивает или уменьшает подачу топлива в печь, восстанавливая заданное значение температуры.

Обозначив передаточную функцию регулятора $W_p(p)$, клапана $W_{p.o}(p)$ и нагревательной печи $W_{o.p}(p)$, получим структурную схему системы авторегулирования, представленную на рис. 2-21.

Если рабочее пространство печи отделено от топочного и передача энергии, выделяющейся в топочном пространстве (нагревательный элемент), в рабочую зону осуществляется благодаря теплоотдаче, то нагревательную печь согласно формуле (2-76) можно представить в виде инерционного звена второго порядка с передаточной функцией

$$W_{o.p}(p) = \frac{k_{o.p}^*}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

где T_1 и T_2 — соответственно постоянные времени рабочего пространства и топочного пространства.

В связи со значительной тепловой инерционностью нагревательной печи как объекта регулирования клапан по его динамическим свойствам, как это было показано в § 2-3, можно представить как инерционное звено первого порядка, пренебрегая инерционностью его движущихся частей; тогда его передаточная функция запишется как

$$W_{p.o}(p) = \frac{k_{p.o}^*}{T_3 p + 1}.$$

Если в качестве регулирующего устройства применен пропорциональный регулятор с передаточной функцией по формуле (2-58), то согласно с выражением (2-50) передаточная функция разомкну-

той системы авторегулирования, изображенной на рис. 2-21, имеет вид:

$$W(p) = \frac{k^*}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}, \quad (2-84)$$

где

$$k^* = k_p^* k_{p.o}^* k_{o.p}^* \quad (2-85)$$

— коэффициент передачи (усиления) разомкнутой системы.

Передаточная функция замкнутой системы по каналу управляющего воздействия в соответствии с формулой (2-56) запишется как

$$\Phi(p) = \frac{k^*}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + k^*} \quad (2-86)$$

Так как величины постоянных времени определяются конструктивными особенностями элементов системы, то настройка системы регулирования, показанной на рис. 2-1, осуществляется только изменением ее коэффициента усиления k^* путем воздействия на коэффициент передачи k_p регулятора.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Свойства звеньев, их соединений и систем автоматического регулирования в целом определяются их характеристиками. Характеристики могут быть статическими и динамическими. Статические характеристики определяют зависимость между выходной и входной величинами звена или системы в установившемся состоянии. Динамические характеристики определяют свойства звеньев и систем в переходном процессе. Динамические характеристики в свою очередь подразделяются на временные, или переходные, и частотные.

Характеристики могут быть получены экспериментальным путем или же в результате аналитических или графоаналитических расчетов.

3-1. СТАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Статической характеристикой звена называется зависимость его выходной величины от различных постоянных значений его входной величины в установившихся режимах.

Примерами статических характеристик звеньев могут служить: зависимость расхода топлива через клапан от хода его штока (см. рис. 2-2), зависимость скорости электродвигателя от подводимого напряжения (рис. 2-29), зависимость мощности, потребляемой нагревательным элементом, от подводимого к нему напряжения (рис. 2-30) и т. п.

Звенья или элементы системы, для которых в установившемся состоянии каждому значению входной величины соответствует определенное значение выходной величины, называются статическими.

Так как в статических звеньях в установившемся состоянии каждому значению входной величины соответствует определенное постоянное значение выходной величины, не зависящее от времени, то, имея в виду, что производная от постоянной величины равна нулю, приходим к выводу, что статическая характеристика этих звеньев аналитически определяется частным решением (2-34) дифференциального уравнения (2-33) звена или системы. Это справедливо для звеньев всех видов, так как их уравнения являются частными случаями уравнения (2-33), как это было указано в § 2-3.

Согласно уравнению (2-34) статическая характеристика статического звена или элемента системы в окрестности точки равновесного состояния в общем виде запишется как

$$\Delta x_{\text{вых}} = k \Delta x_{\text{вх}},$$

где k — коэффициент передачи звена или элемента системы.

Коэффициент передачи для данного установившегося состояния имеет постоянное значение и определяет значение производной $d\Delta x_{\text{вых}}/d\Delta x_{\text{вх}}$ статической характеристики в точке равновесного состояния (см. рис. 2-2).

Так как коэффициент передачи по существу является передаточной функцией $W(0) = k$ звена или системы в установившемся состоянии (при $t = \infty$; $p = 0$), то все формулы, ранее выведенные для определения передаточных функций соединений звеньев или систем через передаточные функции отдельных звеньев, справедливы и для определения коэффициентов передачи соединений звеньев или систем через передаточные коэффициенты отдельных звеньев.

Так, например, в окрестности точки равновесного состояния коэффициент передачи параллельно соединенных

звеньев (см. рис. 2-19) согласно уравнению (2-51) равен сумме коэффициентов передачи отдельных звеньев:

$$k = k_1 + k_2 + k_3. \quad (3-1)$$

Для графического построения статической характеристики соединения, составленного из параллельных звеньев при заданных статических характеристиках последних,

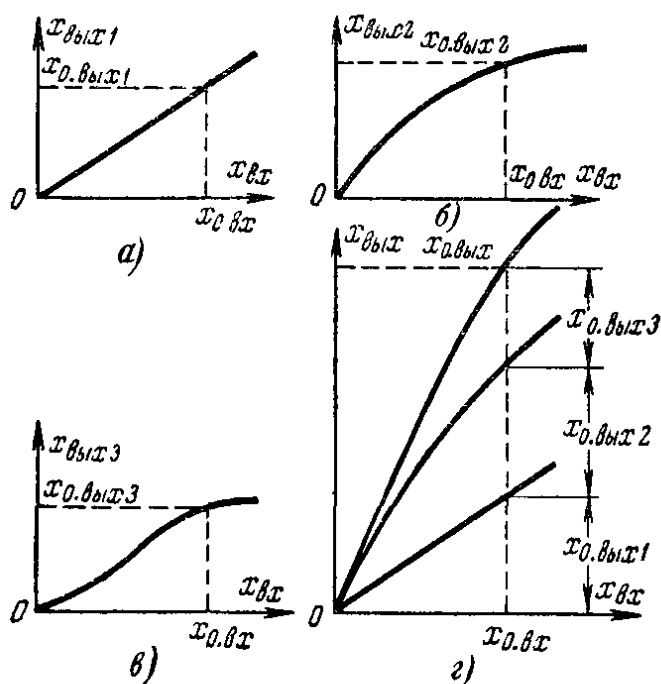


Рис. 3-1. Построение статической характеристики системы при параллельном соединении звеньев.

необходимо построить характеристики всех этих звеньев в одинаковом масштабе и просуммировать их ординаты для соответствующих значений входных величин (рис. 3-1).

Коэффициент передачи последовательно соединенных звеньев (см. рис. 2-18) согласно формуле (2-50) равен произведению коэффициентов передачи отдельных звеньев:

$$k = k_1 k_2 k_3. \quad (3-2)$$

Так как при последовательном соединении звеньев выходная величина каждого предыду-

щего звена является входной величиной каждого последующего звена, то для построения статической характеристики соединения необходимо построить характеристику первого звена в первом квадранте (рис. 3-2), характеристику второго звена построить во втором квадранте, но таким образом, чтобы ось абсцисс второго звена $x_{вх2}$ была совмещена с осью ординат $x_{вых1}$ первого звена. Характеристика третьего звена строится в третьем квадранте. При поступлении на вход соединения величины $x_{0вх}$ (рис. 3-2) на выходе первого звена получим выходную величину $x_{0вых1}$, которая будет входной величиной $x_{0вх2}$ для второго звена.

Выходная величина $x_{0вых2}$ второго звена является входной величиной $x_{0вх3}$ третьего звена. На выходе третьего звена устанавливается выходная величина $x_{0вых3}$, которая является выходной величиной $x_{0вых}$ соединения. Если теперь в чет-

вертом квадранте восстановить перпендикуляры к осям абсцисс и ординат в точках $x_{0вх}$ и $x_{0вых}$, то в их пересечении получим точку, которая принадлежит статической характеристике соединения, так как определяет зависимость между входной и выходной величинами соединения в установившемся состоянии. Произведя аналогичные построения для других значений входной величины, получим статическую характеристику соединения в четвертом квадранте.

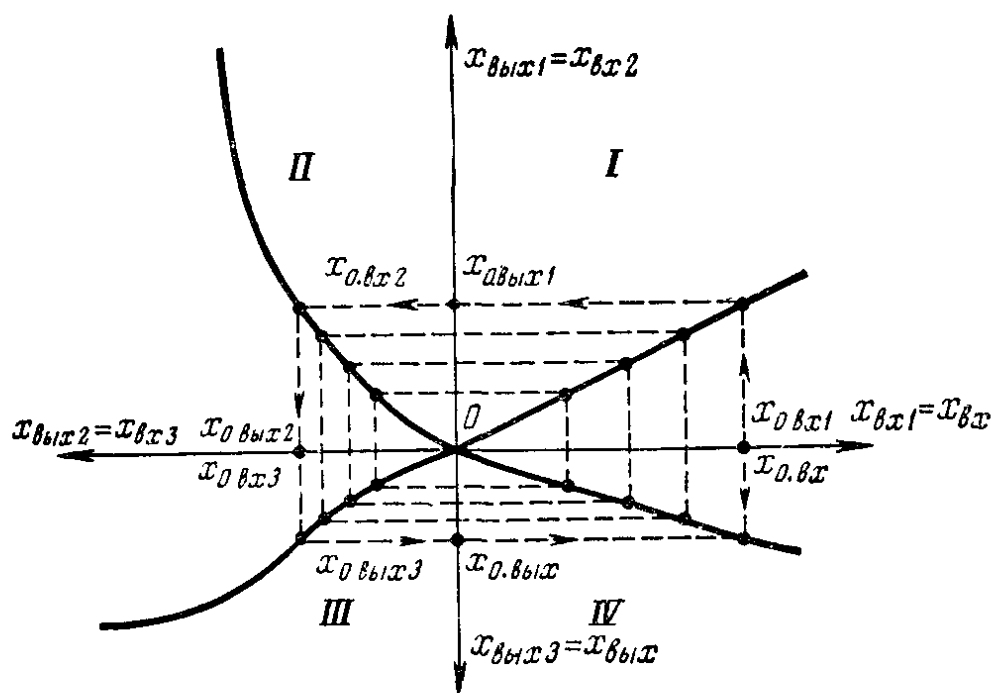


Рис. 3-2. Построение статической характеристики системы при последовательном соединении звеньев.

При построении статической характеристики соединения, состоящего из двух звеньев, в третьем квадранте проводится вспомогательная линия из начала координат под углом 45° к оси абсцисс, что эквивалентно условному подключению третьего звена с коэффициентом передачи, равным единице.

При определении статических характеристик соединения, образованного из более чем трех последовательных звеньев, построение выполняется для первых трех звеньев, затем повторяется для последующих трех звеньев и т. д. После этого выполняют аналогичные построения с полученными результирующими статическими характеристиками и, таким образом, находят статическую характеристику всего соединения.

При встречно-параллельном соединении звеньев передаточный коэффициент соединения согласно формуле (2-52) определяется выражением

$$k = \frac{k_1}{1 \pm k_1 k_{oc}} \quad (3-3)$$

Знак «+» относится к отрицательной обратной связи, знак «-» — к положительной обратной связи.

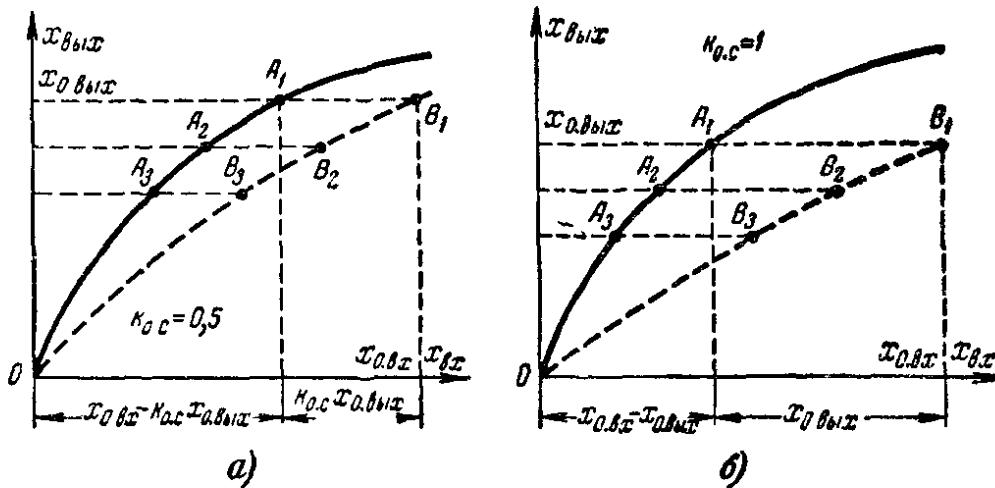


Рис. 3-3 Построение статической характеристики системы при встречно-параллельном соединении звеньев
а — при $0 < k_{oc} < 1$, б — при $k_{oc} = 1$

Коэффициент обратной связи k_{oc} изменяется в пределах от нуля до единицы. В случае размыкания обратной связи $k_{oc} = 0$. При подаче выходной величины непосредственно на вход $k_{oc} = 1$.

Статическую характеристику соединения по характеристике звена и известному коэффициенту обратной связи находят путем смещения каждой точки характеристики звена параллельно оси абсцисс (рис. 3-3) на величину, равную произведению значения выходной величины для соответствующей точки на коэффициент обратной связи.

Смещение точек производят вправо при отрицательной обратной связи и влево — при положительной.

Так, при наличии отрицательной обратной связи и значении выходной величины $x_{0\text{вых}}$, сместив точку A_1 статической характеристики звена вправо (рис. 3-3, а) на величину $k_{oc} x_{0\text{вых}}$, получим точку B_1 , которая будет принадлежать статической характеристике соединения.

Действительно, если подать на вход соединения величину $x_{0\text{вх}}$, то при значении выходной величины $x_{0\text{вых}}$ на

вход звена при наличии отрицательной обратной связи поступает величина $(x_{0\text{вх}} - k_{0.c} x_{0\text{вых}})$, которая, проходя через звено, согласно с его статической характеристикой на рис. 3-3, а обеспечивает на выходе звена, а следовательно, и соединения величину $x_{0\text{вых}}$. Таким образом, абсцисса точки A_1 характеристики звена, имеющей ординату, равную $x_{0\text{вых}}$, должна быть равна $(x_{0\text{вх}} - k_{0.c} x_{0\text{вых}})$.

Так как по построению ордината точки B_1 равна $x_{0\text{вых}}$, а ее абсцисса больше абсциссы точки A_1 на величину $k_{0.c} x_{0\text{вых}}$, то абсцисса точки B_1 равна $[(x_{0\text{вх}} - k_{0.c} x_{0\text{вых}}) + k_{0.c} x_{0\text{вых}}] = x_{0\text{вх}}$. Поэтому точка B_1 должна принадлежать статической характеристике соединения, которая и образуется совокупностью таких точек: B_1, B_2, B_3 и т. д., однозначно определяющих зависимость между входной и выходной величинами соединения в различных установившихся режимах.

Звенья, у которых в установившемся состоянии нет однозначной зависимости между входной и выходной величинами, называются *астатическими*.

Однозначной связи между входной и выходной величинами нет, например, в интегрирующих звеньях. При $x_{\text{вх}} = 0$ это звено находится в состоянии безразличного равновесия, а при $x_{\text{вх}} > 0$ выходная величина непрерывно изменяется с постоянной скоростью, пропорциональной входной величине, согласно уравнению (2-15), т. е. может иметь любое значение.

Но в астатических звеньях существуют однозначные зависимости производных выходной величины от различных постоянных значений входной величины. Эти зависимости служат динамическими характеристиками астатических звеньев и могут быть изображены графически.

Некоторые астатические звенья имеют постоянной не первую производную выходной величины, а вторую, третью и т. д.; в этом случае говорят, что звено обладает астатизмом второго, третьего и т. д. порядка. Одним из признаков астатичности звена (или системы в целом) является наличие оператора p в качестве сомножителя в знаменателе его передаточной функции.

В общем случае при астатизме звена порядка n можем записать:

$$\frac{d^n x_{\text{вых}}}{dt^n} = kf(x_{\text{вх}}),$$

или в операторной форме

$$p^n X_{\text{вых}}(p) = kf[X_{\text{вх}}(p)].$$

Передаточная функция астатического звена порядка n в установившемся состоянии, т. е. при $p=0$ и $t=\infty$ имеет вид:

$$W(0) = \frac{k}{p^n} = \infty. \quad (3-4)$$

Из типовых звеньев, рассмотренных в гл. 2, статически являются: усилительное, инерционное первого порядка, реальное дифференцирующее, интегро-дифференцирующее, инерционное второго порядка и запаздывающее; интегрирующее же звено является астатическим.

Объекты автоматического регулирования, которые в динамическом отношении могут быть представлены в виде астатических звеньев или соединений, называются астатическими.

Объекты автоматического регулирования, которые в динамическом отношении представляются статическими звеньями или соединениями, называются статическими.

Иногда астатические объекты называют объектами без самовыравнивания.

Статические объекты называют объектами с самовыравниванием.

Физически это различие объясняется тем, что в астатических объектах при поступлении на их вход постоянного по величине воздействия значение регулируемой (выходной) величины теоретически возрастает до бесконечности.

В статических объектах в аналогичных условиях выходная величина увеличивается только до некоторого постоянного значения, т. е. происходит стабилизация выходной величины на новом уровне, которая осуществляется самим объектом даже при отсутствии регулятора.

Статическую характеристику системы авторегулирования можно получить путем суммирования статических характеристик отдельных звеньев, составляющих систему.

Статической характеристикой замкнутой системы авторегулирования называется зависимость установившегося значения регулируемой величины от различных постоянных значений возмущающих воздействий при постоянном задающем воздействии.

При построении статической характеристики замкнутой системы регулирования по рис. 2-23, б вначале раздельно строятся путем суммирования характеристик отдельных звеньев статические характеристики объекта регулирования и регулятора, после чего обе эти характеристики использу-

ются для построения характеристики встречно-параллельного соединения способом, показанным на рис. 3-3. Эта характеристика и будет статической характеристикой системы в целом.

По статическим свойствам замкнутые системы регулирования, так же как и звенья, разделяются на статические и астатические.

Система регулирования, для которой существует однозначная зависимость установившегося значения регулируемой величины от величины возмущающего воздействия, называется статической.

Система регулирования, в которой установившееся значение регулируемой величины не зависит от возмущающего воздействия, называется астатической.

Астатической системой является, например, система автоматического регулирования, представленная на рис. 1-5. В этой системе после окончания переходных процессов, вызываемых различными постоянными возмущающими воздействиями, регулируемая величина принимает одно и то же значение, равное заданному, так как передаточная функция системы по каналу возмущающего воздействия для установившегося состояния системы, т. е. при $p = 0$, согласно формуле (2-79) будет равна нулю.

При отклонении температуры сушильного шкафа от заданной в результате появления возмущающего воздействия на объект регулирования электродвигатель до тех пор будет перемещать регулирующий орган, пока не восстановится заданное значение температуры, так как только при этом наступит равновесие измерительного моста и на управляющую обмотку электродвигателя не будет подаваться управляющее напряжение.

Представим передаточные функции объекта и регулятора следующим образом:

$$W_{об}(p) = \frac{Q_{об}(p)}{P_{об}(p)} \text{ и } W_p(p) = \frac{Q_p(p)}{P_p(p)}.$$

Тогда из выражений (2-56) и (2-57) находим соответственно передаточные функции замкнутой системы регулирования по каналам регулирующего и возмущающего воздействия:

$$\Phi(p) = \frac{Q_{об}(p) Q_p(p)}{P_{об}(p) P_p(p) + Q_{об}(p) Q_p(p)}; \quad (3-5)$$

$$\Phi_f(p) = \frac{Q_{об}(p) P_p(p)}{P_{об}(p) P_p(p) + Q_{об}(p) Q_p(p)}. \quad (3-6)$$

Так как знаменатель передаточной функции $W(p) = Q(p)/P(p)$ разомкнутой астатической системы первого порядка (или астатического звена) должен иметь в качестве множителя оператор p , то для астатической системы (и звена) является характерным равенство нулю свободного члена a_0 в полиноме $P(p)$.

Если система имеет астатизм порядка n , то в полиноме $P(p)$ должны быть равны нулю коэффициенты от a_0 до a_{n-1} включительно.

Если разделить числитель и знаменатель передаточной функции на коэффициент того члена полинома $P(p)$, который содержит оператор p в наименьшей степени, то коэффициент при этом члене будет равен единице, а свободный член в полиноме $Q(p)$ будет равен коэффициенту передачи системы k .

Следовательно, в разомкнутой статической системе для установившегося состояния (т. е. при $p = 0$) полиномы $Q(0)$ и $P(0)$ обращаются в

$$Q(0) = k \text{ и } P(0) = 1,$$

поскольку полином $P(p)$ такой системы имеет свободный член $a_0/a_0 = 1$.

При тех же условиях значения полиномов $Q(0)$ и $P(0)$ для астатической системы имеют вид:

$$Q(0) = k \text{ и } P(0) = 0,$$

так как во всех членах полинома $P(p)$ имеется множитель p^n , в котором $n \geq 1$.

Соответственно для статического объекта и статического регулятора имеем:

$$Q_{об}(0) = k_{об}; \quad P_{об}(0) = 1; \quad Q_p(0) = k_p \text{ и } P_p(0) = 1.$$

Для астатического объекта и астатического регулятора получаем:

$$Q_{об}(0) = k_{об}; \quad P_{об}(0) = 0; \quad Q_p(0) = k_p \text{ и } P_p(0) = 0.$$

В зависимости от того, каковы объект и регулятор, составляющие систему автоматического регулирования (статические или астатические), система в целом по каналам регулирующего и возмущающего воздействий может быть или статической, или астатической.

Если и регулятор, и объект статические, то, подставив значения всех четырех полиномов при $p = 0$ в формулу передаточной функции замкнутой системы по каналу регулирующего воздействия (3-5), получим:

$$\Phi(0) = \frac{k_{об} k_p}{1 + k_{об} k_p}. \quad (3-7)$$

При статическом объекте и астатическом регуляторе, при астатическом объекте и статическом регуляторе, а также при астатическом объекте и регуляторе

$$\Phi(0) = 1. \quad (3-8)$$

Передаточная функция по каналу возмущающего воздействия при статическом объекте и регуляторе согласно формуле (3-6) примет вид:

$$\Phi_f(0) = \frac{k_{об}}{1 + k_{об} k_p}. \quad (3-9)$$

При статическом объекте и астатическом регуляторе, а также при астатическом объекте и астатическом регуляторе

$$\Phi_f(0) = 0. \quad (3-10)$$

При астатическом объекте и статическом регуляторе получим:

$$\Phi_f(0) = \frac{1}{k_p}. \quad (3-11)$$

Обозначив постоянное регулирующее воздействие на систему g_0 , а установившееся выходное значение регулируемой величины замкнутой системы через x_e , запишем:

$$\Phi(0) = \frac{x_e}{g_0},$$

или

$$x_e = \Phi(0) g_0. \quad (3-12)$$

Установившееся значение ошибки регулирования (*статическая ошибка*) ε_0 определяется из очевидного соотношения

$$\varepsilon_0 = g_0 - x_e = [1 - \Phi(0)] g_0.$$

Подставив в это равенство величину $\Phi(0)$ из формулы (3-5), получим:

$$\varepsilon_0 = \frac{P_{об}(0) P_p(0)}{P_{об}(0) P_p(0) + Q_{об}(0) Q_p(0)} g_0. \quad (3-13)$$

Следовательно, отношение $S_0 = \varepsilon_0/g_0$, называемое *передаточной функцией установившейся ошибки*, имеет вид:

$$S(0) = \frac{P_{об}(0) P_p(0)}{P_{об}(0) P_p(0) + Q_{об}(0) Q_p(0)} = \frac{1}{1 + W(0)}, \quad (3-14)$$

где $W(0) = W_p(0) W_{об}(0)$ — передаточная функция разомкнутой системы регулирования.

Подставив значение всех четырех полиномов в выражение (3-14), найдем передаточную функцию установившейся ошибки по каналу регулирующего воздействия. При статических объекте и регуляторе эта функция будет равна:

$$S(0) = \frac{1}{1 + k_{об} k_p}. \quad (3-15)$$

Статическая ошибка регулирования будет при этом равна:

$$\varepsilon_0 = \frac{g_0}{1 + k_{об} k_p}. \quad (3-16)$$

Следовательно, при статических объекте и регуляторе замкнутая система в целом будет статической. В статических системах установившееся значение регулируемой величины всегда меньше его значения, задаваемого настройкой регулятора, на величину статической ошибки ε_0 , которая называется *статизмом системы*.

Из выражения (3-16) следует, что статизм системы пропорционален входному сигналу и тем меньше, чем больше коэффициенты передачи объекта и регулятора.

Из выражений (3-13) и (3-14) следует, что при других сочетаниях статических и астатических объектов и регуляторов статическая ошибка и передаточная функция $S(0)$ равны нулю. Система в этом случае будет астатической, т. е. $x_e = g_0$.

При появлении на входе объекта постоянного возмущающего воздействия f_0 на выходе системы в установившемся состоянии возникает установившаяся ошибка регулирования ε_{f_0} . Величины f_0 и ε_{f_0} в этом случае являются соответственно входной и выходной величинами замкнутой системы. Тогда передаточная функция системы по каналу возмущающего воздействия для установившегося состояния системы запишется как

$$\Phi_f(0) = \frac{\varepsilon_{f_0}}{f_0}.$$

Из выражения (3-9) находим величину установившейся ошибки по каналу возмущающего воздействия для статических объекта и регулятора:

$$\varepsilon_{f_0} = \frac{k_{об}}{1 + k_{об} k_p} f_0. \quad (3-17)$$

Из этого выражения следует, что в данном случае величина установившейся ошибки прямо пропорциональна величине возмущающего воздействия и коэффициенту передачи объекта. Для уменьшения ее следует увеличивать коэффициент передачи регулятора.

При статическом объекте и статическом регуляторе согласно формуле (3-11) имеем:

$$\varepsilon_{f_0} = \frac{f_0}{k_p}. \quad (3-18)$$

В этом случае ошибка также пропорциональна возмущению f_0 и может быть уменьшена путем увеличения коэффициента передачи регулятора.

Из формулы (3-10) вытекает, что при астатическом регуляторе и любом объекте (как статическом, так и астатическом) в замкнутой системе автоматического регулирования установившаяся ошибка по каналу возмущающего воздействия ε_{f_0} равна нулю.

3-2. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Временными характеристиками звена, соединения звеньев или системы авторегулирования называются закономерности протекания во времени переходных процессов, возникающих при поступлении на вход этих звеньев, групп или систем воздействия определенного вида. Практически наиболее важной временной характеристикой является реакция системы $x_{вых} = h(t)$ на единичное мгновенное скачкообразное изменение входной величины (рис. 3-4, а), так как этот режим очень часто возникает в системах регулирования как при их включении, так и при изменении заданного значения регулируемой величины. Кроме того, входную функцию времени любого другого вида с достаточной степенью точности можно представить как ряд последовательных ступенчатых воздействий на систему (рис. 3-4, б).

Таким образом, под временной характеристикой системы будем понимать процесс изменения выходной вели-

чины в функции времени при переходе системы из одного равновесного состояния в другое в результате поступления на вход системы единичного ступенчатого воздействия.

Так как дифференциальное уравнение системы тоже определяет изменение выходной величины в функции времени, то временная характеристика представляет собой графическое решение дифференциального уравнения системы для единичного ступенчатого входного воздействия при нулевых начальных условиях и, следовательно, характеризует динамические свойства системы.

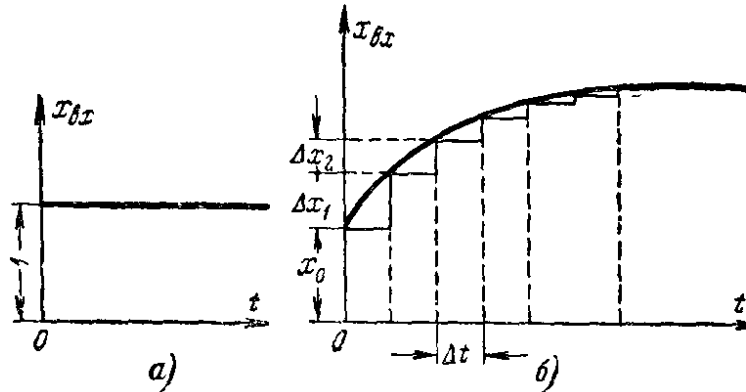


Рис. 3-4.

Примеры входных воздействий на систему.
 а — ступенчатое входное воздействие, б — представление входного воздействия произвольной формы суммой входных ступенчатых воздействий.

Так как временные характеристики могут быть получены не только путем решения дифференциального уравнения системы, но и экспериментально, то возможность определения динамических свойств системы по временной характеристике имеет исключительно важное практическое значение, поскольку в этом случае не требуется выводить и решать дифференциальное уравнение, что является в общем случае очень трудоемкой, а иногда и неразрешимой задачей.

При поступлении на вход звена или разомкнутой системы с передаточной функцией $W(p)$ входной величины $x_{0\text{вх}} = 1$ на выходе получаем временную характеристику $x_{\text{вых}} = h(t)$.

Согласно приложению 1 входная величина в операторной форме запишется как

$$X_{\text{вх}}(p) = L[x_{0\text{вх}}] = L[1] = \frac{1}{p}.$$

Выходная величина в операторной форме запишется как

$$L[h(t)] = h(p) = X_{\text{ВЫХ}}(p).$$

С учетом этих соотношений получим:

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = ph(p). \quad (3-19)$$

Следовательно, временная характеристика в операторной форме определяется уравнением

$$h(p) = \frac{1}{p} W(p). \quad (3-20)$$

Из этого выражения с помощью обратного преобразования Лапласа находим выражение временной характеристики разомкнутой системы:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{p} W(p) \right]. \quad (3-21)$$

Аналогично временная характеристика замкнутой системы имеет вид:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{p} \Phi(p) \right]. \quad (3-22)$$

Временные характеристики типовых звеньев систем регулирования имеют вид их переходных процессов, изображенных на рисунках к § 2-3 (полагаем в них $x_{\text{ВЫХ}} = h(t)$; $x_{\text{ВХ}} = 1$).

3-3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Если на вход системы (или отдельного звена) подавать синусоидальные (гармонические) колебания с постоянными амплитудой и частотой $x_{\text{ВХ}}(t) = A_{\text{ВХ}} \sin \omega t$, то после затухания переходных процессов на выходе также возникают синусоидальные колебания $x_{\text{ВЫХ}}(t) = A_{\text{ВЫХ}} \sin(\omega t + \varphi)$ с той же частотой, но с другой амплитудой и сдвинутые по фазе относительно входных колебаний (рис. 3-5).

На комплексной плоскости входная величина $x_{\text{ВХ}}(t) = A_{\text{ВХ}} \sin \omega t$ для каждого значения времени, например t_1 , определяется вектором $A_{\text{ВХ}}$, проведенным из начала координат под углом ωt_1 .

Как следует из рис. 3-5, б, действительная часть гармонической входной величины, представленной в комплексной форме, равна $A_{\text{ВХ}} \cos \omega t_1$, а мнимая $A_{\text{ВХ}} \sin \omega t_1$.

Обозначив значения комплексной входной величины для различных значений времени в виде $\bar{x}_{\text{ВХ}}(t)$, получим выражение для входной величины в комплексной тригонометрической форме:

$$\bar{x}_{\text{ВХ}}(t) = A_{\text{ВХ}} (\cos \omega t + j \sin \omega t). \quad (3-23)$$

Так как согласно формуле Эйлера

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t, \quad (3-24)$$

то входная величина в комплексной показательной форме запишется как

$$\bar{x}_{\text{ВХ}}(t) = A_{\text{ВХ}} e^{j\omega t}. \quad (3-25)$$

Аналогичным образом выходная величина в комплексной показательной форме имеет вид:

$$\bar{x}_{\text{ВЫХ}}(t) = A_{\text{ВЫХ}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{ВЫХ}})}.$$

Подавая на вход системы гармонические колебания с

одной и той же амплитудой, но различными частотами, на выходе системы получаем тоже гармонические колебания с теми же частотами, но различными амплитудами и фазами относительно входных колебаний.

Если начальная фаза входной величины не равна нулю, то в общем случае имеем:

$$\bar{x}_{\text{ВХ}}(t) = A_{\text{ВХ}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{ВХ}})}.$$

Отношение выходной величины системы к входной величине, выраженное в комплексной форме, называется амплитудно-фазовой характеристикой системы:

$$\frac{\bar{x}_{\text{ВЫХ}}(t)}{\bar{x}_{\text{ВХ}}(t)} = W(j\omega) = \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{A_{\text{ВХ}}} e^{j(\varphi_{\text{ВЫХ}} - \varphi_{\text{ВХ}})}. \quad (3-26)$$

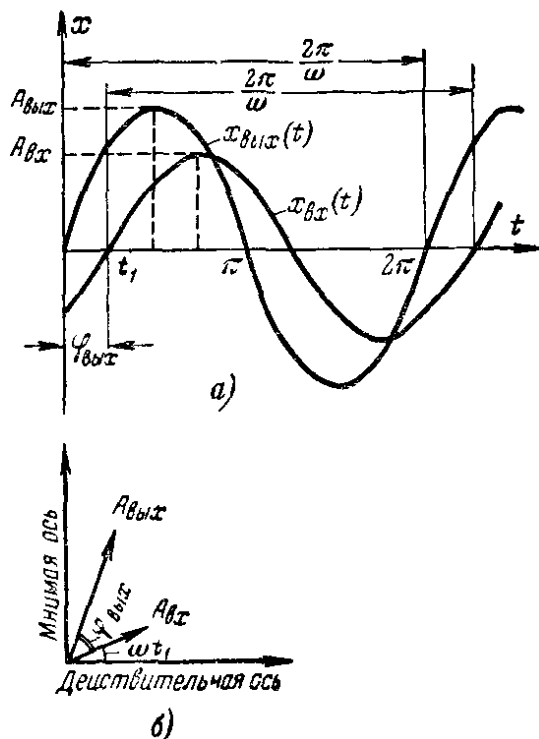


Рис. 3-5. Прохождение установившихся гармонических колебаний.

а — прохождение через систему, б — представление при этом входных и выходных величин в виде векторов на комплексной плоскости.

Отношение амплитуд $A_{\text{ВЫХ}}/A_{\text{ВХ}}$ является модулем амплитудно-фазовой характеристики, а разность фаз $\varphi_{\text{ВЫХ}} - \varphi_{\text{ВХ}}$ является ее фазой.

Амплитудно-фазовая характеристика системы не зависит от времени. В этом ее принципиальное отличие от временной характеристики. Если временная характеристика определяет поведение системы в переходном процессе, то амплитудно-фазовая характеристика выражает зависимость параметров установившихся выходных колебаний от тех же параметров входных колебаний при различных частотах.

Однако, несмотря на то, что амплитудно-фазовая характеристика отображает только установившиеся процессы в системе, она в полной мере определяет также ее динамические свойства подобно временной характеристике или дифференциальным уравнениям.

Так как

$$\frac{d\bar{x}_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} = A_{\text{ВЫХ}} j\omega e^{j(\omega t + \varphi_{\text{ВЫХ}})} = j\omega \bar{x}_{\text{ВЫХ}}(t);$$

$$\frac{d^2 \bar{x}_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^2} = (j\omega)^2 \bar{x}_{\text{ВЫХ}}(t); \quad \frac{d^n \bar{x}_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^n} = (j\omega)^n \bar{x}_{\text{ВЫХ}}(t),$$

то при подстановке этих выражений для производных в дифференциальное уравнение системы (2-6) для случая воздействия на нее гармонических колебаний $\bar{x}_{\text{ВХ}}(t)$ получим:

$$[a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0] \bar{x}_{\text{ВЫХ}}(t) =$$

$$= [b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0] \bar{x}_{\text{ВХ}}(t). \quad (3-27)$$

Из выражения (3-27) определяем амплитудно-фазовую характеристику системы:

$$\frac{\bar{x}_{\text{ВЫХ}}(t)}{\bar{x}_{\text{ВХ}}(t)} = W(j\omega) =$$

$$= \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} = \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)}. \quad (3-28)$$

При сравнении выражений (3-28) и (2-10) видно, что для получения амплитудно-фазовой характеристики системы не нужно производить каких-либо математических преобразований, а достаточно в передаточной функции системы $W(p)$ заменить символ p на $j\omega$.

Так, амплитудно-фазовая характеристика системы регулирования температуры сушильного шкафа, изображенной на рис. 1-5, записанная согласно формуле (2-77), имеет вид:

$$W(j\omega) = \frac{18 \cdot 10^{-5} k_y}{(1 + j1800\omega)(1 + j300\omega)j\omega}. \quad (3-29)$$

Аналогично из формулы (2-84) получаем амплитудно-фазовую характеристику системы автоматического регулирования нагревательной печи, принципиальная схема которой представлена на рис. 2-1, а структурная схема — на рис. 2-21:

$$W(j\omega) = \frac{k^*}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}. \quad (3-30)$$

Обозначив в формуле (3-26) $A_{\text{ВЫХ}}/A_{\text{ВХ}} = W(\omega)$ и $\varphi_{\text{ВЫХ}} - \varphi_{\text{ВХ}} = \varphi(\omega)$, получим:

$$W(j\omega) = W(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (3-31)$$

Зависимость отношения амплитуд выходных и входных колебаний от их частоты называется амплитудно-частотной характеристикой системы:

$$W(\omega) = \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{A_{\text{ВХ}}}. \quad (3-32)$$

Амплитудно-частотная характеристика является модулем амплитудно-фазовой характеристики:

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{|Q(j\omega)|}{|P(j\omega)|}. \quad (3-33)$$

Зависимость разности фаз выходных и входных колебаний от частоты называется фазо-частотной характеристикой системы:

$$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{ВЫХ}} - \varphi_{\text{ВХ}}. \quad (3-34)$$

Фазо-частотная характеристика является аргументом амплитудно-фазовой характеристики системы.

Так как

$$Q(j\omega) = b_0 + j\omega b_1 - \omega^2 b_2 - j\omega^3 b_3 + \omega^4 b_4 + j\omega^5 b_5 - \dots;$$

$$P(j\omega) = a_0 + j\omega a_1 - \omega^2 a_2 - j\omega^3 a_3 + \omega^4 a_4 + j\omega^5 a_5 - \dots,$$

то, разделив оба полинома на действительную и мнимую части, получим:

$$Q(j\omega) = R_Q(\omega) + jI_Q(\omega)$$

и

$$P(j\omega) = R_P(\omega) + jI_P(\omega),$$

где $R_Q(\omega) = b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - \dots$ — вещественная часть полинома $Q(j\omega)$;
 $I_Q(\omega) = b_1 \omega - b_3 \omega^3 + b_5 \omega^5 - \dots$ — мнимая часть полинома $Q(j\omega)$;
 $R_P(\omega) = a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots$ — вещественная часть полинома $P(j\omega)$;
 $I_P(\omega) = a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots$ — мнимая часть полинома $P(j\omega)$.

С учетом этих зависимостей амплитудно-частотная характеристика системы выразится как

$$W(\omega) = \frac{\sqrt{R_Q^2(\omega) + I_Q^2(\omega)}}{\sqrt{R_P^2(\omega) + I_P^2(\omega)}}. \quad (3-35)$$

Амплитудно-фазовая характеристика запишется так:

$$W(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{R_Q(\omega) + jI_Q(\omega)}{R_P(\omega) + jI_P(\omega)}.$$

Умножив числитель и знаменатель этой дроби на сопряженный множитель $R_P(\omega) - jI_P(\omega)$, получим:

$$W(j\omega) = \frac{R_Q(\omega)R_P(\omega) + I_Q(\omega)I_P(\omega)}{R_P^2(\omega) + I_P^2(\omega)} + j \frac{I_Q(\omega)R_P(\omega) - I_P(\omega)R_Q(\omega)}{R_P^2(\omega) + I_P^2(\omega)}.$$

Обозначив

$$U(\omega) = \frac{R_Q(\omega)R_P(\omega) + I_Q(\omega)I_P(\omega)}{R_P^2(\omega) + I_P^2(\omega)} \quad (3-36)$$

и

$$V(\omega) = \frac{I_Q(\omega)R_P(\omega) - I_P(\omega)R_Q(\omega)}{R_P^2(\omega) + I_P^2(\omega)}, \quad (3-37)$$

имеем:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega). \quad (3-38)$$

Величина $U(\omega)$ называется *вещественной частотной характеристикой системы*.

Величина $V(\omega)$ называется *мнимой частотной характеристикой системы*.

Таким образом, получаем всего пять частотных характеристик: амплитудно-фазовая $W(j\omega)$, амплитудно-частот-

ная $W(\omega)$, фазо-частотная $\varphi(\omega)$, вещественная частотная $U(\omega)$ и мнимая частотная $V(\omega)$. Между этими характеристиками, кроме зависимостей (3-31)—(3-38), имеются очевидные связи:

$$W(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad (3-39)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (3-40)$$

Широко применяется графическое изображение амплитудно-фазовой характеристики на комплексной плоскости в координатах U, jV .

Выполним графическое построение амплитудно-фазовой характеристики (3-30) при $T_1 = 90$ сек; $T_2 = 10$ сек; $T_3 = 3$ сек и $k^* = 20$.

Умножив числитель и знаменатель амплитудно-фазовой характеристики на сопряженные множители знаменателя и разделив мнимую и действительную части, получим:

$$W(j\omega) = \frac{k^* [1 - \omega^2 (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)] - \dots \rightarrow}{(1 + \omega^2 T_1^2) (1 + \omega^2 T_2^2) \times} \dots \rightarrow$$

$$\leftarrow \dots \frac{-j\omega k^* [(T_1 + T_2 + T_3) - \omega^2 T_1 T_2 T_3]}{\times (1 + \omega^2 T_3^2)}, \quad (3-41)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} U(\omega) &= k^* \frac{1 - \omega^2 (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)}{(1 + \omega^2 T_1^2) (1 + \omega^2 T_2^2) (1 + \omega^2 T_3^2)}; \\ V(\omega) &= -\omega k^* \frac{(T_1 + T_2 + T_3) - \omega^2 T_1 T_2 T_3}{(1 + \omega^2 T_1^2) (1 + \omega^2 T_2^2) (1 + \omega^2 T_3^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (3-42)$$

Подставив значения постоянных времени и коэффициента передачи, имеем:

$$W(j\omega) = 20 \frac{(1 - 1200 \omega^2) - 103 j\omega (1 - 26,2 \omega^2)}{(1 + 8100 \omega^2) (1 + 100 \omega^2) (1 + 9\omega^2)}. \quad (3-43)$$

Задавая различные значения ω от $-\infty$ до $+\infty$, получим для каждой частоты определенные значения точек амплитудно-фазовой характеристики, приведенные в табл. 3-1.

Таблица 3-1

ω	$1-1200\omega^2$	$1-26,2\omega^2$	$1+8100\omega^2$	$1+100\omega^2$	$1+9\omega^2$	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	1	1	1	1	1	20	0
0,005	0,97	1	1,2	1	1	16,2	-8,6
0,01	0,88	0,998	1,81	1,01	1	9,6	-11,4
0,016	0,695	0,993	3,06	1,03	1	4,4	-10,4
0,022	0,43	0,983	4,92	1,05	1	1,67	-8,6
0,0289	0	0,979	7,75	1,08	1,01	0	-6,9
0,04	-0,92	0,958	14	1,16	1,014	-1,12	-4,8
0,08	-6,7	0,93	52,8	1,64	1,057	-1,46	-1,5
0,14	-22,5	0,49	160	2,96	1,175	-0,81	-0,25
0,195	-44,6	0	309	4,8	1,34	-0,448	0
0,5	-299	-5,58	2030	26	3,25	-0,35	0,03
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Из выражений (3-36) и (3-42) следует, что вещественная частотная характеристика является четной функцией частоты, так как ω входит как в числитель, так и в знаменатель только в четных степенях (ω^2 , ω^4 , ω^6 , ω^8 и т. д.) и, следовательно, $U(\omega_k) = U(-\omega_k)$.

Из выражений (3-37) и (3-42) видно, что мнимая частотная характеристика является нечетной функцией частоты, так как ω входит в знаменатель в четных степенях, а числитель можно представить как произведение ω на сомножитель, содержащий ω в четных степенях; следовательно, $V(\omega_k) = -V(-\omega_k)$.

Таким образом, точки амплитудно-фазовой характеристики, соответствующие значениям ω_k и $-\omega_k$, имеют одну и ту же абсциссу U и равные по модулю, но разные по знаку ординаты $\pm V$.

Следовательно, амплитудно-фазовая характеристика симметрична относительно действительной оси и достаточно построить ее только для ω от 0 до ∞ , так как другая ветвь характеристики для ω от $-\infty$ до 0 является зеркальным отображением построенной части относительно действительной оси (рис. 3-6).

На амплитудно-фазовую характеристику наносятся частотные отметки и стрелками указывается направление возрастания частоты. Для амплитудно-фазовой характеристики по уравнению (3-41), приняв, что $U(\omega) = 0$, из формулы (3-42) получаем значения тех частот, при которых характеристика пересекает мнимую ось:

$$1 - \omega^2 (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3) = 0,$$

откуда

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3}} = \pm 0,0289 \text{ сек}^{-1}.$$

Полагая, что $V(\omega) = 0$, из формулы (3-42) находим, что действительная ось пересекается в трех точках: при $\omega = 0$ и при

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}}.$$

При $\omega = 0$ амплитудно-фазовая характеристика статической системы равна ее коэффициенту передачи k^* .

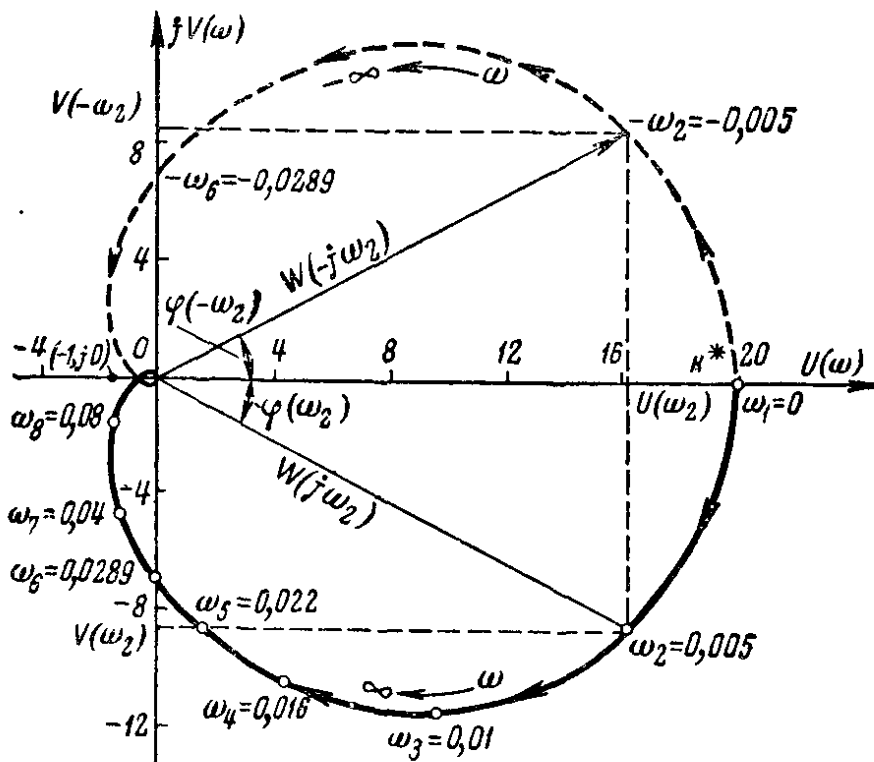


Рис. 3-6. Амплитудно-фазовая характеристика нагревательной печи рис. 2-1.

Так как для астатических систем ω входит как множитель в знаменатель амплитудно-фазовой характеристики, как, например, это имеет место в формуле (3-29), то характеристики таких систем при $\omega = 0$ уходят в бесконечность.

3-4. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ И ИХ СОЕДИНЕНИЙ

Временные характеристики типовых звеньев получаются из выражений, описывающих переходные процессы в этих звеньях при поступлении на их вход мгновенного единичного ступенчатого воздействия $x_0 \text{ вх} = 1$.

Амплитудно-фазовую характеристику звена получают из его передаточной функции путем замены символа p на $j\omega$.

1. Усилительное звено

Исходя из выражения (2-14), можно записать:

$$\left. \begin{aligned} W(j\omega) &= k, \quad U(\omega) = k; \quad V(\omega) = 0; \\ W(\omega) &= k; \quad \varphi(\omega) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-44)$$

Таким образом, амплитудно-фазовая характеристика усиленного звена равна его коэффициенту передачи и не зависит от частоты. Воздействия любой частоты, поступающие на вход этого звена усиливаются в одинаковой степени без фазового сдвига.

Временная характеристика звена

$$h(t) = k. \quad (3-45)$$

Следовательно, при поступлении на вход усиленного звена единичного ступенчатого воздействия выходная величина равна коэффициенту передачи звена (см. рис. 2-3).

2. Интегрирующее звено

Из передаточной функции (2-16) звена $W(p) = k/p$ определяем:

$$\left. \begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}; \\ U(\omega) &= 0; \quad V(\omega) = -\frac{k}{\omega}; \\ W(\omega) &= \frac{k}{\omega}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3-46)$$

Согласно формуле (3-19) получим также:

$$W(j\omega) = \frac{k}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Частотные характеристики представлены на рис. 3-7, из которого следует, что:

а) амплитудно-фазовая характеристика звена $W(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ совпадает с отрицательной мнимой полуосью;

б) при всех частотах выходные колебания отстают по фазе от входных на угол 90° ;

в) амплитудно-частотная характеристика представляет собой гиперболу, т. е. чем меньше частота входного сигнала,

тем больше этот сигнал усиливается звеном. При $\omega = 0$ коэффициент усиления равен бесконечности и, наоборот, при $\omega = \infty$ коэффициент усиления звена равен нулю.

При поступлении на вход звена единичного ступенчатого воздействия имеем согласно формуле (2-15):

$$\frac{dh(t)}{dt} = k, \quad (3-47)$$

или

$$h(t) = kt.$$

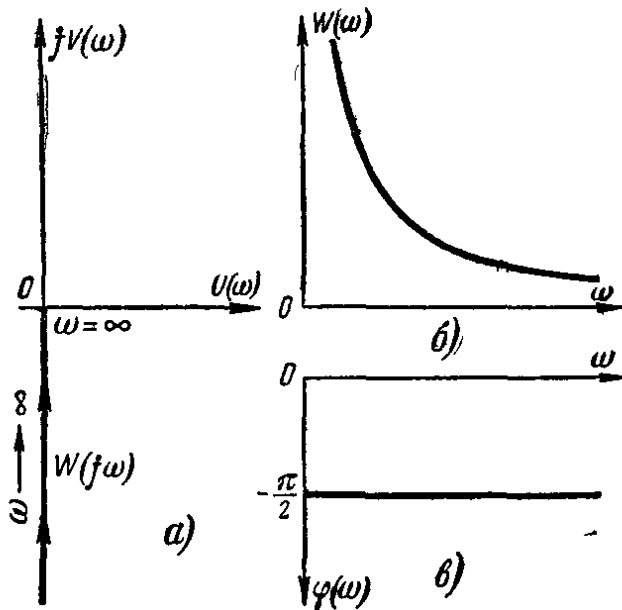


Рис 3-7. Частотные характеристики интегрирующего звена.

а — амплитудно-фазовая характеристика,
 б — амплитудно-частотная характеристика,
 в — фазо-частотная характеристика.

Временная характеристика имеет вид переходного процесса, изображенного на рис. 2-4, полагая при этом:

$$x_{\text{ВЫХ}} = h(t) \text{ и } x_{\text{ВХ}} = 1.$$

3. Инерционное звено первого порядка

Из передаточной функции звена $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$ [формула (2-22)] находим его амплитудно-фазовую характеристику:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T} = \frac{k(1-j\omega T)}{1-\omega^2 T^2 + 1}. \quad (3-48)$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики

$$U(\omega) \doteq \frac{k}{1-\omega^2 T^2 + 1} \text{ и } V(\omega) = -\frac{kT\omega}{1-\omega^2 T^2 + 1}. \quad (3-49)$$

Согласно уравнениям (3-39) и (3-40) амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики имеют вид:

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1-\omega^2 T^2 + 1}}; \quad \varphi(\omega) = -\text{arctg } T\omega. \quad (3-50)$$

Задаваясь различными значениями ω , можно по выражениям (3-49) построить амплитудно-фазовую характеристику звена. Однако в данном случае можно из этих же двух уравнений алгебраически получить на плоскости U, jV уравнение кривой $W(j\omega)$ в явной форме как функцию.

Складывая выражения (3-49), получим:

$$U(\omega) + V(\omega) = \frac{k(1 - T\omega)}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Возведя в квадрат левую и правую части равенства, найдем:

$$\begin{aligned} U^2(\omega) + V^2(\omega) + 2U(\omega)V(\omega) &= \frac{k^2 [T^2\omega^2 - 2T\omega + 1]}{(T^2\omega^2 + 1)^2} = U(\omega) \times \\ &\times \left[k \frac{T^2\omega^2 + 1}{T^2\omega^2 + 1} - 2 \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1} \right] = U(\omega) [k + 2V(\omega)], \end{aligned}$$

откуда

$$V^2(\omega) + U^2(\omega) - kU(\omega) = 0.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства слагаемое $\left(\frac{k}{2}\right)^2$, получаем:

$$V^2(\omega) + \left[U(\omega) - \frac{k}{2} \right]^2 = \left(\frac{k}{2} \right)^2. \quad (3-51)$$

Из полученного уравнения следует, что амплитудно-фазовая характеристика имеет вид окружности (рис. 3-8) с радиусом $k/2$, центр которой расположен на положительной вещественной полуоси в точке с координатами $(k/2, 0)$. Окружность касается мнимой оси в начале координат. Изменениям ω от 0 до $+\infty$ соответствует полуокружность, расположенная в четвертом квадранте, а изменениям ω от 0 до $-\infty$ — полуокружность в первом квадранте.

На рис. 3-8 представлены также амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики звена. Из графиков частотных характеристик видно, что усиление звена по амплитуде при увеличении частоты уменьшается. Это уменьшение тем резче, чем больше постоянная времени.

С ростом частоты увеличивается также фазовый сдвиг выходных колебаний по отношению к входным. Фазо-частотная характеристика звена отрицательна, следовательно выходные колебания по фазе отстают от входных. При одной и той же частоте фазовый сдвиг тем больше, чем больше постоянная времени звена. При небольших частотах

($\omega \approx 0$) инерционное звено ведет себя, как усилительное звено с коэффициентом усиления k . При больших частотах выходная величина по модулю стремится к нулю, а ее фаза $\varphi(\omega)$ — к значению $-\pi/2$.

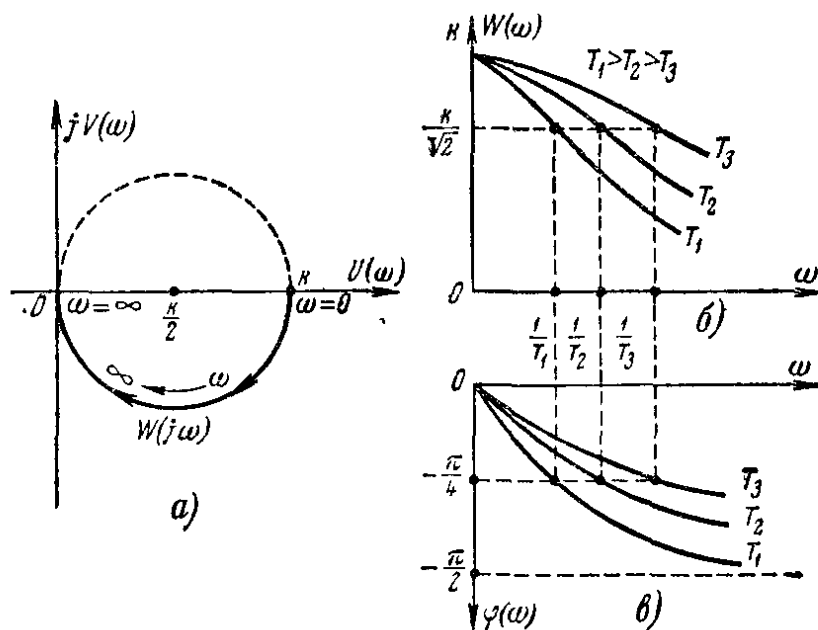


Рис. 3-8. Частотные характеристики инерционного звена первого порядка.

a — амплитудно-фазовая характеристика; *б* — амплитудно-частотные характеристики при различных значениях постоянной времени звена, *в* — амплитудно-фазовые характеристики при различных значениях постоянной времени звена.

При $\omega = 1/T$ фаза $\varphi(\omega) = -\pi/4$, а $W(\omega) = k/\sqrt{2}$.

Из выражения (2-23) находим временную характеристику инерционного звена первого порядка:

$$h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad (3-52)$$

которая имеет вид экспоненциальной зависимости, показанной на рис. 2-6, стремящейся при $t \rightarrow \infty$ к значению $h(\infty) = k$.

4. Дифференцирующее звено

Частотные характеристики идеального дифференцирующего звена с передаточной функцией (2-25) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} W(j\omega) &= j\omega k; \\ U(\omega) &= 0; \quad V(\omega) = \omega k; \\ W(\omega) &= \omega k; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3-53)$$

В комплексной показательной форме $W(j\omega) = \omega k e^{j\frac{\pi}{2}}$. Эти характеристики представлены на рис. 3-9.

Амплитудно-фазовая характеристика дифференцирующего звена совпадает с положительной мнимой полуосью (рис. 3-9, а).

При всех частотах выходные колебания опережают по фазе входные колебания на угол 90° , так как фазо-частотная характеристика $\varphi(\omega)$ не зависит от частоты и равна $\pi/2$ (рис. 3-9, в).

Амплитудно-частотная характеристика $W(\omega)$ имеет вид прямой линии, проходящей через начало координат под углом $\alpha =$

$= \arctg k$. Чем больше частота входных колебаний, тем больше они усиливаются звеном. При малых частотах ($\omega \approx 0$) сигнал через звено не проходит (рис. 3-9, б).

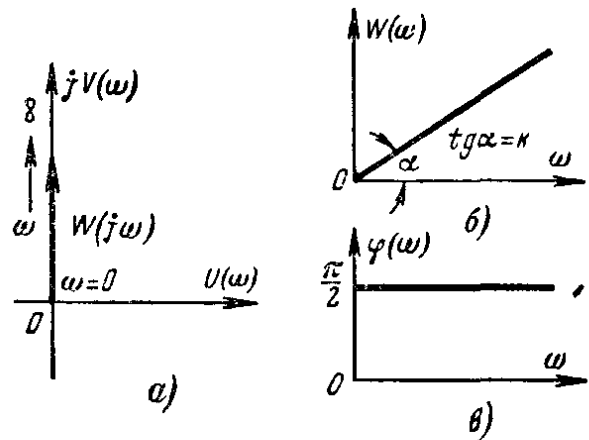


Рис. 3-9. Частотные характеристики дифференцирующего звена.

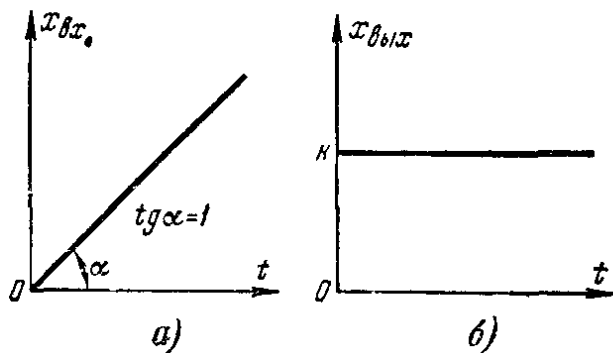


Рис. 3-10. Прохождение сигнала через дифференцирующее звено при непрерывном изменении входной величины с единичной скоростью.

(2-24) на выходе устанавливается постоянное значение выходной величины, равное коэффициенту передачи звена k (рис. 3-10).

Частотные характеристики реального дифференцирующего звена получим из его передаточной функции $W(p) =$

$$= \frac{kTp}{Tp + 1}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика

$$W(j\omega) = \frac{j\omega kT}{1 + j\omega T} = \frac{k\omega^2 T^2 + j\omega kT}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (3-54)$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики

$$U(\omega) = \frac{kT^2\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} \text{ и } V(\omega) = \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (3-55)$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики

$$W(\omega) = \frac{kT\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \text{ и } \varphi = \arctg \frac{1}{T\omega} = \frac{\pi}{2} - \arctg T\omega. \quad (3-56)$$

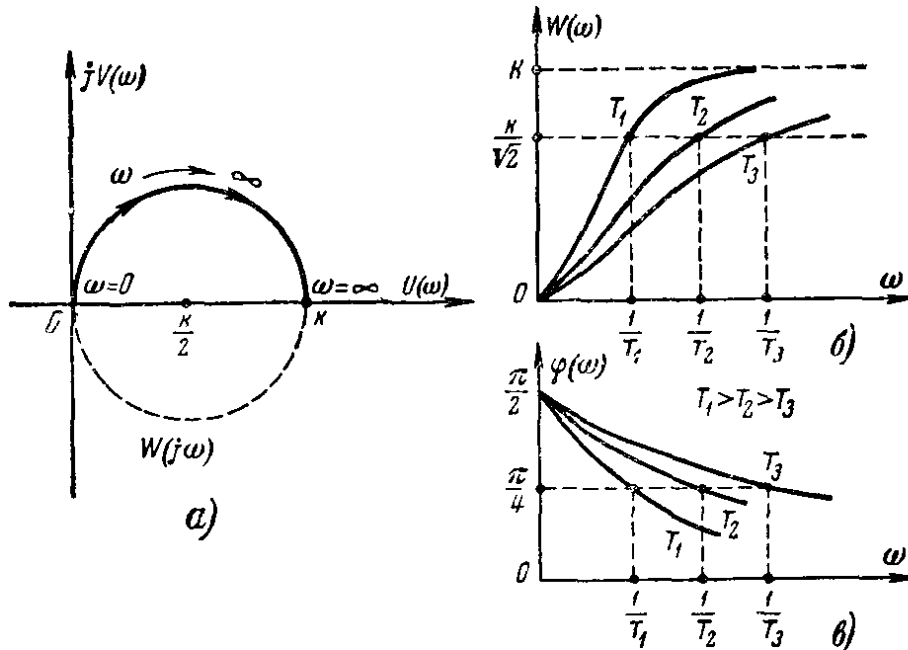


Рис. 3-11. Частотные характеристики реального дифференцирующего звена.

a — амплитудно-фазовая характеристика; *б* — амплитудно-частотные характеристики при различных значениях постоянной времени, *в* — амплитудно-фазовые характеристики при различных значениях постоянной времени звена.

Используя зависимости (3-56), получим также:

$$W(j\omega) = k\omega \frac{T}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctg T\omega\right)}.$$

Амплитудно-фазовую характеристику можно, так же как и для инерционного звена первого порядка, привести к виду (3-51). Но в этом случае при $\omega > 0$ получаем полуокружность в первом квадранте (рис. 3-11, *a*), а при $\omega < 0$ — полуокружность в четвертом квадранте.

При большой частоте входных колебаний ($\omega \rightarrow \infty$) реальное дифференцирующее звено ведет себя, как усилительное звено с коэффициентом усиления k . Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики этого звена построены на рис. 3-11, *б* и *в*. Из этих кривых следует, что при одной и той же частоте входных колебаний амплитуда

выходных колебаний тем больше, чем больше постоянная времени звена; при этом также уменьшается сдвиг фаз между входными и выходными колебаниями.

Так как $\varphi(\omega) > 0$, то выходные колебания опережают по фазе входные колебания. При малых частотах ($\omega \approx 0$) это опережение равно 90° , а коэффициент усиления равен нулю.

При $\omega = 1/T$ фаза $\varphi(\omega) = \pi/4$, а $W(\omega) = k/\sqrt{2}$.

По выражению (2-27), определяющему переходный процесс звена, находим временную характеристику реального дифференцирующего звена:

$$h(t) = ke^{-\frac{t}{T}}, \quad (3-57)$$

которая имеет вид экспоненциальной зависимости (см. рис. 2-10), стремящейся с течением времени ($t \rightarrow \infty$) к нулю.

5. Интегро-дифференцирующее звено

По передаточной функции звена $W(p) = k \frac{T_{\text{п}} p + 1}{T_{\text{и}} p + 1}$ находим его амплитудно-фазовую характеристику:

$$W(j\omega) = \frac{k(1 + j\omega T_{\text{п}})}{1 + j\omega T_{\text{и}}}. \quad (3-58)$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики

$$U(\omega) = \frac{k(T_{\text{п}} T_{\text{и}} \omega^2 + 1)}{T_{\text{и}}^2 \omega^2 + 1} \quad \text{и} \quad V(\omega) = \frac{(T_{\text{п}} - T_{\text{и}}) k \omega}{T_{\text{и}}^2 \omega^2 + 1}. \quad (3-59)$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики

$$W(\omega) = k \sqrt{\frac{T_{\text{п}}^2 \omega^2 + 1}{T_{\text{и}}^2 \omega^2 + 1}} \quad \text{и} \quad \varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{\omega(T_{\text{п}} - T_{\text{и}})}{T_{\text{п}} T_{\text{и}} \omega^2 + 1}. \quad (3-60)$$

Амплитудно-фазовую характеристику можно представить также в виде явной функции $V(\omega) = f(U(\omega))$, используя равенства (3-59).

Сложив квадраты вещественной и мнимой частотных характеристик, получим:

$$\begin{aligned} U^2(\omega) + V^2(\omega) &= \\ &= k^2 \left[\frac{(T_{\text{п}}^2 T_{\text{и}}^2 \omega^4 + 2T_{\text{п}} T_{\text{и}} \omega^2 + 1) + (T_{\text{п}}^2 - 2T_{\text{п}} T_{\text{и}} + T_{\text{и}}^2) \omega^2}{(T_{\text{и}}^2 \omega^2 + 1)^2} \right] = \\ &= k^2 \left[\frac{(T_{\text{п}}^2 \omega^2 + 1) + (T_{\text{п}}^2 T_{\text{и}}^2 \omega^4 + T_{\text{и}}^2 \omega^2)}{(T_{\text{и}}^2 \omega^2 + 1)^2} \right] = \frac{k^2 (T_{\text{п}}^2 \omega^2 + 1)}{T_{\text{и}}^2 \omega^2 + 1}. \end{aligned}$$

Прибавив к правой и левой частям этого выражения слагаемое $\frac{k^2 [T_{\text{и}} + T_{\text{п}}]^2}{4T_{\text{и}}^2}$ и одновременно прибавив и вычтя из правой части равенства отношение $k^2 \frac{T_{\text{п}}}{T_{\text{и}}}$, получим:

$$\begin{aligned} U^2(\omega) + V^2(\omega) + \frac{k^2 (T_{\text{и}} + T_{\text{п}})^2}{4T_{\text{и}}^2} &= \\ &= k^2 \left\{ \left[\frac{T_{\text{п}}^2 \omega^2 + 1}{T_{\text{и}}^2 \omega^2 + 1} + \frac{T_{\text{п}}}{T_{\text{и}}} \right] + \left[\frac{(T_{\text{и}} + T_{\text{п}})^2}{4T_{\text{и}}^2} - \frac{T_{\text{п}}}{T_{\text{и}}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Обозначив $\frac{k}{2} \left(\frac{T_{\text{и}} + T_{\text{п}}}{T_{\text{и}}} \right) = a$ и приведя к общему знаменателю суммы в квадратных скобках, найдем:

$$\begin{aligned} V^2(\omega) + U^2(\omega) + a^2 &= \\ &= k^2 \left[\frac{T_{\text{и}} (T_{\text{п}}^2 \omega^2 + 1) + T_{\text{п}} (T_{\text{и}}^2 \omega^2 + 1)}{T_{\text{и}} (T_{\text{и}}^2 \omega^2 + 1)} \right] + \\ &+ k^2 \frac{T_{\text{и}}^2 + 2T_{\text{и}} T_{\text{п}} + T_{\text{п}}^2 - 4T_{\text{и}} T_{\text{п}}}{4T_{\text{и}}^2}. \end{aligned}$$

Приняв, что $\frac{k}{2} \cdot \frac{T_{\text{и}} - T_{\text{п}}}{T_{\text{и}}} = R$, получим:

$$\begin{aligned} V^2(\omega) + U^2(\omega) + a^2 &= \\ &= k^2 \frac{(T_{\text{и}} T_{\text{п}} \omega^2 + 1)(T_{\text{и}} + T_{\text{п}})}{T_{\text{и}} (T_{\text{и}}^2 \omega^2 + 1)} + R^2 = 2aU(\omega) + R^2. \end{aligned}$$

Окончательно находим:

$$V^2(\omega) + [U(\omega) - a]^2 = R^2. \quad (3-61)$$

Следовательно, амплитудно-фазовая характеристика имеет вид окружности, центр которой расположен на вещественной положительной полуоси в точке $(a, j0)$. Радиус окружности равен R .

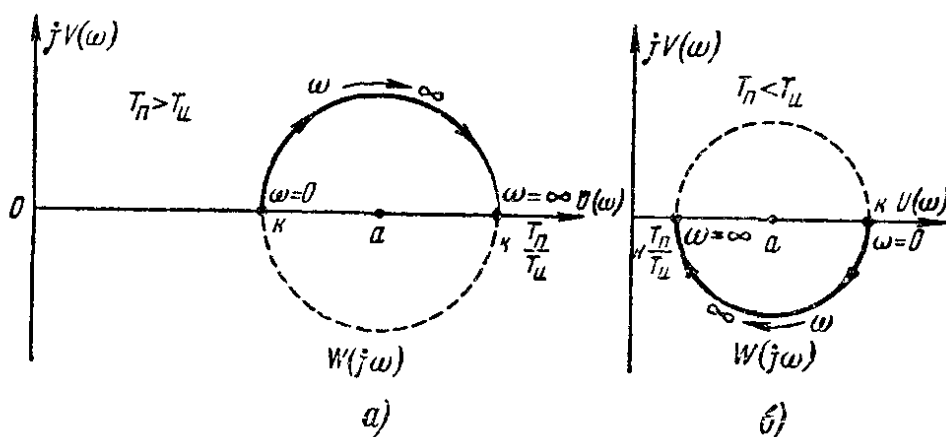


Рис. 3-12. Амплитудно-фазовые характеристики интегро-дифференцирующего звена.
 а — при $T_n > T_u$; б — при $T_n < T_u$.

Амплитудно-фазовые характеристики для двух различных соотношений постоянных времени T_n и T_u представлены на рис. 3-12.

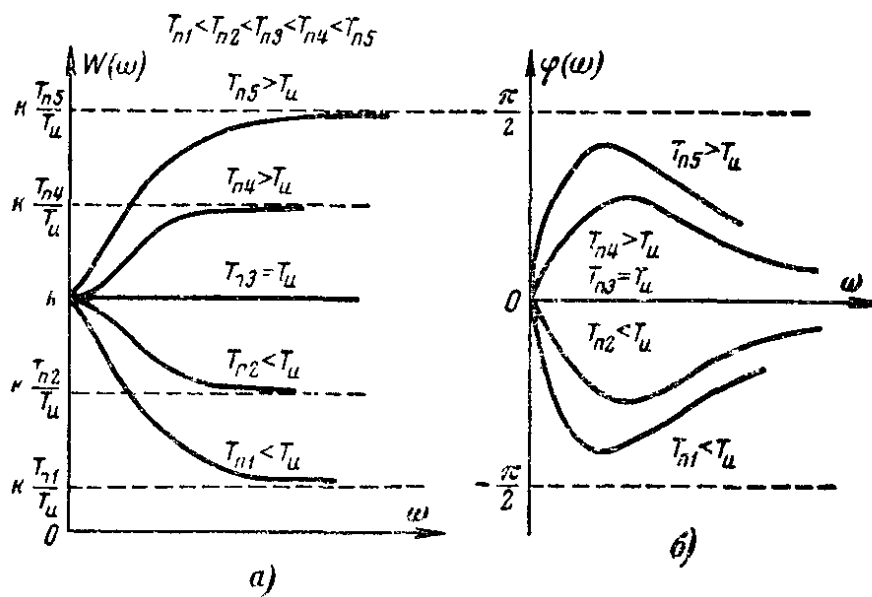


Рис. 3-13. Амплитудно-частотные $W(\omega)$ и фазо-частотные $\varphi(\omega)$ характеристики интегро-дифференцирующего звена.

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики звена построены на рис. 3-13.

При малых частотах ($\omega \approx 0$) входных колебаний интегро-дифференцирующее звено ведет себя, как усилительное с коэффициентом усиления k ; при этом колебания проходят через звено без искажений по фазе, так как $\varphi(\omega) \approx 0$.

При больших частотах входных колебаний ($\omega \rightarrow \infty$) звено также ведет себя, как усилительное, но с коэффициентом усиления, равным $k \frac{T_{\Pi}}{T_{\text{И}}}$. При этом фазо-частотная характеристика также стремится к нулю.

При средних частотах выходные колебания или опережают входные колебания (при $T_{\Pi} > T_{\text{И}}$), или отстают от них (при $T_{\Pi} < T_{\text{И}}$).

При $T_{\Pi} \gg T_{\text{И}}$ интегро-дифференцирующее звено по своим свойствам приближается к дифференцирующему звену. Если при этом k стремится к нулю, а T_{Π} — к бесконечности, но так, чтобы произведение kT_{Π} было конечной постоянной величиной, получаем реальное дифференцирующее звено (см. рис. 3-11).

При $T_{\Pi} \ll T_{\text{И}}$ интегро-дифференцирующее звено по своим свойствам приближается или к интегрирующему, или к инерционному звену первого порядка.

Если $T_{\Pi} = 0$, а k и $T_{\text{И}}$ стремятся к бесконечности, но при этом отношение $k/T_{\text{И}}$ является конечной постоянной величиной, то звено превращается в интегрирующее. Если же при $T_{\Pi} = 0$ величины k и $T_{\text{И}}$ конечны, получаем инерционное звено первого порядка (см. рис 3-8).

При $T_{\Pi} = T_{\text{И}}$ интегро-дифференцирующее звено превращается в усилительное с коэффициентом усиления k . При этом на всех частотах сигнал проходит через звено без фазовых искажений. Физически это можно объяснить тем, что дифференцирующая составляющая дает опережение выходной величины по отношению к входной. Интегрирующая же составляющая, наоборот, создает отставание выходной величины от входной. При равенстве этих составляющих они взаимно уравновешиваются и результирующее воздействие их на фазу выходного сигнала равно нулю.

Временную характеристику интегро-дифференцирующего звена получим из выражения для его переходного процесса (2-30):

$$h(t) = k \left[1 + \left(\frac{T_{\Pi}}{T_{\text{И}}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{T_{\text{И}}}} \right]. \quad (3-62)$$

Графическое изображение временной характеристики имеет вид кривых, представленных на рис. 2-11, если при-

нять в них входную величину равной единице ($x_{вх} = 1$). Из выражения (3-62) и рис. 2-11 следует, что в зависимости от значений величин k , $T_п$ и $T_и$ и их соотношений временная характеристика интегро-дифференцирующего звена может быть превращена во временную характеристику интегрирующего или дифференцирующего звена.

6. Инерционное звено второго порядка

По формуле (2-32) передаточной функции звена $W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$ амплитудно-фазовую характеристику можно записать в виде:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T_2^2 + j\omega T_1}. \quad (3-63)$$

Вещественная частотная характеристика

$$U(\omega) = \frac{k(1 - T_2^2 \omega^2)}{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}. \quad (3-64)$$

Мнимая частотная характеристика

$$V(\omega) = - \frac{k T_1 \omega}{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}. \quad (3-65)$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}}. \quad (3-66)$$

Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = - \operatorname{arctg} \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2}. \quad (3-67)$$

На рис. 3-14 изображена амплитудно-фазовая характеристика звена. Она начинается на вещественной оси в точке с абсциссой, равной k . Вид амплитудно-фазовой характеристики определяется величиной отношения постоянных времени T_1/T_2 .

При $T_2 = 0$ и $T_1 \neq 0$ отношение $T_1/T_2 = \infty$ и инерционное звено второго порядка превращается в инерционное звено первого порядка с постоянной времени T_1 . Ампли-

тудно-фазовая характеристика в этом случае определяется выражением

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T_1}$$

и имеет вид окружности с радиусом $k/2$, центр которой расположен на вещественной оси в точке $(k/2, j0)$.

При $T_1/T_2 < 2$ инерционное звено второго порядка превращается в колебательное звено [формула (2-45)].

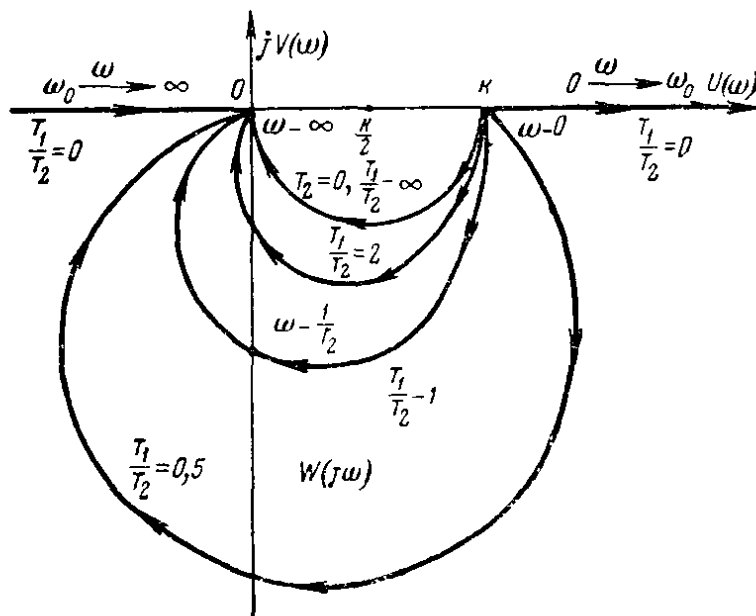


Рис 3-14 Амплитудно-фазовые характеристики инерционного звена второго порядка

Чем меньше T_1 , тем меньше отношение T_1/T_2 и тем меньше степень затухания колебаний в звене [формула (2-47)].

При $T_1/T_2 = 0$ степень затухания ψ будет равна нулю и возникшие в звене колебания будут незатухающими с собственной частотой колебаний, равной $\omega_0 = 1/T_2$.

Амплитудно-фазовая характеристика при этом определяется выражением

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \quad (3-68)$$

Графически эта характеристика при изменении частоты ω колебаний входной величины от 0 до ∞ имеет вид двух полупрямых (рис. 3-14). Первая полупрямая начинается при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси в точке k и при возрастании ω до $\omega = \omega_0$ уходит в бесконечность по

вещественной полуоси в положительном направлении. Вторая полупрямая совпадает с отрицательной вещественной полуосью. Начало полупрямой — в бесконечности при $\omega = \omega_0$, а конец — в начале координат при $\omega = \infty$.

Определяя первую производную амплитудно-частотной характеристики по частоте и приравнивая полученное выражение нулю, находим:

$$\frac{dW(\omega)}{d\omega} = -\frac{k}{2V[(1-T_2^2\omega^2)^2+T_1^2\omega^2]^3} \times \\ \times \frac{d[(1-T_2^2\omega^2)^2+T_1^2\omega^2]}{d\omega} = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{d[(1-T_2^2\omega^2)^2+T_1^2\omega^2]}{d\omega} = \frac{d[1+(T_1^2-2T_2^2)\omega^2+T_2^4\omega^4]}{d\omega} = \\ = \omega(2T_1^2-4T_2^2)+4T_2^4\omega^3 = 0,$$

или

$$\omega(2T_2^4\omega^2-2T_2^2+T_1^2) = 0.$$

Из этого уравнения находим значения частот, при которых амплитудно-частотная характеристика имеет экстремумы:

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} \sqrt{1 - \frac{T_1^2}{2T_2^2}}. \quad (3-69)$$

Из выражения (3-66) следует, что при $\omega = \omega_1 = 0$ амплитудно-частотная характеристика равна коэффициенту усиления инерционного звена второго порядка:

$$W(\omega_1) = W(0) = k$$

и не зависит ни от значений постоянных времени T_1 и T_2 , ни от их соотношения.

Второе вещественное экстремальное значение $W(\omega)$ имеется только при $1 - \frac{T_1^2}{2T_2^2} > 0$, т. е. при $\frac{T_1}{T_2} < \sqrt{2} = 1,41$. При этом чем больше отношение постоянных времени приближается к значению $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2}$, тем ближе подходит вторая точка экстремума к первой.

При $\frac{T_1}{T_2} \geq \sqrt{2}$ амплитудно-частотная характеристика имеет только один экстремум: при $\omega_1 = 0$. Так как при изменении ω от 0 до ∞ амплитудно-частотная характеристика (3-66) стремится к нулю, то при $\frac{T_1}{T_2} \geq \sqrt{2}$ экстремальная точка $W(\omega_1) = W(0) = k$ является максимумом кривой $W(0)$.

Рассмотрим второй экстремум кривой $W(\omega)$, появляющийся при $\frac{T_1}{T_2} < \sqrt{2}$. Подставим в выражение (3-66) величину ω_2 из формулы (3-69):

$$\begin{aligned} W(\omega_2) &= \frac{k}{\sqrt{\left[1 - T_2^2 \frac{1}{T_2^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{T_1^2}{T_2^2}\right)\right]^2 + \frac{T_1^2}{T_2^2} \left(1 - \frac{T_1^2}{2T_2^2}\right)}} = \\ &= \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{T_1^2}{T_2^2}\right)^2 + \frac{T_1^2}{T_2^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{T_1^2}{T_2^2}\right)}}. \end{aligned}$$

Полагая $T_1^2/T_2^2 = \alpha$, получим:

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{\alpha - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}}. \quad (3-70)$$

При $\frac{T_1}{T_2} < \sqrt{2}$ имеем: $\alpha < 2$ и $\frac{\alpha}{2} < 1$; величина $\frac{\alpha}{2} < 1$ — правильная дробь и притом подкоренное выражение всегда меньше единицы; следовательно, корень в знаменателе выражения (3-70) — правильная дробь и $W(\omega_2) > W(0)$. Таким образом, при возрастании ω от $\omega_1 = 0$ до ω_2 амплитудно-частотная характеристика тоже возрастает, начиная со значения k при $\omega = 0$, и при ω_2 достигает максимума, равного [см. формулу (3-70)]:

$$W(\omega_2) = \frac{k}{\frac{T_1}{T_2} \sqrt{1 - \frac{T_1^2}{4T_2^2}}}.$$

При дальнейшем увеличении частоты амплитудно-частотная характеристика стремится к нулю.

Амплитудно-частотные характеристики инерционного звена второго порядка для различных значений постоянных времени представлены на рис. 3-15.

При уменьшении отношения T_1/T_2 максимум амплитудно-частотной характеристики увеличивается, а то значение частоты, при котором наступает этот максимум, увеличивается и приближается к собственной частоте колебаний звена ω_0 .

При $T_1/T_2 = 0$ максимум $W(\omega)$ равен бесконечности при $\omega = \omega_0 = 1/T_2$. Амплитудно-частотная характеристика при этом совпадает с амплитудно-фазовой и определяется выражением (3-68).

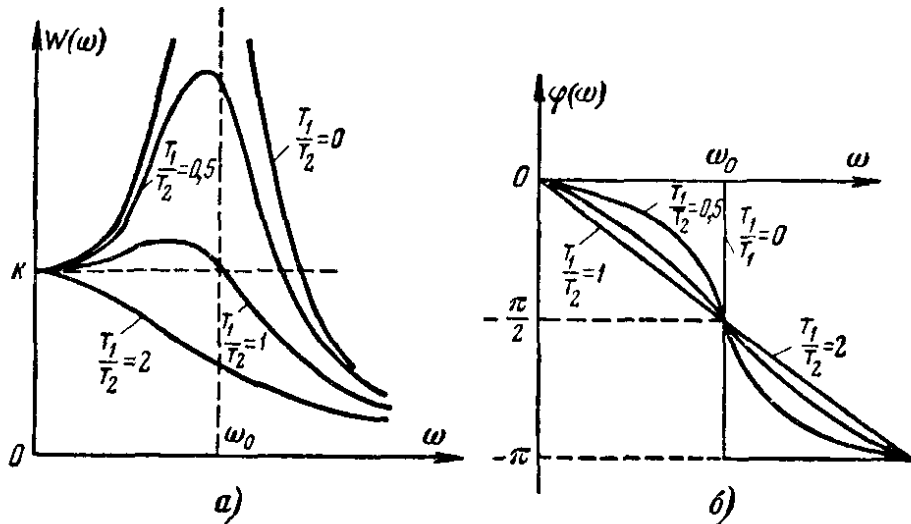


Рис. 3-15. Амплитудно-частотные $W(\omega)$ и фазо-частотные $\varphi(\omega)$ характеристики инерционного звена второго порядка.

Если входная величина является постоянной ($\omega = 0$), то $W(\omega) = k$. Если частота входной величины стремится к бесконечности, то амплитудно-частотная характеристика стремится к нулю.

На рис. 3-15, б представлена фазо-частотная характеристика $\varphi(\omega)$. Все характеристики $\varphi(\omega)$ для различных отношений T_1/T_2 равны нулю при $\omega = 0$, равны $-\pi/2$ при частоте $\omega = \omega_0$ и стремятся к $-\pi$ при частоте $\omega \rightarrow \infty$. Так как $\varphi(\omega)$ отрицательна, то выходные колебания во всем диапазоне изменений ω отстают от входных колебаний.

При $T_1 = 0$ фаза выходных колебаний совпадает с фазой входных колебаний в диапазоне изменений ω от 0 до ω_0 . При $\omega = \omega_0$ происходит изменение фазы скачком от $\varphi(\omega) = 0$ до $\varphi(\omega) = -\pi$ и в диапазоне изменений ω от ω_0 до $\omega = \infty$ фаза выходных колебаний отстает от фазы входных колебаний на 180° .

Из частотных характеристик инерционного звена второго порядка следует, что при малых частотах входных колебаний ($\omega \approx 0$) оно по своим свойствам приближается к усилительному звену, а при больших частотах входных колебаний вообще не пропускает сигнала.

При $\frac{T_1}{T_2} > 2$ в соответствии с формулой (2-41) временная характеристика инерционного звена второго порядка определяется выражением

$$h(t) = k \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_1 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_2 t} \right), \quad (3-71)$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{T_1}{2T_2^2} + \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^4} - \frac{1}{T_2^2}} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = -\frac{T_1}{2T_2^2} - \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^4} - \frac{1}{T_2^2}}.$$

При $T_1/T_2 = 2$ согласно формуле (2-42) временная характеристика имеет вид:

$$h(t) = k \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T_2} \right) e^{-\frac{t}{T_2}} \right]. \quad (3-72)$$

При $T_1/T_2 < 2$ звено превращается в колебательное и временная характеристика его согласно с формулой (2-45) приобретает вид:

$$h(t) = k \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\omega T_2} \sin \left(\omega t + \arctg \frac{\omega}{\alpha} \right) \right], \quad (3-73)$$

где

$$\alpha = \frac{T_1}{2T_2^2}; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{T_2^2} - \frac{T_1^2}{4T_2^4}}.$$

При $T_1 = 0$ отношение T_1/T_2 становится равным нулю и временная характеристика, согласно формуле (2-48) примет вид:

$$h(t) = k (1 - \cos \omega_0 t). \quad (3-74)$$

Временные характеристики в соответствующем масштабе имеют вид переходных процессов, представленных на рис. 2-13 и 2-14.

7. Запаздывающее звено

Сообразно с формулой (2-49) передаточной функции звена $W(p) = e^{-p\tau}$ частотные характеристики запаздывающего звена имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} W(j\omega) &= e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau; \\ U(\omega) &= \cos \omega\tau; \quad V(\omega) = -\sin \omega\tau; \\ W(\omega) &= 1; \quad \varphi(\omega) = -\omega\tau. \end{aligned} \right\} \quad (3-75)$$

Так как амплитудно-частотная характеристика равна единице и не зависит от частоты, а фазо-частотная характеристика пропорциональна частоте с коэффициентом пропорциональности, равным τ , то амплитудно-фазовая характеристика представляет собой окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 3-16, а).

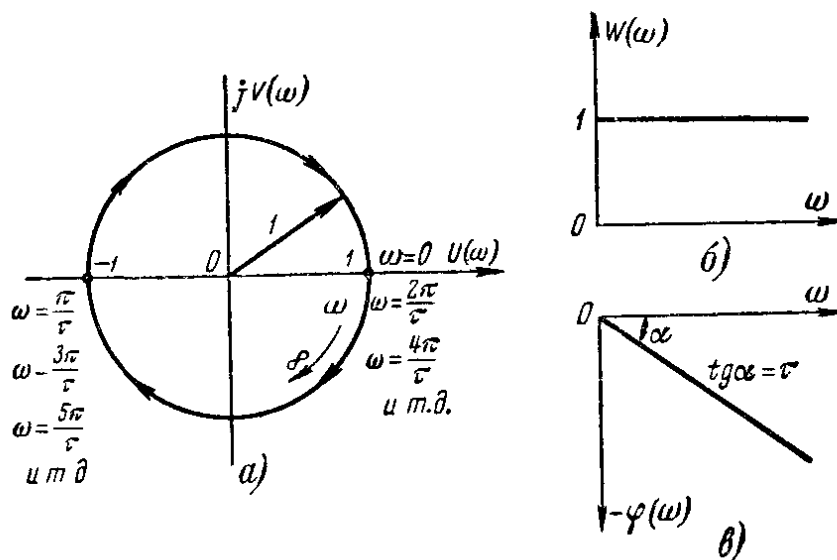


Рис. 3-16. Частотные характеристики запаздывающего звена.

При $\omega = 0$ вектор амплитудно-фазовой характеристики совпадает с положительной вещественной полуосью и конец его расположен в точке $(1, j0)$.

При увеличении частоты конец вектора амплитудно-фазовой характеристики поворачивается вдоль окружности по часовой стрелке, так как фазо-частотная характеристика отрицательна.

При бесконечном увеличении частоты вектор $W(j\omega)$ бесчисленное число раз поворачивается вокруг начала координат. При его повороте на 360° он займет первоначальное положение. Так как приращение фазы при этом

будет равно -2π , то $\varphi(\omega) = -\omega\tau = -2\pi$. Следовательно, в исходное положение вектор амплитудно-фазовой характеристики вернется при частоте $\omega = 2\pi/\tau$. При дальнейшем увеличении частоты вектор $W(j\omega)$ будет занимать исходное положение при частотах $4\pi/\tau$, $6\pi/\tau$, $8\pi/\tau$ и т. д.

Соответственно отрицательная вещественная полуось будет совпадать с вектором $W(j\omega)$ при частотах π/τ , $3\pi/\tau$, $5\pi/\tau$ и т. д. и при этом конец вектора будет находиться в точке $(-1, j0)$.

Таким образом, запаздывающее звено на выходе воспроизводит входные колебания без искажений по форме, но с отставанием по фазе. Это отставание тем больше, чем больше запаздывание звена и чем больше частота входных колебаний.

Временная характеристика звена имеет вид переходного процесса, представленного на рис. 2-16, при $x_{вх} = 1$.

Все сказанное выше в § 3-3 и данном параграфе относилось к разомкнутым системам и отдельным звеньям систем регулирования. Вместе с тем представляется возможным определять и строить все виды частотных характеристик для любых замкнутых систем.

Так как амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы получается простой заменой оператора p на символ $(j\omega)$ в выражении для передаточной функции $W(p)$ разомкнутой системы и так как передаточная функция замкнутой системы по каналу управляющего воздействия $\Phi(p)$ зависит только от $W(p)$, то амплитудно-фазовая характеристика замкнутой системы может быть также определена путем замены оператора p величиной $(j\omega)$ в выражении для $\Phi(p)$ [см. формулу (2-55)]. Следовательно,

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)}. \quad (3-76)$$

Из амплитудно-фазовой характеристики замкнутой системы могут быть получены все остальные частотные характеристики; при этом можно пользоваться формулами (3-33)—(3-40), имея в виду, что полином $P(j\omega) = R_p(\omega) + + jI_p(\omega)$ должен быть заменен полиномом $A(j\omega) = R_A(\omega) + + jI_A(\omega)$, имеющим ту же степень, что и полином $P(j\omega)$.

Так, например, для анализа систем регулирования существенное значение имеет амплитудно-частотная характеристика $\Phi(\omega)$, которая может быть вычислена аналитически

по выражениям, аналогичным (3-33), (3-35) или (3-39), а графически согласно формуле (3-33) представляет собой модуль амплитудно-фазовой характеристики $\Phi(j\omega)$:

$$\Phi(\omega) = |\Phi(j\omega)| = \frac{|W(j\omega)|}{|1 + W(j\omega)|}. \quad (3-77)$$

3-5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕГУЛИРУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Аналитическое определение динамических характеристик объектов авторегулирования не всегда представляется возможным. Оно сопряжено в большинстве случаев со сложными расчетами, а иногда технически невыполнимо. В связи с этим динамические характеристики уже существующих объектов в настоящее время чаще всего определяются экспериментально.

Так, для аналитического определения временной характеристики сушильного шкафа (см. рис. 1-5) необходимо решить дифференциальное уравнение, которое характеризует переходные процессы изменения температуры шкафа при единичном скачкообразном увеличении или уменьшении количества энергии, поступающей в объект. В данном случае переходный процесс определяется дифференциальным уравнением второй степени и его аналитическое решение не представляет особого труда.

Знаменатель передаточной функции (2-76) является характеристическим уравнением дифференциального уравнения сушильного шкафа, рассматриваемого как объект регулирования. Однако и в этом несложном случае для определения коэффициентов дифференциального уравнения необходимо выполнить трудоемкие расчеты по определению удельных теплоемкостей и теплоотдач сушильного шкафа и нагревательного элемента.

1. Определение временных характеристик

Для экспериментального определения временной характеристики объекта производят быстрое единичное изменение его входной величины при установившемся значении выходной величины и через определенные промежутки времени регистрируют изменяющиеся значения выходной величины до прихода ее к новому установившемуся состоянию. Если

это позволяют условия эксперимента, то за первоначальное установившееся состояние объекта удобно брать его установившееся состояние до включения в работу.

Покажем, как происходит процесс экспериментального определения временной характеристики сушильного шкафа с инерционным нагревательным элементом. Для этого при отключенном и полностью остывшем сушильном шкафе установим движок автотрансформатора в максимальное положение, отключим электродвигатель и подадим напряжение на автотрансформатор. С момента начала подачи энергии на объект через определенные промежутки времени по ртутному термометру записываем температуру $\Theta^{\circ}\text{C}$ сушильного шкафа до тех пор (табл. 3-2), пока она практически не достигнет установившегося значения $\Theta_{\text{уст}}$. Временные характеристики $h(t)$ строят обычно в относительных величинах, которые для каждого измеренного значения $\Theta^{\circ}\text{C}$ определяются путем деления его на $\Theta_{\text{уст}}$:

$$h(t) = \frac{\Theta}{\Theta_{\text{уст}}}$$

Т а б л и ц а 3-2

$t, \text{ мин}$	1	2	3	6	9	15	24	30	45	60	90	∞
$\Theta, ^{\circ}\text{C}$	0	8	16	42	80	154	245	298	393	445	500	532
$h(t) = \frac{\Theta}{\Theta_{\text{уст}}}$	0	0,015	0,03	0,08	0,15	0,29	0,46	0,56	0,74	0,84	0,94	1

По полученным записям можно графически построить временную характеристику объекта. Если в качестве измерительного прибора использовать самопишущий потенциометр с ленточной диаграммой, то временную характеристику получим непосредственно на диаграмме в масштабе, определяемом шкалой прибора и скоростью перемещения его лентопротяжного механизма.

Временная характеристика сушильного шкафа представлена на рис. 3-17.

При экспериментальном снятии временных характеристик за единичное входное воздействие в большинстве случаев берется максимальное перемещение регулирующего органа от полного закрытия его до полного открытия.

За единичное воздействие могут быть приняты и другие скачкообразные изменения входной величины. Вид времен-

ной характеристики при этом остается одним и тем же, так как она определяется только внутренними динамическими свойствами объекта; меняется только масштаб временной характеристики при исчислении выходной величины в абсолютных единицах.

Получив, например, временную характеристику при перемещении движка трансформатора на 0,1 его полного хода, можно, не производя вторичного опыта, получить временную характеристику при перемещении движка от минимального до максимального положения путем увеличения в 10 раз значений температур, зарегистрированных при первом опыте. Графическое изображение временной характеристики в относительных единицах при этом не изменится, если относительными значениями выходной величины считать отношения ее абсолютных значений к тому абсолютному установившемуся значению выходной величины, которое соответствует выбранному единичному значению выходной величины. В этом случае коэффициент передачи объекта $k_{об} = 1$. Для перехода от координат относительной временной диаграммы к абсолютным значениям Θ должна быть известна лишь величина $\Theta_{уст}$.

Выбирать в качестве единичного входного воздействия небольшие перемещения регулирующего органа не следует, так как в этом случае даже незначительные внешние возмущающие воздействия будут вносить существенные искажения в результаты эксперимента.

Если временную характеристику приходится снимать при работающем объекте, то не всегда представляется возможным подать на его вход значительное ступенчатое входное воздействие, так как при этом отклонение регулируемой величины от заданного ее значения может принять недопустимые по условиям технологического процесса размеры. В этом случае на вход объекта подают не постоянное ступенчатое воздействие, а кратковременное в виде прямоугольного единичного импульса (рис. 3-18, б). Для этого, например,

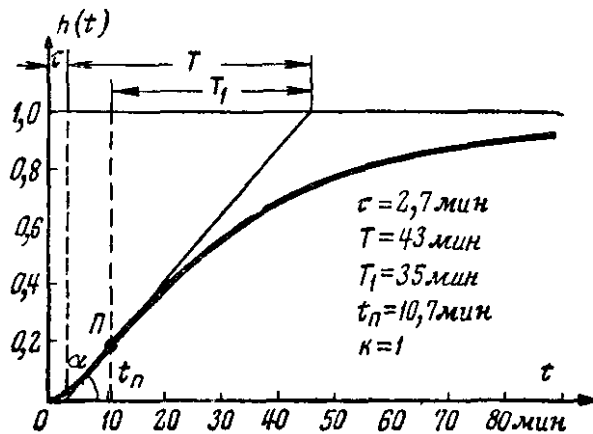


Рис 3-17. Экспериментальная временная характеристика сушильного шкафа по рис. 5-1.

при установившейся температуре в сушильном шкафу отключают регулятор, перемещают на определенную величину движок автотрансформатора (например, полностью вводят) и по истечении времени t_n возвращают его в исходное рабочее положение. С момента первого перемещения движка ре-

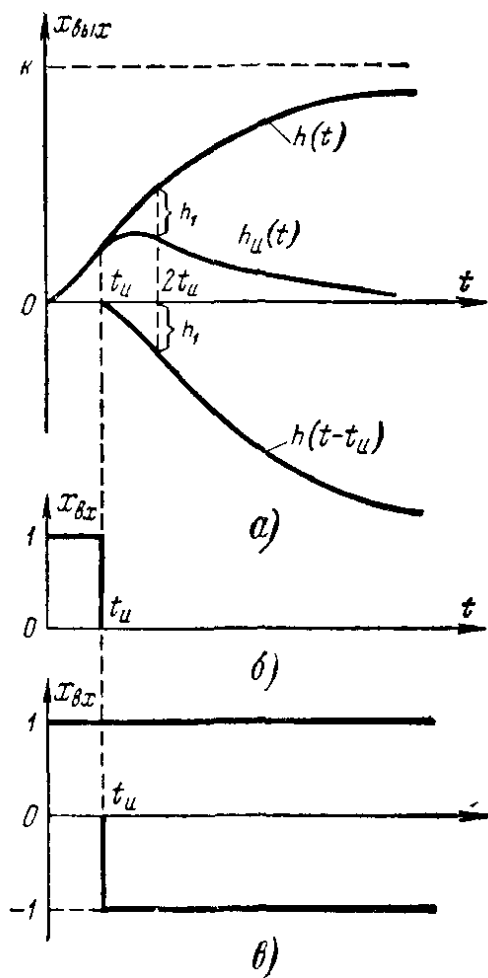


Рис 3-18 Построение временной характеристики по экспериментальной импульсной временной характеристике

временную характеристику такой же характеристики, но противоположного знака и сдвинутой относительно основной характеристики на время t_n , т. е.

$$h_n(t) = h(t) - h(t - t_n).$$

Следовательно,

$$h(t) = h_n(t) + h(t - t_n). \quad (3-78)$$

В течение времени от 0 до t_n , как видно из рис. 3-18, а, $h(t - t_n) = 0$, и поэтому $h(t) = h_n(t)$. Таким образом, на этом отрезке времени импульсная временная характе-

ризируют отклонения температуры от равновесного состояния через определенные промежутки времени до тех пор, пока температура вновь не примет первоначально установившееся значение.

По полученной зависимости $h_n(t)$, которая называется *импульсной временной характеристикой* (рис. 3-18, а), можно найти обычную временную характеристику объекта.

Прямоугольный импульс можно рассматривать как ступенчатое постоянное воздействие, на которое по истечении времени t_n накладывается второе ступенчатое постоянное воздействие той же величины, но противоположное по знаку. Следовательно, импульсную временную характеристику можно рассматривать как результат наложения на обычную вре-

тика совпадает с обычной временной характеристикой; это дает возможность построить на отрезке времени $t_n - 2t_n$ характеристику $-h(t - t_n)$, перенося на этот отрезок времени участок характеристики $h(t) = h_n(t)$, изображенный на отрезке времени $0 - t_n$, но с противоположным знаком. Суммируя на отрезке времени $t_n - 2t_n$ ординаты зависимости $h(t - t_n)$ и снятой экспериментальной кривой $h_n(t)$ [согласно формуле (3-78)], находим участок временной характеристики $h(t)$ на отрезке времени $t_n - 2t_n$, который позволит построить участок зависимости $-h(t - t_n)$ на отрезке времени $2t_n - 3t_n$. Путем суммирования ординат кривых $h(t - t_n)$ и $h_n(t)$ на этом отрезке времени получаем участок временной характеристики $h(t)$ на отрезке времени $2t_n - 3t_n$.

Продолжая аналогичные построения на последующих отрезках времени $3t_n - 4t_n$, $4t_n - 5t_n$ и т. д., получим временную характеристику объекта по экспериментально снятой импульсной временной характеристике.

Построим временную характеристику сушильного шкафа, схема которого была дана на рис. 1-5, при равновесном состоянии системы и установившейся температуре $\Theta_{уст} = 400^\circ\text{C}$. Допустим, что при проведении эксперимента накладывается условие, заключающееся в том, что отклонение температуры от заданной не должно быть более $\Delta\Theta = 40^\circ\text{C}$. Для снятия характеристики отключим регулятор, быстро полностью передвинем движок трансформатора и будем регистрировать температуру через равные промежутки времени, например через 3 мин. Через $t_n = 12$ мин движок автотрансформатора снова переместим в исходное положение и продолжим фиксировать температуру до тех пор, пока она не достигнет установившегося значения 400°C , после чего снова включим регулятор.

Зарегистрированные величины температуры приведены в табл. 3-3. Вычитая из них температуру исходного равновесного состояния 400°C , получим импульсную временную характеристику сушильного шкафа $\Delta\Theta_n(t)$ в абсолютных единицах.

В течение времени $0 - 12$ мин временная характеристика в абсолютных единицах $\Delta\Theta(t)$ совпадает с импульсной временной характеристикой. На этом отрезке времени величина $\Delta\Theta(t - t_n)$ равна нулю. Кривую $\Delta\Theta(t - t_n)$ на отрезке времени $t_n - 2t_n = 12 \div 24$ мин получим, строя на этом отрезке времени участок характеристики $\Delta\Theta(t)$ в интервале $0 - t_n = 0 \div 12$ мин. Суммируя ординаты $\Delta\Theta_n(t)$ и $\Delta\Theta(t -$

Таблица 3-3

$t, \text{ мин}$	$\theta, \text{ }^\circ\text{C}$	$\Delta \theta_{\text{н}}(t)$	$\Delta \theta(t-t_{\text{н}})$	$\Delta \theta(t)$	$h(t)$
0	400	0	0	0	0
3	404	4	0	4	0,03
6	410	10	0	10	0,08
9	420	20	0	20	0,15
12	429	29	0	29	0,22
15	434	34	4	38	0,29
18	436	36	10	46	0,35
21	434	34	20	54	0,40
24	432	32	29	61	0,46
27	430	30	38	68	0,51
30	428	28	46	74	0,56
33	426	26	54	80	0,60
36	424	24	61	85	0,64
39	422	22	68	90	0,67
42	420	20	74	94	0,70
45	417	17	80	97	0,74
48	415	15	85	100	0,76
51	413	13	90	103	0,78
54	412	12	94	106	0,80
57	412	12	97	109	0,82
60	411	11	100	111	0,84
∞	400	0	132	132	1

— $t_{\text{н}}$) на отрезке времени 12—24 мин, получим временную характеристику на этом отрезке времени. Таким образом, перенеся последовательно значения $\Delta \theta(t)$ из предыдущих интервалов времени в последующие и суммируя их с $\Delta \theta_{\text{н}}(t)$, получим временную характеристику сушильного шкафа $\Delta \theta(t)$ в абсолютных единицах.

Установившееся значение отклонения температуры (табл.3-3) от исходного равновесного состояния равно $\Delta \theta(\infty) = 132^\circ\text{C}$. Временная характеристика сушильного шкафа в относительных единицах определяется как отношение $h(t) = \Delta \theta(t)/\Delta \theta(\infty)$.

Практически определять ординаты вспомогательной кривой $h(t-t_n)$ даже нет необходимости, так как в каждом последующем интервале времени временная характеристика получается путем суммирования ординат импульсной временной характеристики в этом интервале времени с ординатами обычной временной характеристики в предыдущем интервале времени. Участок же временной характеристики в первом интервале времени, т. е. за период действия ступенчатого входного единичного воздействия, совпадает с участком импульсной временной характеристики за этот отрезок времени.

Для получения временной характеристики сушильного шкафа в абсолютных единицах необходимо умножить величины ординат, выраженные в относительных единицах (табл. 3-3), на установившееся значение (или отклонение) температуры, соответствующее единичному входному воздействию.

2. Определение частотных характеристик

Частотные характеристики экспериментально определяются путем подачи на вход объекта гармонических колебаний $A_{вх} \sin \omega t$ и регистрации на выходе амплитуды и фазы установившихся колебаний $A_{вых} \sin (\omega t + \varphi_{вых})$. Каждой частоте входных колебаний $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и т. д. будут соответствовать на выходе установившиеся гармонические колебания с различными амплитудами $A_{вых1}, A_{вых2}, A_{вых3}$ и т. д. и фазами $\varphi_{вых1}, \varphi_{вых2}, \varphi_{вых3}$ и т. д.

Определяя для каждой частоты отношение $A_{вых1}/A_{вх}, A_{вых2}/A_{вх}, A_{вых3}/A_{вх}$ и т. д., получим амплитудно-частотную характеристику $W(\omega)$.

Значения $\varphi_{вых1}, \varphi_{вых2}, \varphi_{вых3}$ и т. д. в зависимости от частоты при нулевой начальной фазе входных колебаний дают нам фазо-частотную характеристику $\varphi(\omega)$.

Определяя для ряда частот значения $\frac{A_{вых1}}{A_{вх}} e^{j\varphi_{вых1}}, \frac{A_{вых2}}{A_{вх}} e^{j\varphi_{вых2}}, \frac{A_{вых3}}{A_{вх}} e^{j\varphi_{вых3}}$ и т. д., находим амплитудно-фазовую характеристику, а также вещественную и мнимую частотные характеристики.

По полученным данным можно графически построить все частотные характеристики объекта.

Амплитудно-фазовую характеристику можно также построить по амплитудно-частотной и фазо-частотной харак-

теристикам следующим путем. Для каждой частоты входных колебаний проводим на комплексной плоскости U, jV лучи из начала координат под углами $\varphi_{\text{вых1}} = \varphi(\omega_1)$, $\varphi_{\text{вых2}} = \varphi(\omega_2)$, $\varphi_{\text{вых3}} = \varphi(\omega_3)$ и т. д. к вещественной положительной полуоси, отсчитывая угол по часовой стрелке. На этих лучах соответственно откладываем величины амплитудно-частотных характеристик $W(\omega_1)$, $W(\omega_2)$, $W(\omega_3)$ и т. д. Получаем пучок векторов амплитудно-фазовой характеристики $W(j\omega_1)$, $W(j\omega_2)$, $W(j\omega_3)$ и т. д. Соединив концы векторов плавной кривой, получим графическое изображение амплитудно-фазовой характеристики (см. рис. 3-6).

Длина вектора амплитудно-фазовой характеристики $W(j\omega)$ при $\omega = 0$ равна передаточному коэффициенту объекта и определяется отношением установившегося значения выходной величины к входной при постоянном значении входной величины.

Гармонические колебания на вход объекта подаются путем перемещения регулирующего органа по синусоидальному закону.

Если непосредственное осуществление такого перемещения регулирующего органа затруднено, то к объекту подключают регулятор, меняют для него задающее воздействие по синусоидальному закону и таким образом экспериментально снимают частотные характеристики объекта, принимая за входную величину объекта перемещение регулирующего органа.

Если за входную величину принять задающее воздействие на регулятор, то мы получим частотные характеристики замкнутой системы авторегулирования в целом.

Например, для снятия частотных характеристик сушильного шкафа (см. рис. 1-5) необходимо при установившемся значении температуры перемещать по синусоидальному закону движок сопротивления R_3 и при разных частотах его перемещения фиксировать амплитуду и фазу установившихся колебаний движка автотрансформатора AT и температуры объекта Θ .

Если получение входных синусоидальных колебаний затруднено, то на вход объекта подают прямоугольные колебания. При этом выходные колебания будут отличаться от синусоидальных. Для определения частотных характеристик в этом случае необходимо предварительно разложить экспериментальные входные и выходные колебания в ряд Фурье, выделить первые гармоники и уже по ним находить отношения амплитуд и фазовые сдвиги.

3. Определение частотных характеристик по временным характеристикам

Так как экспериментальное определение временных характеристик значительно проще, нежели частотных, то большой практический интерес представляют возможности получения частотных характеристик из экспериментальных временных характеристик.

Обозначив постоянные времени сушильного шкафа $T_{ш}$ и нагревателя $T_{н}$ в общем виде через $T_{н} = T_3$ и $T_{ш} = T_4$, запишем передаточную функцию объекта, показанного на рис. 1-5 и являющегося в динамическом отношении инерционным звеном второго порядка [см, формулу (2-32)]:

$$W(p) = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)} = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}, \quad (3-79)$$

где

$$T_1 = T_3 + T_4; \quad T_2^2 = T_3 T_4.$$

Так как корни характеристического уравнения звена $\alpha_1 = -1/T_3$ и $\alpha_2 = -1/T_4$ вещественны и отрицательны, то $T_1/T_2 > 2$ и, следовательно, аналитически временная характеристика звена определяется выражением (3-71).

Подставив в (3-71) значения α_1 и α_2 , получим выражение для временной характеристики через постоянные времени объекта:

$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right). \quad (3-80)$$

Снятая экспериментально временная характеристика на рис. 3-17 является графическим изображением зависимости (3-80).

Из рис. 3-17 следует, что временная характеристика имеет точку перегиба Π . Проведем на рис. 3-17 касательную к временной характеристике в точке перегиба и определим координаты точки перегиба.

Так как из всех касательных к временной характеристике наибольший угол наклона к оси абсцисс имеет касательная, проведенная в точке перегиба, то в точке Π первая производная временной характеристики имеет максимальное

значение, равное $\operatorname{tg} \alpha = k/T$, а вторая производная равна нулю:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T_3 - T_4} \left(e^{-\frac{t_{\Pi}}{T_3}} - e^{-\frac{t_{\Pi}}{T_4}} \right) = \frac{k}{T};$$

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} = \frac{k}{T_3 - T_4} \left(\frac{1}{T_4} e^{-\frac{t_{\Pi}}{T_4}} - \frac{1}{T_3} e^{-\frac{t_{\Pi}}{T_3}} \right) = 0.$$

Из первого уравнения следует, что

$$\frac{T}{T_3 - T_4} \left(e^{-\frac{t_{\Pi}}{T_3}} - e^{-\frac{t_{\Pi}}{T_4}} \right) = 1. \quad (3-81)$$

Из второго уравнения получим:

$$e^{-\frac{t_{\Pi}}{T_3}} = \frac{T_3}{T_4} e^{-\frac{t_{\Pi}}{T_4}}. \quad (3-82)$$

Решив уравнения (3-81) и (3-82) относительно $e^{-\frac{t_{\Pi}}{T_3}}$, получим:

$$e^{-\frac{t_{\Pi}}{T_3}} = \frac{T_3}{T}. \quad (3-83)$$

Аналогично находим:

$$e^{-\frac{t_{\Pi}}{T_4}} = \frac{T_4}{T}. \quad (3-84)$$

Ордината временной характеристики в точке перегиба

$$h(t_{\Pi}) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t_{\Pi}}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t_{\Pi}}{T_4}} \right).$$

С учетом (3-83) и (3-84) получим:

$$h(t_{\Pi}) = \frac{k}{T} (T - T_3 - T_4). \quad (3-85)$$

Из рис. 3-17 следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h(t_{\Pi})}{T - T_1} = \frac{k}{T},$$

откуда

$$h(t_{\Pi}) = \frac{k}{T} (T - T_1).$$

Подставив это значение $h(t_p)$ в (3-85), получим:

$$T_1 = T_3 + T_4. \quad (3-86)$$

Таким образом, величина T_1 на рис. 3-17 является суммой постоянных времени объекта и равна величине T_1 , входящей в передаточную функцию (2-32).

Логарифмируя выражение (3-82) и решая его относительно t_p , найдем:

$$t_p = \frac{T_3 T_4}{T_3 - T_4} \ln \frac{T_3}{T_4}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $T_3 + T_4 = T_1$, найдем:

$$\frac{t_p}{T_1} = \frac{\frac{T_3}{T_4}}{\left(\frac{T_3}{T_4}\right)^2 - 1} \ln \frac{T_3}{T_4}. \quad (3-87)$$

Зависимость $\frac{t_p}{T_1} = f\left(\frac{T_3}{T_4}\right)$ представлена на рис. 3-19.

Из сказанного выше вытекает следующий порядок определения постоянных времени объекта по экспериментальной временной характеристике:

1. Проводится касательная в точке перегиба экспериментальной характеристики и графически определяются величины t_p и T_1 .

2. Вычисляется отношение t_p/T_1 .

3. По формуле (3-87) или рис. 3-19 по найденному значению t_p/T_1 определяется отношение T_3/T_4 .

4. Зная отношение T_3/T_4 и сумму $T_3 + T_4 = T_1$, находим постоянные времени объекта T_3 и T_4 .

Так, для сушильного шкафа по временной характеристике, изображенной на рис. 3-17, находим:

$$t_p = 10,7 \text{ мин}; T_1 = 35 \text{ мин}; t_p/T_1 = 0,306.$$

По рис. 3-19 определяем, что $T_3/T_4 = 0,167$.

Таким образом, имея в виду равенство (3-86), найдем:

$$T_3 = 5 \text{ мин}; T_4 = 30 \text{ мин}.$$

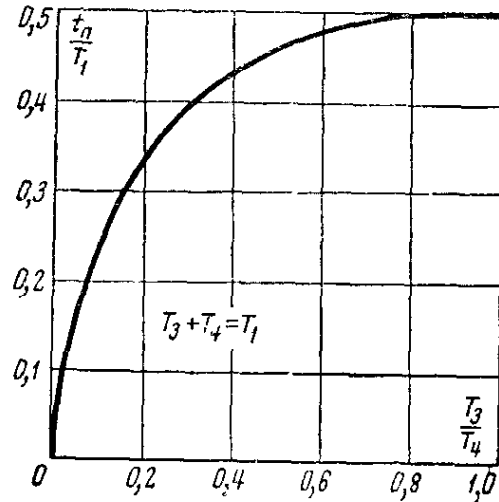


Рис. 3-19. Графическое определение отношения постоянных времени объекта по его экспериментальной временной характеристике.

Инерционное звено второго порядка можно представить двумя последовательными инерционными звеньями первого порядка с постоянными времени T_3 и T_4 . В этом случае можно по рис. 3-19 определить отношение меньшей из этих постоянных времени к большей.

Передаточный коэффициент k звена равен установившемуся значению временной характеристики.

Подставив постоянные времени и коэффициент передачи объекта в формулу (2-32), получим выражение передаточной функции объекта.

Заменив в этой передаточной функции символ p на $j\omega$, получим аналитическое выражение амплитудно-фазовой характеристики объекта.

Объект с временной характеристикой по рис. 3-17, т. е. представляемый двумя последовательными инерционными звеньями первого порядка, можно с достаточной для практики точностью представить также в виде последовательного соединения двух звеньев: запаздывающего звена с временем запаздывания τ и аperiodического звена первого порядка с постоянной времени T .

Действительно, чем меньше постоянная времени одного из двух последовательных инерционных звеньев первого порядка, тем меньше ордината $h(t_n)$ точки перегиба Π переходного процесса на рис. 3-17. Если одна из этих постоянных времени будет равна нулю, то переходный процесс вообще не будет иметь точки перегиба. Следовательно, если постоянная времени одного из звеньев много меньше постоянной времени другого, можно представить часть кривой переходного процесса на рис. 3-17 между началом координат и точкой перегиба Π ломаной линией, проходящей вначале по оси абсцисс, а затем по касательной к кривой переходного процесса в точке перегиба. Этот вид переходного процесса получается при последовательном соединении двух других звеньев: запаздывающего и инерционного первого порядка.

Время запаздывания τ запаздывающего звена и постоянная времени T инерционного звена первого порядка определяются графически из кривой переходного процесса (см. рис. 3-17). Передаточная функция объекта при этом может быть представлена [см. формулы (2-22), (2-49) и (2-50)] в виде:

$$W(p) = \frac{ke^{-p\tau}}{Tp + 1}. \quad (3-88)$$

Заменив p на $j\omega$, получим амплитудно-фазовую характеристику объекта:

$$W(j\omega) = \frac{ke^{-j\omega\tau}}{1+j\omega T}. \quad (3-89)$$

Если запаздывание равно нулю, то объект является инерционным звеном первого порядка и его амплитудно-фазовая характеристика имеет вид:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T}. \quad (3-90)$$

По полученной амплитудно-фазовой характеристике можно найти все остальные характеристики объекта. Если экспериментальная временная характеристика имеет колебательный характер (см. рис. 2-14), то, приравнявая ψ из уравнений (2-46) и (2-47), найдем:

$$\frac{A_2}{A_1} = e^{-\frac{2\pi\alpha}{\omega}} = e^{-\alpha T} = \frac{1}{e^{\alpha T}},$$

откуда

$$e^{\alpha T} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Логарифмируя, получим:

$$\alpha = \frac{1}{T} \ln \frac{A_1}{A_2}, \quad (3-91)$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период колебаний.

Так как в аналитическом выражении временной характеристики (3-73) частота

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{T_2^2} - \alpha^2},$$

то можем записать:

$$\left. \begin{aligned} T_2^2 &= \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \\ T_1 &= 2\alpha T_2^2, \end{aligned} \right\} \quad (3-92)$$

где

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Определив значения амплитуд A_1 и A_2 и периода T по экспериментальной временной характеристике (см. рис. 2-14, а) и вычислив α по выражению (3-91), можно по формулам (3-92) определить коэффициенты дифференциального уравнения (2-31) колебательного звена и по формулам (2-32) и (3-63) найти передаточную функцию и амплитудно-фазовую характеристику объекта.

Подачу на вход системы прямоугольных колебаний с амплитудой x_0 и частотой $\omega = 2\pi/T$ можно рассматривать как результат постоянного воздействия на систему, равного x_0 , и последовательного приложения дополнительных чередующихся постоянных воздействий $-2x_0$ и $2x_0$ через интервалы времени $t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$. Действительно, при этом в первый полупериод (при $0 < t < T/2$) результирующее воздействие $x_{вх}$ на объект будет равно $x_{вх} = x_0$; во второй полупериод (при $\frac{T}{2} < t < T$) $x_{вх} = x_0 - 2x_0 = -x_0$; в третий полупериод (при $T < t < 3T/2$) $x_{вх} = x_0 - 2x_0 + 2x_0 = x_0$; в четвертый полупериод (при $\frac{3}{2} T < t < 2T$) $x_{вх} = x_0 - 2x_0 + 2x_0 - 2x_0 = -x_0$ и т. д.

Следовательно, зная временную характеристику объекта $h(t)$, можно построить график изменения выходной величины: в течение первого полупериода $x_{вых} = x_0 h(t)$; за время второго полупериода $x_{вых} = x_0 h(t) - 2x_0 h\left(t - \frac{T}{2}\right)$; в интервале времени третьего полупериода $x_{вых} = x_0 h(t) - 2x_0 h\left(t - \frac{T}{2}\right) + 2x_0 h(t - T)$ и т. д.

Определив аналитически или графически первую гармоническую составляющую входных и выходных колебаний, находим значения всех частотных характеристик для полученной частоты ω .

Выполнив аналогичные построения и вычисления для ряда частот, можно получить частотные характеристики любого объекта по его экспериментальной временной характеристике для всего заданного сектора частот. Этот метод является наиболее общим. Однако при этом необходимо выполнять много трудоемких построений и расчетов.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

4-1. ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Как указывалось выше, основным назначением системы автоматического регулирования является или поддержание заданного постоянного значения регулируемого параметра, или изменение его по определенному закону. При отклонении в данный момент времени величины регулируемого параметра от заданного значения, что может произойти или в результате появления возмущающих воздействий на систему или при изменении заданного значения регулируемой величины, автоматический регулятор воздействует на систему таким образом, чтобы ликвидировать это отклонение. Тогда система переходит из одного равновесного состояния в другое, т. е. в ней возникает переходный процесс, определяемый динамическими свойствами системы.

Если возмущающее воздействие будет снято или если постоянное по величине возмущающее воздействие или изменение на постоянную величину управляющего воздействия будет сохраняться и при этом система после окончания переходного процесса снова приходит в первоначальное или другое равновесное состояние, то такая система называется *устойчивой*.

Если при тех же условиях в системе или возникают колебания со все возрастающей амплитудой, или происходит монотонное увеличение отклонения регулируемой величины от ее заданного равновесного значения, то система называется *неустойчивой*.

Для того чтобы определить устойчива или неустойчива система, необходимо изучить ее поведение при малых отклонениях от равновесного состояния. Если при этом система стремится вернуться к равновесному состоянию, то она будет устойчивой. Если же в системе возникают силы, которые стремятся увеличить отклонение системы от равновесного состояния, система будет неустойчивой. В качестве примера рассмотрим перемещение шара по поверхностям различного профиля под влиянием кратковременных внешних воздействий на него.

На рис. 4-1, а изображен шар, находящийся внутри сферической поверхности. При отсутствии внешних сил шар

устанавливается в положении *I* и его сила тяжести F уравновешивается силой реакции сферической поверхности.

Если при воздействии внешних сил шар перемещается в положение *II*, то его сила тяжести разложится на две составляющие. Составляющая F_1 будет уравновешиваться радиальной силой реакции, а тангенциальная составляющая

F_2 окажется ничем не компенсированной и будет стремиться вернуть шар в исходное равновесное состояние.

Таким образом, система на рис. 4-1, *a* является устойчивой.

На рис. 4-1, *б* в положении *I* шар расположен извне на сферической поверхности, касаясь ее в верхней точке. Сила F уравновешена силой реакции. Если под влиянием внешних сил шар переместится в положение *II*, то появится неуравновешенное усилие F_2 , удаляющее шар от исходного равновесного состояния. Следовательно, система на рис. 4-1, *б* является не-

устойчивой, так как достаточно незначительного внешнего воздействия, чтобы шар скатился со сферы.

На рис. 4-1, *в* шар лежит на горизонтальной плоскости и его сила тяжести в любом положении уравновешивается реакцией плоскости. При воздействии внешних сил шар будет катиться по плоскости только до тех пор, пока действуют эти внешние силы. При прекращении их воздействия на шар он останавливается в том положении, в котором находился в момент исчезновения внешних сил (если не учитывать инерции массы шара).

Системы, в которых одной и той же входной величине (воздействию, выводящему систему из равновесного состояния) соответствует бесконечное множество значений выходной величины (воздействия, уравновешивающего систему), называются *нейтрально-устойчивыми*.

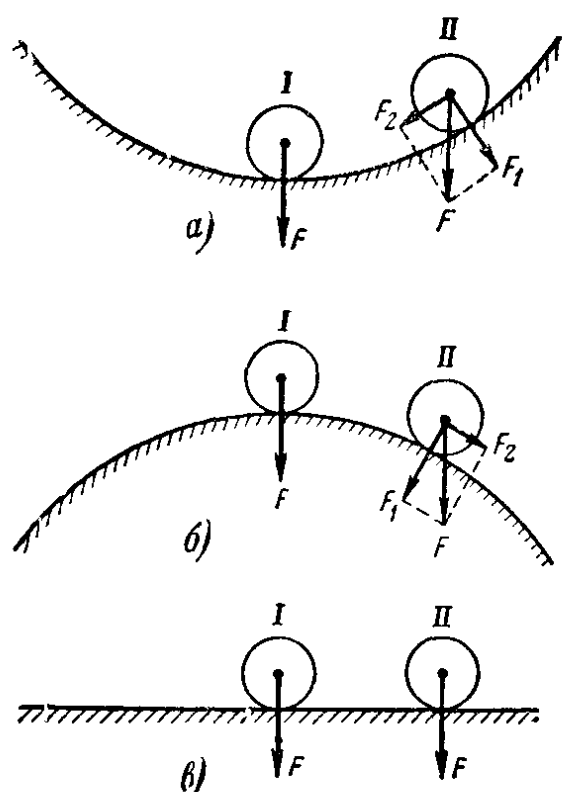


Рис. 4-1. Положение шара на поверхности.

a — устойчивое, *б* — неустойчивое;
в — нейтрально устойчивое.

Поведение системы автоматического регулирования при наличии в ней возмущающих и управляющих воздействий описывается уравнением процесса автоматического регулирования. Решение этого уравнения состоит из двух составляющих:

$$x_{\text{вых}} = x_{0\text{вых}} + x_{\text{вых}}(t),$$

где $x_{0\text{вых}}$ — вынужденная составляющая изменения выходной величины;

$x_{\text{вых}}(t)$ — переходная составляющая изменения выходной величины, изменяющаяся по времени в течение переходного процесса.

Первая из этих составляющих однозначно связана с изменением входной величины и является частным решением уравнения процесса регулирования. Для общего случая системы второго порядка она согласно формуле (2-34) в определенном масштабе повторяет изменения входной величины $x_{0\text{вх}}$.

Для того чтобы система могла правильно обрабатывать управляющий входной сигнал $g(t)$, т. е. изменение заданного значения выходной величины, необходимо, чтобы переходный процесс, протекающий при переходе системы из одного заданного равновесного состояния в другое, был затухающим, т. е. составляющая $x_{\text{вых}}(t)$ с течением времени должна стремиться к нулю. Только в этом случае регулируемая величина по окончании переходного процесса примет новое заданное значение, изменившись на величину изменения управляющего воздействия $g(t)$, или, иными словами, отклонение регулируемой величины от нового заданного значения станет равным нулю.

Необходимо также, чтобы переходная составляющая $x_{\text{вых}}(t)$ с течением времени стремилась к нулю и при воздействии на систему кратковременных возмущающих воздействий $f(t)$, так как только в этом случае вызванное возмущающими воздействиями отклонение регулируемой величины $x_{\text{вых}}$ от заданного значения (см. рис. 2-23) с течением времени станет равным нулю и равновесное состояние системы восстановится.

Переходная составляющая изменения выходной величины является общим решением однородного дифференциального уравнения (2-35), которое характеризует динамические свойства системы.

В общем случае переходная составляющая как функция времени определяется выражением (2-37) через корни харак-

теристического уравнения (2-36) однородного дифференциального уравнения (2-35).

Как это следует из уравнений (2-37), (2-41), (2-42) и (2-44), переходная составляющая определяется суммой членов, каждый из которых содержит экспоненциальную составляющую $e^{\alpha t}$, где α представляет собой корень характеристического уравнения, если он веществен, или вещественную часть этого корня в случае, если корень комплексный. Число экспоненциальных слагаемых, входящих в выражение переходной составляющей, равно числу корней характеристического уравнения.

Таким образом, для того чтобы каждый член выражения $x_{\text{вых}}(t)$ с течением времени стремился к нулю, необходимо и достаточно, чтобы все вещественные корни характеристического уравнения были отрицательными, а в комплексных корнях отрицательной должна быть вещественная часть корня. Тогда показатели степени всех экспонент будут отрицательными, а их абсолютная величина будет возрастать пропорционально времени, в результате чего с течением времени абсолютные значения всех экспоненциальных слагаемых будут стремиться к нулю.

Из изложенного выше следует, что корни характеристического уравнения в полной мере определяют устойчивость системы автоматического регулирования.

Линейная система автоматического регулирования устойчива, если все вещественные корни и вещественные части комплексных корней характеристического уравнения отрицательны.

Если хотя бы один корень характеристического уравнения или вещественная часть одного из его комплексных корней будут положительными, система будет неустойчивой. В этих случаях член переходной составляющей, соответствующий этому корню, будет содержать экспоненту в положительной степени, величина которой с течением времени будет беспредельно возрастать; следовательно, теоретически будет стремиться к бесконечности и значение регулируемой величины. Практически неустойчивость системы автоматического регулирования приведет к аварийному режиму работы системы, в результате чего она потеряет свою работоспособность либо вследствие отключения ее специально предусмотренной защитой или оператором, либо по причине выхода из строя того или иного элемента или устройства системы.

Особо следует рассмотреть случай, когда характеристическое уравнение системы имеет только один вещественный нулевой или одну пару сопряженных мнимых корней, т. е. если уравнение имеет один корень $p_1 = 0$ или два сопряженных, вещественная часть которых $\alpha_1 = 0$. Согласно (2-37) и (2-43) в этом случае переходная составляющая будет соответственно равна $x_{\text{вых}1}(t) = C_1$ или $x_{\text{вых}2}(t) = D \sin(\omega t - \varphi)$. Следовательно, линейные системы, имеющие только мнимые сопряженные и нулевые корни, являются нейтрально-устойчивыми. В линейных нейтрально-устойчивых системах выходная величина будет принимать произвольное значение; одному и тому же управляющему воздействию $g(t)$ будет соответствовать бесконечное множество значений выходной величины $x_{\text{вых}}$, и система регулирования не будет выполнять свои функции. Такие системы называют также структурно-неустойчивыми. Примером структурно-неустойчивой системы может служить интегрирующее звено, для которого, исходя из уравнения (2-16), характеристическое уравнение запишется так:

$$\frac{1}{k} p = 0.$$

Это уравнение имеет один корень: $p = 0$.

Если на вход сервомотора (см. рис. 2-5, а), представляющего собой интегрирующее звено, будет подано постоянное управляющее воздействие $\Delta p_{\text{вх}} = p_1 - p_2$, то при $\Delta f_{\text{в.н}} = 0$ поршень сервомотора будет перемещаться с постоянной скоростью и его положение будет непрерывно изменяться. Поршень остановится в момент снятия воздействия $\Delta p_{\text{вх}}$, т. е. в любом положении.

Структурно-неустойчивой системой является также электродвигатель (рис. 2-5, б), если за входную величину принять напряжение, подводимое к якору двигателя, а за выходную — угол его поворота.

Структурно-неустойчивыми являются все разомкнутые астатические системы, так как их характеристические уравнения имеют сомножителем оператор p , а следовательно, и нулевые корни.

Простое замыкание астатической системы обратной связью не всегда обеспечивает ее устойчивость, и тогда для обеспечения устойчивости астатической системы приходится применять дополнительные стабилизирующие устройства. В подавляющем большинстве случаев астатические системы являются менее устойчивыми, чем статические.

Физически бóльшая устойчивость статических систем по сравнению с астатическими объясняется следующими причинами.

Предположим, что в результате появления постоянного возмущающего воздействия f_0 регулируемая величина отклонилась на x_0 от заданного значения. Если система автоматического регулирования снабжена статическим регулятором (например, П-регулятором), то последний практически мгновенно переместит регулирующий орган на величину $x_p = kx_0$

в сторону восстановления заданного значения регулируемой величины. Это вызовет быстрое уменьшение ее, например, по кривой 1 на рис. 4-2, а; но по мере приближения значения регулируемой величины к установившемуся значению будет непрерывно уменьшаться регулирующее воздействие регулятора, зависящее от рассогласования этих двух значений.

Благодаря наличию в П-регуляторе установившейся статической ошибки εf_0 регулятор после окончания переходного процесса будет оказывать на объект постоянное дополнительное регулирующее воздействие, компенсирующее постоянное возмущающее воздействие на объект f_0 (рис. 4-2, а и б).

При регулировании, пропорциональном интегралу отклонения регулируемой величины от заданного значения, регулирующее воздействие И-регулятора $x_p = k \int x(t) dt$ нарастает постепенно от нуля, будучи пропорционально величине площади под кривой $x(t)$, непрерывно увеличивающейся с течением времени (рис. 4-2, в).

Рис. 4-2. Примеры переходных процессов в статической и астатической системах (а) и регулирующее воздействие П-регулятора (б) и И-регулятора (в) при постоянном воздействии

По мере возрастания регулирующего воздействия отклонение регулируемой величины будет уменьшаться, например, по кривой 2 на рис. 4-2, а; однако регулирующее воздействие регулятора на объект, направленное в сторону уменьшения отклонения, будет непрерывно возрастать до того момента, когда регулируемая величина вновь вернется к заданному значению. Но при этом в силу инерционности объекта окажется, что регулирующий орган будет передвинут регулятором на величину, бóльшую, нежели это требуется для компенсации возмущающего воздействия f_0 (явление *перерегулирования*); поэтому в системе появится отрицательное отклонение регулируемой величины (рис. 4-2, а).

При появлении отрицательного отклонения регулятор начнет перемещать регулирующий орган в противоположную сторону, а

регулирующее воздействие, достигшее величины x_{p1} , станет уменьшаться (рис. 4-2, в). Отрицательное отклонение регулируемой величины будет нарастать все медленнее, а затем начнет уменьшаться. И снова в тот момент, когда оно станет равным нулю, регулирующий орган будет передвинут регулятором в обратном направлении больше, чем требуется: возникнет новое перерегулирование в направлении, противоположном первому, но меньшее по абсолютной величине

Такие колебания регулируемой величины относительно установившегося значения будут происходить до тех пор, пока при очередном возвращении ее к заданному значению перемещение регулирующего органа относительно его положения, соответствующего равновесному состоянию системы, существовавшему до появления в ней возмущающего воздействия f_0 , не будет полностью компенсировать это воздействие. В этом случае выходная величина останется равной заданной, но регулирующий орган будет находиться в новом установившемся положении. Следовательно, в этом случае после окончания переходного процесса при отклонении регулируемой величины от заданного значения, равном нулю, на выходе регулятора сохранится постоянное значение выходной величины $f_{p.уст}$, которое и обеспечивает новое положение регулирующего органа, компенсирующее возмущающее воздействие.

Таким образом, в системах с астатическим регулятором установившееся значение выходной величины не находится в однозначной зависимости от установившегося значения входной величины. Одному и тому же значению регулируемой величины, которая является входной величиной для регулятора, при различных значениях возмущающего воздействия соответствуют в установившемся состоянии системы различные значения выходной величины регулятора, а следовательно, и различные положения регулирующего органа: они зависят не от значения регулируемой величины, а от значения возмущающего воздействия. За счет этого в замкнутых системах с астатическим регулятором заданное значение регулируемой величины сохраняется при различных постоянных возмущающих воздействиях, т. е. статическая ошибка в них отсутствует.

Колебательность астатической системы (см. § 5-1,4) можно уменьшить путем уменьшения коэффициента усиления регулятора k_p , что достигается уменьшением скорости перемещения исполнительного механизма (например, скорости вращения электродвигателя в системе на рис. 1-5). Тем не менее при этом не следует упускать из виду, что чрезмерное уменьшение скорости перемещения исполнительного механизма приводит к увеличению времени регулирования, а замедленное протекание процесса регулирования в свою очередь вызывает увеличение отклонения регулируемой величины от заданного значения во время переходного процесса в случае, если возмущающее воздействие на систему велико.

Выходная величина линейных систем, характеристическое уравнение которых имеет только одну или несколько пар мнимых комплексных корней, при постоянном значении управляющего воздействия $g(t)$ будет совершать относительно своего заданного значения незатухающие свободные колебания с постоянной амплитудой и частотой согласно

уравнению (2-48). Такие системы также не отвечают требованиям, предъявляемым к САР, и поэтому их практически относят к неустойчивым системам.

Таким образом, для того чтобы ответить на вопрос устойчива или неустойчива система, достаточно найти корни ее характеристического уравнения. Однако этим методом пользоваться во многих случаях практически невозможно, так как искать корни алгебраических уравнений высоких степеней очень трудно, а уравнения степеней выше четвертой вообще аналитически не решаются. Кроме того, найдя корни характеристического уравнения, мы определим, устойчива или неустойчива система, но не сможем установить как нужно изменить параметры системы для обеспечения или повышения ее устойчивости, и представить себе, как тот или иной параметр или совокупность параметров САР влияют на ее устойчивость. В связи с этим в современной теории регулирования и инженерной практике нашли широкое применение косвенные методы исследования систем регулирования на устойчивость. Каждый метод сводится к определенным правилам и предлагает критерии устойчивости, с помощью которых можно исследовать системы на устойчивость без решения характеристического уравнения.

Предложены три основных критерия устойчивости: критерий Рауса—Гурвица, критерий Михайлова и амплитудно-фазовый критерий Найквиста, каждый из которых имеет определенные достоинства и свои особенности при его практическом применении.

4-2. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАУСА — ГУРВИЦА

Первый критерий устойчивости предложили независимо друг от друга Раус и Гурвиц в виде неравенств, составленных по особым правилам из коэффициентов характеристического уравнения $A(p) = 0$ замкнутой системы, которое в общем виде, как уже указывалось, пишется так:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0. \quad (4-1)$$

Наиболее просто пользоваться критерием устойчивости, прибегая к помощи табл. 4-1. В первой строке табл. 4-1 по столбцам последовательно выписываются через один все коэффициенты характеристического уравнения, начиная с коэффициента при старшем члене.

Таблица 4-1

Номер строки	Значение r	Номер столбца			
		1	2	3	...
1	—	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
2	—	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
3	$r_0 = \frac{a_n}{a_{n-1}}$	$c_{1,3} = a_{n-2} - r_0 a_{n-3}$	$c_{2,3} = a_{n-4} - r_0 a_{n-5}$	$c_{3,3} = a_{n-6} - r_0 a_{n-7}$...
4	$r_1 = \frac{a_{n-1}}{c_{1,3}}$	$c_{1,4} = a_{n-3} - r_1 c_{2,3}$	$c_{2,4} = a_{n-5} - r_1 c_{3,3}$	$c_{3,4} = a_{n-7} - r_1 c_{4,3}$...
5	$r_2 = \frac{c_{1,3}}{c_{1,4}}$	$c_{1,5} = c_{2,3} - r_2 c_{2,4}$	$c_{2,5} = c_{3,3} - r_2 c_{3,4}$	$c_{3,5} = c_{4,3} - r_2 c_{4,4}$...
...
i	$r_{i-3} = \frac{c_{1,i-2}}{c_{1,i-1}}$	$c_{1,i} = c_{2,i-2} - r_{i-3} c_{2,i-1}$	$c_{2,i} = c_{3,i-2} - r_{i-3} c_{3,i-1}$	$c_{3,i} = c_{4,i-2} - r_{i-3} c_{4,i-1}$...
...
$n+1$	$r_{n-2} = \frac{c_{1,n-1}}{c_{1,n}}$	$c_{1,n+1} = c_{2,n-1} - r_{n-2} c_{2,n}$	0	0	0

Во второй строке по столбцам последовательно выписываются все остальные коэффициенты. Индексы при величинах $c_{k,l}$, вычисляемых и вписываемых в третью и последующие строки таблицы, означают соответственно номер столбца и номер строки. Значения величин r_i и $c_{k,l}$ определяются последовательно заполнением строк сверху вниз и слева направо по алгоритму Рауса, понятному из табл. 4-1.

Для того чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все величины первого столбца табл. 4-1 были положительными при положительном коэффициенте при старшем члене a_n характеристического уравнения.

В качестве примера определим, устойчива ли система с характеристическим уравнением*

$$5p^6 + 12p^5 + 20p^4 + 25p^3 + 15p^2 + 6p + 1 = 0.$$

Результаты расчетов по алгоритму Рауса представлены в табл. 4-2. Так как все величины первого столбца табл. 4-2

Номер строки	Значение	Номер	
		1	
1	—	$a_n = a_6 = 5$	
2	—	$a_{n-1} = a_5 = 12$	
3	$r_0 = \frac{5}{12} = 0,417$	$c_{1,3} = 20 - 0,417 \cdot 25 = 9,6$	
4	$r_1 = \frac{12}{9,6} = 1,25$	$c_{1,4} = 25 - 1,25 \cdot 12,5 = 9,4$	
5	$r_2 = \frac{9,6}{9,4} = 1,02$	$c_{1,5} = 12,5 - 1,02 \cdot 4,75 = 7,66$	
6	$r_3 = \frac{9,4}{7,66} = 1,23$	$c_{1,6} = 4,75 - 1,23 \cdot 1 = 3,52$	
7	$r_4 = \frac{7,66}{3,48} = 2,18$	$c_{1,7} = 1$	

положительны, то эта система будет устойчивой. Рассмотрим в общем виде условия устойчивости различных линейных систем с помощью алгоритма Рауса.

1. Система первого порядка

Характеристическое уравнение системы $a_1 p + a_0 = 0$. В этом случае, в табл. 4-1 будут заполнены только строки 1 и 2 столбца 1.

Таким образом, для устойчивости линейной системы первого порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительными:

$$a_1 > 0; \quad a_0 > 0.$$

2. Система второго порядка

Характеристическое уравнение системы

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

В этом случае будут заполнены три строки табл. 4-1. Условия устойчивости запишутся как

$$a_n = a_2 > 0; \quad a_{n-1} = a_1 > 0; \quad c_{1,3} = a_{n-2} - r_0 a_{n-3} > 0.$$

Так как $n = 2 < 3$, то $a_{n-3} = 0$ и, следовательно,

$$c_{1,3} = a_{n-2} = a_0 > 0.$$

сголбца	2	3	4
	$a_4 = 20$	$a_2 = 15$	$a_0 = 1$
	$a_3 = 25$	$a_1 = 6$	0
	$c_{2,3} = 15 - 0,417 \cdot 6 = 12,5$	$c_{3,3} = 1$	0
	$c_{2,4} = 6 - 1,25 \cdot 1 = 4,75$	$c_{3,4} = 0$	0
	$c_{2,5} = 1$	0	0
	0	0	0
	0	0	0

Таким образом, для устойчивости линейной системы второго порядка необходимо и достаточно, чтобы все ~~края~~ характеристического уравнения были положительными:

$$a_2 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_0 > 0.$$

3. Система третьего порядка

Характеристическое уравнение системы

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

При составлении таблицы по алгоритму Рауса будут заполнены четыре строки. Условия устойчивости запишутся как

$$a_3 > 0; \quad a_2 > 0; \quad c_{1,3} = a_1 - \frac{a_3}{a_2} a_0 > 0; \quad c_{1,4} = a_0 > 0.$$

Таким образом, для устойчивости линейной системы третьего порядка необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительными, и, кроме того, чтобы произведение средних коэффициентов уравнения было больше произведения его крайних коэффициентов:

$$\left. \begin{array}{l} a_3 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_0 > 0 \\ a_1 a_2 > a_0 a_3. \end{array} \right\} \quad (4-2)$$

Следовательно, для устойчивости системы третьего порядка недостаточно одного только условия, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительными. Это условие необходимое, но не достаточное.

Для обеспечения устойчивости системы накладывается дополнительное ограничение на относительные величины коэффициентов характеристического уравнения, определяемое неравенством (4-2).

4. Система четвертого порядка

Характеристическое уравнение системы

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

При исследовании этой системы на устойчивость в табл. 4-1 по алгоритму Рауса будут заполнены пять строк. Условия устойчивости запишутся так:

$$a_4 > 0; \quad a_3 > 0; \quad c_{1,3} = a_2 - \frac{a_4}{a_3} a_1 > 0;$$

$$c_{1,4} = a_1 - \frac{a_3}{c_{1,3}} c_{2,3} > 0; \quad c_{1,5} = c_{2,3} - \frac{c_{1,3}}{c_{1,4}} c_{2,4} = a_0 > 0.$$

Подставив $c_{1,3}$ в выражение для $c_{1,4}$ и учитывая, что $c_{2,3} = a_0$, получим, решив неравенство $c_{1,4} > 0$:

$$a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0.$$

Таким образом, условия устойчивости для системы четвертого порядка запишутся как

$$\left. \begin{aligned} a_4 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0; \\ a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

Следовательно, для устойчивости системы четвертого порядка необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительными и, кроме того, чтобы их значения удовлетворяли неравенствам (4-3).

4-3. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА

Заменим в характеристическом уравнении (4-1) замкнутой системы комплексную переменную p мнимой переменной $j\omega$. Получим функцию мнимого переменного $j\omega$, в

которой ω может принимать любое значение от $+\infty$ до $-\infty$:

$$A(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0. \quad (4-4)$$

С учетом того, что $j = \sqrt{-1}$, а $j^2 = -1$, можем записать:

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 &= -\omega^2; \\ (j\omega)^3 &= -j\omega^3; \\ (j\omega)^4 &= \omega^4; \\ (j\omega)^5 &= j\omega^5 \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

т. е. четные степени $j\omega$ вещественны, а нечетные — мнимы.

Разделив действительную и мнимую части, получим:

$$A(j\omega) = U_A(\omega) + jV_A(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi_A(\omega)}, \quad (4-5)$$

где

$$U_A(\omega) = a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots \quad (4-6)$$

— вещественная часть функции $A(j\omega)$;

$$V_A(\omega) = \omega (a_1 - a_3 \omega^2 + a_5 \omega^4 - \dots) \quad (4-7)$$

— мнимая часть функции $A(j\omega)$;

$$A(\omega) = \sqrt{U_A^2(\omega) + V_A^2(\omega)} \quad (4-8)$$

— модуль функции $A(j\omega)$;

$$\varphi_A(\omega) = \text{arctg} \frac{V_A(\omega)}{U_A(\omega)} \quad (4-9)$$

— фаза или аргумент функции $A(j\omega)$.

Характеристическое уравнение (4-1) через его корни p_1, p_2, \dots, p_n можно записать так:

$$(p - p_n)(p - p_{n-1}) \dots (p - p_2)(p - p_1) = 0. \quad (4-10)$$

Соответственно функцию $A(j\omega)$, кроме уравнений (4-4) и (4-5), можно записать в виде:

$$A(j\omega) = (j\omega - p_n)(j\omega - p_{n-1}) \dots (j\omega - p_2)(j\omega - p_1). \quad (4-11)$$

Корни характеристического уравнения изобразятся на комплексной плоскости в виде точек p_1, p_2, p_3, \dots (рис. 4-3). При этом все вещественные отрицательные корни будут располагаться на действительной отрицательной полуоси.

Все комплексные корни, имеющие отрицательную вещественную часть, будут располагаться слева от мнимой оси. Наоборот, все вещественные положительные корни находятся на действительной положительной полуоси, а все комплексные корни, имеющие положительную вещественную часть — справа от мнимой оси. Мнимые корни располагаются на мнимой оси.

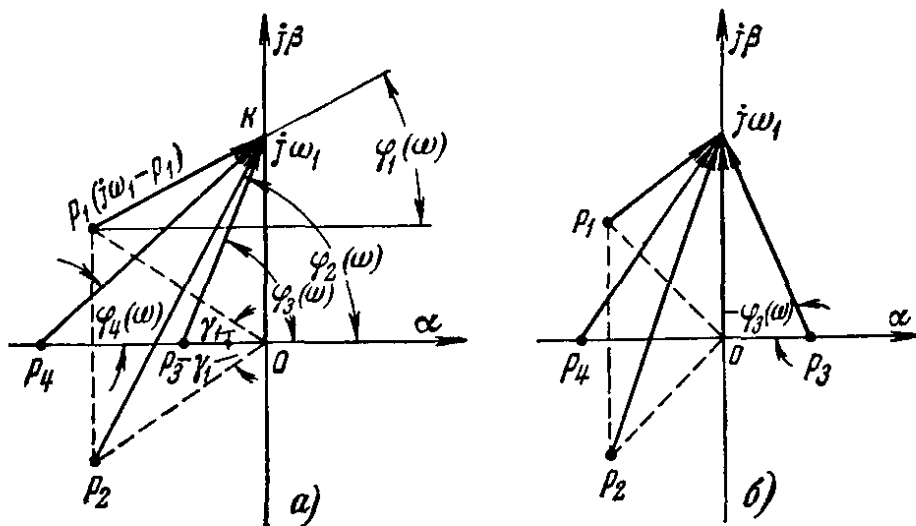


Рис. 4-3. Распределение корней характеристического уравнения и расположение сомножителей годографа Михайлова на комплексной плоскости корней систем.
а — устойчивой; б — неустойчивой.

Так как комплексные корни характеристического уравнения всегда сопряженные, то соответствующие точки (например, p_1 и p_2) на комплексной плоскости располагаются симметрично относительно вещественной оси.

Из сказанного следует, что для обеспечения устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения на плоскости комплексного переменного располагались слева от мнимой оси (в левой полуплоскости).

Каждый множитель выражения (4-11) изобразится на комплексной плоскости вектором, проведенным из конца вектора Op_i в точку K , которая представляет собой конец вектора $j\omega$, отложенного по мнимой оси от точки O (с учетом знака). Так, например, из векторного треугольника Op_1K очевидно, что

$$\overline{OK} = \overline{Op_1} + \overline{p_1K},$$

откуда

$$\overline{p_1K} = \overline{OK} - \overline{Op_1} = j\omega - p_1.$$

Представим множители выражения (4-11) в показательной форме:

$$j\omega - p_n = A_n(\omega) e^{j\varphi_n(\omega)};$$

$$j\omega - p_{n-1} = A_{n-1}(\omega) e^{j\varphi_{n-1}(\omega)} \text{ и т. д.}$$

Здесь величины $A_n(\omega)$, $A_{n-1}(\omega)$ и т. д. представляют собой модули векторов $(j\omega - p_n)$, $(j\omega - p_{n-1})$ и т. д., а фазы этих же векторов представляются как: $\varphi_n(\omega)$, $\varphi_{n-1}(\omega)$ и т. д.

На рис. 4-3, а показаны фазы $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$ векторов $(j\omega - p_1)$ и $(j\omega - p_2)$ для двух сопряженных комплексных корней $p_1 = -\alpha + j\beta$ и $p_2 = -\alpha - j\beta$ характеристического уравнения с отрицательными вещественными частями α , а также фазы $\varphi_3(\omega)$ и $\varphi_4(\omega)$ векторов $(j\omega - p_3)$ и $(j\omega - p_4)$ для отрицательных вещественных корней p_3 и p_4 того же характеристического уравнения.

На рис. 4-3, б показана фаза $-\varphi_3(\omega)$ вектора $(j\omega - p_3)$ для положительного вещественного корня p_3 .

Уравнение (4-11) в показательной форме запишется так:

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= A_n(\omega) e^{j\varphi_n(\omega)} A_{n-1}(\omega) e^{j\varphi_{n-1}(\omega)} \times \dots \\ &\dots \times A_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)} A_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)} = A_n(\omega) A_{n-1}(\omega) \times \dots \\ &\dots \times A_2(\omega) A_1(\omega) e^{j[\varphi_n(\omega) + \varphi_{n-1}(\omega) + \dots + \varphi_2(\omega) + \varphi_1(\omega)]} = \\ &= A(\omega) e^{j\varphi_A(\omega)}, \end{aligned}$$

где

$$A(\omega) = A_n(\omega) A_{n-1}(\omega) \dots A_2(\omega) A_1(\omega) \quad (4-12)$$

— модуль функции $A(j\omega)$, равный произведению модулей $A_i(\omega)$ множителей $(j\omega - p_i)$ этого выражения
и

$$\varphi_A(\omega) = \varphi_n(\omega) + \varphi_{n-1}(\omega) + \dots + \varphi_1(\omega) \quad (4-13)$$

— фаза функции $A(j\omega)$, равная сумме фаз $\varphi_i(\omega)$ множителей $(j\omega - p_i)$ этого выражения.

Если непрерывно изменять величину ω от нуля до $+\infty$, то точка K будет перемещаться по положительной мнимой полуоси от точки O (для $\omega = 0$) к бесконечности. При этом будут непрерывно изменяться модули $A_i(\omega)$ и фазы $\varphi_i(\omega)$ векторов $(j\omega - p_i)$, а следовательно, и фаза $\varphi_A(\omega)$ функции $A(j\omega)$.

При $\omega = 0$ векторы $(j\omega - p_1)$ и $(j\omega - p_2)$ для сопряженных комплексных корней p_1 и p_2 совпадают с векторами $\overline{Op_1}$ и $\overline{Op_2}$, а их фазы равны соответственно γ_1 и $-\gamma_1$ (рис. 4-3,а), т. е. равны и противоположны, а следовательно, сумма этих двух фаз равна нулю. Фаза векторов $(j\omega - p_i)$ для любых вещественных корней p_i при $\omega = 0$ равны нулям. Тогда согласно формуле (4-13)

$$\varphi_A(\omega)_{\omega \rightarrow 0} = \varphi_A(0) = 0.$$

При монотонном увеличении ω от нуля до $+\infty$ каждый из векторов $(j\omega - p_i)$, соответствующих вещественным отрицательным корням характеристического уравнения (например, p_3 и p_4 на рис. 4-3,а), повернется на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

При тех же условиях векторы $(j\omega - p_i)$, соответствующие каждой паре комплексных корней, имеющих отрицательную вещественную часть (например, корней p_1 и p_2 на рис. 4-3,а), повернутся тоже против часовой стрелки на углы

$$\frac{\pi}{2} + \gamma_i \text{ и } \frac{\pi}{2} - \gamma_i.$$

Суммарное приращение фаз обонх этих векторов составит:

$$\frac{\pi}{2} + \gamma_i + \frac{\pi}{2} - \gamma_i = 2 \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, если система устойчива и все n корней характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости, приращение фазы функций $A(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ согласно уравнению (4-13) будет равно:

$$\varphi_A(\infty) = n \frac{\pi}{2}, \quad (4-14)$$

где n — степень характеристического уравнения, равная числу его корней.

Например, для устойчивой системы, характеристическое уравнение которой имеет два вещественных и два сопряженных комплексных корня в левой полуплоскости (рис. 4-3,а), приращение фазы функции $A(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ будет равно:

$$\varphi_A(\infty) = 4 \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Если система неустойчива, часть корней ее характеристического уравнения расположена справа от мнимой оси (например, p_3 на рис. 4-2,б). Векторы $(j\omega - p_i)$, соответствующие этим корням, при изменении ω от 0 до ∞ повернутся на угол $\pi/2$ по часовой стрелке. Эти изменения фаз войдут в уравнение (4-13) с отрицательным знаком.

Если из n корней характеристического уравнения m корней находятся в правой полуплоскости, то при изменении ω от 0 до ∞ получим:

$$\varphi_A(\infty) = (n - m) \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{2} = (n - 2m) \frac{\pi}{2}. \quad (4-15)$$

Для системы, корни характеристического уравнения которой изображены на рис. 4-2,б, получим:

$$n = 4; m = 1 \text{ и } \varphi_A(\infty) = (4 - 2 \cdot 1) \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Функция $A(j\omega)$ на комплексной плоскости изображается вектором, начало которого расположено в точке 0, а конец определяется координатами $U_A(\omega)$ и $V_A(\omega)$ по выражениям (4-6) и (4-7). С увеличением ω модуль (длина) и фаза вектора изменяются и конец его описывает кривую, называемую годографом Михайлова по имени А. В. Михайлова, предложившего в 1936 г. использовать эту кривую в качестве критерия устойчивости линейных систем.

Годограф Михайлова строят по точкам, задаваясь различными значениями ω в уравнениях (4-6) и (4-7);

в числе точек должны быть все точки пересечения кривой с осями координат, получаемые как корни уравнений $U_A(\omega) = 0$ и $V_A(\omega) = 0$.

Годограф Михайлова для устойчивых систем называется правильным годографом и имеет следующие особенности:

1. Он состоит из двух ветвей, соответствующих изменениям от 0 до ∞ и от 0 до $-\infty$. Ветви симметричны, так как вещественная часть функции $A(j\omega)$ представляет собой четную функцию ω , а мнимая ее часть является нечетной функцией ω . Поэтому достаточно исследовать только одну ветвь годографа (изменение от 0 до ∞).

2. При $\omega = 0$ из выражений (4-6) и (4-7) получаем:

$$U_A(\omega) = a_0 \text{ и } V_A(\omega) = 0,$$

т. е. обе ветви годографа начинаются в точке, расположенной на положительной вещественной полуоси на расстоянии a_0 от начала координат.

3. При изменении ω от 0 до ∞ кривая годографа устойчивой системы поворачивается против часовой стрелки на угол $n\pi/2$, поочередно обходя n квадрантов комплексной плоскости, где n — степень характеристического уравнения системы.

4. Длина вектора годографа на всей длине последнего должна быть отличной от нуля, поскольку все корни характеристического уравнения устойчивой системы имеют отличную от нуля вещественную часть.

Сообразно с этими особенностями критерий Михайлова можно сформулировать следующим образом:

Линейная система n -го порядка устойчива, если при изменении ω от 0 до ∞ годограф Михайлова последовательно обходит n квадрантов комплексной плоскости против часовой стрелки, начинаясь в точке на положительной вещественной полуоси и нигде не проходя через начало координат.

Если годограф обходит меньше чем n квадрантов или при обходе нарушается последовательность перехода его из квадранта в квадрант, то система будет неустойчивой.

Если годограф проходит через начало координат, то система будет на границе устойчивости.

На рис. 4-3,а представлен вид годографа Михайлова для устойчивых систем первого—пятого порядков. Как

видно из графика, приращение фазы каждого годографа при возрастании ω от 0 до ∞ равно $n\pi/2$ и каждая кривая последовательно обходит n квадрантов.

На рис. 4-3,б представлены годографы неустойчивых систем пятого и седьмого порядков, в которых последовательность обхода квадрантов нарушена. Так, годограф системы седьмого порядка из второго квадранта прошел обратно в первый, а затем в четвертый, после чего последовательность обхода выполняется. Определим

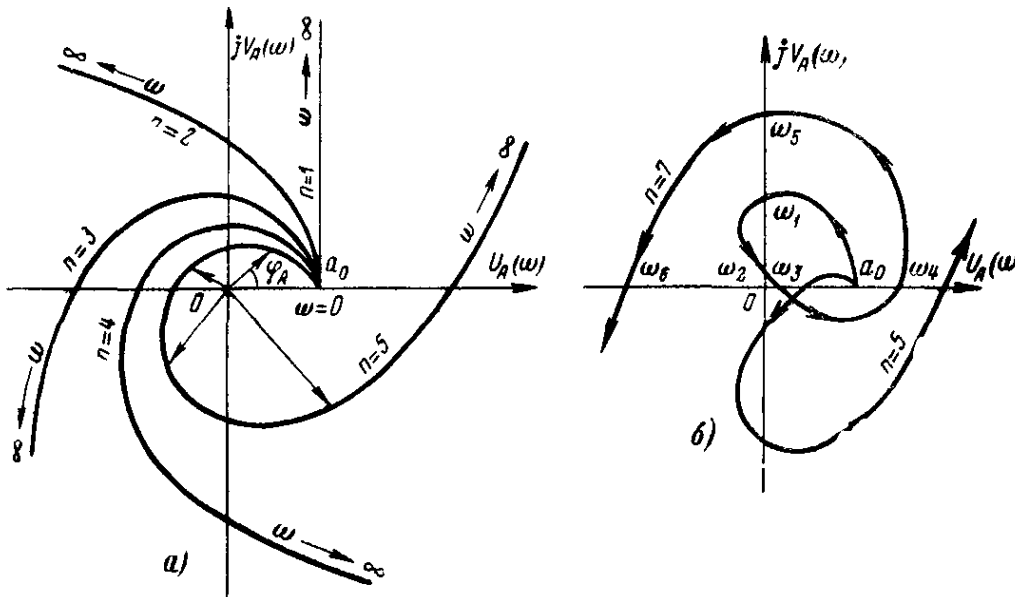


Рис. 4-3. Годографы Михайлова устойчивых (а) и неустойчивых (б) систем.

приращение фазы этого годографа при переходе его по квадрантам. Приращение фазы в первом квадранте при увеличении ω от 0 до ω_1 равно $\Delta\varphi_1 = \pi/2$, так как вектор повернется на 90° против часовой стрелки.

Суммарное приращение фазы при увеличении ω от ω_1 до ω_2 равно нулю ($\Delta\varphi_2 = 0$), так как вначале вектор повернется на некоторый угол против часовой стрелки, а затем — на такой же угол по часовой стрелке.

При увеличении ω от ω_2 до ω_3 вектор повернется на 90° , но по часовой стрелке, следовательно, $\Delta\varphi_3 = -\pi/2$. Далее очевидно, что $\Delta\varphi_4 = 0$; $\Delta\varphi_5 = \Delta\varphi_6 = \Delta\varphi_7 = \pi/2$. Полное приращение фазы

$$\varphi_A(\infty) = (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3 + \Delta\varphi_4 + \Delta\varphi_5 + \Delta\varphi_6 + \Delta\varphi_7) = \frac{3}{2}\pi.$$

Система неустойчива, так как

$$\varphi_A(\infty) = 3 \frac{\pi}{2} < n \frac{\pi}{2} = 7 \frac{\pi}{2}.$$

По годографу Михайлова и выражению (4-15) можно определить, сколько корней характеристического уравнения расположено справа от мнимой оси:

$$m = \frac{1}{2} \left[n - \frac{2}{\pi} \varphi_A(\infty) \right]. \quad (4-16)$$

Например, для системы седьмого порядка, имеющей годограф, изображенный на рис. 4-3,б, найдем, что из семи корней ее характеристического уравнения два корня расположены справа от мнимой оси, вследствие чего система и является неустойчивой:

$$m = \frac{1}{2} \left[7 - \frac{2}{\pi} \cdot 3 \frac{\pi}{2} \right] = 2.$$

4-4. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА

Согласно формуле (2-74) знаменатель передаточной функции $\Phi(p)$ замкнутой автоматической системы регулирования представляет собой функцию

$$F(p) = 1 + W(p), \quad (4-17)$$

на единицу отличающуюся от передаточной функции разомкнутой системы $W(p)$.

С учетом выражения (2-11) получим:

$$F(p) = \frac{P(p) + Q(p)}{P(p)} = \frac{A(p)}{P(p)}. \quad (4-18)$$

Так как в реальных системах порядок оператора правой части дифференциального уравнения всегда меньше порядка оператора левой части дифференциального уравнения, т. е. степень многочлена $P(p)$ всегда больше степени многочлена $Q(p)$, степени числителя и знаменателя $F(p)$ одинаковы и определяются степенью $P(p)$, равной n .

Подставив в выражение (2-74) числитель и знаменатель из равенств (2-11) и (4-18), получим передаточную функцию замкнутой системы:

$$\Phi(p) = \frac{Q(p) P(p)}{P(p) A(p)} = \frac{Q(p)}{A(p)}. \quad (4-19)$$

Многочлен $A(p)$ знаменателя передаточной функции есть характеристический многочлен дифференциального

уравнения замкнутой системы, составляющий левую часть характеристического уравнения (2-29), корни которого позволяют найти по формуле (2-30) общее решение однородного дифференциального уравнения системы.

Следовательно, числитель функции $F(p)$ является характеристическим многочленом $A(p)$ передаточной функции замкнутой системы, а знаменатель $P(p)$ согласно формуле (2-11) — характеристическим многочленом разомкнутой системы.

Заменим в формуле (4-17) p на $j\omega$, получим функцию $F(j\omega)$, на единицу отличающуюся от АФХ разомкнутой системы $W(j\omega)$:

$$F(j\omega) = 1 + W(j\omega). \quad (4-20)$$

Согласно формуле (4-18) эта же функция запишется и так:

$$F(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{P(j\omega)}, \quad (4-21)$$

где $A(j\omega)$ — годограф Михайлова замкнутой системы;
 $P(j\omega)$ — годограф Михайлова разомкнутой системы.
 В показательной форме можно записать:

$$A(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi_A(\omega)}, \quad P(j\omega) = P(\omega) e^{j\varphi_P(\omega)};$$

$$F(j\omega) = F(\omega) e^{j\varphi_F(\omega)},$$

где

$$F(\omega) = \frac{A(\omega)}{P(\omega)}; \quad \varphi_F(\omega) = \varphi_A(\omega) - \varphi_P(\omega).$$

При изменении ω от 0 до ∞ полное приращение фазы функции $F(j\omega)$ будет равно:

$$\varphi_F(\infty) = \varphi_A(\infty) - \varphi_P(\infty).$$

Для работоспособности системы необходимо, чтобы она в рабочем (замкнутом) состоянии была устойчивой. Это требование, согласно критерию устойчивости Михайлова выражается условием

$$\varphi_A(\infty) = n \frac{\pi}{2}.$$

В разомкнутом состоянии в общем случае система может быть и неустойчивой, однако если в замкнутом рабочем состоянии она устойчива, то этого достаточно для ее нормальной работы.

Принимая в общем случае, что в разомкнутом состоянии система неустойчива и ее характеристическое уравнение $P(p) = 0$ имеет m корней справа от мнимой оси, согласно формуле (4-15) запишем:

$$\varphi_P(\infty) = (n - 2m) \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$\varphi_F(\infty) = n \frac{\pi}{2} - (n - 2m) \frac{\pi}{2} = 2m \frac{\pi}{2}. \quad (4-22)$$

Так как выражение (4-22) обеспечивает отсутствие корней характеристического уравнения замкнутой системы справа от мнимой оси, то оно является необходимым и достаточным условием устойчивости системы и называется критерием устойчивости Найквиста.

Если $\varphi_F(\infty) < 2m \frac{\pi}{2}$, то замкнутая система неустойчива.

Критерий устойчивости Найквиста можно сформулировать следующим образом:

Замкнутая линейная система устойчива, если приращение фазы функции $F(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ при изменении от 0 до ∞ будет равно $2m \frac{\pi}{2} = m\pi$, где m — число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих на комплексной плоскости справа от мнимой оси.

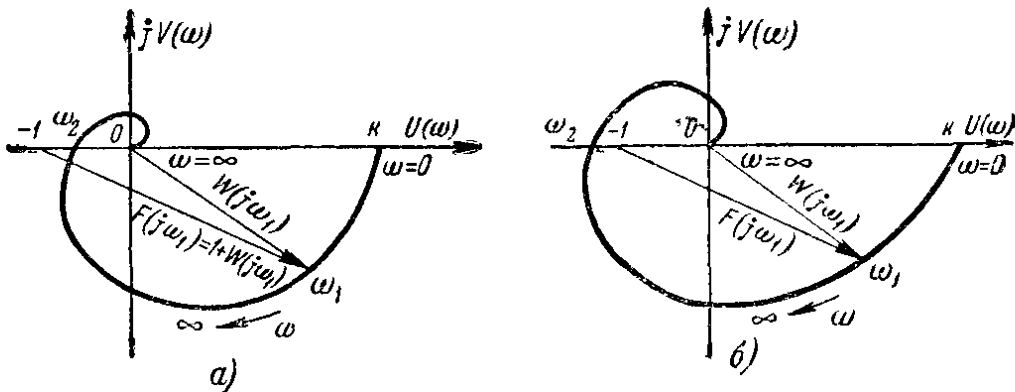


Рис. 4-5. Амплитудно-фазовые характеристики устойчивых разомкнутых систем.

а — устойчивых в замкнутом состоянии, *б* — неустойчивых в замкнутом состоянии.

Так как функция $F(j\omega)$ отличается от амплитудно-фазовой характеристики $W(j\omega)$ на единицу, то для определения приращения фазы нет необходимости строить годограф $F(j\omega)$, так как кривую $W(j\omega)$ можно рассматривать как кривую $F(j\omega)$, если перенести начало координат по вещественной оси влево на единицу.

Такого переноса начала координат можно и не делать; тогда приращение фазы $F(j\omega)$ равно приращению фазы вектора, проведенного из точки $(-1, j0)$ к годографу $W(j\omega)$ при обходе концом этого вектора годографа $W(j\omega)$ для изменения ω от 0 до ∞ (рис. 4-5, *а*).

Таким образом, критерий устойчивости Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы авторегулирования по амплитудно-фазовой характеристике $W(j\omega)$ разомкнутой системы.

Если разомкнутая система устойчива, то $m = 0$ и замкнутая система будет устойчива, если приращение фазы функции $F(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ будет равно нулю. Это возможно в случае, когда начало вектора $F(j\omega)$, т. е. точка $(-1, j0)$, лежит вне годографа $W(j\omega)$.

Таким образом, если разомкнутая система устойчива, то для обеспечения ее устойчивости в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывала точку $(-1, j0)$.

Если амплитудно-фазовая характеристика устойчивой разомкнутой системы охватывает точку $(-1, j0)$, то система в замкнутом состоянии будет неустойчивой.

На рис. 4-5 приведены амплитудно-фазовые характеристики двух устойчивых разомкнутых систем ($m = 0$).

С помощью критерия устойчивости Найквиста нетрудно установить, что в замкнутом состоянии система по рис. 4-5, а будет устойчивой, так как когда вектор $F(j\omega)$ обходит амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы при изменении ω от 0 до ∞ , суммарное приращение его фазы равно нулю, что соответствует выражению (4-22) при $m = 0$. Амплитудно-фазовая характеристика не охватывает точку $(-1, j0)$.

Приращение фазы вектора $F(j\omega)$ для разомкнутой системы по рис. 4-5, б равно -2π (вектор поворачивается на один полный оборот при изменении ω от 0 до ∞); следовательно, эта система в замкнутом состоянии будет неустойчивой, так как для нее $\varphi_F(\infty) = -2\pi < 2m \frac{\pi}{2} = 0$ и амплитудно-фазовая характеристика охватывает точку $(-1, j0)$.

На рис. 4-6 показаны амплитудно-фазовые характеристики неустойчивых разомкнутых систем: системы по рис. 4-6, а и б имеют по одному положительному корню ($m = 1$), а системы по рис. 4-6, в и г — по два положительных корня ($m = 2$).

Согласно критерию Найквиста в замкнутом состоянии система рис. 4-6, а становится устойчивой, так как для нее

$$\varphi_F(\infty) = \pi = 2m \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 \frac{\pi}{2}.$$

Система же по рис. 4-6, б и в замкнутом состоянии будет неустойчивой, так как для нее

$$\varphi_F(\infty) = -\pi < 2m \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Вектор $F(j\omega)$ разомкнутой системы по рис. 4-6, в делает полный оборот против часовой стрелки вокруг точки $(-1, j0)$, и следовательно, $\varphi_F(\infty) = 2\pi$.

Система в замкнутом состоянии будет устойчивой, так как

$$2m \frac{\pi}{2} = 2\pi = \varphi_F(\infty).$$

Система рис. 4-6,з остается неустойчивой и в замкнутом состоянии, так как для нее

$$\varphi_F(\infty) = 0 < 2m \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

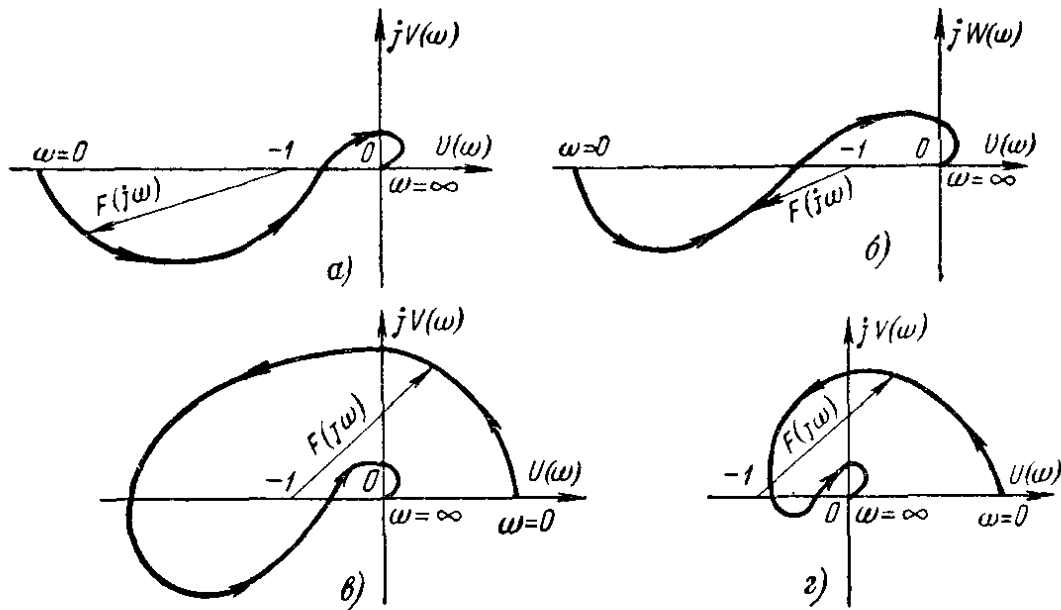


Рис. 4-6. Амплитудно-фазовые характеристики неустойчивых разомкнутых систем

а, б — устойчивых в замкнутом состоянии, в — неустойчивых в замкнутом состоянии

Если система автоматического регулирования содержит последовательные интегрирующие звенья, то каждое такое звено согласно формуле (3-46) уменьшает фазу системы на $\pi/2$.

Однако эти уменьшения фазы не должны учитываться при анализе устойчивости системы, так как на нее влияют только отрицательные фазы корней, лежащих на комплексной плоскости справа от мнимой оси.

Кроме того, при наличии в системе интегрирующих звеньев амплитуда функции $W(j\omega)$ стремится к бесконечности при ω , стремящейся к нулю.

Чтобы при подсчете фазы $\varphi_F(\infty)$ для разомкнутой системы исключить влияние r , последовательно включенных в систему интегрирующих звеньев, дополняют годограф

$W(j\omega)$ при значениях ω , стремящихся к нулю, дугой $r \frac{\pi}{2}$ бесконечно большого радиуса, направленной против часовой стрелки. Это относится в равной степени к системам как устойчивым, так и неустойчивым в разомкнутом состоянии.

На рис. 4-7 представлены амплитудно-фазовые характеристики разомкнутых неустойчивых систем, имеющих по одному интегрирующему звену. Системы на рис. 4-7, *а* и *б* имеют по одному положительному корню; система на рис. 4-7, *в* имеет два положительных корня.

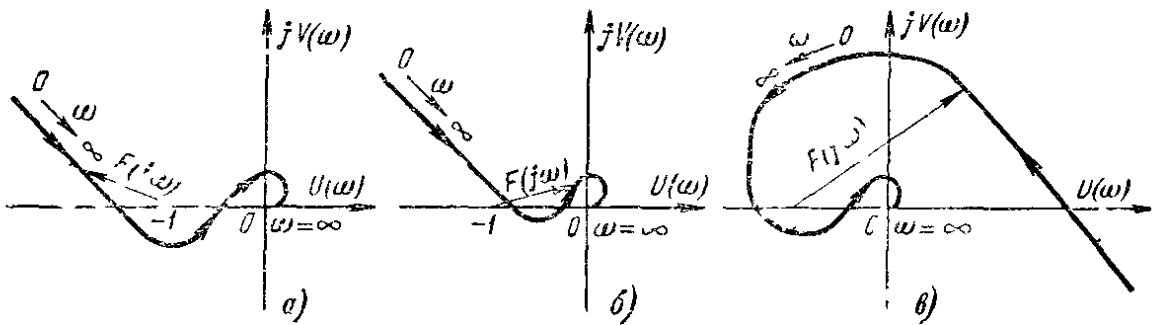


Рис 4-7. Амплитудно фазовые характеристики неустойчивых разомкнутых систем, имеющих по одному интегрирующему звену. *а, в* — устойчивых в замкнутом состоянии, *б* — неустойчивых в замкнутом состоянии

Так как системы имеют по одному интегрирующему звену, то прежде чем приступить к определению приращения фазы $\varphi_T(\infty)$, необходимо при ω , стремящейся к нулю, дополнить $W(j\omega)$ в положительном направлении дугой $1 \cdot \pi/2 = \pi/2$. Так как при $\omega = 0$ фаза годографа $W(j\omega)$ для систем на рис. 4-7, *а* и *б* будет равна $\pi/2$, то при дополнении ее дугой $\pi/2$ бесконечно большого радиуса, направленной против часовой стрелки, начало дуги будет находиться на отрицательной вещественной полуоси.

Соответственно фаза системы на рис. 4-7, *в* равна $-\pi/2$ и, следовательно, начало дополняющей дуги будет лежать на положительной вещественной полуоси.

Обобщая, можно сформулировать, что при четном m и $m = 0$ начало дуги будет расположено всегда на положительной, а при нечетном m — на отрицательной вещественной полуоси. Приращения фазы $\varphi_F(\infty)$ систем, изображенных на рис. 4-7, *а, б* и *в*, соответственно будут равны π , $-\pi$ и 2π . Согласно формуле (4-22) в замкнутом состоянии системы на рис. 4-7, *а* и *в* будут устойчивыми, а система на рис. 4-7, *б* остается неустойчивой.

На рис. 4-8 приведены системы, устойчивые в разомкнутом состоянии и имеющие два (а, б) и три (в, г) последовательных интегрирующих звена. Из этих систем устойчивыми в замкнутом состоянии будут только системы на рис. 4-8, б

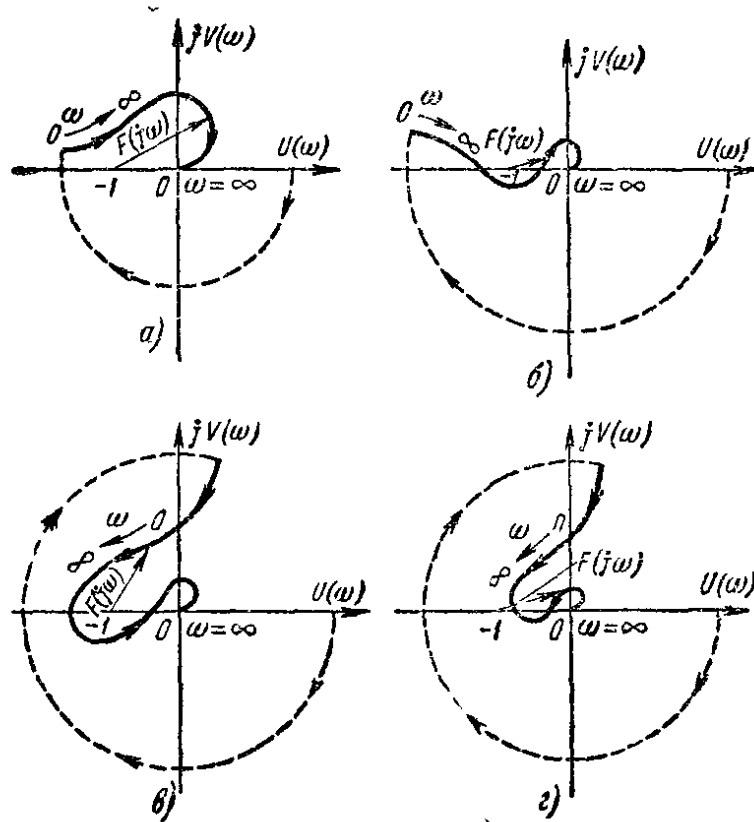


Рис. 4-8. Амплитудно фазовые характеристики устойчивых разомкнутых систем, имеющих два (а, б) и три (в, г) последовательных интегрирующих звеньев, устойчивых (б, в) и неустойчивых (а, г) в замкнутом состоянии.

и в, так как их амплитудно-фазовые характеристики в разомкнутом состоянии с учетом дополняющей дуги не охватывают точку $(-1, j0)$.

Неустойчивость системы в замкнутом состоянии при охвате точки $(-1, j0)$ амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы объясняется следующими обстоятельствами.

Любой сигнал, воздействующий на систему, можно представить по закону Фурье как спектр гармонических составляющих с частотами от 0 до ∞ . В этом спектре будут и гармоники с частотами ω_2 (см. рис. 4-5, б). Как следует из амплитудно-фазовой характеристики, при прохождении этих гармоник через разомкнутую систему амплитуда их увеличивается (модуль вектора $O\omega_2 > 1$), а фаза будет повернутой на 180° . При замыкании системы и подаче ее выхода с обратным знаком (отрицательная обратная связь) на вход мы тем самым подаем на вход выходную величину в противофазе, т. е. повернутую еще на 180° .

Таким образом, усиленная гармоника с частотой ω_2 будет подаваться на вход системы, повернутой в общей сложности на 360° , т. е.

она будет в фазе с гармоникой ω_2 , поступающей с сигналом. В итоге на вход системы будет подаваться гармоника ω_2 с увеличенной амплитудой, которая, проходя через систему, вновь будет усиливаться и снова, еще более увеличенная, будет поступать в фазе на вход системы. Такое нарастание составляющей с частотой ω_2 на выходе системы будет теоретически беспредельным и, следовательно, система будет неустойчивой.

Если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывает точку $(-1, j0)$, то нетрудно убедиться в том, что система будет устойчивой (см. рис. 4-5, а). В этом случае в начальный момент времени после замыкания системы хотя и будет иметь место увеличение гармонической составляющей с частотой ω_2 , но только до вполне определенной величины.

Пусть, например, при поступлении на вход разомкнутой системы гармоники с частотой ω_2 и амплитудой, равной единице, на выходе системы ее амплитуда будет равна 0,5 (т. е. коэффициент передачи системы равен 0,5); при замыкании системы амплитуда выходной составляющей с частотой ω_2 возрастает до единицы, т. е. только в 2 раза, и на выходе системы будут устойчивые гармонические колебания с частотой ω_2 и амплитудой, равной единице.

Выходной сигнал гармонической составляющей с частотой ω_2 и амплитудой, равной единице, при подаче на вход системы будет суммироваться с поступающим сигналом, также равным единице. Суммарный сигнал с амплитудой, равной 2, проходя через систему, при коэффициенте передачи разомкнутой системы, равном 0,5, будет иметь на выходе установившуюся величину амплитуды, равную единице ($2 \cdot 0,5 = 1$).

4-5. ВЫДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ

Коэффициенты дифференциального уравнения системы, которым описываются переходные процессы в ней, определяются конструктивными особенностями элементов системы, их динамическими свойствами и параметрами настройки регулятора.

Устойчивость системы регулирования зависит от соотношения коэффициентов дифференциального и соответственного характеристического уравнений [см. формулу (4-1)]. При изменении тех или иных параметров системы изменяется и ее устойчивость; подбором этих изменений можно превратить систему из устойчивой в неустойчивую и наоборот.

При конструировании системы ряд параметров и звеньев является заданным, так как они определяются требованиями технологического процесса и конструктивными особенностями объекта регулирования. В то же время в распоряжении конструктора имеется несколько параметров, которые он может изменять в определенных пределах. Например, можно применить для целей регулирования раз-

личные регуляторы, выбирать различные регулирующие органы и т. д.

При разработке системы регулирования необходимо выбрать параметры, на которые нет существенных ограничений, таким образом, чтобы обеспечить требуемые динамические свойства системы в целом, сохраняя в то же время величины твердо заданных параметров. В связи с этим практически весьма важно знать, в каких пределах и какие именно параметры системы можно изменять, обеспечивая при этом ее устойчивость.

Так как все корни характеристического уравнения устойчивой системы расположены на комплексной плоскости слева от мнимой оси, а характеристическое уравнение неустойчивой системы имеет не менее одного вещественного или двух сопряженных комплексных корней, расположенных справа от мнимой оси, то если при изменении n параметров устойчивой системы она приближается к неустойчивому состоянию, корни характеристического уравнения будут перемещаться по левой полуплоскости в сторону правой. При определенных сочетаниях величин изменяемых параметров система выходит на границу устойчивости; в этот момент один вещественный или два комплексных сопряженных корня будут расположены на мнимой оси.

При выходе на мнимую ось одного действительного корня характеристического уравнения он становится равным нулю, а при выходе на мнимую ось двух сопряженных комплексных корней характеристическое уравнение имеет два чисто мнимых корня $\pm j\omega$.

Таким образом, если мы в характеристическом уравнении (4-1) заменим p на $j\omega$, или, что то же самое, приравняем нулю годограф Михайлова [формула (4-4)], то получим уравнение геометрического места, разграничивающего области, имеющие различные количества корней в левой полуплоскости; это геометрическое место располагается в n -мерном пространстве, координатами которого являются n переменных параметров системы, и может представлять собой как один непрерывный геометрический элемент (линию, поверхность), так и их совокупность. Точки этого геометрического места можно определить для ряда значений ω в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, находя все возможные сочетания значений n переменных параметров, при которых левая часть уравнений (4-4) обращается в нуль. Совокупность полученных граничных геометрических элементов делит n -мерное пространство переменных параметров на

области; все точки, лежащие внутри одной и той же области, характеризуют системы с одинаковым числом корней характеристического уравнения, лежащих в левой комплексной полуплоскости. Число таких корней для двух соседних областей может различаться на один, два или три корня.

Только та область в пространстве переменных параметров, в которой все корни характеристического уравнения расположены слева от мнимой оси комплексной плоскости, является областью устойчивости (число корней, как уже указывалось, равно порядку характеристического уравнения).

Области с одинаковым числом корней в левой полуплоскости называются областями D , а само разбиение пространства переменных параметров системы на эти области называется D -разбиением.

Если, например, какая-нибудь область имеет m корней в правой полуплоскости и $n - m$ корней в левой полуплоскости, то эта область обозначается $D(n - m, m)$. Устойчивой областью при степени характеристического уравнения, равной n , будет только область $D(n, 0)$.

При числе переменных параметров больше 2 нахождение областей устойчивости является достаточно сложной задачей в связи с необходимостью графических построений для пространства трех и более измерений. Поэтому практически области устойчивости исследуются только при числе переменных параметров не более 2, так как в этом случае все построения производятся в плоскости параметров системы или комплексной плоскости.

1. Выделение областей устойчивости для двух переменных параметров

Допустим, что необходимо выделить области устойчивости при двух переменных параметрах системы ν и η , линейно входящих в коэффициенты характеристического уравнения.

Вынеся интересующие нас параметры из коэффициентов характеристического уравнения, запишем его в общем виде:

$$\nu P(p) + \eta Q(p) + R(p) = 0, \quad (4-23)$$

где $P(p)$, $Q(p)$ и $R(p)$ — полиномы от p .

Заменив p на $j\omega$, получим:

$$\nu P(j\omega) + \eta Q(j\omega) + R(j\omega) = 0. \quad (4-24)$$

Разделяя в каждом полиноме действительную и мнимую части, находим:

$$\begin{aligned} \nu [P_1(\omega) + jP_2(\omega)] + \eta [Q_1(\omega) + jQ_2(\omega)] + \\ + R_1(\omega) + jR_2(\omega) = 0. \end{aligned} \quad (4-25)$$

Так как комплексное выражение равно нулю только в случае, если отдельно равны нулю действительная и мнимая части, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \nu P_1(\omega) + \eta Q_1(\omega) + R_1(\omega) = 0; \\ \nu P_2(\omega) + \eta Q_2(\omega) + R_2(\omega) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-26)$$

Решая систему уравнений (4-26) относительно ν и η , находим:

$$\nu = \frac{S_\nu(\omega)}{S(\omega)} \quad (4-27)$$

и

$$\eta = \frac{S_\eta(\omega)}{S(\omega)}, \quad (4-28)$$

где

$$S_\nu(\omega) = Q_1(\omega) R_2(\omega) - Q_2(\omega) R_1(\omega); \quad (4-29)$$

$$S_\eta(\omega) = P_2(\omega) R_1(\omega) - P_1(\omega) R_2(\omega); \quad (4-30)$$

$$S(\omega) = P_1(\omega) Q_2(\omega) - P_2(\omega) Q_1(\omega). \quad (4-31)$$

Подставив в выражения (4-27) и (4-28) ряд значений ω от $-\infty$ до ∞ , получим для каждого из них определенные величины ν и η , которые на плоскости этих параметров определяют точку. Совокупность этих точек (рис. 4-9) дает графическое изображение границ областей D -разбиения.

Так как при подстановке в характеристическое уравнение величины $j\omega$ вместо p действительную часть уравнения (4-25) образуют члены с четными степенями $j\omega$, то полиномы $P_1(\omega)$, $Q_1(\omega)$ и $R_1(\omega)$ являются четными функциями ω , а полиномы $P_2(\omega)$, $Q_2(\omega)$ и $R_2(\omega)$ мнимой части уравнения (4-25) являются нечетными функциями ω . В связи с этим $S_\nu(\omega)$, $S_\eta(\omega)$ и $S(\omega)$ являются нечетными функциями ω , а ν и η — четными функциями ω .

Так как ν и η — четные функции, то $\nu(\omega_1) = \nu(-\omega_1)$ и $\eta(\omega_1) = \eta(-\omega_1)$; следовательно, границы областей D -разбиения, построенные для изменений ω от 0 до ∞ , совпадают с границами областей, построенными для изменений ω от 0 до $-\infty$.

При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ граница D -разбиения обходится в первый раз при изменении ω от $-\infty$ до 0, а во второй раз — в обратном направлении при изменении ω от 0 до ∞ .

Так как переход через границу D -разбиения на плоскости переменных параметров соответствует переходу одного или двух корней характеристического уравнения через мнимую ось на комплексной плоскости, то границы D -разбиения можно рассматривать как геометрическое отображение мнимой оси на плоскости переменных параметров.

Чтобы определить, по какую сторону данного участка границы D -разбиения лежит область с большим числом корней, имеющих отрицательную вещественную часть, граница со стороны этой области заштриховывается. При обходе D -границы в направлении от $-\infty$ к ∞ штриховка накладывается слева от границы, если $S(\omega) > 0$, и справа от нее, если $S(\omega) < 0$.

Так как граница области D обходится при изменении ω от $-\infty$ до ∞ дважды и при изменении направления движения $S(\omega)$ меняет свой знак, то граница области оказывается заштрихованной дважды с одной стороны (рис. 4-9).

При переходе через D -границу из заштрихованной области в незаштрихованную число корней с отрицательной вещественной частью уменьшается, а при обратном переходе — увеличивается. При переходе через дважды заштрихованную границу теряются или приобретаются два таких корня (сопряженные комплексные), а при переходе через границу, заштрихованную однократно, — один отрицательный корень (вещественный).

Так, например, на рис. 4-9, а для системы, имеющей n корней характеристического уравнения, при изменении ω

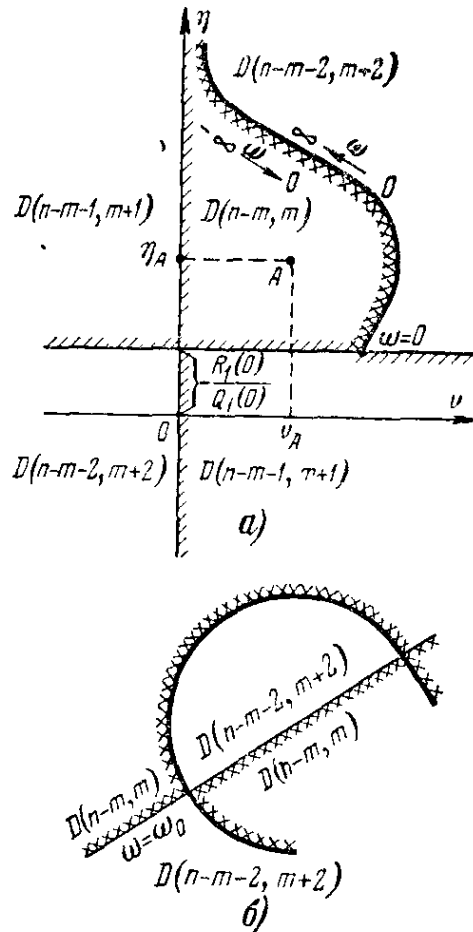


Рис. 4-9. Выделение областей устойчивости в плоскости двух параметров.

от $-\infty$ до нуля будем иметь $S(\omega) < 0$, а при изменении ω от нуля до $-\infty$ знак $S(\omega)$ изменится на обратный. Поэтому слева от D -границы, заштрихованной дважды, лежит область, в которой число отрицательных корней $(n - m)$ на две единицы больше, чем в области, лежащей справа от D -границы, где число таких корней равно $n - m - 2$.

Решив совместно уравнения (4-26), можно найти непосредственную зависимость между параметрами ν и η , линейно входящими в коэффициенты характеристического уравнения системы:

$$\nu = -\eta \frac{Q_1(\omega) + Q_2(\omega)}{P_1(\omega) + P_2(\omega)} - \frac{R_1(\omega) + R_2(\omega)}{P_1(\omega) + P_2(\omega)}, \quad (4-32)$$

или

$$\eta = -\nu \frac{P_1(\omega) + P_2(\omega)}{Q_1(\omega) + Q_2(\omega)} - \frac{R_1(\omega) + R_2(\omega)}{Q_1(\omega) + Q_2(\omega)}. \quad (4-33)$$

Из уравнений (4-27) и (4-28) зависимость между параметрами ν и η может быть получена в ином виде:

$$\nu = \eta \frac{S_\nu(\omega)}{S_\eta(\omega)}.$$

Граница области D , построенная по выражениям (4-27) и (4-28) на плоскости переменных параметров, во многих случаях не дает возможности получить все области с различными числами отрицательных корней, так как при некоторых значениях частоты ω нарушается однозначная зависимость между ν , η и ω ; тогда уравнения (4-26) становятся равносильными и каждое из них определяет одну и ту же прямую линию.

Например, при $\omega = 0$ полиномы $P_2(\omega)$, $Q_2(\omega)$ и $R_2(\omega)$ будут также равны нулям, так как они обязательно содержат во всех слагаемых в качестве множителя величину ω в нечетных степенях [именно поэтому они и образуют мнимую составляющую в уравнении (4-25)]. В этом случае согласно уравнениям (4-29), (4-30) и (4-31) имеем:

$$S_\nu(0) = 0; \quad S_\eta(0) = 0 \text{ и } S(0) = 0.$$

Выражения (4-32) и (4-33) примут вид:

$$\nu = -\frac{\nu Q_1(0) + R_1(0)}{P_1(0)} \quad (4-34)$$

и

$$\eta = -\frac{\nu P_1(0) + R_1(0)}{Q_1(0)}. \quad (4-35)$$

Если при $\omega = 0$ окажется, что $P_1(0) = 0$, а $Q_1(0) \neq 0$, то коэффициент при v в выражении (4-35) будет равен нулю и, следовательно, при любых значениях v параметр η будет равен:

$$\eta = - \frac{R_1(0)}{Q_1(0)}. \quad (4-36)$$

Следовательно, в этом случае на плоскости переменных параметров, помимо кривой D -разбиения, получаем прямую, параллельную оси v и проходящую через точку (рис. 4-9, а) на оси η , удаленную от начала координат на $-R_1(0)/Q_1(0)$.

Аналогично если при $\omega = 0$ окажется, что $Q_1(0) = 0$, а $P_1(0) \neq 0$, то из формулы (4-34) получаем прямую $v = -R_1(0)/P_1(0)$, параллельную оси η .

Так как полином $S(\omega)$ является нечетной функцией частоты, то при проходе через значение $\omega = 0$ его знак меняется на обратный.

Точки на границе областей D , в которых знаменатель выражений (4-27) и (4-28) обращается в нуль [т. е. $S(\omega) = 0$] и меняет знак, называются исключительными точками. Прямые, проходящие через эти точки, называются особыми прямыми.

Переходу через особую прямую, получающуюся на плоскости переменных параметров при $\omega = 0$, соответствует на комплексной плоскости корней переход одного вещественного корня из левой полуплоскости в правую (или наоборот) по оси абсцисс через начало координат (например, на рис. 4-3, б из p_3 в p_4 или обратно); следовательно, особые прямые также являются границами областей D и должны штриховаться 1 раз со стороны области с большим числом корней, лежащих в левой комплексной полуплоскости.

Так как при переходе через особую прямую, параллельную оси v (рис. 4-9, а), мы из областей $D(n - m, m)$ и $D(n - m - 2, m + 2)$ попадаем в одну и ту же область, лежащую под особой прямой, и так как все точки этой области должны иметь одинаковое число корней, находящихся в левой комплексной полуплоскости, то очевидно, что это будет обеспечено только в том случае, если при переходе через особую прямую из области $D(n - m, m)$ один корень переходит в правую комплексную полуплоскость, а при переходе из области $D(n - m - 2, m + 2)$, наоборот, один корень переходит в левую комплексную полуплоскость.

Из изложенного следует простое правило штриховки особой прямой, заключающееся в том, что стороны всех углов, образованных кривой D -разбиения и особой прямой, пересекающимися или соприкасающимися в исключительной точке, должны быть обращены друг к другу заштрихованными или незаштрихованными сторонами.

Особая прямая может пройти также через точку, соответствующую $\omega = \infty$.

На рис. 4-9, а кривая границы области D при $\omega \rightarrow \infty$ уходит в бесконечность, асимптотически приближаясь к оси η . В бесконечности меняется направление обхода и, следовательно, $S(\omega)$ при $\omega = \infty$ обращается в нуль. Таким образом, вторая исключительная точка находится в бесконечности на оси η и второй особой прямой будет прямая $\nu = 0$. Правило штриховки особой прямой в этом случае остается тем же: однократная штриховка накладывается справа.

В общем случае полином $S(\omega)$ может обратиться в нуль и изменить знак при $\omega = \omega_0$, отличном от нуля, и тоже дать особую прямую. В этом случае согласно правилу штриховка особой прямой имеет вид, изображенный на рис. 4-9, б, и штрихуется дважды. Один раз она заштриховывается при проходе через особую точку в одном направлении, а второй раз — при проходе в обратном направлении. При переходе через эту прямую теряются или появляются два сопряженных комплексных корня с отрицательной вещественной частью.

Если в точке пересечения особой прямой и кривой D -разбиения полином $S(\omega)$ не обращается в нуль или обращается в нуль, но не меняет знака, то эта точка не является исключительной, не оказывает влияния на распределение корней и направление штриховки ее не меняется. Если при обходе границы D -области для какого-либо ω полином $S(\omega)$ обращается в нуль, но не меняет своего знака на обратный, эта точка не будет исключительной и через нее не будет проходить особая прямая.

Таким образом, необходимыми и достаточными условиями наличия исключительной точки на кривой границы областей D являются обращение в нуль полинома $S(\omega)$ и изменение в этой точке его знака.

Выполнив D -разбиение, мы получим в плоскости переменных параметров области с различными числами отрицательных корней, в том числе область, в которой число таких корней будет наибольшим. Однако эта область может

и не быть областью устойчивости. Для заключения об устойчивости системы в этой области необходимо для какой-либо удобной точки, взятой внутри этой области, с помощью критериев устойчивости проверить систему на устойчивость. Так, на рис. 4-9, *a* областью с максимальным числом корней в левой комплексной полуплоскости является область $D(n - m, m)$.

Проверив систему на устойчивость в точке A с параметрами, равными ν_A и η_A , можно определить, является ли эта область устойчивой.

Если в точке A система устойчива, то и для всех точек этой области все корни характеристического уравнения находятся в левой комплексной полуплоскости; следовательно, $m = 0$ и эта область является областью устойчивости $D(n, 0)$, где n — степень характеристического уравнения.

2. Выделение областей устойчивости для одного переменного параметра

Если необходимо выяснить влияние, которое оказывает на устойчивость системы регулирования один переменный параметр γ , линейно входящий в коэффициенты характеристического уравнения, то характеристическое уравнение надо представить в виде:

$$M(p) + \gamma N(p) = 0. \quad (4-37)$$

Параметр γ можно рассматривать как комплексный параметр $S = \gamma + j\lambda$, действительная часть которого равна интересующему нас параметру.

Подставив в уравнение (4-37) вместо γ комплексный параметр S и заменив символ p на $j\omega$, найдем:

$$S = - \frac{M(j\omega)}{N(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega). \quad (4-38)$$

Так как комплексные числа равны, если порознь равны их мнимые и действительные части, то из уравнения (4-38) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= U(\omega); \\ \lambda &= V(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (4-39)$$

Задаваясь различными значениями ω от $-\infty$ до $+\infty$, мы получим из уравнений (4-39) координаты точек кривой, разграничивающей области D -разбиения на плоскости

комплексного переменного (рис. 4-10). Так как действительная часть $U(\omega)$ является четной функцией ω , а мнимая часть $V(\omega)$ является нечетной функцией ω , то $U(\omega) = U(-\omega)$ и $V(\omega) = -V(-\omega)$. Следовательно, участок кривой D -разбиения, получаемый при изменении ω от $-\infty$ до 0, будет симметричен относительно вещественной оси участку

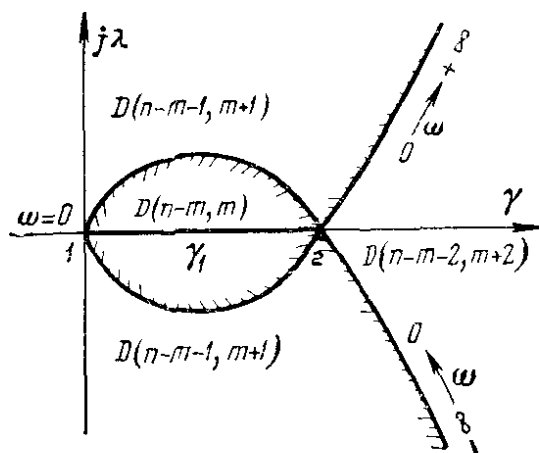


Рис. 4-10 Выделение областей устойчивости в плоскости одного комплексного параметра

кривой D -разбиения при изменении ω от 0 до ∞ .

При обходе кривой D -разбиения в сторону возрастания ω она штрихуется однократно слева.

Кривая D -разбиения для одного комплексного параметра исключительных точек и особых прямых не имеет.

При переходе через кривую D -разбиения с заштрихованной стороны на незаштрихованную один корень характеристическо-

го уравнения переходит из левой комплексной полуплоскости в правую. При обратном переходе один корень переходит из правой полуплоскости в левую.

Так как исследуемый параметр γ веществен, то его действительные значения могут располагаться только на оси γ (ось абсцисс на рис. 4-10). Поэтому границами областей, имеющих различные числа корней характеристического уравнения, лежащих в левой комплексной полуплоскости, будут служить точки пересечения граничной кривой D -разбиения с вещественной осью.

Из всех областей D -разбиения устойчивыми могут быть только области, находящиеся внутри заштрихованных петель кривой D -разбиения, поскольку эти области всегда соответствуют наибольшему числу корней характеристического уравнения, лежащих в левой комплексной полуплоскости.

Так как система может быть неустойчивой и в этой области, необходимо проверить систему на устойчивость с помощью критериев устойчивости для какого-нибудь значения параметра γ_1 , лежащего на том участке вещественной оси, который находится внутри предполагаемой области устойчивости (участок 1—2 на рис. 4-10).

3. Выделение областей устойчивости для систем третьего порядка

Характеристическое уравнение системы третьего порядка имеет вид:

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0. \quad (4-40)$$

В качестве переменных параметров примем отношения коэффициентов этого уравнения:

$$\frac{a_1}{a_3} = \nu; \quad \frac{a_0}{a_2} = \eta.$$

Заменяя в уравнении (4-40) символ p на $j\omega$, получим:

$$-j\omega^3 a_3 - \omega^2 a_2 + j\omega a_1 + a_0 = 0.$$

Приравняв нулю действительную и мнимую части, запишем:

$$\left. \begin{aligned} \eta - \omega^2 &= 0; \\ \nu\omega - \omega^3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-41)$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям (4-26), где

$$\begin{aligned} P_1(\omega) &= 0; & P_2(\omega) &= \omega; \\ Q_1(\omega) &= 1; & Q_2(\omega) &= 0; \\ R_1(\omega) &= -\omega^2; & R_2(\omega) &= -\omega^3. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в уравнения (4-33) или непосредственно решив систему уравнений (4-41), находим:

$$\eta = \nu. \quad (4-42)$$

Следовательно, граница областей D -разбиения в плоскости параметров η и ν представляет собой прямую, проходящую через начало координат с угловым коэффициентом, равным единице (рис. 4-11).

Из уравнения (4-41) следует, что при $\omega \rightarrow \pm \infty$, ν и $\eta \rightarrow +\infty$.

По уравнению (4-31) находим, что

$$S(\omega) = -\omega. \quad (4-43)$$

При $\omega < 0$ полином $S(\omega) > 0$ и, следовательно, при перемещении вдоль границы D -разбиения в направлении увеличения ω от $-\infty$ до 0 граничная прямая заштриховывается слева.

При $\omega > 0$ полином $S(\omega) < 0$ и, следовательно, при перемещении вдоль границы D -разбиения в направлении увеличения ω от 0 до ∞ граничная прямая заштриховывается справа. Следовательно, граничная прямая заштриховывается дважды и при переходе через нее два корня характеристического уравнения системы переходят из левой комплексной полуплоскости в правую или обратно.

Так как полином $S(\omega)$ обращается в нуль при $\omega = 0$ и при этом меняет знак, то исключительная точка находится в начале координат при $\omega = 0$.

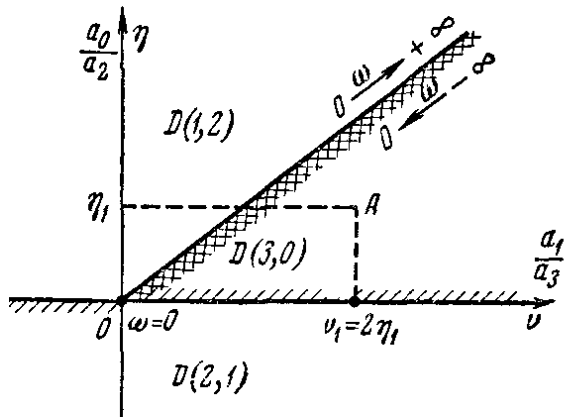


Рис 4-11. Выделение областей устойчивости в плоскости отношения коэффициентов уравнения системы третьей степени.

граничной прямой D -разбиения и особой прямой, совпадающей с осью абсцисс (рис. 4-11). Чтобы решить, является ли эта область устойчивой, проверим систему на устойчивость в точке $A(v_1 = 2\eta_1, \eta_1)$ с помощью критериев Рауса — Гурвица. Имеем:

$$a_1 a_2 = v a_3 \frac{a_0}{\eta} = 2 a_3 \eta_1 \frac{a_0}{\eta_1} = 2 a_0 a_3.$$

Так как $a_1 a_2 = 2 a_0 a_3 > a_0 a_3$, то согласно критерию Рауса — Гурвица при всех положительных коэффициентах характеристического уравнения (4-40) система в точке A устойчива. Следовательно, область в целом, которой принадлежит точка A , является областью устойчивости $D(3,0)$ и все три корня характеристического уравнения системы для этой области находятся в левой полуплоскости комплексной плоскости корней.

дится в начале координат при $\omega = 0$.

Из выражения (4-35) находим уравнение особой прямой:

$$\eta = 0, \quad (4-44)$$

т. е. особой прямой является ось v , которая штрихуется однократно.

Очевидно, что областью устойчивости на плоскости η, v может быть только область в первом квадранте, заключенная между

4-6. ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

1. Исследуем на устойчивость систему регулирования температуры сушильного шкафа, изображенную на рис. 1-5. Передаточная функция системы определяется выражением (2-78).

Характеристическое уравнение замкнутой системы получаем из знаменателя выражения (2-78). Оно имеет вид:

$$T_{ш} T_{н} p^3 + (T_{ш} + T_{н}) p^2 + p + k_{об}^* k_p^* = 0. \quad (4-45)$$

а) Согласно критерию Рауса — Гурвица условие устойчивости (4-2) запишется как

$$(T_{ш} + T_{н}) > k_{об}^* k_p^* T_{ш} T_{н}.$$

Так как элементом настройки системы регулирования является коэффициент усиления регулятора, то из условия устойчивости можно найти пределы его настройки, при которых система не теряет устойчивости

$$k_p^* \leq \frac{T_{ш} + T_{н}}{k_{об}^* T_{ш} T_{н}}.$$

Максимально допустимое по условиям устойчивости (критическое) значение коэффициента усиления регулятора определяется равенством

$$k_{p.кр}^* = \frac{T_{ш} + T_{н}}{k_{об}^* T_{ш} T_{н}}. \quad (4-46)$$

Подставив числовые значения постоянных времени и коэффициента передачи объекта (см. § 2-8), получим значение критического коэффициента усиления регулятора:

$$k_{p.кр}^* = \frac{1\,800 + 300}{10,45 \cdot 10^{-5} \cdot 1\,800 \cdot 300} = 37,2.$$

При $k_p^* > k_{p.кр}^* = 37,2$ система теряет устойчивость.

б) Найдем область устойчивости той же системы методом D -разбиения при изменении коэффициента усиления регулятора.

Рассматривая вместо вещественного коэффициента усиления регулятора комплексный параметр $k^* = k_p^* + j\lambda$ и заменив в формуле (4-45) символ p на $j\omega$, получим

$$-j\omega^3 T_{ш} T_{н} - (T_{ш} + T_{н}) \omega^2 + j\omega + k_{об}^* (k_p^* + j\lambda) = 0. \quad (4-47)$$

Приравняв нулю действительную и мнимую части, найдем:

$$\begin{aligned} k_{об}^* k_p^* - (T_{ш} + T_{н}) \omega^2 &= 0; \\ k_{об}^* \lambda + \omega - T_{ш} T_{н} \omega^3 &= 0, \end{aligned}$$

или

$$k_p^* = \frac{T_{ш} + T_{н}}{k_{об}^*} \omega^2, \quad \lambda = \frac{\omega}{k_{об}^*} (T_{ш} T_{н} \omega^2 - 1)$$

Подставив значения постоянных времени и коэффициента передачи объекта, имеем

$$k_p^* = \frac{2 \cdot 100 \cdot 10^5}{10,45} \omega^2 = 20,1 \cdot 10^6 \omega^2;$$

$$\lambda = \frac{\omega \cdot 10^5}{10,45} (540 \, 000 \omega^2 - 1)$$

Задавая значения ω от 0 до ∞ , строим на плоскости $(k_p^*, j\lambda)$ положительную ветвь кривой D -разбиения и симметричную ей относительно оси k_p^* отрицательную ветвь кривой. В итоге полу-

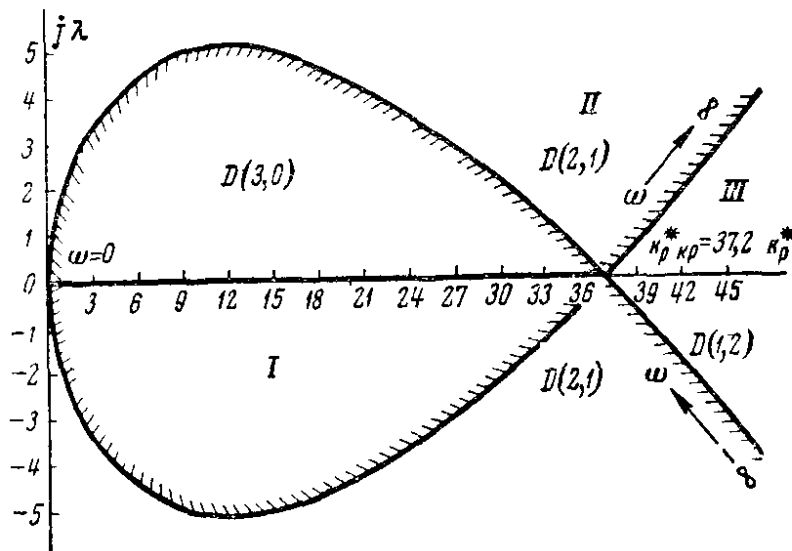


Рис 4-12 Выделение областей устойчивости в плоскости коэффициента усиления регулятора системы регулирования по рис 1-5.

чим на плоскости комплексного переменного k^* три области (рис 4-12) с различными числами отрицательных корней характеристического уравнения системы

Областью устойчивости, как это было установлено в § 4-5,3, может быть только область I, заключенная внутри заштрихованной петли кривой D -разбиения

Из условия $\lambda = 0$ находим значения частот, при которых граница области I пересекает действительную ось

$$\omega_1 = 0 \quad \text{и} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{540 \, 000}} = 1,36 \cdot 10^{-3}.$$

Коэффициенты усиления регулятора при этих предельных значениях ω равны

$$k_{p1}^* = 0 \quad \text{и} \quad k_{p2}^* = 37,2.$$

Проверим, является ли область I областью устойчивости. Для этого установим знаки корней характеристического уравнения в точке с координатами $\lambda = 0$ и $k_p^* = 0$, лежащей на кривой D -разбиения ($\omega = 0$). Для этой точки характеристическое уравнение примет вид

$$p [T_{ш} T_{н} p^2 + (T_{ш} + T_{п}) p + 1] = 0.$$

Его корни:

$$p_1 = 0; \quad p_2 = \frac{-2100 + \sqrt{2100^2 - 216 \cdot 10^4}}{108 \cdot 10^4};$$

$$p_3 = \frac{-2100 - \sqrt{2100^2 - 216 \cdot 10^4}}{108 \cdot 10^4},$$

т. е. два корня — вещественные отрицательные и один — нулевой. Этот последний и является переходящим из области II в область I . При переходе его с граничной кривой в область I он станет отрицательным, т. е. отрицательными будут все три корня характеристического уравнения. Следовательно, область I является областью устойчивости системы.

Коэффициент $k_{p2}^* = k_{p \text{ кр}}^*$ является критическим коэффициентом усиления системы.

2 При автоматизации нагревательной печи, схема которой показана на рис. 2-1, как объекта регулирования динамические свойства системы регулирования в целом будут в значительной мере определяться типом регулятора и регулирующего органа. Для правильного выбора их представляет существенный интерес построение области устойчивости в плоскости двух переменных параметров, которыми являются параметр настройки регулятора (например, его относительный коэффициент усиления k_p^*) и постоянная времени регулирующего органа T_3 .

а) Произведем для рассматриваемой системы регулирования D -разбиение в плоскости выбранных переменных параметров коэффициента усиления k_p П-регулятора и постоянной времени регулирующего клапана T_3 .

На основе выражения (2-86) характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + k_p^* k_{p \text{ о}}^* k_{o \text{ п}}^* = 0. \quad (4-48)$$

Раскрыв скобки, получим

$$T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + 1 + k_p^* k_{p \text{ о}}^* k_{o \text{ п}}^* = 0. \quad (4-49)$$

Заменяя p на $j\omega$ и выделяя интересующий нас параметр T_3 , имеем

$$j\omega T_3 (1 - T_1 T_2 \omega^2) - T_3 (T_1 + T_2) \omega^2 - T_1 T_2 \omega^2 + j\omega (T_1 + T_2) + 1 + k_p^* k_{p \text{ о}}^* k_{o \text{ п}}^* = 0, \quad (4-50)$$

откуда, приравняв нулю вещественную и мнимую части, получим

$$\left. \begin{aligned} k_p^* k_p^* \circ k_o^* \circ k_o^* \circ k_p^* - T_3 (T_1 + T_2) \omega^2 + 1 - T_1 T_2 \omega^2 = 0, \\ T_3 (1 - T_1 T_2 \omega^2) \omega + (T_1 + T_2) \omega = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

Обозначив $k_p^* = \nu$ и $T_3 = \eta$, согласно формуле (4-26) запишем

$$\begin{aligned} P_1(\omega) &= k_p^* \circ k_o^* \circ k_o^* \circ k_p^*; & P_2(\omega) &= 0, \\ Q_1(\omega) &= -(T_1 + T_2) \omega^2, & Q_2(\omega) &= (1 - T_1 T_2 \omega^2) \omega; \\ R_1(\omega) &= 1 - T_1 T_2 \omega^2, & R_2(\omega) &= (T_1 + T_2) \omega \end{aligned}$$

По выражениям (4-29), (4-30) и (4-31) находим

$$\begin{aligned} S_\nu(\omega) &= -(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 \omega - (T_1 + T_2)^2 \omega^3; \\ S_\eta(\omega) &= -k_p^* \circ k_o^* \circ k_o^* \circ k_p^* (T_1 + T_2) \omega, \\ S(\omega) &= k_p^* \circ k_o^* \circ k_o^* \circ k_p^* (1 - T_1 T_2 \omega^2) \omega \end{aligned}$$

Согласно уравнениям (4-27) и (4-28) имеем

$$\nu = \frac{(T_1 + T_2)^2 \omega^3}{k_p^* \circ k_o^* \circ k_o^* \circ k_p^* (T_1 T_2 \omega^2 - 1)} + \frac{T_1 T_2 \omega^2 - 1}{k_p^* \circ k_o^* \circ k_o^* \circ k_p^*}; \quad (4-52)$$

$$\eta = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 \omega^2 - 1} \quad (4.53)$$

Задаваясь рядом значений ω в пределах от $-\infty$ до ∞ , можно построить по формулам (4-52) и (4-53) кривую D -разбиения

При $\omega = 0$ полином $S(\omega)$ равен нулю и при переходе значения ω через нуль меняет знак. Следовательно, при $\omega = 0$ имеем исключительную точку. При этом $Q_1(0) = P_2(0) = Q_2(0) = R_2(0) = 0$, $P_1(0) = k_p^* \circ k_o^* \circ k_o^* \circ k_p^*$; $R_1(0) = 1$. По выражению (4-34) находим уравнение особой прямой

$$\nu = -\frac{1}{k_p^* \circ k_o^* \circ k_o^* \circ k_p^*}$$

При $\omega \rightarrow \infty$ параметр ν стремится к бесконечности, а параметр η — к нулю, т. е. граница областей D при $\omega \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к оси ν .

Разделив уравнения (4-51) на ω^3 и полагая $\omega \rightarrow \infty$, находим, что все члены первого уравнения обращаются в нуль, а второе уравнение примет вид

$$-T_1 T_2 T_3 = 0.$$

Следовательно,

$$P_1(\infty) = Q_1(\infty) = R_1(\infty) = P_2(\infty) = R_2(\infty) = 0, \quad Q_2(\infty) = -T_1 T_2$$

Подставив эти значения полиномов в выражение (4-31), получим $S(\infty) = 0$. Так как при этом $S(\omega)$, проходя через нулевое зна-

чение, меняет знак, то при $\omega = \infty$ граница области D имеет вторую исключительную точку. Из выражения (4-33) находим уравнение второй особой прямой

$$\gamma_1 = 0,$$

т. е. вторая особая прямая совпадает с осью ν .

Полагая в равенствах (4-52) и (4-53) $k_{p0}^* = k_{op}^* = 1$; $T_1 = 90$ сек и $T_2 = 10$ сек, получим

$$\nu = \frac{10\,000\ \omega^2}{900\ \omega^2 - 1} + 900\ \omega^2 - 1,$$

$$\gamma_1 = \frac{100}{900\ \omega^2 - 1}$$

Задаваясь различными значениями ω от 0 до ∞ , получаем ряд точек, по которым проводим граничные кривые областей D (рис. 4-13). Для значений ω от 0 до $-\infty$ эти же кривые обходятся вторично в обратном направлении.

При $\omega = 0$ кривая D -разбиения имеет исключительную точку с координатами

$$\nu = -1,$$

$$\gamma_1 = -(T_1 + T_2) = -100,$$

через которую вертикально проходит первая особая прямая.

Вторая особая прямая, как было найдено выше, совпадает с осью ν .

При $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} =$

$= 0,0333$ получаем $\nu = \eta = \infty$, т. е. граничная кривая уходит в бесконечность в третьем квадранте, а при дальнейшем увеличении ω возвращается из бесконечности в первый квадрант.

При $\omega \rightarrow \infty$ кривая D -разбиения в первом квадранте уходит снова в бесконечность вдоль положительной полуоси параметра ν .

В первом квадранте при $\omega > \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ полином $S(\omega)$ отрицателен

и, следовательно, при обходе кривой в сторону возрастания ω от $\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ до ∞ кривая заштриховывается справа. Так как при

$\omega < \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ полином $S(\omega)$, положителен, то при изменении ω

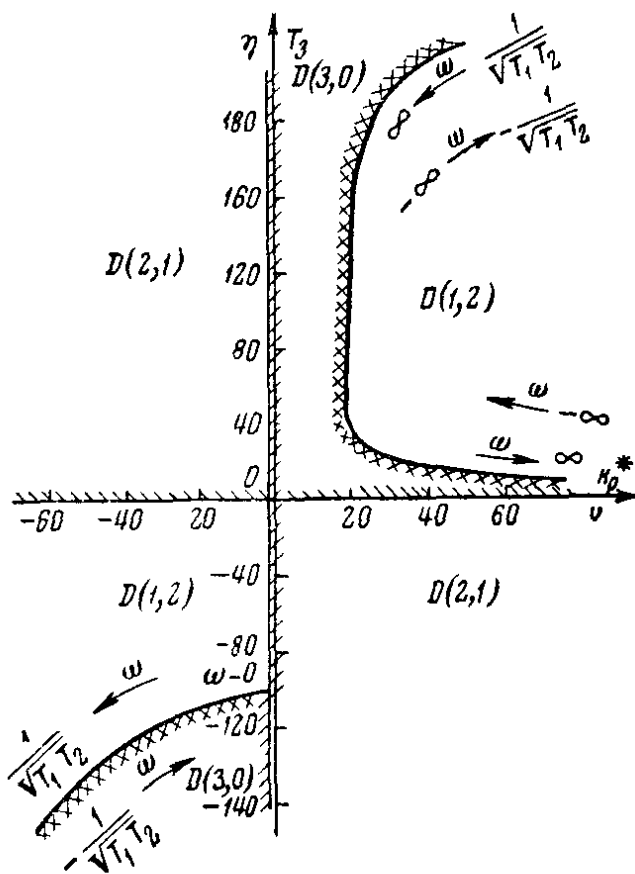


Рис. 4-13 Выделение областей устойчивости системы регулирования рис. 2-1 в плоскости коэффициента усиления регулятора и постоянной времени регулирующего клапана.

от $-\infty$ до $-\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ кривая D -разбиения в первом квадранте заштриховывается слева. Таким образом, в первом квадранте кривая заштриховывается дважды со стороны оси η . В третьем квадранте при $0 < \omega < \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ полином $S(\omega)$ положителен, и поэтому кривая D -разбиения при изменении ω от 0 до $\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ заштриховывается слева, а при $0 > \omega > -\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ полином $S(\omega)$ отрицателен, в связи с чем при движении вдоль кривой при изменении ω от $-\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ до 0 она заштриховывается справа. В результате этого кривая D -разбиения заштриховывается в третьем квадранте дважды со стороны, противоположной оси ν . На рис 4-13 выполнена штриховка кривой D -разбиения и двух особых прямых. Областью устойчивости является область $D(3, 0)$, проходящая из первого квадранта в третий через бесконечность. Убедиться в том, что эта область действительно является областью устойчивости, можно, подставив в уравнение (4-49) координаты любой точки, лежащей в области $D(3, 0)$, например точки, для которой $T_3 > 0$ и $k_p^* = 0$. При этом получим, что все три корня уравнения (4-49) имеют отрицательные вещественные части.

Определив границы области устойчивости системы в плоскости параметров k_p^* и T_3 , можно найти допустимые пределы их совместного изменения без нарушения устойчивости системы.

б) Устойчивость системы согласно критерию Найквиста можно определить по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы. Амплитудно-фазовая характеристика системы, показанной на рис 2 1, определяется выражением (3-43) и изображена на рис 3-6 по данным табл 3-1.

При выбранных параметрах системы она является устойчивой, так как амплитудно-фазовая характеристика не охватывает точку $(-1, j0)$. Вещественная ось пересекается в точке $(-0,448, j0)$ при $\omega = 0,195$ и в точке $(20, j0)$ при $\omega = 0$. По этим точкам можно определить критический коэффициент усиления $k_{p \text{ кр}}^* = 20/0,448 = 44,7$. При этом коэффициенте усиления регулятора амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы пройдет через точку $(-1, j0)$ и система автоматического регулирования будет находиться на границе устойчивости.

в) Определим условия устойчивости системы на рис 2 1 по критерию устойчивости Рауса — Гурвица.

При положительных коэффициентах характеристического уравнения замкнутой системы (4-49) условие устойчивости согласно формуле (4-2) запишется так,

$$(T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) > \\ > T_1 T_3 (1 + k_p^* k_p^* o k_o^* p)$$

или

$$k^* < \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) (T_1 + T_2 + T_3) - 1, \quad (4-54)$$

где $k^* = k_p^* k_o^* k_r^*$ — коэффициент передачи системы.

Из условия (4-54), подставив значения постоянных времени $T_1 = 90$ сек, $T_2 = 10$ сек и $T_3 = 3$ сек, найдем значение критического коэффициента системы $k_{кр}^* = 44,7$

ГЛАВА ПЯТАЯ

КАЧЕСТВО ПРОЦЕССОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

К системе автоматического регулирования предъявляются требования не только в отношении ее устойчивости. Для работоспособности системы не менее необходимо, чтобы процесс автоматического регулирования осуществлялся при обеспечении определенных качественных показателей.

Требования к качеству процесса регулирования в каждом случае могут быть самыми разнообразными, однако из всех качественных показателей можно выделить несколько наиболее существенных, которые с достаточной полнотой определяют качество почти всех систем автоматического регулирования.

5-1. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ

Показателями качества функционирования систем регулирования называются величины, характеризующие поведение системы в переходном процессе при поступлении на ее вход единичного ступенчатого воздействия.

На рис. 5-1 представлен переходный процесс системы автоматического регулирования при единичном ступенчатом изменении задающего воздействия на регулятор.

Основными величинами, характеризующими качество регулирования, являются:

1. Время регулирования

Временем регулирования t_p называется время, в течение которого, начиная с момента приложения воздействия на систему, отклонения регулируемой величины $\Delta h(t)$

от ее установившегося значения $h_0 = h(\infty)$ будут больше наперед заданной величины ε . Обычно принимают, что по истечении времени регулирования отклонение регулируемой величины от установившегося значения должно быть не более $\varepsilon = 5\%$.

Таким образом, время регулирования определяет длительность (быстродействие) переходного процесса.

2. Перерегулирование

Перерегулированием σ называется максимальное отклонение $\Delta h_{\text{макс}}$ регулируемой величины от установившегося значения, выраженное в процентах от h_0

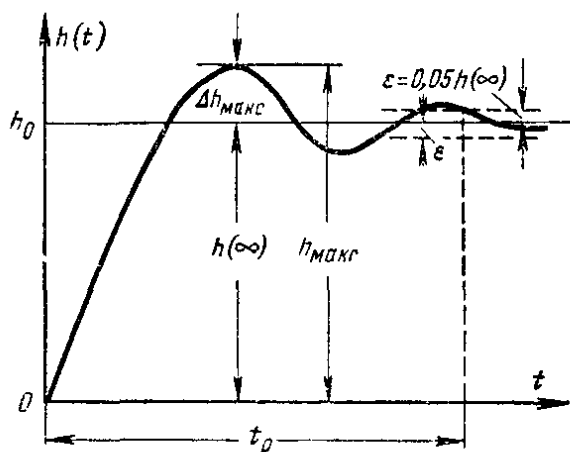


Рис. 5-1. Переходная функция с перерегулированием по каналу регулирующего воздействия.

Абсолютная величина $\Delta h_{\text{макс}}$ определяется из кривой переходного процесса (рис. 5-1):

$$\Delta h_{\text{макс}} = h_{\text{макс}} - h(\infty).$$

Соответственно перерегулирование будет равно:

$$\sigma \% = \frac{h_{\text{макс}} - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100\%. \quad (5-1)$$

3. Установившаяся ошибка

Установившееся значение выходной величины $h(\infty)$ в общем случае может несколько отличаться от заданного значения регулируемой величины h_0 . Величина установившейся ошибки ε_0 по каналу регулирующего воздействия системы определяется формулами (3-13) и (3-16).

Установившаяся ошибка ε_f по каналу возмущающего воздействия может быть определена по формулам (3-17) и (3-18).

При $h(\infty) > h_0$ установившаяся ошибка будет положительной, а при $h(\infty) < h_0$ — отрицательной.

4. Колебательность

Колебательность системы характеризуется числом колебаний регулируемой величины за время регулирования t_p .

Если за это время переходный процесс в системе совершает число колебаний меньше заданного по условиям технологии, то считается, что система имеет требуемое качество регулирования в части ее колебательности.

5-2. ПЕРЕХОДНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Переходной функцией называется зависимость от времени выходной величины системы при поступлении на ее вход управляющего воздействия; обычно принимается, что это воздействие имеет вид единичного скачка (ступенчатое единичное воздействие).

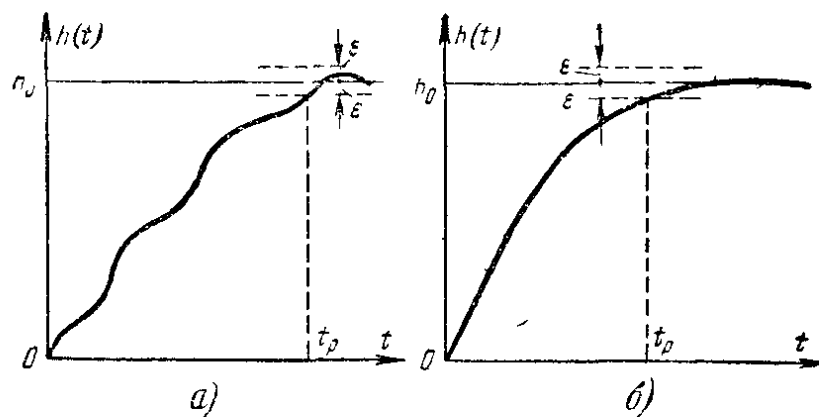


Рис. 5-2 Переходные функции по каналу регулирующего воздействия.

а — без перерегулирования, б — монотонная.

По характеру протекания переходного процесса в системе переходные функции, обозначаемые через $h(t)$, подразделяются на:

- 1) переходные функции с перерегулированием (рис. 5-1);
- 2) переходные функции без перерегулирования (рис. 5-2, а);
- 3) монотонные переходные функции (рис. 5-2, б).

Переходные функции $h(t)$ полностью определяют динамические свойства и качественные показатели системы автоматического регулирования.

Так как изображение единичного ступенчатого входного воздействия по Лапласу имеет вид $X_{вх}(p) = L[1] = \frac{1}{p}$, то изображение переходной функции $h(t)$ с учетом выражения (2-56) определяется:

$$h(p) = \frac{W_{об}(p) W_p(p)}{1 + W_{об}(p) W_p(p)} \cdot \frac{1}{p}. \quad (5-2)$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, получим оригинал переходной функции $h(t)$.

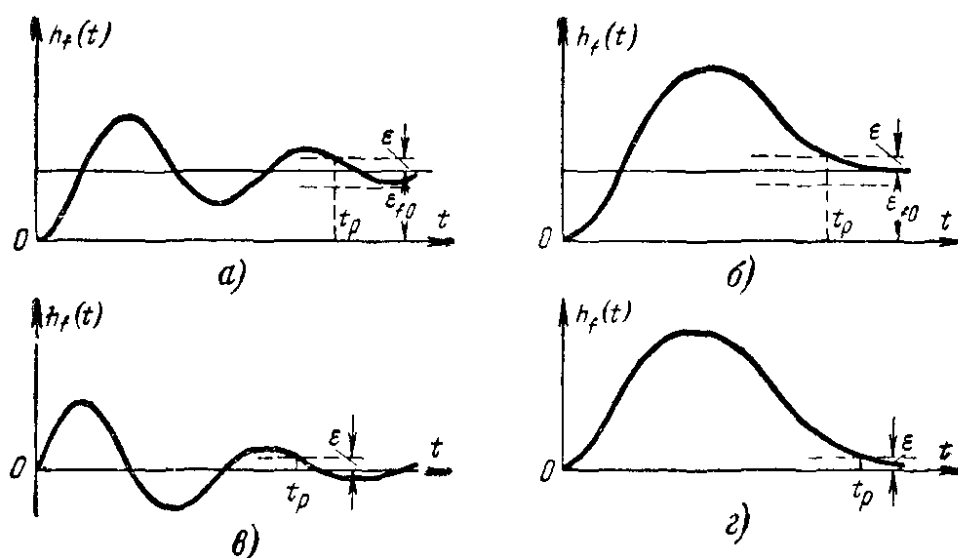


Рис. 5-3. Переходные функции по каналу возмущающего воздействия в статической и астатической системах.

Практическое значение имеет также переходная функция $h_f(t)$, определяющая изменение по времени выходной величины системы при поступлении на вход объекта единичного ступенчатого возмущения; с учетом формулы (2-57) изображение функции $h_f(p)$ имеет вид:

$$h_f(p) = \frac{W_{об}(p)}{1 + W_{об}(p) W_p(p)} \cdot \frac{1}{p}. \quad (5-3)$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, из уравнения (5-3) можно найти оригинал передаточной функции $h_f(t)$.

На рис. 5-3 представлены переходные функции $h_f(t)$ для статических систем (рис. 5-3, а, б) и астатических систем (рис. 5-3, в, г).

Связь между изображениями передаточных функций $h_f(p)$ и $h(p)$ определяется формулой

$$h_f(p) = \frac{1}{W_p(p)} h(p). \quad (5-4)$$

Из выражения (5-4) следует, что чем больше передаточный коэффициент регулятора, тем больше в системе подавляются возмущающие воздействия. Помимо того, чем быстрее заканчиваются переходные процессы в системе, вызванные изменением регулирующего воздействия, тем быстрее стабилизируется система и при появлении возмущающих воздействий на объект.

При $g_0 = 1$ или $f_0 = 1$ по окончании переходного процесса установившиеся значения функций $h(t)$ или $h_f(t)$ будут соответственно равны статическим ошибкам ϵ_0 или ϵ_{f_0} , величины которых зависят от статизма регулятора и объекта (см. § 3-1).

5-3. СТЕПЕНЬ УСТОЙЧИВОСТИ И СТЕПЕНЬ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМ

Показатели качества системы регулирования можно определить непосредственно из графика переходного процесса. Однако для построения этого графика необходимо или решить дифференциальное уравнение системы, или экспериментально получить график переходного процесса. Численное решение дифференциального уравнения является трудоемкой задачей, а проведение эксперимента связано с трудностями, по условиям технологии не всегда возможно и требует наличия специальной аппаратуры. Кроме того, наличие переходного графика только для одного режима еще не дает возможности выявить связи между параметрами системы и характером переходного процесса. В связи с этим в инженерной практике нашли широкое применение косвенные методы оценки качества систем автоматического регулирования по степени их устойчивости. При приближении системы к границе устойчивости корни характеристического уравнения системы перемещаются на комплексной плоскости по направлению к мнимой оси. На границе устойчивости один вещественный или два сопряженных комплексных корня выходят на мнимую ось, а при дальнейшем переходе системы в неустойчивое состояние они перемещаются в правую комплексную полу-плоскость.

Одним из косвенных показателей качества устойчивых систем автоматического регулирования является степень удаленности корней характеристического уравнения замкнутой системы, лежащих в левой комплексной полуплоскости, от мнимой оси (рис. 5-4).

Расстояние α ближайшего корня от мнимой оси характеризует запас устойчивости системы и называется *степенью устойчивости этой системы*. Величина α равна вещественной части корня, ближайшего к мнимой оси.

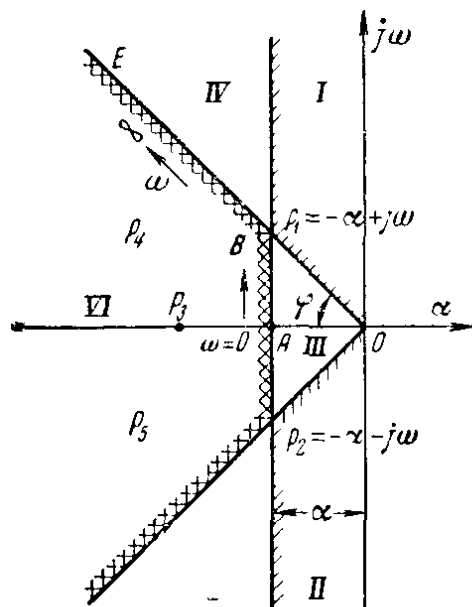


Рис. 5-4. Области расположения корней характеристического уравнения при заданных степени устойчивости и коэффициенте затухания колебаний системы.

Наибольший из углов φ , образованных отрицательной действительной полуосью и лучами, проведенными из начала координат через корни (рис. 5-4), характеризует колебательность системы. Котангенс этого угла $m = \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\alpha}{\omega}$ называется *коэффициентом затухания колебаний*, или *степенью колебательности*.

Согласно формуле (2-47) сопряженные комплексные корни, имеющие максимальный угол φ , дадут составляющую колебательного переходного процесса, имеющую наименьшее затухание, и, следовательно, колебательность системы будет определяться этой составляющей, так как остальные составляющие имеют большее затухание.

Степень затухания составляющей с наименьшим затуханием равна:

$$\psi = 1 - e^{-2\pi m}. \quad (5-5)$$

Если на комплексной плоскости корней (рис. 5-4) провести в левой полуплоскости прямую, параллельную мнимой оси, на расстоянии α от нее и два луча из начала координат под углами $\pm\varphi = \operatorname{arccot} m$ к отрицательной полуось, получим в левой полуплоскости шесть областей: области I и II, соответствующие составляющим переходного процесса системы со степенью устойчивости, меньшей α , и коэффициентом затухания колебаний, меньшим m ; область III со степенью устойчивости, меньшей α , и коэффи-

циентом затухания колебаний, большим m ; области IV и V со степенью устойчивости, большей α , и коэффициентом затухания колебаний, меньшим m , и область VI со степенью устойчивости, большей α , и коэффициентом затухания, большим m .

Следовательно, если требуется, чтобы система автоматического регулирования имела степень устойчивости больше α и коэффициент затухания колебательности больше m , необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения этой системы располагались внутри области VI .

С помощью метода D -разбиения на плоскости двух переменных параметров ν и η можно определить области, в которых обеспечиваются заданная степень устойчивости α и коэффициент затухания m .

Как показано в § 4-5,1, подставив в характеристическое уравнение системы величину $(j\omega)$ вместо оператора p , выделив из коэффициентов полученного уравнения переменные параметры η и ν и приравняв нулю вещественную и мнимую составляющие левой части уравнения, мы получим уравнения (4-27) и (4-28) координат кривой D -разбиения, которая является отображением мнимой оси комплексной плоскости (оси $j\omega$) на плоскости параметров ν и η .

Если же в характеристическом уравнении системы заменить символ p не величиной $(j\omega)$, а величиной $(-\alpha + j\omega)$, где α — заданная степень устойчивости системы, а затем повторить построение кривой D -разбиения, то полученная кривая отобразит на плоскости параметров не мнимую ось, а прямую, параллельную ей и сдвинутую от нее влево на расстояние α . Эта кривая отграничивает область корней, вещественная часть которых меньше величины $(-\alpha)$, т. е. область, в которой степень устойчивости системы выше заданной.

Удаленность от мнимой оси корня, расположенного на луче OE (рис. 5-4), равна $\alpha = \omega \operatorname{ctg} \varphi = m\omega$. Для этого корня выражение $(-\alpha + j\omega)$ превращается в $\omega(j - m)$. Таким образом, если в характеристическом уравнении символ p заменить на $\omega(j - m)$, то при повторении D -разбиения получим еще одну кривую, отграничивающую область, в которой коэффициент затухания колебаний будет больше заданной величины m .

В результате выполнения всех трех D -разбиений мы получим в плоскости переменных параметров ν и η системы: границу устойчивости системы — кривая 1 на рис. 5-5; границу ее заданной устойчивости α — кривая 2 на

рис. 5-5; границу заданной колебательности системы, характеризуемой коэффициентом затухания колебаний m , — кривая 3 на рис. 5-5.

Построенные кривые расчлениют плоскость переменных параметров ν и η (рис. 5-5) на пять областей, сопоставимых с областями на рис. 5-4:

I область неустойчивости (система имеет корни справа от мнимой оси в комплексной плоскости корней на рис. 5-4);

II область устойчивости, но со степенью устойчивости меньше заданной и степенью колебательности больше заданной (система имеет корни в областях *I* и *II* в комплексной плоскости корней на рис. 5-4);

III область со степенью устойчивости меньше заданной и степенью колебательности меньше заданной (система имеет корни в области *III* в комплексной плоскости корней на рис. 5-4);

IV область со степенью устойчивости больше заданной и степенью колебательности больше заданной (система имеет корни в областях *IV* и *V* в комплексной плоскости корней на рис. 5-4);

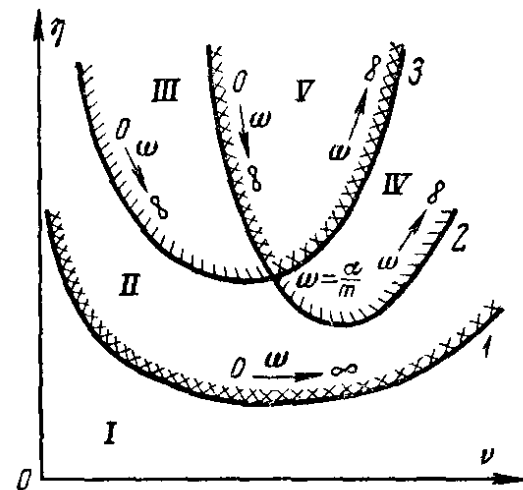


Рис. 5-5. Выделение областей с заданными степенями устойчивости и степенью колебательности в плоскости параметров системы.

V область со степенью устойчивости больше заданной и степенью колебательности больше заданной (система имеет корни в областях *IV* и *V* в комплексной плоскости корней на рис. 5-4);

VI область со степенью устойчивости больше заданной и степенью колебательности меньше заданной (все корни характеристического уравнения находятся внутри области *VI* в комплексной плоскости корней на рис. 5-4).

При заданных степенях устойчивости α и колебательности системы m предъявленным требованиям соответствуют только системы, в которых параметры ν и η изменяются в пределах области *V* на рис. 5-5.

Для уменьшения объема вычислений эту область можно найти без построения полных границ устойчивости. Для этого необходимо построить на плоскости параметров только те части границы, которые соответствуют областям *VI* на комплексной плоскости корней. В силу симметричности этой области (см. рис. 5-4) достаточно выполнить построение участков границы *AB* и *BE*, что соответствует изменению ω от 0 до ∞ .

Подставив значения ω от $\omega = 0$ (в точке A) до $\omega = \frac{\alpha}{m}$ (в точке B) в выражения, определяющие границы области с заданной степенью устойчивости α , получим участок кривой 2 на рис. 5-5, являющийся частью границы области V .

Подставив значения ω от $\omega = \frac{\alpha}{m}$ до $\omega \rightarrow \infty$ в выражения, определяющие границы области с заданным коэффициентом затухания колебаний m , получим участок кривой 3, образующий другую часть границы области V на рис. 5-5.

5-4. ЗАПАС УСТОЙЧИВОСТИ ПО МОДУЛЮ И ФАЗЕ. ПОКАЗАТЕЛЬ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ

Оценка качества процесса регулирования может быть сделана также по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы. Так как при приближении точки ω_2 амплитудно-фазовой характеристики (см. рис. 4-5, a) справа к точке с координатами $(-1, j0)$ устойчивая система приближается к границе устойчивости, то степень устойчивости замкнутой системы находится в прямой зависимости от степени удаленности точки пересечения амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы с отрицательной вещественной полуосью $-U(\omega)$ от точки $(-1, j0)$.

Расстояние c от упомянутой точки пересечения (рис. 5-6) до точки $(-1, j0)$ называется *запасом устойчивости системы по модулю*.

Угол γ , образованный вещественной отрицательной полуосью и лучом, проведенным из начала координат через точку пересечения амплитудно-фазовой характеристики с окружностью единичного радиуса, имеющей центр в начале координат (рис. 5-6), называется *запасом устойчивости системы по фазе*.

Запас устойчивости по модулю c показывает, на сколько должен измениться модуль амплитудно-фазовой характеристики системы при неизменных фазовых соотношениях ее для выхода системы на границу устойчивости.

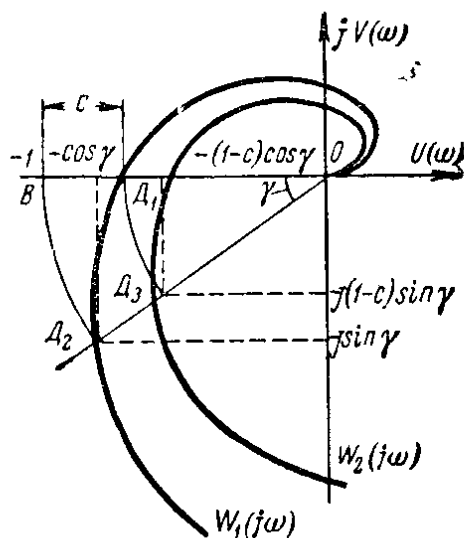


Рис. 5-6. Определение запаса устойчивости системы по модулю и по фазе.

Запас устойчивости по фазе γ показывает, на сколько должна измениться фаза каждого вектора амплитудно-фазовой характеристики при неизменных модулях их для выхода системы на границу устойчивости.

Помимо оценок качества систем регулирования по запасам устойчивости ϵ и γ , можно оценивать системы по запасу колебательности.

Обратимся к амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы, определяемой выражением (3-77). Числи-

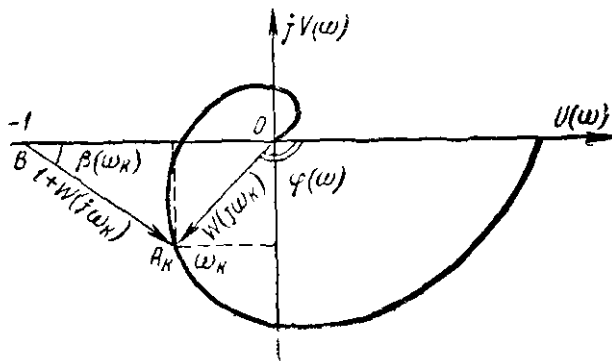


Рис 5-7 Определение амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы

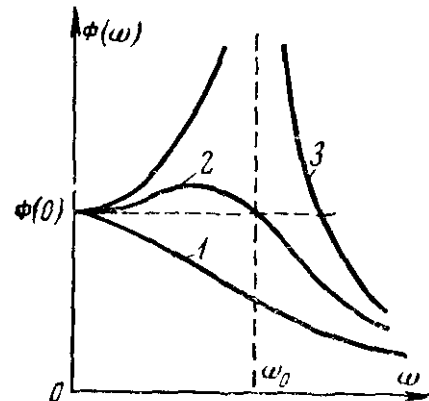


Рис 5-8. Оценка качества процесса регулирования по виду амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы.

1—устойчивой системы без перерегулирования, 2—устойчивой системы с перерегулированием, 3—неустойчивая система

тель этого выражения равен модулю $|OA_k|$ вектора амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы (рис. 5-7) при некоторой частоте ω_k .

Так как на рис. 5-7 вектор $\overline{BA_k} = \overline{BO} + \overline{OA_k}$, то модуль вектора BA_k определится из соотношения

$$|BA_k| = |\overline{BO} + \overline{OA_k}| = |1 + W(j\omega_k)|. \quad (5-6)$$

Следовательно,

$$\Phi(\omega_k) = \frac{|OA_k|}{|BA_k|}. \quad (5-7)$$

Таким образом, амплитудно-частотную характеристику замкнутой системы (рис. 5-8) можно получить по графическому изображению амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы, определяя отношения (5-7) для различных значений частоты.

Чем ближе амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W(j\omega)$ подходит к точке $B(-1, j0)$, тем меньше отрезок BA_k и тем больше будет максимум $\Phi(\omega)$. Если она проходит при некоторой частоте ω_0 через точку B , то длина отрезка BA_k становится равной нулю и величина $\Phi(\omega)$ достигает максимума, равного бесконечности (кривая 3 на рис. 5-8). При этих условиях система будет на границе устойчивости, совершая незатухающие колебания.

Следовательно, максимум отношения $\Phi(\omega) = \frac{|OA_k|}{|BA_k|} = M$, или, что то же самое, максимум модуля амплитудно-фазовой характеристики замкнутой системы, характеризует колебательность системы и называется *показателем колебательности*.

Чем больше показатель колебательности M , т. е. максимум амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы, тем больше колебательность системы. Так, амплитудно-фазовая характеристика (см. рис. 3-14) апериодического звена второго порядка, определяемая выражением (3-63), при уменьшении отношения T_1/T_2 приближается к точке $(-1, j0)$, а максимум амплитудно-частотной характеристики (рис. 3-15) увеличивается; в то же время увеличивается колебательность звена. При $\frac{T_1}{T_2} > 2$ переходный процесс звена является неколебательным, как это видно из уравнения его временной характеристики (3-71). При $\frac{T_1}{T_2} < 2$ звено превращается в колебательное с временной характеристикой по уравнению (3-73). Колебательность увеличивается с уменьшением отношения $\frac{T_1}{T_2}$, а при $\frac{T_1}{T_2} = 0$ колебания становятся незатухающими, что видно из уравнения (3-74).

Для суждения о показателе M замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы $W(j\omega)$ полезно нанести на график линии $M = \text{const}$.

Из рис. 5-7 следует, что:

$$OA_k = \sqrt{U^2(\omega_k) + V^2(\omega_k)}$$

и

$$BA_k = \sqrt{[1 - U(\omega_k)]^2 + V^2(\omega_k)}.$$

Следовательно,

$$M^2 = \frac{U^2(\omega_k) + V^2(\omega_k)}{[1 - U(\omega_k)]^2 + V^2(\omega_k)},$$

или, иначе,

$$M^2 \{ [1 - U(\omega_k)]^2 + V^2(\omega_k) \} = U^2(\omega_k) + V^2(\omega_k).$$

Раскрыв скобки, получим равенство

$$U^2(\omega_k)(M^2 - 1) + V^2(\omega_k)(M^2 - 1) - 2U(\omega_k)M^2 + M^2 = 0.$$

Группируя члены, можно написать:

$$U^2(\omega_k) - \frac{2U(\omega_k)M^2}{M^2 - 1} + V^2(\omega_k) = -\frac{M^2}{M^2 - 1}.$$

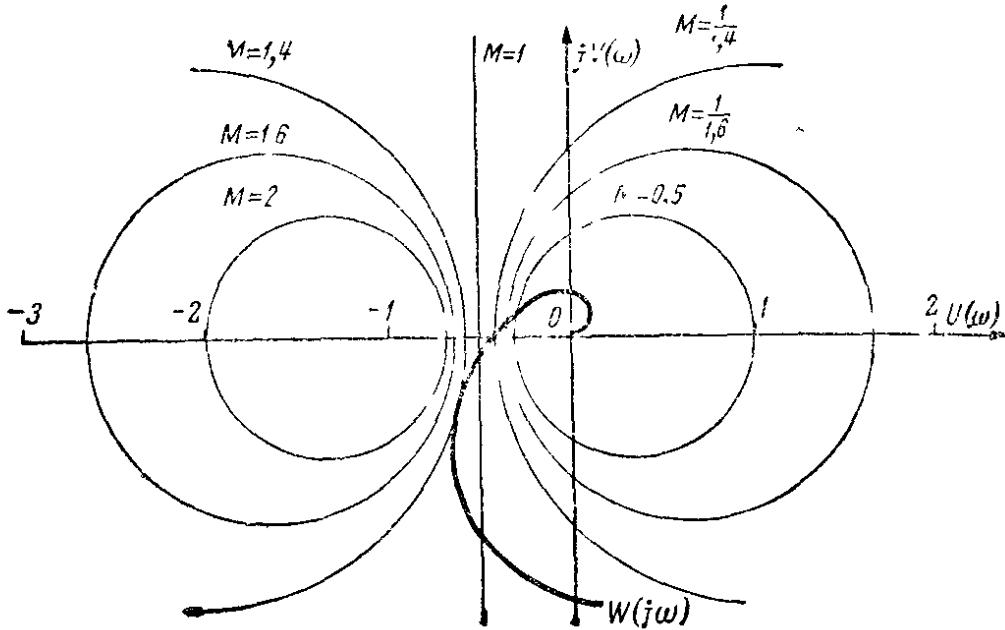


Рис. 5-9. Оценка качества процесса регулирования по круговой диаграмме равных показателей колебательности системы и амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы.

Прибавив к обеим частям полученного уравнения слагаемое $\frac{M^4}{(M^2 - 1)^2}$, получим окончательно:

$$\left[U(\omega_k) - \frac{M^2}{M^2 - 1} \right]^2 + V^2(\omega_k) = \left(\frac{M}{M^2 - 1} \right)^2. \quad (5-8)$$

Полученное равенство при $M = \text{const}$ является уравнением окружности, лежащей в комплексной плоскости $[U(\omega), jV(\omega)]$. Радиус этой окружности равен:

$$R = \frac{M}{M^2 - 1}, \quad (5-9)$$

а ее центр расположен на вещественной отрицательной полуоси на расстоянии от начала координат

$$U_0 = \frac{M^2}{1 - M^2}. \quad (5-10)$$

На рис. 5-9 построено несколько окружностей при $M = \text{const}$ для семи значений M в пределах от 0,5 до 2.

Окружность, построенная для заданного M на плоскости $[U(\omega), jV(\omega)]$, является границей области, при вхождении в которую амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы показатель колебательности замкнутой системы будет больше заданного. Если упомянутая характеристика коснется этой окружности, то показатель M замкнутой системы будет равен заданному. Так, на рис. 5-9 кривая $W(j\omega)$ касается окружности, построенной для $M = 1,4$; поэтому для замкнутой системы $M = 1,4$. Таким образом, для того чтобы показатель колебательности замкнутой системы был не больше заданного, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не пересекала окружности $M = \text{const}$, построенной для заданного коэффициента колебательности.

Практически считается, что система обладает необходимым запасом устойчивости при $M = 1,2 \div 1,5$.

5-5. АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫЕ КРИТЕРИИ ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ ПО МОДУЛЮ И ФАЗЕ

Для обеспечения заданного запаса устойчивости замкнутой системы по модулю c амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W(j\omega)$ должна пересекать вещественную отрицательную полуось на расстоянии c от точки $B(-1, j0)$ справа от нее. Этому условию удовлетворяет характеристика $W_1(j\omega)$ на рис. 5-6.

Таким образом, точка $D_1(c - 1, j0)$ характеризует степень устойчивости системы по модулю. Если $W(j\omega)$ пересекает вещественную отрицательную полуось справа от точки $D_1(c - 1, j0)$ [характеристика $W_2(j\omega)$ на рис. 5-6], то система имеет запас устойчивости по модулю больше заданного, а если пересечение расположено слева от этой точки, то система имеет запас устойчивости по модулю меньше заданного.

Следовательно, условие обеспечения необходимого запаса устойчивости системы по модулю c запишется так:

$$1 - c + W(j\omega) = 0. \quad (5-11)$$

Для обеспечения заданного запаса устойчивости по фазе γ (см. рис. 5-6) необходимо, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W(j\omega)$ проходила

через точку D_2 пересечения вектора OD_2 , проведенного из начала координат под углом γ к вещественной отрицательной полуоси, с окружностью единичного радиуса, имеющей центр в начале координат. Этому условию удовлетворяет характеристика $W_1(j\omega)$ на рис. 5-6.

Если при заданном запасе устойчивости по фазе γ характеристика $W(j\omega)$ пересекает луч $\overline{OD_2}$ левее точки D_2 , то при появлении в системе возмущения по фазе, равного γ и неизменном модуле $|W(j\omega)|$, характеристика будет охватывать точку $B(-1, j0)$ и, следовательно, система будет неустойчивой.

Если $W(j\omega)$ пересечет луч OD_2 правее точки D_2 , то при появлении в системе такого же возмущения характеристика $W(j\omega)$ пройдет правее точки $B(-1, j0)$ и в этом случае система сохранит некоторый запас устойчивости. Такая характеристика $W_2(j\omega)$ на рис. 5-6.

Таким образом, точка $D_2(-\cos \gamma, -j \sin \gamma)$ полностью характеризует запас устойчивости системы по фазе.

Система будет иметь требуемый запас устойчивости по фазе γ при $W(j\omega) = \overline{D_2O}$.

Так как

$$\overline{D_2O} = (-\cos \gamma - j \sin \gamma),$$

то условие необходимого запаса устойчивости по фазе запишется как

$$\cos \gamma + j \sin \gamma + W(j\omega) = 0. \quad (5-12)$$

С учетом формулы (3-24) получим:

$$e^{j\gamma} + W(j\omega) = 0. \quad (5-13)$$

Если требуется, чтобы система имела необходимые запасы устойчивости по модулю s и фазе γ при условии, что возмущающие воздействия на систему по модулю и фазе не совпадают по времени, то система должна удовлетворять условиям (5-11) и (5-13).

Если система удовлетворяет условиям (5-11) и (5-13), но возмущающие воздействия по модулю и фазе появляются в ней одновременно, то эти условия недостаточны для обеспечения заданных запасов устойчивости ее по модулю и фазе. В этом случае появление возмущения по фазе γ можно представить на рис. 5-6 как поворот луча OD_2 вместе с точкой пересечения его с характеристикой $W(j\omega)$ на угол γ по часовой стрелке, т. е. до совмещения его с от-

рицательной полуосью. Чтобы при этом обеспечить также и заданный запас устойчивости по модулю c , необходимо, чтобы точка пересечения характеристики $W(j\omega)$ с лучом OD_2 совместилась с точкой D_1 .

Следовательно, для одновременного обеспечения заданных запасов устойчивости по модулю и фазе необходимо, чтобы характеристика $W(j\omega)$ прошла через точку пересечения луча OD_2 с окружностью радиуса $R=1-c$, центр которой совпадает с началом координат (точка $D_3[-(1-c)\cos\gamma, j(1-c)\sin\gamma]$ на рис. 5-6).

Условие обеспечения необходимых запасов устойчивости по модулю c и фазе γ при одновременно возникающих воздействиях по модулю и фазе запишется так:

$$W(j\omega) = \overline{D_3 O}.$$

Так как

$$D_3 O = -(1-c)(\cos\gamma + j\sin\gamma),$$

то окончательно получим:

$$(1-c)e^{j\gamma} + W(j\omega) = 0. \quad (5-14)$$

5-6. ВЫДЕЛЕНИЕ В ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ НАСТРОЙКИ РЕГУЛЯТОРА ОБЛАСТИ С ЗАДАНЫМИ ЗАПАСАМИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО МОДУЛЮ И ФАЗЕ

При настройке систем автоматического регулирования с целью обеспечения требуемых качественных показателей элементами настройки, как правило, являются параметры регуляторов. В связи с этим определим пределы возможных настроек регуляторов, обеспечивающих одновременно требуемые запасы устойчивости системы по модулю и фазе.

Согласно формулам (2-54) и (3-28) амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы имеет вид:

$$W(j\omega) = W_{об}(j\omega) W_p(j\omega). \quad (5-15)$$

Амплитудно-фазовые характеристики объекта и регулятора через их вещественную и мнимую части запишутся как

$$\begin{aligned} W_{об}(j\omega) &= U_{об}(\omega) + jV_{об}(\omega); \\ W_p(j\omega) &= U_p(\omega) + jV_p(\omega). \end{aligned} \quad (5-16)$$

Если параметры настройки регулятора ν и η входят линейно соответственно в действительную и мнимую части характеристики $W_p(j\omega)$, а именно:

$$U_p(\omega) = \nu R_p(\omega) \quad \text{и} \quad V_p(\omega) = \eta Q_p(\omega),$$

то амплитудно-фазовая характеристика регулятора может быть представлена в виде:

$$W_p(j\omega) = \nu R_p(\omega) + j\eta Q_p(\omega). \quad (5-17)$$

Подставив выражения (5-16) и (5-17) в формулу (5-15), получим:

$$W(j\omega) = [\nu U_{об}(\omega) R_p(\omega) - \eta V_{об}(\omega) Q_p(\omega)] + \\ + j[\eta U_{об}(\omega) Q_p(\omega) + \nu V_{об}(\omega) R_p(\omega)]. \quad (5-18)$$

Представив это значение $W(j\omega)$ в формулу (5-11) и приравняв нулю отдельно действительную и мнимую части, получим:

$$1 - c + \nu U_{об}(\omega) R_p(\omega) - \eta V_{об}(\omega) Q_p(\omega) = 0;$$

$$\eta U_{об}(\omega) Q_p(\omega) + \nu V_{об}(\omega) R_p(\omega) = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим границу области с необходимым запасом устойчивости по модулю в плоскости параметров настройки регулятора:

$$\nu_c = \frac{(c-1) U_{об}(\omega)}{[U_{об}^2(\omega) + V_{об}^2(\omega)] R_p(\omega)}; \quad (5-19)$$

$$\eta_c = \frac{(1-c) V_{об}(\omega)}{[U_{об}^2(\omega) + V_{об}^2(\omega)] Q_p(\omega)}. \quad (5-20)$$

Подставив значение $W(j\omega)$ в формулу (5-12) и приравняв нулю действительную и мнимую части, получим:

$$\cos \gamma + \nu U_{об}(\omega) R_p(\omega) - \eta V_{об}(\omega) Q_p(\omega) = 0;$$

$$\sin \gamma + \nu V_{об}(\omega) R_p(\omega) + \eta U_{об}(\omega) Q_p(\omega) = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим границу области с необходимым запасом устойчивости по фазе в плоскости параметров настройки регулятора:

$$\nu_{\gamma} = - \frac{U_{об}(\omega) \cos \gamma + V_{об}(\omega) \sin \gamma}{[U_{об}^2(\omega) + V_{об}^2(\omega)] R_p(\omega)}; \quad (5-21)$$

$$\eta_{\gamma} = \frac{V_{об}(\omega) \cos \gamma - U_{об}(\omega) \sin \gamma}{[U_{об}^2(\omega) + V_{об}^2(\omega)] Q_p(\omega)}. \quad (5-22)$$

Подставив значение $W(j\omega)$ в формулу (5-14) и приравняв нулю отдельно действительную и мнимую части, получим:

$$(1 - c) \cos \gamma + \nu U_{об}(\omega) R_p(\omega) - \eta V_{об}(\omega) Q_p(\omega) = 0;$$

$$(1 - c) \sin \gamma + \nu V_{об}(\omega) R_p(\omega) + \eta U_{об}(\omega) Q_p(\omega) = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим границу области с необходимым запасом устойчивости по модулю и фазе в плоскости параметров настройки регулятора:

$$\nu_{c\gamma} = \frac{(c - 1) [U_{об}(\omega) \cos \gamma + V_{об}(\omega) \sin \gamma]}{[U_{об}^2(\omega) + V_{об}^2(\omega)] R_p(\omega)}; \quad (5-23)$$

$$\eta_{c\gamma} = \frac{(1 - c) [V_{об}(\omega) \cos \gamma - U_{об}(\omega) \sin \gamma]}{[U_{об}^2(\omega) + V_{об}^2(\omega)] Q_p(\omega)}. \quad (5-24)$$

Подставив ряд значений ω в формулы (5-19)—(5-24), можно выделить в плоскости параметров настройки регулятора области с необходимыми запасами устойчивости по модулю и фазе.

5-7. ВЫДЕЛЕНИЕ В ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ НАСТРОЙКИ РЕГУЛЯТОРА ОБЛАСТИ С НЕОБХОДИМЫМ ЗАПАСОМ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ОБЪЕКТА

В связи с трудностью вывода дифференциальных уравнений промышленных объектов существенный интерес представляют методы определения пределов настройки регулятора, обеспечивающих заданные запасы устойчивости по модулю и фазе, на основе экспериментальной амплитудно-фазовой характеристики объекта.

Рассмотрим графо-аналитические методы выделения в плоскости параметров настройки регулятора областей с необходимыми запасами устойчивости по модулю и фазе, использующие экспериментальную амплитудно-фазовую характеристику объекта.

1. Система с П-регулятором

Предположим, что амплитудно-фазовая характеристика объекта имеет вид, изображенный на рис. 5-10.

При заданных запасах устойчивости по модулю c и фазе γ качество системы определяется расположением амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы относительно точек D_1 , D_2 и D_3 .

Согласно формулам (2-58) и (3-44) амплитудно-фазовая характеристика П-регулятора имеет вид:

$$W_p(j\omega) = k_p. \quad (5-25)$$

Подставляя ее значение в (5-15), имеем:

$$W(j\omega) = k_p W_{об}(j\omega).$$

Из этого выражения следует, что при применении для целей регулирования П-регулятора амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы получается путем умножения каждого вектора амплитудно-фазовой характеристики объекта на коэффициент усиления регулятора без изменения его фазы. В связи с этим для обеспечения

запаса устойчивости по модулю, равного c , найдем значение коэффициента усиления регулятора из уравнения

$$W(j\omega) = k_p \cdot c \cdot OA_2 = OD_1.$$

Отсюда

$$k_p \cdot c = \frac{OD_1}{OA_2} = \frac{1-c}{OA_2}. \quad (5-26)$$

При этом коэффициенте усиления регулятора амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W(j\omega)$ пройдет через точку D_1 и система будет иметь запас устойчивости по модулю, равный c .

При $k_p > k_p \cdot c$ кривая $W(j\omega)$ будет охватывать точку D_1 и пересечет вещественную ось на расстоянии от точки $B(-1, j0)$, меньшем, чем c ; следовательно, в таком случае

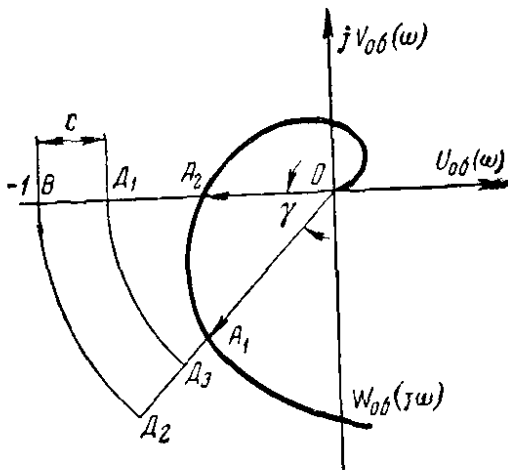


Рис. 5-10 Определение значения коэффициента усиления П-регулятора, обеспечивающего необходимый запас устойчивости системы, по амплитудно-фазовой характеристике объекта.

система будет иметь запас устойчивости по модулю меньше заданного.

Коэффициент усиления регулятора при необходимом запасе устойчивости по фазе γ будет равен:

$$k_{p\gamma} = \frac{OD_2}{OA_1} = \frac{1}{OA_1}. \quad (5-27)$$

Коэффициент усиления, обеспечивающий одновременно необходимые запасы устойчивости по модулю c и фазе γ , определяется по формуле

$$k_{p\ c\ \gamma} = \frac{OD_3}{OA_1} = \frac{1-c}{OA_1}. \quad (5-28)$$

Если запас устойчивости по модулю равен нулю, то характеристика $W(j\omega)$ пройдет через точку $B(-1, j0)$. Система будет на границе устойчивости. Критический коэффициент усиления регулятора при этом будет равен:

$$k_{p\ \text{кр}} = \frac{OB}{OA_2} = \frac{1}{OA_2}. \quad (5-29)$$

Коэффициент усиления регулятора, обеспечивающий требуемый запас устойчивости c по модулю, связан с критическим коэффициентом усиления, при котором система находится на границе устойчивости, очевидной зависимостью, вытекающей из формул (5-26) и (5-29):

$$k_{p\ c} = (1 - c) k_{p\ \text{кр}}. \quad (5-30)$$

Из формул (5-27) и (5-28) вытекает, что

$$k_{p\ c\ \gamma} = (1 - c) k_{p\ \gamma}.$$

Подставив в это выражение величину $(1 - c)$ из уравнения (5-30), получим:

$$k_{p\ c} k_{p\ \gamma} = k_{p\ c\ \gamma} k_{p\ \text{кр}}. \quad (5-31)$$

2. Система с И-регулятором

Согласно зависимостям (2-60) и (3-46) амплитудно-фазовая характеристика И-регулятора имеет вид:

$$W_p(j\omega) = \frac{k_p}{j\omega} = -j \frac{k_p}{\omega} = \frac{k_p}{\omega} e^{-j \frac{\pi}{2}}. \quad (5-32)$$

Подставив это значение $W_p(j\omega)$ в выражение (5-15), получим:

$$W(j\omega) = \frac{k_p}{\omega} e^{-j\frac{\tau}{2}} W_{об}(j\omega). \quad (5-33)$$

Таким образом, при подключении к объекту И-регулятора амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы получается путем умножения каждого вектора амплитудно-фазовой характеристики объекта на отношение коэффициента усиления регулятора к соответствующей частоте и поворота его на 90° по часовой стрелке.

Найдем отсюда значение коэффициента усиления И-регулятора (рис. 5-11), обеспечивающее требуемый запас устойчивости по модулю:

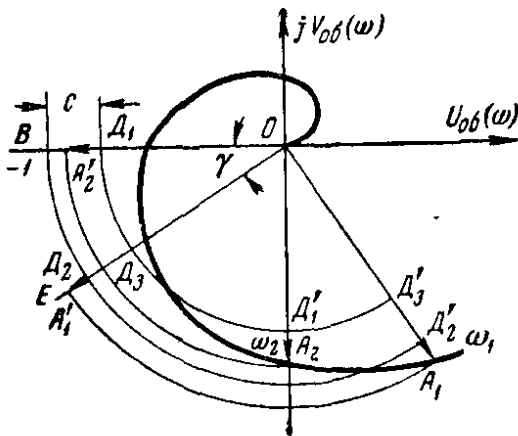


Рис. 5-11. Определение значения коэффициента усиления И-регулятора, обеспечивающего необходимый запас устойчивости, по амплитудно-фазовой характеристике объекта.

откуда

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \\ &= \frac{k_p c}{\omega_2} OA_2 = OD_1 = 1 - c, \end{aligned}$$

$$k_{p.c} = \frac{(1-c)\omega_2}{OA_2}. \quad (5-34)$$

При этом коэффициенте усиления и повернутой на 90° по часовой стрелке характеристике $W_{об}(j\omega)$ характеристика замкнутой системы $W(j\omega)$ пройдет через точку D_1 и система будет иметь запас устойчивости по модулю, равный c . Аналогично из уравнения (5-27) получим:

$$\frac{k_{p\gamma}}{\omega_1} = \frac{OD_2}{OA_1} = \frac{1}{OA_1},$$

откуда

$$k_{p\gamma} = \frac{\omega_1}{OA_1}. \quad (5-35)$$

Аналогично уравнению (5-28) получим:

$$k_{p.c\gamma} = \frac{(1-c)\omega_1}{OA_1}. \quad (5-36)$$

Если запас устойчивости по модулю равен нулю и система находится на границе устойчивости, то из (5-34) найдем критическое значение коэффициента усиления:

$$k_{p.кр} = \frac{\omega_2}{OA_2}. \quad (5-37)$$

Легко убедиться в том, что зависимости (5-30) и (5-31) справедливы и для И-регуляторов.

3. Система с ПИ-регулятором

Из передаточной функции ПИ-регулятора [см. формулу (2-62)] путем замены символа p на $j\omega$ найдем его амплитудно-фазовую характеристику:

$$W_p(j\omega) = k_p \left(1 - j \frac{1}{T_n \omega} \right). \quad (5-38)$$

Сравнивая амплитудно-фазовые характеристики П-регулятора, И-регулятора и ПИ-регулятора [формулы (5-25), (5-30) и (5-38)], видим, что ПИ-регулятор в динамическом отношении эквивалентен П-регулятору с коэффициентом усиления k_p и И-регулятору с коэффициентом усиления k_p/T_n , соединенным параллельно.

Подставив $W_p(j\omega)$ из выражения (5-38) в формулу (5-15), получим:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \\ &= k_p \left(1 - j \frac{1}{T_n \omega} \right) W_{об}(j\omega), \end{aligned} \quad (5-39)$$

или, если учесть зависимость (5-32),

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= k_p W_{об}(j\omega) + \\ &+ \frac{k_p}{T_n \omega} W_{об}(j\omega) e^{-j \frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, каждый вектор амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы, например вектор, построенный для частоты ω_k , может быть получен из амплитудно-фазовой характеристики объекта (рис. 5-12) как сумма двух взаимно перпендикулярных векторов:

$$\overline{OB}_k = k_p \overline{OA}_k \quad \text{и} \quad \overline{B_k D_k} = \frac{k_p}{T_n \omega_k} \overline{OA}_k e^{-j \frac{\pi}{2}}.$$

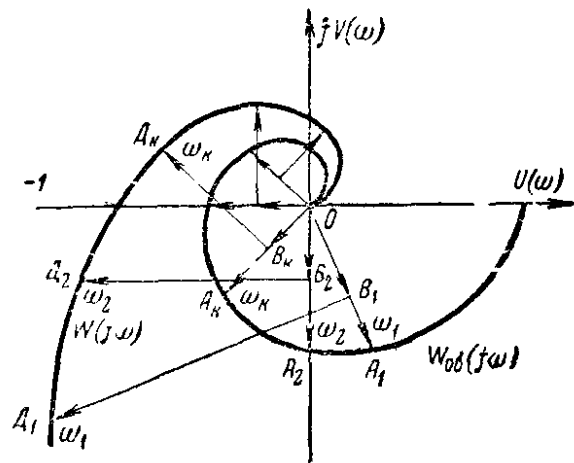


Рис. 5-12. Определение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы с ПИ-регулятором по амплитудно-фазовой характеристике объекта.

Величина вектора \overline{OB}_k при данной частоте определяется коэффициентом усиления k_p , а величина вектора $\overline{B_k D_k}$ помимо k_p , также и постоянной времени T_n .

Для обеспечения заданного запаса устойчивости c по модулю при различных соотношениях коэффициента усиления регулятора k_p и постоянной времени T_n необходимо

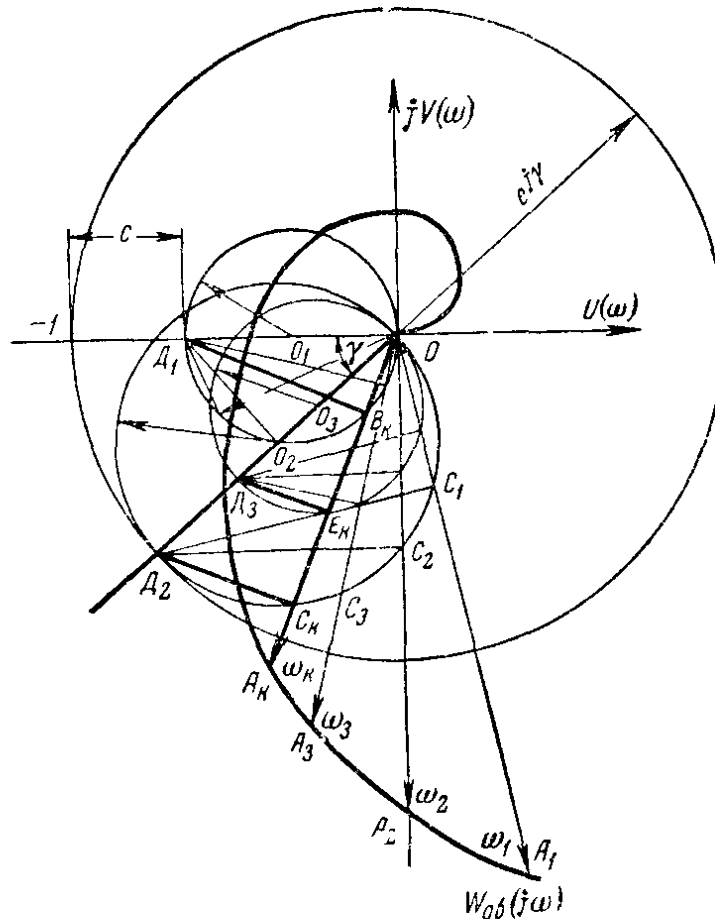


Рис. 5-13. К определению областей с необходимым запасом устойчивости в плоскости параметров настройки ПИ-регулятора по амплитудно-фазовой характеристике объекта.

(рис. 5-13), чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы проходила через точку $D_1[(c-1), j0]$. Следовательно,

$$W(j\omega_k) = \overline{OD_1} = \overline{OB_k} + \overline{B_k D_1}.$$

Таким образом, при значениях k_p и T_n , обеспечивающих требуемый запас устойчивости c по модулю, вектор $\overline{B_k D_k}$ (рис. 5-12) должен упираться в точку D_1 (рис. 5-13). Тогда запас устойчивости будет обеспечен при частоте ω_k . Это же условие должно быть соблюдено для всех векторов характеристики $W_{об}(j\omega_k)$, т. е. для всех частот ω_k .

Все векторы, определяемые только параметром k_p , образуют с векторами, определяемыми, кроме того, еще и параметром T_n , углы 90° , опирающиеся на отрезок OD_1 ; этот отрезок является диаметром окружности (рис. 5-13), на которой лежат вершины упомянутых прямых углов.

Значения параметров настройки регулятора k_p и T_n , обеспечивающие требуемый запас устойчивости по модулю s , определяются из уравнения

$$W(j\omega) = \overline{OB}_K - \overline{D_1B}_K = k_{p.c} \overline{OA}_K - j \frac{k_{p.c} \overline{OA}_K}{T_{n.c} \omega_K},$$

откуда вытекает, что

$$k_{p.c} = \frac{OB_K}{OA_K}; \quad (5-40)$$

$$T_{n.c} = \frac{OB_K}{D_1 B_K \cdot \omega_K}. \quad (5-41)$$

Определив значения $k_{p.c}$ и $T_{n.c}$ для различных значений частоты, получим в плоскости параметров настройки ПИ-регулятора границу $k_{p.c} = f(T_{n.c})$ области, в которой запас устойчивости по модулю будет не меньше заданной величины s .

Так как точка D_2 определяет запас устойчивости по фазе γ , то, построив окружность на отрезке OD_2 , аналогично тому как это делалось для отрезка OD_1 , получим значения параметров настройки регулятора, обеспечивающие требуемый запас устойчивости замкнутой системы по фазе:

$$k_{p\gamma} = \frac{OC_K}{OA_K} \quad (5-42)$$

и

$$T_{n\gamma} = \frac{OC_K}{D_2 C_K \cdot \omega_K}. \quad (5-43)$$

По этим значениям $k_{p\gamma}$ и $T_{n\gamma}$, подсчитанным для ряда частот, можно построить в плоскости этих параметров границу области, в которой запас устойчивости по фазе будет не меньше заданного значения γ .

Так как точка D_3 определяет одновременно заданные запасы устойчивости по модулю и фазе, то, построив по-

добно предыдущему окружность на отрезке OD_3 , как на диаметре, получим:

$$k_{p.с\gamma} = \frac{OE_K}{OA_K} \quad (5-44)$$

и

$$T_{и.с\gamma} = \frac{OE_K}{D_3 E_K \cdot \omega_K} \quad (5-45)$$

По этим выражениям для ряда частот определяются точки, по которым в плоскости этих параметров строится граница области, в которой одновременно обеспечиваются запасы устойчивости по модулю и фазе не ниже заданных σ и γ .

5-8. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА

Динамической ошибкой переходного процесса, возникающей при изменении управляющего воздействия на систему (см. рис. 5-1), называется переменная во времени разность

$$x(t) = h(\infty) - h(t), \quad (5-46)$$

где $h(\infty)$ — установившееся значение выходной величины после окончания переходного процесса;

$h(t)$ — текущее переменное значение выходной величины в течение переходного процесса.

На рис. 5-14, а показана кривая $x(t)$ переходного процесса без перерегулирования, а на рис. 5-14, б — такая же кривая, но с перерегулированием (см. рис. 5-1). Из этих кривых видно, что чем меньше заштрихованная площадь на рис. 5-14, а, тем быстрее ликвидируется динамическая ошибка.

Следовательно, величина заштрихованной площади может служить мерой качества систем автоматического регулирования с монотонными и аperiodическими без перерегулирования переходными процессами.

Заштрихованная площадь на рис. 5-14, а измеряется определенным интегралом функции $x(t)$ при изменении t от 0 до ∞ :

$$I_1 = \int_0^{\infty} x(t) dt. \quad (5-47)$$

Интеграл I_1 называется *линейной интегральной оценкой качества*.

Если известна передаточная функция системы и на вход системы поступило единичное ступенчатое воздействие, то значение линейной интегральной оценки находится весьма просто.

Преобразуем по Лапласу выражение (5-46), учитывая, что согласно формуле (3-22) для замкнутой системы $L[h(t)] =$

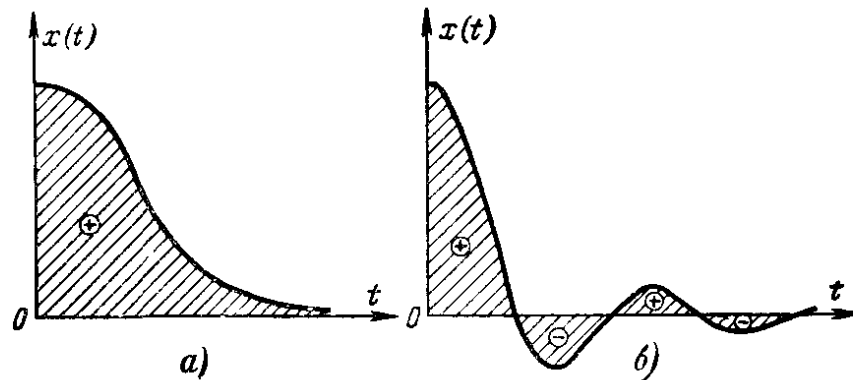


Рис. 5-14. Графическое представление линейной интегральной оценки качества процесса регулирования.

a — при отсутствии перерегулирования, b — при наличии перерегулирования.

$= \frac{1}{p} \Phi(p)$ и что изображение постоянной величины $h(\infty)$, определяемой выражением (3-12), примет вид (при $g_0 = 1$):

$$L[h(\infty)] = L[\Phi(0) 1] = \frac{\Phi(0)}{p}.$$

После подстановки получим:

$$X(p) = \frac{\Phi(0) - \Phi(p)}{p}.$$

Вместе с тем, полагая $p \rightarrow 0$ в выражении (2-7) и учитывая равенство (5-47), имеем:

$$X(0) = \int_0^{\infty} x(t) dt = I_1.$$

Таким образом, линейная интегральная оценка качества I_1 при поступлении на вход системы единичного ступенчатого управляющего воздействия определяется через зна-

чения передаточной функции замкнутой системы для установившегося и неустойчившегося ее состояний:

$$I_1 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Phi(0) - \Phi(p)}{p}. \quad (5-48)$$

Так, например, для системы, являющейся в динамическом отношении инерционным звеном первого порядка с передаточной функцией, определяемой уравнением (2-22), линейная интегральная оценка качества равна:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{k - \frac{k}{Tp + 1}}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{kTp}{(Tp + 1)p} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{kT}{(Tp + 1)} = kT. \end{aligned}$$

Линейная интегральная оценка качества реального дифференцирующего звена с передаточной функцией, определяемой выражением (2-26), равна:

$$I_1 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{0 - \frac{kTp}{Tp + 1}}{p} = -kT.$$

Таким образом, инерционное звено первого порядка и реальное дифференцирующее звено имеют равные линейные интегральные оценки качества при одинаковых параметрах k и T , но их динамические ошибки имеют противоположные знаки относительно нового установившегося состояния.

Линейная интегральная оценка качества звеньев обоих рассмотренных видов тем больше, чем больше постоянная времени звена и его коэффициент передачи. Если система имеет передаточную функцию интегро-дифференцирующего звена [см. формулу (2-29)], то

$$I_1 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{k - \frac{k(T_n p + 1)}{T_n p + 1}}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{k(T_n - T_n)}{T_n p + 1} = k(T_n - T_n).$$

Линейная интегральная оценка качества этой системы зависит от соотношения постоянных времени T_n и T_n .

Если в переходном процессе имеются перерегулирования или этот процесс колебательный, то динамическая ошибка регулирования (см. рис. 5-14, б) за время переходного процесса неоднократно меняет знак. Если и в этих

случаях пользоваться линейной интегральной оценкой качества, то из суммы положительных площадей будут вычитаться отрицательные площади и этот критерий не будет однозначно связан с действительным качеством системы.

Например, при установившихся незатухающих колебаниях выходной величины положительные и отрицательные площади, ограниченные кривой переходного процесса, будут равны и линейная интегральная оценка качества будет равна нулю. Если исходить из линейной интегральной оценки качества, следует признать качество такой системы очень хорошим; фактически же эта система по качественным показателям практически непригодна для использования. В связи с этим при наличии перерегулирования в переходном процессе и колебательном характере его применяют квадратичные интегральные оценки качества различных видов:

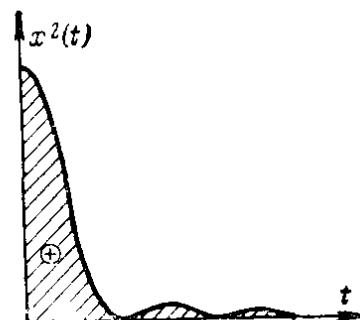


Рис. 5-15. Графическое представление квадратичной интегральной оценки качества процесса регулирования при наличии в системе перерегулирования.

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt, \quad \text{или} \quad I_3 = \int_0^{\infty} [x'(t)]^2 dt,$$

или

$$I_4 = \int_0^{\infty} [x''(t)]^2 dt. \quad (5-49)$$

Квадратичная интегральная оценка качества равна площади, ограниченной кривой $x^2(t)$ (рис. 5-15), $[x'(t)]^2$ или $[x''(t)]^2$. Она находится или графически, или с помощью формул, содержащих только коэффициенты дифференциального уравнения системы; методы определения этих критериев оценки изложены, например, в [Л. 4]. Из двух значений какого-либо параметра настройки системы будет лучшим тот, при котором интегральная оценка качества меньше. Значения параметров, при которых интегральные оценки имеют минимальное значение, являются оптимальными, но они не всегда могут быть реализованы.

5-9. ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ

Показатели качества системы можно определить, имея график переходного процесса (см. рис. 5-1). Но так как для получения графика переходного процесса необходимо аналитическое решение дифференциального уравнения системы, что является во многих случаях сложной задачей, то при расчетах систем автоматического регулирования нашли широкое применение приближенные методы анализа переходных процессов.

Согласно формулам (3-22) и (3-76) переходный процесс замкнутой системы полностью определяется ее передаточной функцией или амплитудно-фазовой характеристикой, которую можно разделить на вещественную $U_\phi(\omega)$ и мнимую $V_\phi(\omega)$ части:

$$\Phi(j\omega) = U_\phi(\omega) + jV_\phi(\omega).$$

Каждой амплитудно-фазовой характеристике однозначно соответствует вещественная частотная характеристика $U_\phi(\omega)$, причем обе эти характеристики, как это видно из выражений (3-28) и (3-36), зависят только от всех коэффициентов дифференциального уравнения; поэтому вещественная частотная характеристика $U_\phi(\omega)$ замкнутой системы однозначно определяет характер ее переходного процесса.

К переходным процессам в линейных системах автоматического регулирования применим закон суперпозиции; это значит, что если входное воздействие представить как сумму составляющих воздействий и найти уравнения или построить кривые переходных процессов в системе для каждой составляющей порознь, то переходный процесс, создаваемый входным воздействием в целом, будет равен сумме переходных процессов для всех составляющих воздействий. На этом и основана методика определения переходного процесса по вещественной частотной характеристике замкнутой системы при поступлении на ее вход единичного ступенчатого управляющего воздействия.

Можно было бы также построить кривую переходного процесса и по мнимой частотной характеристике замкнутой системы.

Пусть замкнутая система имеет вещественную частотную характеристику, изображенную на рис. 5-16, а.

Предположим, что входное воздействие, приложенное к системе, состоит из отдельных составляющих, вещественные частотные характеристики для каждой из которых имеют вид трапеции; при этом две стороны трапеции совпадают

с осями координат ω и $U_{\Phi}(\omega)$, третья параллельна оси ω , а четвертая наклонна.

Выбор трапеции в качестве типовой формы составляющих вещественных частотных характеристик обусловлен следующими соображениями:

1. Действительные вещественные частотные характеристики реальных систем регулирования легко расчленяются на небольшое число трапецеидальных составляющих.

2. Вычисление ординат кривой переходного процесса для трапецеидальной вещественной частотной характеристики достаточно просто и может быть облегчено использованием таблиц.

3. Точность расчетов достаточно велика.

Так как сумма переходных процессов от отдельных составляющих образует переходный процесс системы в целом, то и сумма составляющих вещественных частотных характеристик, имеющих форму трапеций, образует вещественную частотную характеристику системы (см. рис. 5-16, б).

Таким образом, приняв трапецеидальную форму вещественной частотной характеристики за типовую и составив таблицы ординат кривых переходного процесса $h(\tau)$ для единичных трапеций с различными наклонами четвертой стороны, мы можем с помощью таблиц и несложных расчетов построить переходные процессы для каждой составляющей вещественной частотной характеристики и, просуммировав их ординаты, получить кривую переходного процесса замкнутой системы.

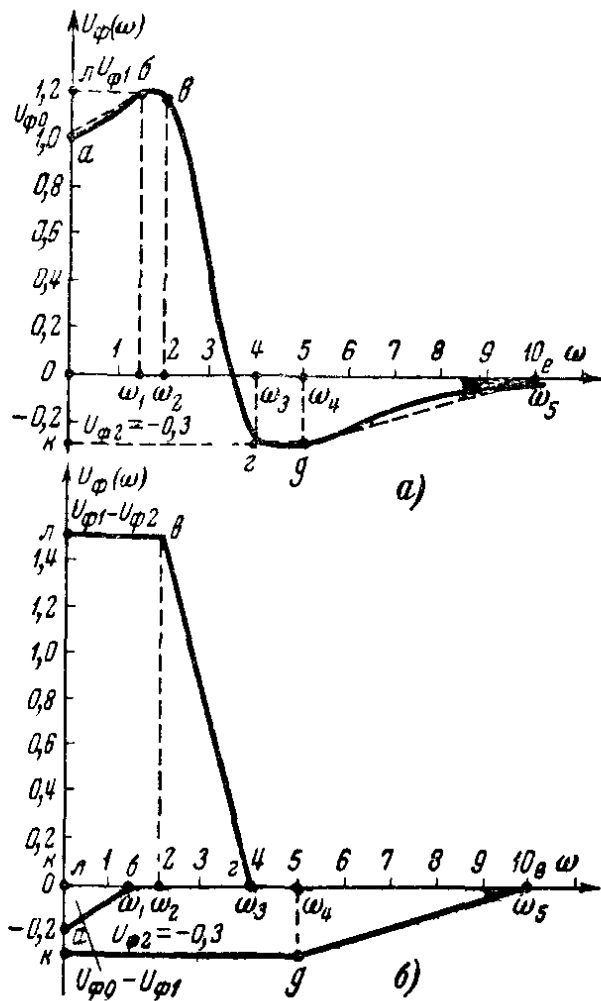


Рис. 5-16. Представление вещественной частотной характеристики замкнутой системы суммой трапецеидальных вещественных частотных характеристик.

Любая трапецидальная вещественная частотная характеристика (рис. 5-17) характеризуется высотой $U_{\phi_0}(\omega)$, интервалом пропускания частот ω_0 , интервалом равномерного пропускания частот ω_d и коэффициентом наклона $\kappa = \omega_d/\omega_0$.

Для типовой единичной трапеции принимается $U_{\phi_0}(\omega) = 1$ и $\omega_0 = 1$; поэтому единичная трапеция характеризуется только коэффициентом наклона $\kappa = \omega_d$.

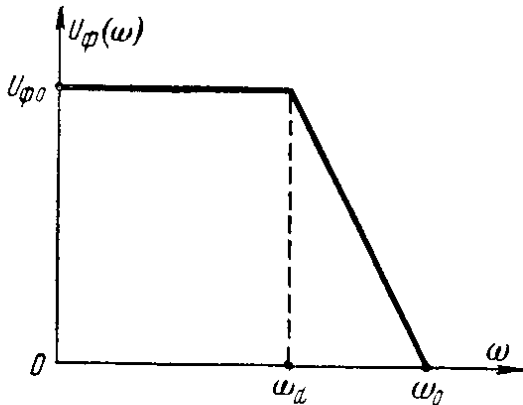


Рис. 5-17. Трапецидальная вещественная частотная характеристика.

Для единичных трапеций с различными величинами κ могут быть вычислены ординаты переходного процесса в виде $h(\tau)$, где $\tau = \omega_0 t$ — безразмерный параметр времени. Из сказанного ранее вытекает, что для единичной трапеции $\tau = 1 \cdot t = t$.

Величины ординат переходных процессов, вычисленные для различных значений τ и κ , называются h -функциями.

Значения h -функций приведены в приложении 2.

Для перехода от h -функции к переходной функции $x(t)$, соответствующей данной составляющей трапецидальной вещественной частотной характеристике с тем же κ , но с $U_{\phi_0}(\omega) \neq 1$ и $\omega_0 \neq 1$, необходимо значения h -функции умножить на $U_{\phi_0}(\omega)$, а для перехода к новому значению времени, необходимо учесть, что $\tau = \omega_0 t$ и, следовательно, $t = \tau/\omega_0$. Поэтому $x(t) = U_{\phi_0}(\omega) h\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right)$.

На рис. 5-16, а выполнена разбивка вещественной частотной характеристики системы на трапеции, которые отдельно представлены на рис. 5-16, б. Здесь они расположены так, что их основания $\kappa - \text{г}$, $0 - \text{е}$ и $\lambda - \text{б}$ совпадают с осью ω .

В данном случае характеристика $U_{\phi}(\omega)$ может быть заменена тремя составляющими трапецидальными характеристиками: $\lambda - \text{в} - \text{г} - \text{к}$, $\lambda - \text{б} - \text{а}$ и $\kappa - \text{д} - \text{е} - \text{о}$, которые характеризуются параметрами:

$$U_{\phi_{01}} = U_{\phi_1} - U_{\phi_2} = 1,2 - 0,3 = 0,9; \quad \omega_{d1} = \omega_2 = 2;$$

$$\omega_{01} = \omega_3 = 4; \quad \kappa = \frac{\omega_{d1}}{\omega_{01}} = 0,5;$$

$$U_{\phi 02} = U_{\phi 0} - U_{\phi 1} = 1,0 - 1,2 = -0,2;$$

$$\omega_{d2} = 0, \quad \omega_{02} = \omega_1 = 1,5; \quad \kappa = 0;$$

$$U_{\phi 03} = U_{\phi 2} = -0,3; \quad \omega_{d3} = \omega_4 = 5;$$

$$\omega_{03} = \omega_5 = 10; \quad \kappa = \frac{\omega_{d3}}{\omega_{03}} = 0,5.$$

По таблицам h -функций (см. приложение 2) находим значения ординат переходных функций $h(\tau)$ для единичных трапецеидальных вещественных частотных характеристик при $\kappa = 0,5$ и $\kappa = 0$.

По h -функции для $\kappa = 0,5$ находим переходные функции, соответствующие первой трапеции $x_1(t)$ и третьей трапеции $x_3(t)$.

По h -функции для $\kappa = 0$ находим переходные функции, соответствующие второй трапеции $x_2(t)$.

Результаты расчетов приведены в табл. 5-1, где τ , $h_{(\kappa=0)}$ и $h_{(\kappa=0,5)}$ взяты из таблиц h -функций;

$$x_1 = U_{\phi 01} h_{(\kappa=0,5)}; \quad x_2 = U_{\phi 02} h_{(\kappa=0)}; \quad x_3 = U_{\phi 03} h_{(\kappa=0,5)};$$

$$t_1 = \frac{\tau}{\omega_{01}}; \quad t_2 = \frac{\tau}{\omega_{02}} \quad \text{и} \quad t_3 = \frac{\tau}{\omega_{03}}.$$

Т а б л и ц а 5-1

τ	$h_{(\kappa=0)}$	$h_{(\kappa=0,5)}$	$x_1(t)$		$x_2(t)$		$x_3(t)$	
			t_1	x_1	t_2	x_2	t_3	x_3
0	0	0	0	0	0	0	0	-0
1	0,31	0,461	0,25	0,691	0,667	-0,062	0,1	-0,138
2	0,572	0,833	0,5	1,25	1,33	-0,114	0,2	-0,25
3	0,755	1,061	0,75	1,591	2	-0,151	0,3	-0,318
4	0,857	1,142	1	1,713	2,66	-0,171	0,4	-0,343
5	0,896	1,118	1,25	1,677	3,33	-0,179	0,5	-0,334
6	0,903	1,051	1,5	1,577	4	-0,181	0,6	-0,315
7	0,904	0,993	1,75	1,490	4,67	-0,181	0,7	-0,296
8	0,91	0,996	2	1,449	5,33	-0,182	0,8	-0,29
10	0,939	0,982	2,5	1,473	6,67	-0,188	1,0	-0,299
15	0,956	1,005	3,75	1,508	10	-0,191	1,5	-0,3
17	0,965	1,012	4,25	1,518	11,3	-0,193	1,7	-0,303
21	0,969	0,995	5,25	1,492	14	-0,194	2,1	-0,297
25	0,975	1,0	6,25	1,5	16,7	-0,195	2,5	-0,3

Построив кривые $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ переходных процессов для составляющих трапецеидальных характеристик

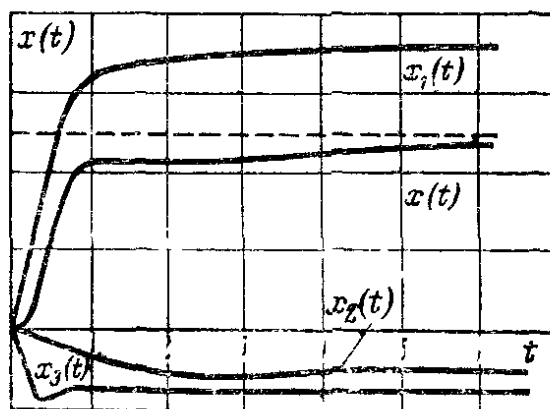


Рис. 5-18. Переходная функция системы с вещественной частотной характеристикой, изображенной на рис. 5-16, а, вычисленная методом трапецеидальных характеристик.

и просуммировав их ординаты графически (рис. 5-18), найдем кривую переходного процесса системы:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t),$$

имеющего вещественную частотную характеристику, вид которой представлен на рис. 5-16, а.

5-10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Для использования метода оценки качества системы, изложенного в § 5-9, необходимо знать вещественную частотную характеристику замкнутой системы.

Если известно дифференциальное уравнение системы, то аналитическое определение вещественной частотной характеристики замкнутой системы по формулам (3-28) и (3-76) не представляет особого труда. Однако в большинстве случаев дифференциальное уравнение системы неизвестно. В связи с этим большой интерес представляют методы построения вещественных частотных характеристик замкнутых систем по их амплитудно-фазовым характеристикам, полученным экспериментально.

Ниже кратко описаны некоторые из этих методов.

1. По известной амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы $W(j\omega)$ (см. рис. 5-7), используя отношение (5-7), легко найти амплитудно-частотную характеристику замкнутой системы $\Phi(\omega)$. Фазо-частотная характеристика разомкнутой системы, т. е. фаза вектора $W(j\omega)$, равна $\varphi(\omega_k)$. Угол $\beta(\omega_k)$ является фазой вектора $1 + W(j\omega)$. При делении векторов результирующая фаза равна раз-

ности фаз векторов числителя и знаменателя, т. е. фазо-частотная характеристика $\psi(\omega_k)$ замкнутой системы равна:

$$\psi(\omega_k) = \varphi(\omega_k) - \beta(\omega_k). \quad (5-50)$$

Соответственно формулам (3-39) и (3-40) между частотными характеристиками замкнутой системы имеются зависимости:

$$\Phi(\omega) = \sqrt{U_\Phi^2(\omega) + V_\Phi^2(\omega)} \quad (5-51)$$

и

$$\psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V_\Phi(\omega)}{U_\Phi(\omega)}. \quad (5-52)$$

Определив из выражения (5-52) мнимую частотную характеристику замкнутой системы $V_\Phi(\omega)$ и подставив ее в равенство (5-51), получим:

$$\Phi(\omega) = U_\Phi(\omega) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi(\omega)},$$

откуда

$$U_\Phi(\omega) = \Phi(\omega) \cos \psi(\omega). \quad (5-53)$$

Таким образом, определив по рис. 5-7 и формулам (5-7) и (5-52) величины $\Phi(\omega)$ и $\psi(\omega)$ для ряда частот ω_k , можно по формуле (5-53) найти значения ординат вещественной частотной характеристики замкнутой системы для тех же частот.

2. Амплитудно-фазовая характеристика замкнутой системы

$$\Phi(j\omega) = U_\Phi(\omega) + jV_\Phi(\omega)$$

связана с амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

соотношением

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)}. \quad (5-54)$$

Подставив приведенные выше значения $\Phi(j\omega)$ и $W(j\omega)$ в формулу (5-54), получим:

$$U_\Phi(\omega) + jV_\Phi(\omega) = \frac{U(\omega) + jV(\omega)}{1 + U(\omega) + jV(\omega)}.$$

Умножая числитель и знаменатель на сопряженный множитель и приравнивая вещественные части левой и правой частей полученного уравнения, находим:

$$U_{\phi}(\omega) = \frac{U^2(\omega) + U(\omega) + V^2(\omega)}{[1 + U(\omega)]^2 + V^2(\omega)},$$

откуда

$$U_{\phi}(\omega) [1 + U(\omega)]^2 + U_{\phi}(\omega) V^2(\omega) = U^2(\omega) + U(\omega) + V^2(\omega),$$

или

$$U^2(\omega) + \frac{2U_{\phi}(\omega) - 1}{U_{\phi}(\omega) - 1} U(\omega) + V^2(\omega) = -\frac{U_{\phi}(\omega)}{U_{\phi}(\omega) - 1}.$$

Полагая в этом уравнении $U_{\phi}(\omega) = U_{\phi 1} = \text{const}$ и прибавляя к его правой и левой частям величину $\frac{1}{4} \left(\frac{2U_{\phi 1} - 1}{1 - U_{\phi 1}} \right)^2$, получаем уравнение

$$\left\{ U(\omega) - \frac{2U_{\phi 1} - 1}{2(1 - U_{\phi 1})} \right\}^2 + V^2(\omega) = \frac{1}{4(1 - U_{\phi 1})^2}. \quad (5-55)$$

Таким образом, на комплексной плоскости амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы геометрическое место точек, имеющих заданную величину вещественной частотной характеристики замкнутой системы, равную $U_{\phi}(\omega) = U_{\phi 1} = \text{const}$, представляет собой окружность с радиусом

$$R = \frac{1}{2(1 - U_{\phi 1})}, \quad (5-56)$$

центр которой лежит на вещественной оси в точке O_1 , находящейся на расстоянии

$$D = \frac{2U_{\phi 1} - 1}{2(1 - U_{\phi 1})} \quad (5-57)$$

от начала координат.

Так как $D - R = -1$, то все окружности, построенные для различных значений $U_{\phi}(\omega)$, проходят через точку $(-1, j0)$, лежащую на отрицательной вещественной полуоси.

Задаваясь различными значениями $U_{\phi}(\omega)$, определяем по формулам (5-56) и (5-57) для каждого из них радиус и центр окружности; построив эти окружности (рис. 5-19), получим круговую диаграмму. Нанося на эту диаграмму

амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы, можно найти ординаты вещественной частотной характеристики замкнутой системы для ряда значений ω .

Если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы пересекает какую-либо окружность круговой диаграммы с определенным $U_{\phi k}$ и точка пересечения соответ-

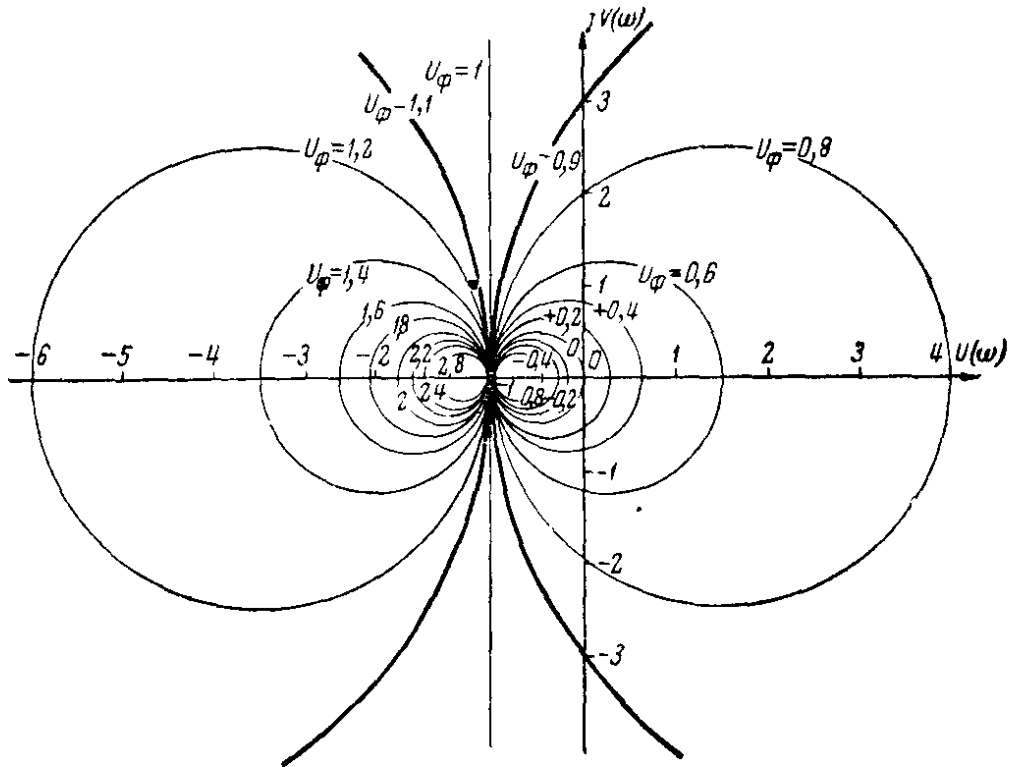


Рис. 5-19 Круговая диаграмма равных значений амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы на плоскости амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы

ствует частоте ω_k , то ордината вещественной частотной характеристики замкнутой системы при $\omega = \omega_k$ будет равна $U_{\phi}(\omega_k) = U_{\phi k}$.

Так, для характеристики $W_1(j\omega)$ на рис. 5-20:

$$U_{\phi}(\omega) = 1 \text{ при } \omega = 1; U_{\phi}(\omega) = 1,1 \text{ при } \omega = 3;$$

$$U_{\phi}(\omega) = 1,2 \text{ при } \omega = 5; U_{\phi}(\omega) = 1,4 \text{ при } \omega = 10$$

и т. д.

Таким образом, по круговой диаграмме и кривой $W(j\omega)$ можно построить кривую $U_{\phi}(\omega)$.

3. Характеристику $U_{\phi}(\omega)$ можно построить, и не совмещая сетку круговой диаграммы с амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы.

Если точку пересечения A амплитудно-фазовой характеристики $W_3(j\omega)$ с какой-либо окружностью соединить с точкой $B(-1, j0)$ и восстановить в середине отрезка AB (точка C) перпендикуляр (рис. 5-20), то он пересечет вещественную ось в точке O_1 , которая является центром этой окружности, и, следовательно, отрезок BO_1 равен радиусу этой окружности.

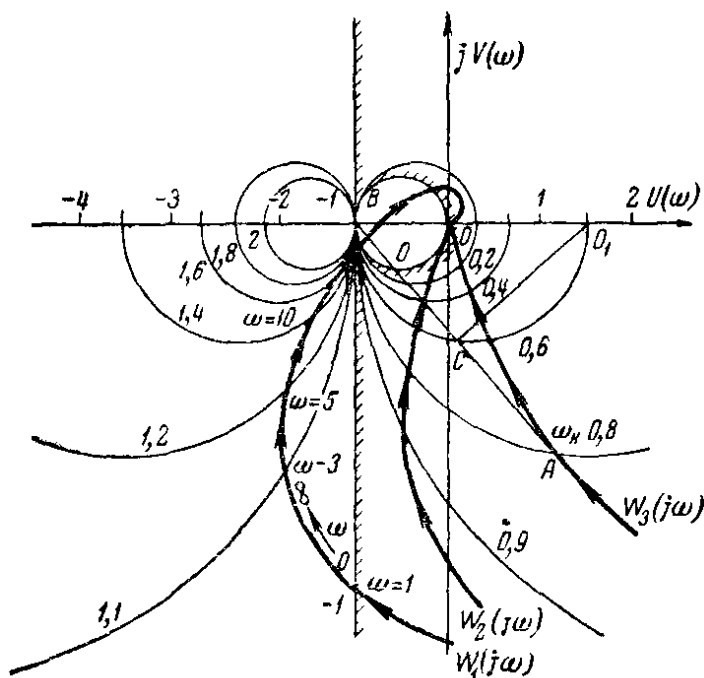


Рис. 5-20 Определение амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы по круговой диаграмме их равных значений и амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы

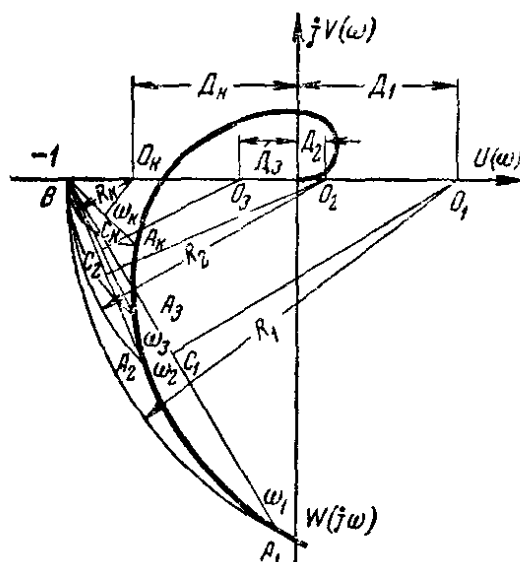


Рис. 5-21. Определение амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы

Имея это в виду, можно по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы следующим образом найти вещественную частотную характеристику замкнутой системы (рис. 5-21).

Соединяем в общем случае для частоты ω_k точку A_k амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы $W(j\omega)$ с точкой $B(-1, j0)$ и в середине отрезка BA_k восстановим перпендикуляр до пересечения с вещественной осью в точке O_k . Отрезок BO_k является радиусом окружности круговой диаграммы, пересекающей характеристику $W(j\omega)$ в точке A_k , соответствующей частоте ω_k .

По выражению (5-56) находим значение $U_\phi(\omega)$ при $\omega = \omega_k$:

$$U_\phi(\omega_k) = 1 - \frac{1}{2R} = 1 - \frac{1}{2BO_k}. \quad (5-58)$$

Выполнив аналогичные построения для других значений частоты, можно построить график вещественной частотной характеристики замкнутой системы.

5-11. ПРИМЕРЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. Определим параметры настройки системы автоматического регулирования температуры сушильного шкафа (см. рис. 1-5), обеспечивающие заданную степень устойчивости α и степень колебательности m .

При требуемой степени устойчивости α , заменив в характеристическом уравнении (4-45) замкнутой системы символ p на $-\alpha + j\omega$, получим.

$$T_{ш} T_{н} (-\alpha + j\omega)^3 + (T_{ш} + T_{н}) \times \\ \times (-\alpha + j\omega)^2 - \alpha + j\omega + k_{об}^* k_p^* = 0. \quad (5-59)$$

Рассматривая вместо вещественного коэффициента усиления регулятора комплексный параметр $k^* = k_p^* + j\lambda$ и приравнявая в формуле (5-59) нулю отдельно вещественную и мнимую части, находим

$$T_{ш} T_{н} \alpha (3\omega^2 - \alpha^2) + (T_{ш} + T_{н}) (\alpha^2 - \omega^2) - \alpha + k_{об}^* k_p^* = 0; \\ \omega [3T_{ш} T_{н} \alpha^2 - T_{ш} T_{н} \omega^2 - 2\alpha (T_{ш} + T_{н}) + 1] + \lambda k_{об}^* = 0,$$

откуда

$$k_p^* = \frac{1}{k_{об}^*} [T_{ш} T_{н} \alpha (\alpha^2 - 3\omega^2) + (T_{ш} + T_{н}) (\omega^2 - \alpha^2) + \alpha] \quad (5-60)$$

и

$$\lambda = \frac{\omega}{k_{об}^*} [T_{ш} T_{н} (\omega^2 - 3\alpha^2) + 2\alpha (T_{ш} + T_{н}) - 1]. \quad (5-61)$$

Подставляя значения $T_{ш} = 1800$ сек; $T_{н} = 300$ сек и $k_{об}^* = 10,45 \cdot 10^{-5}$, имеем:

$$k_p^* = \frac{10^5}{10,45} [540\,000 (\alpha^2 - 3\omega^2) + 2\,100 (\omega^2 - \alpha^2) + \alpha]; \quad (5-62)$$

$$\lambda = \frac{10^5}{10,45} \omega [540\,000 (\omega^2 - 3\alpha^2) + 4\,200 \alpha - 1]. \quad (5-63)$$

При различных значениях частоты и заданной степени устойчивости, например $\alpha = 10^{-4}$, по выражениям (5-62) и (5-63) в плоскости параметров регулятора (рис. 5-22) находим границу области со степенью устойчивости не менее заданной $\alpha = 10^{-4}$. Эта кривая

представляет собой кривую D -разбиения и пересекает вещественную ось в точках $k_p^* = 0,75$ при $\omega = 0$ и $k_p^* = 21,2$ при $\omega = 1,05 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, при изменении коэффициента усиления регулятора в интервале $0,75 < k_p^* < 21,2$ обеспечивается требуемая степень устойчивости $\alpha = 10^{-4}$ системы автоматического регулирования по рис. 1-5.

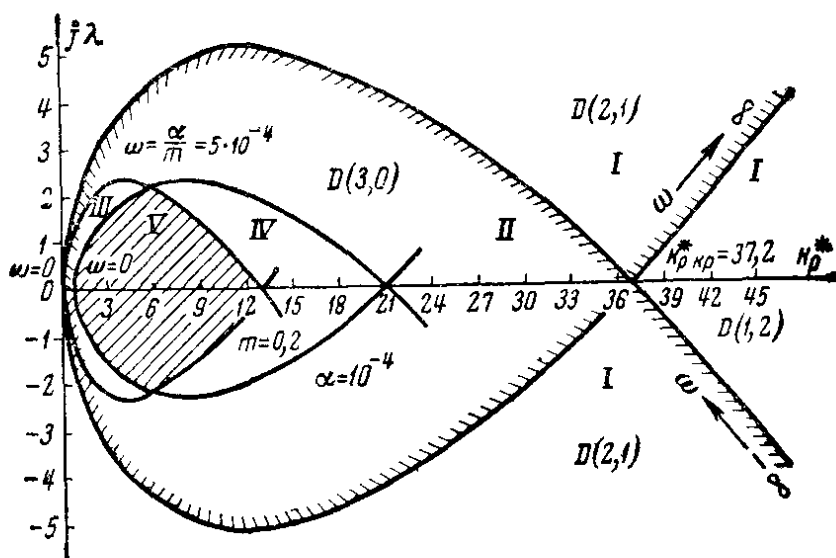


Рис. 5-22. Области с заданной степенью устойчивости $\alpha = 10^{-4}$ и заданной степенью колебательности $m = 0,2$ в плоскости параметров настройки регулятора системы по рис. 1-5.

Заменив в характеристическом уравнении (4-45) символ p на $-m\omega + j\omega$, аналогичным путем получим границу области со степенью колебательности m не более заданной:

$$k_{pm}^* = \frac{\omega}{k_{об}^*} [T_{ш} T_{н} m\omega^2 (m^2 - 3) + (T_{ш} + T_{н}) \omega (1 - m^2) + m]; \quad (5-64)$$

$$\lambda_m = \frac{\omega}{k_{об}^*} [T_{ш} T_{н} \omega^2 (1 - 3m^2) + (T_{ш} + T_{н}) 2m\omega - 1]. \quad (5-65)$$

Подставляя числовые значения $T_{ш} = 1800$ сек; $T_{н} = 300$ сек и $k_{об}^* = 10,45 \cdot 10^{-5}$, находим:

$$k_{pm}^* = \frac{10^5}{10,45} \omega [540000 m\omega^2 (m^2 - 3) + 2100 \omega (1 - m^2) + m]; \quad (5-66)$$

$$\lambda_m = \frac{10^5}{10,45} \omega [540000 \omega^2 (1 - 3m^2) + 4200 m\omega - 1]. \quad (5-67)$$

На рис. 5-22 в плоскости параметров настройки регулятора построена граница области со степенью колебательности $m < 0,2$.

Эта граница пересекает вещественную ось в начале координат при $\omega = 0$ и в точке, где $k_p^* = 13$ при $\omega = 0,78 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, при значениях коэффициента усиления регулятора $k_p^* < 13$ система имеет степень колебательности меньше $m = 0,2$.

Обе построенные кривые пересекаются при частоте $\omega = \frac{\alpha}{m} = 5 \cdot 10^{-4}$.

На рис. 5-22 нанесена также кривая D -разбиения, ограничивающая всю область устойчивости заданной системы.

Три построенные D -кривые разбивают плоскость параметров k_p^* и λ на пять областей: I — область неустойчивости; II — область устойчивости, но с $\alpha < 10^{-4}$ и $m > 0,2$; III — область устойчивости с $\alpha < 10^{-4}$ и $m < 0,2$; IV — область устойчивости с $\alpha > 10^{-4}$ и $m > 0,2$; V — область устойчивости с $\alpha > 10^{-4}$ и $m < 0,2$.

Следовательно, только область V , заштрихованная на рис. 5-22, удовлетворяет требованиям, предъявленным к системе, так как только при значениях параметров настройки регулятора, лежащих в пределах области V , система имеет степень устойчивости больше, а степень колебательности меньше допустимой. При этом коэффициент усиления регулятора может изменяться в пределах $0,75 < k_p^* < 13$.

Как уже указывалось выше, искомую область можно получить, и не определяя полностью все границы устойчивости. Для этого по выражениям (5-62) и (5-63) выполняют построение границы при изменении ω от 0 до $\omega = \frac{\alpha}{m} = 5 \cdot 10^{-4}$, а по выражениям (5-66) и (5-67) выполняют построение оставшейся части границы области V при изменении ω от $\omega = 5 \cdot 10^{-4}$ до $\omega = 7,8 \cdot 10^{-4}$. Все три кривые D -разбиения симметричны относительно вещественной оси.

2. Определим параметры настройки системы по рис. 1-5, одновременно обеспечивающие заданные запасы устойчивости по модулю и фазе, пользуясь амплитудно-фазовой характеристикой объекта.

Заменяя в передаточной функции (2-76) объекта символ p на $j\omega$, получим амплитудно-фазовую характеристику объекта:

$$W_{об}(j\omega) = \frac{k_{об}^*}{(1 + j\omega T_{ш})(1 + j\omega T_{н})}. \quad (5-68)$$

Умножив числитель и знаменатель на произведение сопряженных множителей знаменателя, получим:

$$W_{об}(j\omega) = \frac{k_{об}^* [(1 - T_{ш} T_{н} \omega^2) - j\omega (T_{ш} + T_{н})]}{(T_{ш}^2 \omega^2 + 1)(T_{н}^2 \omega^2 + 1)}. \quad (5-69)$$

Из выражения (2-75) находим амплитудно-фазовую характеристику регулятора:

$$W_p(j\omega) = \frac{k_p^*}{j\omega} = -j \frac{k_p^*}{\omega}. \quad (5-70)$$

Рассматривая вместо вещественного коэффициента усиления регулятора комплексный параметр $k^* = k_p^* + j\lambda$, вещественная часть которого равна действительному коэффициенту усиления регулятора, и подставив k^* в формулу (5-70), получим

$$W_{p\kappa}(j\omega) = \frac{\lambda}{\omega} - j \frac{k_p^*}{\omega}. \quad (5-71)$$

Из амплитудно фазовых характеристик объекта (5-69) и регулятора (5-71), разделяя их на вещественные и мнимые части по формулам (5-16) и (5-17), находим:

$$\left. \begin{aligned} U_{об}(\omega) &= \frac{k_{об}^* (1 - T_{ш} T_{н} \omega^2)}{(T_{ш}^2 \omega^2 + 1) (T_{н}^2 \omega^2 + 1)}; \\ V_{об}(\omega) &= - \frac{k_{об}^* (T_{ш} + T_{н}) \omega}{(T_{ш}^2 \omega^2 + 1) (T_{н}^2 \omega^2 + 1)}; \\ R_p(\omega) &= \frac{1}{c}; \quad Q_p(\omega) = - \frac{1}{c}; \\ \gamma_1 &= k_p^* \quad \text{и} \quad \gamma = 1. \end{aligned} \right\} \quad (5-72)$$

Подставляя эти величины в формулы (5-19) и (5-20), определяем в плоскости комплексного параметра регулятора координаты точек границы области с запасом устойчивости системы по модулю не ниже заданного c :

$$l_c = \frac{(1-c)\omega}{k_{об}^*} (T_{ш} T_{н} \omega^2 - 1); \quad (5-73)$$

$$k_{p\ c}^* = \frac{1-c}{k_{об}^*} (T_{ш} + T_{н}) \omega^2. \quad (5-74)$$

Подставляя значения $T_{ш} = 1800$ сек; $T_{н} = 300$ сек и $k_{об}^* = 10,45 \cdot 10^{-5}$, имеем:

$$k_{p\ c}^* = 20,1 \cdot 10^4 (1-c) \omega^2; \quad l_c = \frac{(1-c)\omega \cdot 10^5}{10,45} (540\,000 \omega^2 - 1)$$

При $c = 0$ получаем выражения для границы устойчивости системы (см. рис 4-12)

Подставив величины (5-72) в формулы (5-21) и (5-22), получим координаты точек границы области с запасом устойчивости системы по фазе не ниже заданного γ .

По формулам (5-23) и (5-24) тем же путем находим выражения, определяющие координаты границы области с запасами устойчивости системы по модулю и фазе не ниже заданных при одновременном появлении в ней возмущающих воздействий по модулю и фазе

По полученным выражениям, задаваясь различными значениями частоты, можно построить в плоскости параметров настройки системы для требуемых запасов устойчивости, например $c = 0,4$ и $\gamma = 0,2$, четыре граничные кривые (рис. 5-23), которые делят плоскость параметров настройки на шесть областей.

I — область неустойчивости;

II — область устойчивости, но с недостаточными запасами устойчивости как по модулю, так и по фазе ($c < 0,4$, $\gamma < 0,2$);

III — область с достаточным запасом устойчивости по модулю, но недостаточным запасом устойчивости по фазе ($c > 0,4$, $\gamma < 0,2$);

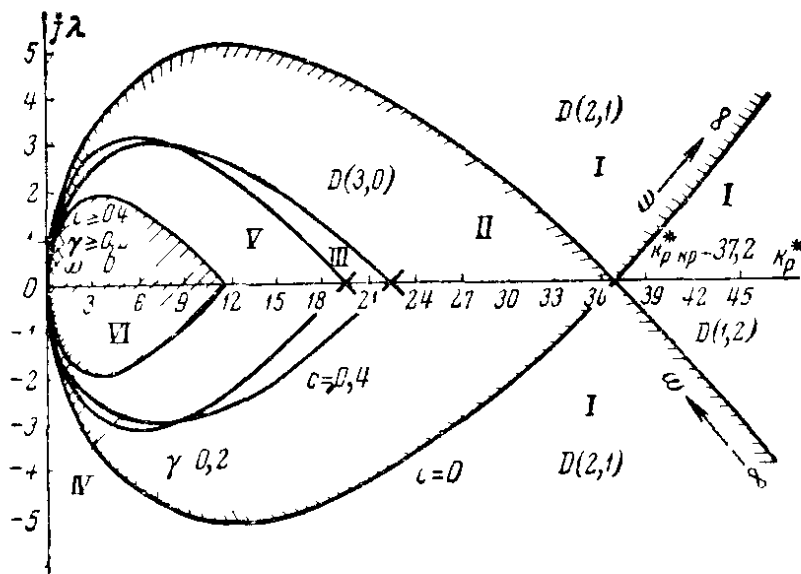


Рис 5-23 Области с заданным запасом устойчивости по модулю $c = 0,4$ и фазе $\gamma = 0,2$ в плоскости параметров настройки регулятора системы рис. 1-5

IV — область с недостаточным запасом устойчивости по модулю, но достаточным запасом устойчивости по фазе ($c < 0,4$; $\gamma > 0,2$);

V — область с достаточным запасом устойчивости по модулю ($c > 0,4$) при отсутствии одновременных возмущающих воздействий по фазе и достаточным запасом устойчивости по фазе ($\gamma > 0,2$) при отсутствии одновременных возмущающих воздействий по модулю;

VI — область с достаточным запасом устойчивости как по фазе, так и по модулю при одновременных возмущающих воздействиях по модулю и фазе ($c > 0,4$, $\gamma > 0,2$)

Так, если в системе по рис. 1-5 ожидается одновременное появление возмущающих воздействий по модулю и фазе и при этом требуется обеспечить запасы устойчивости системы $c = 0,4$ и $\gamma = 0,2$, то для обеспечения поставленных условий необходимо настраивать коэффициент усиления регулятора (рис. 5-23) в пределах $0 < k_p^* < 11,8$.

3. Определим параметры настройки ПИ-регулятора по экспериментальной амплитудно фазовой характеристике объекта. Предположим, что экспериментальная амплитудно-фазовая характеристика объекта имеет вид, представленный на рис. 5-24.

На этом же рисунке выполнены графические построения для определения параметров настройки ПИ-регулятора при необходи-

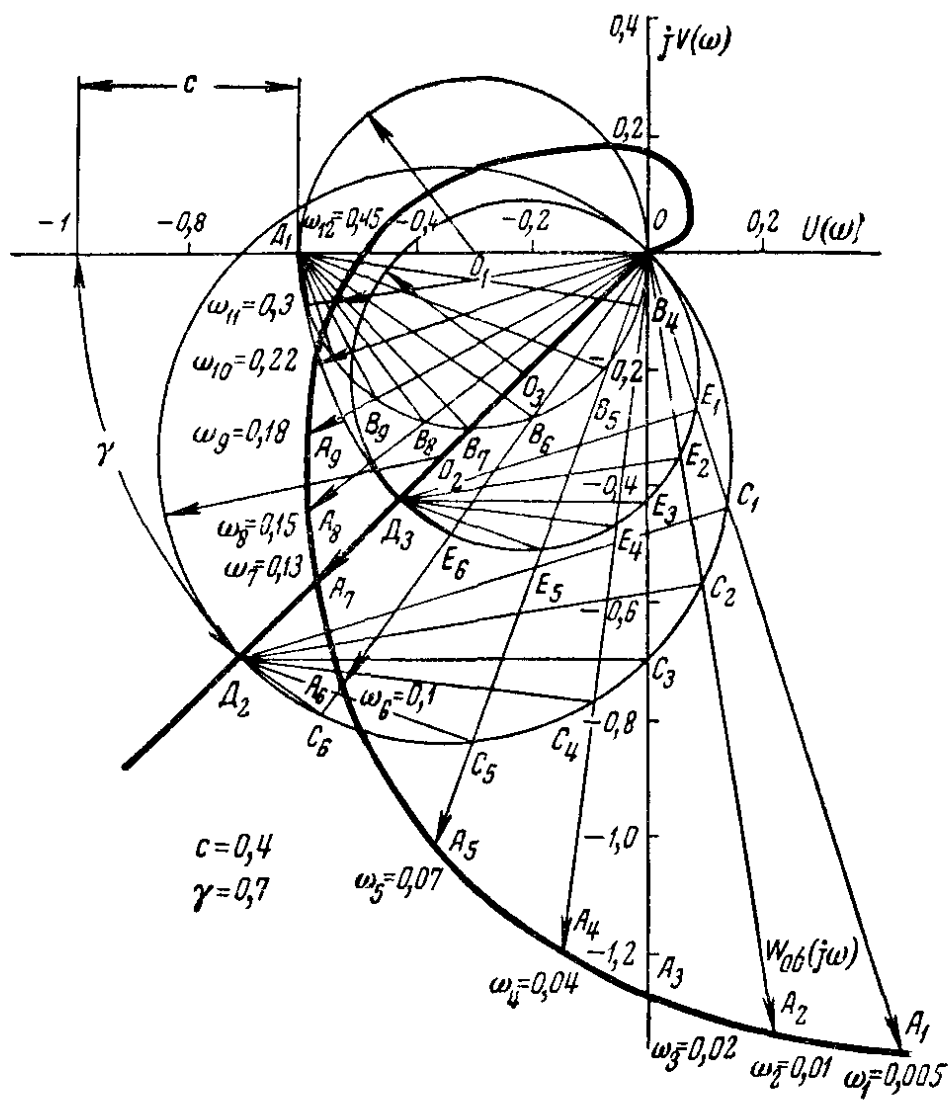


Рис. 5-24. К определению областей с заданным запасом устойчивости по модулю $c = 0,4$ и фазе $\gamma = 0,7$ в плоскости параметров настройки ПИ-регулятора по амплитудно-фазовой характеристике объекта.

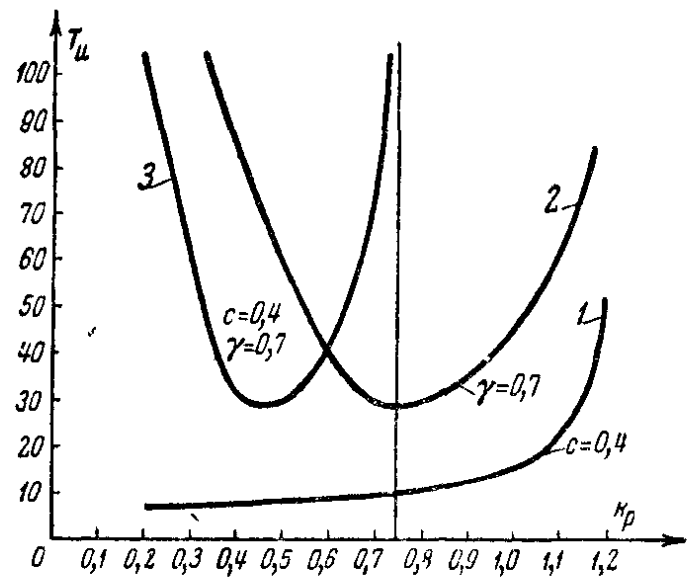


Рис. 5-25. Выделение областей с заданным запасом устойчивости по модулю $c = 0,4$ и фазе $\gamma = 0,7$ в плоскости параметров настройки ПИ-регулятора по амплитудно-фазовой характеристике объекта рис. 5-24.

мом запасе устойчивости по модулю $s = 0,4$ и запасе устойчивости по фазе $\gamma = 0,7$. Результаты графо-аналитических расчетов по формулам (5-40)—(5-45) сведены в табл. 5-2. Границы областей устойчивости в плоскости параметров настройки регулятора по данным табл. 5-2 построены на рис. 5-25. Кривая 1 ограничивает область с запасом устойчивости по модулю не менее $s = 0,4$ при отсутствии в системе возмущений по фазе; кривая 2 ограничивает область с запасом устойчивости по фазе не ниже $\gamma = 0,7$ при отсутствии в системе возмущений по модулю, кривая 3 выделяет область, в которой обеспечиваются оба запаса устойчивости при одновременном появлении в системе возмущений и по модулю, и по фазе.

Т а б л и ц а 5-2

ω_k	OA_k	OC_k	OL_k	OB_k	D_1B_k	D_2C_k	D_3L_k	$k_{p.c}$	$T_{н.c}$	$k_{p.\gamma}$	$T_{н.\gamma}$	$k_{p.c\gamma}$	$T_{п.c\gamma}$
0,005	144	46	28	—	60	88	54	—	—	0,32	104	0,195	104
0,01	136	59	36	—	60	80	49	—	—	0,43	74	0,264	74
0,02	129	71	43	0	60	71	43	0	0	0,55	50	0,333	50
0,04	121	79	47	10	59	61	37	0,083	4,2	0,65	32	0,389	32
0,07	109	90	55	21	56	42	26	0,193	5,4	0,83	31	0,504	30
0,1	91	98	59	36	49	17	10	0,396	7,3	1,08	58	0,66	60
0,13	81	100	60	43	42	0	0	0,53	8,0	1,23	∞	0,74	∞
0,15	74	—	—	48	36	—	—	0,65	8,9	—	—	—	—
0,18	67	—	—	53	28	—	—	0,79	11	—	—	—	—
0,22	61	—	—	57	19	—	—	0,94	14	—	—	—	—
0,3	55	—	—	59	9	—	—	1,07	18,0	—	—	—	—
0,45	50	—	—	60	0	—	—	1,2	∞	—	—	—	—

ГЛАВА ШЕСТАЯ

СРЕДСТВА УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

6-1. ЛИКВИДАЦИЯ СТАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ

Одним из основных недостатков системы автоматического регулирования, изображенной на рис. 1-5, является то обстоятельство, что при любом отклонении температуры сушильного шкафа от заданного значения электродвигатель слишком медленно перемещает движок автотрансформатора в сторону восстановления заданного значения температуры. В связи с этим при больших скачкообразных возмущающих воздействиях, поступающих на объект, процесс регулирования затягивается. Увеличением скорости

перемещения электродвигателем движка автотрансформатора можно сокращать время регулирования только до определенного предела, так как при увеличении скорости сверх некоторой оптимальной возрастает колебательность системы, что может привести к потере ею устойчивости.

На рис. 6-1 представлена система автоматического регулирования, которая имеет принципиальное отличие от системы, представленной на рис. 1-5.

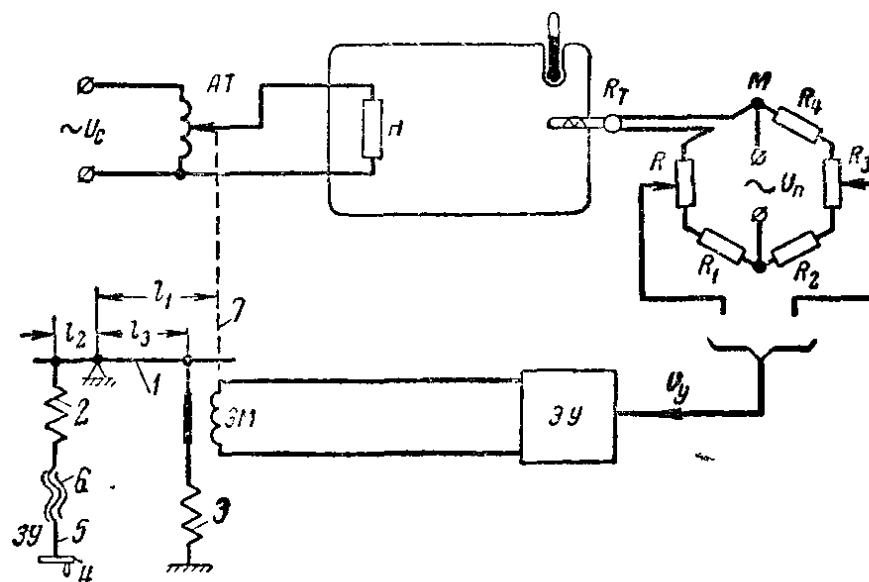


Рис. 6-1. Система автоматического регулирования температуры сушильного шкафа с П-регулятором.

При отклонении температуры сушильного шкафа от заданной нарушается равновесие измерительного моста и на его выходе появляется напряжение, пропорциональное отклонению температуры. Это напряжение усиливается электронным усилителем ЭУ и подается на электромагнит ЭМ.

Условие равновесия сил на коромысле 1 без учета веса сердечника электромагнита запишется следующим уравнением:

$$f_{з.у} l_2 = (f_{э.м} + f_{п}) l_3, \quad (6-1)$$

где $f_{з.у}$ — усилие от пружины 2 задающего устройства ЗУ;
 $f_{э.м}$ — усилие от электромагнита ЭМ;
 $f_{п}$ — усилие от пружины 3 электромагнита;
 l_2 и l_3 — удаленности точек приложения сил задающего устройства и электромагнита к коромыслу от его оси вращения.

В установившемся состоянии измерительный мост уравновешен, напряжение на электромагнит не подается и, следовательно,

$$f_{0э.м} = 0 \quad \text{и} \quad f_{0э.у} l_2 = f_{0п} l_3.$$

Заданное значение температуры устанавливается задающим устройством ЗУ путем вращения маховичка 4. При этом винт 5 перемещается вдоль неподвижной гайки 6, увеличивая или уменьшая натяжение $f_{0э.у}$ пружины 2, а коромысло 1 поворачивается, соответственно увеличивая или уменьшая натяжение $f_{0п}$ пружины 3 и одновременно перемещая движок автотрансформатора АТ с помощью тяги 7.

Таким образом, каждому заданному значению температуры соответствуют определенные натяжения $f_{0э.у}$ и $f_{0п}$ и определенные положения коромысла 1 и движка автотрансформатора. При отклонении температуры от заданной с электронного усилителя на электромагнит подается напряжение U_y .

Тяговая сила электромагнита, выраженная в приращениях относительно равновесного состояния, может быть принята пропорциональной отклонению напряжения U_y :

$$f_{э.м} = K_{э.м} U_y. \quad (6-2)$$

При перемещении сердечника электромагнита, коромысло 1 поворачивается и перемещает движок автотрансформатора в сторону восстановления заданного значения температуры. При этом изменения усилий, развиваемых пружинами 2 и 3, пропорциональны их дополнительному растяжению или сжатию:

$$f_{э.у} = f_{0э.у} + C_2 \Delta S_2 \quad \text{и} \quad f_{п} = f_{0п} + C_3 \Delta S_3, \quad (6-3)$$

где C_2 и C_3 — коэффициенты жесткости пружин 2 и 3;
 ΔS_2 и ΔS_3 — дополнительное растяжение или сжатие пружин 2 и 3, вызванное действием на коромысло усилия $f_{э.м}$.

Подставив (6-2) и (6-3) в (6-1) и учитывая, что $f_{0э.у} l_2 = f_{0п} l_3$, получим:

$$C_2 \Delta S_2 l_2 = (C_3 \Delta S_3 + K_{э.м} U_y) l_3. \quad (6-4)$$

Перемещения точек приложения сил к коромыслу и точки прикрепления тяги 7 к коромыслу в окрестности равновесного состояния связаны зависимостью

$$\frac{\Delta S_2}{l_2} = \frac{\Delta S_3}{l_3} = \frac{\Delta S_1}{l_1},$$

где ΔS_1 — перемещение тяги 7.

Отсюда следует, что

$$\Delta S_2 = \Delta S_1 \frac{l_2}{l_1} \quad \text{и} \quad \Delta S_3 = \Delta S_1 \frac{l_3}{l_1}.$$

Подставив значения ΔS_2 и ΔS_3 в (6-4), найдем:

$$\frac{\Delta S_1}{U_v} = \frac{K_{э м} l_1 l_3}{C_2 l_2^2 - C_3 l_3^2} = K_{и м}, \quad (6-5)$$

где $K_{и м}$ — абсолютный передаточный коэффициент исполнительного механизма.

Переходя к относительным единицам и принимая за базовые значения максимальное перемещение $\Delta S_{\text{макс}}$ тяги движка автотрансформатора и напряжение питания $U_{\text{п}}$ измерительного моста, обозначим:

$$s_1^* = \frac{\Delta S_1}{\Delta S_{\text{макс}}} \quad \text{и} \quad u_y^* = \frac{U_y}{U_{\text{п}}}.$$

Тогда уравнение (6-5) примет вид:

$$\frac{s_1^*}{u_y^*} = k_{и.м}^*, \quad (6-6)$$

где

$$k_{и м}^* = K_{и м} \frac{U_{\text{п}}}{\Delta S_{\text{макс}}}$$

— передаточный коэффициент исполнительного механизма в относительных единицах.

Таким образом, приняв за входную величину исполнительного механизма на рис. 6-1 относительную величину напряжения, подаваемого на электромагнит, а за выходную величину относительное перемещение тяги движка автотрансформатора, получим передаточную функцию исполнительного механизма:

$$W_{и м}(p) = k_{и м}^*. \quad (6-7)$$

Передаточная функция регулятора системы имеет вид:

$$W_p(p) = W_y(p) W_{и.м}(p) = k_y^* k_{и м}^* = k_p^*, \quad (6-8)$$

где $W_y(p)$ и k_y^* — соответственно передаточная функция и относительный передаточный коэффициент усилителя и k_p^* — относительный передаточный коэффициент регулятора в целом.

Следовательно, регулятор на рис. 6-1 в динамическом отношении является пропорциональным регулятором (П регулятором).

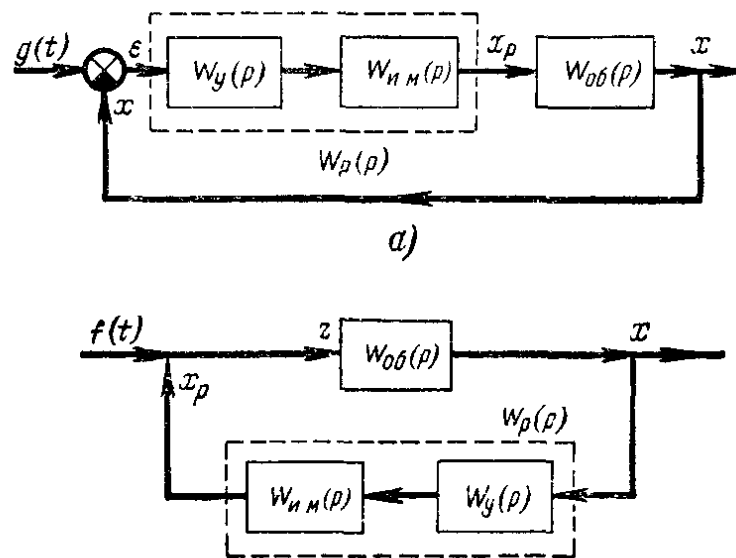


Рис 6-2. Структурные схемы системы рис 6-1.
а — по каналу регулирующего воздействия, б — по каналу возмущающего воздействия.

На рис. 6-2 представлены структурные схемы системы регулирования, изображенной на рис. 6-1 для случаев изменения задающего $g(t)$ (схема на рис. 6-2, а) и возмущающего $f(t)$ (схема на рис. 6-2, б) воздействий.

В соответствии с формулой (2-57) передаточная функция замкнутой системы по каналу возмущающего воздействия при передаточной функции объекта, выраженной формулой (2-76), имеет вид:

$$\Phi_f(p) = \frac{k_{об}^*}{T_{ш} T_{н} p^2 + (T_{ш} + T_{н}) p + 1 + k_{об}^* k_p^*}. \quad (6-9)$$

Из сравнения передаточной функции П-регулятора системы, изображенной на рис. 6-1 [формула (6-8)], с передаточной функцией И-регулятора, примененного в системе на рис. 1-5 [см. формулу (2-75)], видно, что при изменении температуры сушильного шкафа П-регулятор передвинет движок автотрансформатора практически мгновенно на требуемую величину в сторону восстановления

заданного значения температуры (см. рис. 2-3). В случае же применения И-регулятора перемещение движка автотрансформатора будет постепенным (рис. 2-4). Следовательно, быстрдействие системы по рис. 6-1 в начальный момент времени будет значительно больше, чем в системе, приведенной на рис. 1-5.

Из сопоставления характеристических уравнений обеих систем следует, что при П-регуляторе устойчивость системы обеспечивается проще, чем при использовании И-регулятора, так как в этом случае степень характеристического уравнения вторая и поэтому система устойчива при любых положительных коэффициентах характеристического уравнения, тогда как при И-регуляторе характеристическое уравнение имеет третий порядок и условия устойчивости системы усложняются [см. формулы (4-2)].

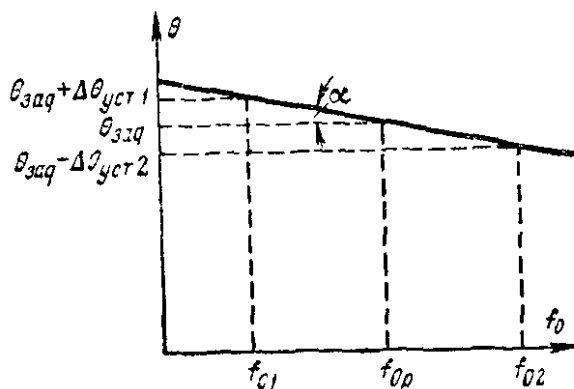


Рис 6-3. Характеристика статического регулирования

Однако система по рис. 6-1 по сравнению с системой на рис. 1-5 имеет недостатки, важнейшим из которых является наличие статической ошибки, которая в системе на рис. 6-1 вызывается жесткой связью положения исполнительного механизма (движка автотрансформатора) с отклонением регулируемой величины (температуры сушильного шкафа) от заданного значения: при изменении температуры равновесное состояние системы достигается только при изменении количества тепла, поступающего в систему от нагревателя, т. е. при изменившемся положении движка трансформатора, а это положение соответствует некоторому другому значению установившейся температуры шкафа, нежели заданное первоначальное, имевшее место до появления возмущающего воздействия, послужившего причиной изменения температуры шкафа.

На рис. 6-3 представлена зависимость установившегося значения регулируемой величины Θ (температуры) от постоянного возмущающего воздействия f_0 для системы по рис. 6-1. Эта статическая система автоматического регулирования настраивается таким образом, чтобы при наиболее вероятном (расчетном) постоянном возмущающем воз-

действии f_{0p} величина регулируемого параметра была равна заданному значению.

Если при работе системы величина возмущающего воздействия будет изменяться, то в системе будет поддерживаться заданное значение регулируемой величины с некоторой статической ошибкой, величина которой определяется формулами (3-17) или (3-18).

Чем больше отклонение постоянного возмущающего воздействия от его расчетной величины, тем больше величина установившейся статической ошибки. При этом если $f_0 > f_{0p}$, то статическая ошибка отрицательна, а при $f_0 < f_{0p}$ статическая ошибка будет положительной.

Итак, систему по рис. 6-1 необходимо настраивать таким образом, чтобы при расчетном, наиболее вероятном возмущающем воздействии (например, величине теплоотдачи f_{0p}) значение регулируемой температуры было равно заданному $\Theta_{зад}$.

Если при работе системы величина теплоотдачи сушильного шкафа уменьшится (например, в результате повышения температуры окружающей среды) до $f_{01} < f_{0p}$, то после окончания переходного процесса в системе новое установившееся значение регулируемой температуры (рис. 6-3) будет больше заданного на величину статической ошибки $\Delta\Theta_{уст1}$.

При увеличении величины теплоотдачи до значения $f_{02} > f_{0p}$ установившееся значение температуры будет меньше заданного на величину статической ошибки $\Delta\Theta_{уст2}$.

В соответствии с формулами (3-17) и (3-18) тангенс угла наклона статической характеристики системы к оси абсцисс равен $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_{об}}{1 + k_{об}k_p}$ при статическом объекте

или $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{k_p}$ при астатическом объекте.

Чем меньше угол наклона статической характеристики системы, тем меньше статическая ошибка в ней при отклонении величины постоянного возмущающего воздействия от расчетной.

Так как статические системы по сравнению с астатическими являются, как правило, более устойчивыми, обладающими достаточным быстродействием, более простыми в настройке и надежными в эксплуатации, то во всех случаях, когда некоторая статическая ошибка регулирования допустима по условиям технологии, следует применять статические системы.

Если статическая ошибка по условиям технологии недопустима, то необходимо систему регулирования сделать астатической относительно возмущающего воздействия, т. е. ввести в закон регулирования составляющее регулирующее воздействие, пропорциональное интегралу отклонения регулируемой величины от заданного значения.

6-2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА

Из § 6-1 следует, что и регулирование, пропорциональное отклонению регулируемой величины от заданного значения, и регулирование, пропорциональное интегралу от отклонения, имеют свои достоинства и недостатки. В связи с этим представляется целесообразным создание комбинированных систем, в которых регулирование осуществляется бы и по отклонению, и по интегралу от отклонения, в результате чего представляется возможным сочетать достаточное быстродействие в начальный момент процесса регулирования и повышенную устойчивость, свойственные статическим системам, с отсутствием статической ошибки, характерным для астатических систем.

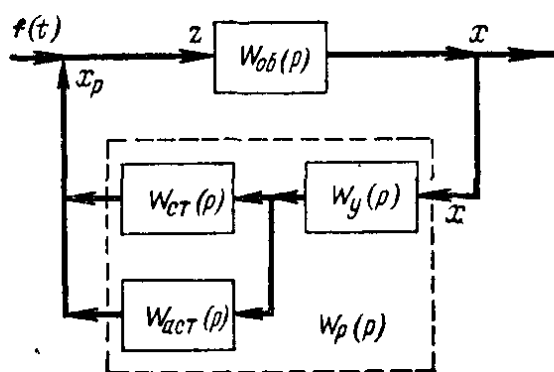


Рис. 6-4. Структурная схема системы с ПИ-регулятором.

Такой закон регулирования осуществляется с помощью ПИ-регуляторов. На рис. 6-4 представлена возможная структурная схема одной из таких систем. Эта система отличается от статической системы автоматического регулирования, показанной на рис. 6-1 и имеющей структурную схему, изображенную на рис. 6-2, тем, что параллельно статической части регулятора с передаточной функцией $W_{ст}(p) = k_{ст}$ подключена астатическая часть регулятора с передаточной функцией $W_{аст}(p) = \frac{k_{аст}}{p}$.

Если к этой системе приложить постоянное возмущающее действие f_0 , то в начальный момент времени статическая часть регулятора создает скачкообразное регулирующее воздействие на систему, пропорциональное отклонению регулируемой величины от заданного значения и

действующее в сторону уменьшения отклонения. В дальнейшем это воздействие непрерывно уменьшается до нуля и одновременно с этим постепенно увеличивается пропорциональное интегралу от отклонения регулирующее воздействие, создаваемое астатической частью регулятора и ликвидирующее статическую ошибку в системе.

Передаточная функция $W_p(p)$ регулятора, изображенного на рис. 6-4, имеет вид:

$$W_p(p) = W_y(p) [W_{ст}(p) + W_{аст}(p)],$$

или

$$W_p(p) = k_y \left(k_{ст} + \frac{k_{аст}}{p} \right).$$

Вынеся за скобки $k_{ст}$ и обозначив $k_y k_{ст} = k_p$ и $k_{ст}/k_{аст} = T_n$, получим:

$$W_p(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_n p} \right) = k_p \frac{T_n p + 1}{T_n p}. \quad (6-10)$$

Полученная формула совпадает с формулой (2-62), т. е. регулятор, введенный в схему на рис. 6-4, является ПИ-регулятором.

Из сказанного становится понятной целесообразность применения ПИ-регуляторов в схемах автоматического регулирования различных производственных процессов.

Передаточная функция объекта в общем виде представляется так:

$$W_{об}(p) = \frac{Q_{об}(p)}{P_{об}(p)}.$$

Найдем для замкнутой системы регулирования с ПИ-регулятором передаточную функцию по каналу возмущающего воздействия:

$$\Phi_f(p) = \frac{W_{об}(p)}{1 + W_{об}(p) W_p(p)} = \frac{\frac{Q_{об}(p)}{P_{об}(p)}}{1 + \frac{Q_{об}(p)}{P_{об}(p)} \frac{k_p (T_n p + 1)}{T_n p}},$$

откуда

$$\Phi_f(p) = \frac{T_n p Q_{об}(p)}{[P_{об}(p) + k_p Q_{об}(p)] T_n p + k_p Q_{об}(p)}. \quad (6-11)$$

Из найденного выражения следует, что по окончании переходного процесса, т. е. при $t \rightarrow \infty$ и соответственно $p = 0$,

мы получим: $\Phi_f(p) = \Phi_f(0) = 0$; это является подтверждением отсутствия статической ошибки в системе с ПИ-регулятором.

На рис. 6-5 представлена система с ПИ-регулятором, в которой электромагнит соединен с движком автотрансформатора жесткой кинематической связью, а с коромыслом связан через специальное устройство, называемое в технике изодромом (или катарактом).

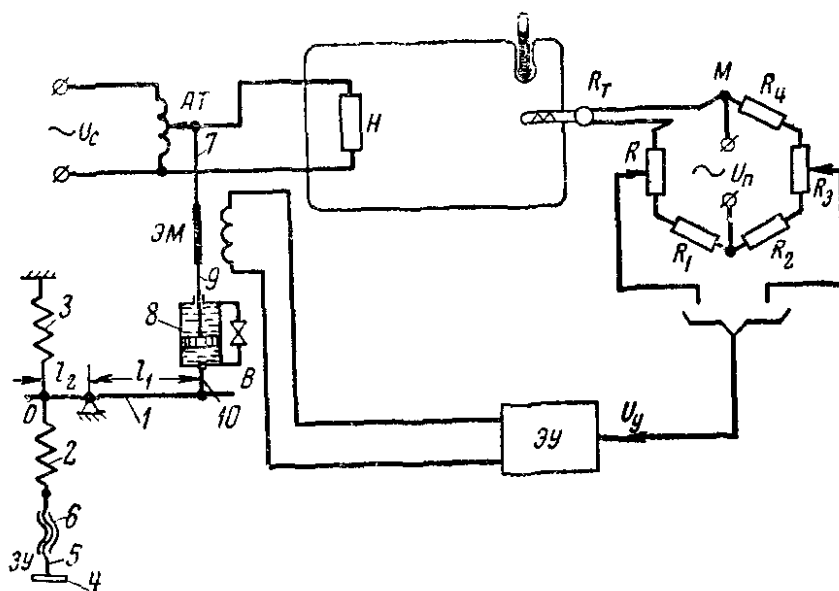


Рис 6-5 Система автоматического регулирования температуры сушильного шкафа с ПИ-регулятором.

Изодром состоит из цилиндра 8, заполненного маслом, поршня со штоком 9 и устройства, служащего для перепуска масла из одной полости цилиндра в другую через вентиль *B*.

При отклонении температуры от заданной электромагнит перемещает движок автотрансформатора на величину, при которой тяговое усилие электромагнита уравновешивается упругими силами деформированных пружин 2 и 3. Во время этого первоначального перемещения изодром не оказывает никакого влияния на систему, так как сопротивление вентиля *B* перетеканию масла из одной полости цилиндра в другую является весьма значительным и практически это перетекание отсутствует: цилиндр вместе с поршнем образуют как бы жесткую тягу, связывающую якорь электромагнита с коромыслом 1. Поэтому коромысло перемещается на столько же, на сколько перемещается якорь

электромагнита. Допустим, что это перемещение происходит вниз.

Условие равновесия коромысла 1, аналогичное уравнению (6-4), запишется для этого периода работы регулятора как

$$\Delta S_2 l_2 (C_2 + C_3) = K_{э. м} U_y l_1,$$

или, имея в виду, что $\Delta S_2 = \Delta S_1 \frac{l_2}{l_1}$,

$$\Delta S_1 \frac{l_2^2}{l_1} (C_2 + C_3) = K_{э. м} U_y l_1.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta S_1}{U_y} = \frac{K_{э. м} l_1^2}{(C_2 + C_3) l_2^2} = K_{ст.}$$

Произведя те же подстановки для перехода к относительным единицам, что и при выводе формулы (6-7), получим передаточную функцию статической части регулятора:

$$W_{ст}(p) = k_{ст}^*,$$

где $k_{ст}^* = K_{ст} \frac{U_{п}}{\Delta S_{макс}}$ — передаточный коэффициент статической части регулятора в относительных единицах.

После перемещения изодрома статической частью регулятора на цилиндр изодрома и тягу 10 действует результирующая внешняя сила от пружин 2 и 3, направленная вверх, а на поршень и шток 9 — равная внешняя сила якоря электромагнита, направленная вниз. Эти силы создают в нижней полости цилиндра повышенное давление, под действием которого масло постепенно будет перетекать через вентиль В из нижней полости цилиндра в верхнюю, а поршень будет постепенно перемещаться относительно неподвижного цилиндра вниз, т. е. в ту же сторону, что и от действия статической части регулятора; это перемещение поршня вызывает дополнительное перемещение движка автотрансформатора со скоростью, пропорциональной напряжению U_y . При заданном натяжении пружины 2 независимо от нагрузки и возмущающих воздействий, приложенных к системе, коромысло 1 и цилиндр 8 в установившемся состоянии занимают всегда вполне определенное положение. Поршень же 9, а следовательно, и движок автотрансфор-

матора будут занимать различные положения, обеспечивающие компенсацию возмущающих воздействий.

Таким образом, благодаря действию изодромного устройства система становится астатической, так как при заданном значении регулируемой величины поршень может занимать при установившемся состоянии системы различные положения относительно цилиндра, зависящие только от величины возмущающего воздействия, приложенного к системе.

Сила вязкого сопротивления, возникающая при перемещении поршня относительно цилиндра, пропорциональна скорости этого перемещения ($f_{\text{тр}} = b \frac{d\Delta S_{\text{п}}}{dt}$) и равна тяговому усилию электромагнита

$$b \frac{d\Delta S_{\text{п}}}{dt} = K_{\text{э. м}} U_{\text{у}},$$

где b — коэффициент вязкого сопротивления движению поршня.

Выполнив преобразование Лапласа и используя относительные единицы $s_{\text{п}}^*(p) = \frac{S_{\text{п}}(p)}{S_{\text{макс}}}$ и $u_{\text{у}}^*(p) = \frac{U_{\text{у}}(p)}{U_{\text{п}}}$, запишем:

$$\Delta S_{\text{макс}} p b s_{\text{п}}^*(p) = K_{\text{э. м}} U_{\text{п}} u_{\text{у}}^*(p).$$

Передаточная функция астатической части регулятора будет равна:

$$W_{\text{аст}}(p) = \frac{s_{\text{п}}^*(p)}{u_{\text{у}}^*(p)} = \frac{k_{\text{аст}}^*}{p},$$

где $k_{\text{аст}}^* = k_{\text{э. м}} \frac{U_{\text{п}}}{b \Delta S_{\text{макс}}}$ — коэффициент передачи астатической части регулятора в относительных единицах.

Так как регулятор составлен из усилителя и изодрома, соединенных последовательно, а изодром состоит из параллельно соединенных статической и астатической частей, то передаточная функция регулятора имеет вид:

$$W_{\text{р}}(p) = [W_{\text{ст}}(p) + W_{\text{аст}}(p)] W_{\text{у}}(p) = k_{\text{у}}^* \left(k_{\text{ст}}^* + \frac{k_{\text{аст}}^*}{p} \right). \quad (6-12)$$

Вынося за скобки $k_{\text{ст}}^*$, находим:

$$W_{\text{р}}(p) = k_{\text{р}}^* \left(1 + \frac{1}{T_{\text{и}} p} \right),$$

где $k_p^* = k_y^* k_{ст}^* = \frac{k_y^* K_{э.м} l_1^2 U_{п}}{(C_2 + C_3) l_2^2 \Delta S_{\max}}$ — коэффициент передачи регулятора;

$$T_{и} = \frac{k_{ст}^*}{k_{аст}^*} = \frac{bl_1^2}{(C_2 + C_3) l_2^2} \text{ — постоянная времени изодрома.}$$

Параметрами настройки регулятора являются его коэффициент передачи и постоянная времени изодрома.

Коэффициент передачи регулятора определяет степень воздействия его статической части на закон регулирования и настраивается путем изменения коэффициента усиления k_y^* усилителя ЭУ регулятора и соотношения плеч l_1 и l_2 коромысла l .

Так как согласно формуле (6-12) коэффициент k_y^* входит множителем и в статическую, и в астатическую составляющие закона регулирования, то при его изменении в целях воздействия на статическую часть регулятора изменяется также астатическая составляющая закона регулирования; поэтому при выбранном коэффициенте усиления регулятора оптимальная степень воздействия интеграла от отклонения на закон регулирования устанавливается путем изменения степени открытия вентиля B ; это определяет скорость перетекания масла изодрома из одной полости цилиндра в другую. Чем больше открыт вентиль, тем меньше коэффициент вязкого сопротивления b , тем меньше постоянная времени изодрома $T_{и}$ и тем больше скорость перемещения поршня, вызванного действием астатической части регулятора.

При полностью закрытом вентиле $b = \infty$, $T_{и} = \infty$ и перемещение поршня от действия астатической части равно нулю. В этом случае ПИ-регулятор превращается в П-регулятор. При $l_1 = 0$ коромысло и тяга l_0 не будут перемещаться от действия статической части регулятора и в этом случае ПИ-регулятор превратится в И-регулятор. Перемещение движка автотрансформатора будет определяться только работой астатической части регулятора.

Чем больше будет величина возмущающего воздействия на систему, тем быстрее нарастает отклонение регулируемой величины от заданного значения. Поэтому при большой скорости нарастания отклонения регулируемой величины вероятно, что возмущения, поступившие в систему, являются значительными и следует ожидать су-

ущественных отклонений регулируемой величины от заданного значения. Чтобы предупредить возникновение ожидаемых больших отклонений регулируемой величины, целесообразно ввести в закон регулирования дополнительное регулирующее воздействие на объект, зависящее от скорости нарастания отклонения регулируемой величины от заданной нормы. Обычно это добавочное регулирующее

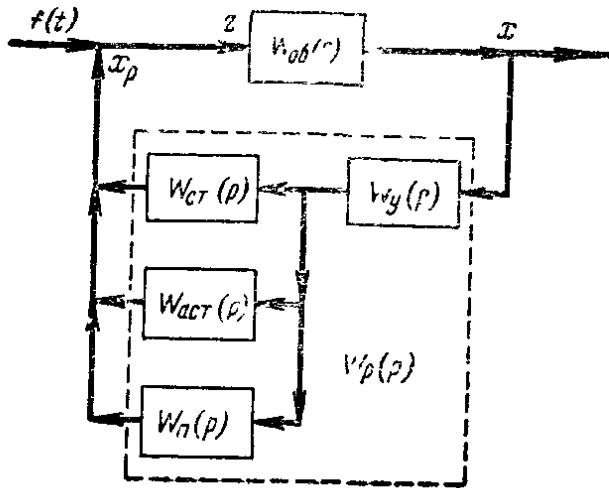


Рис. 6-6. Структурная схема с ПИД-регулятором.

воздействие $x_{p \text{ п}}$ пропорционально скорости изменения регулируемой величины x , т. е. пропорционально производной отклонения x по времени:

$$x_{p \text{ п}} = k_{\text{п}} \frac{dx(t)}{dt},$$

или

$$X_{p. \text{ п}}(p) = k_{\text{п}} p X(p).$$

Таким образом, передаточная функция этого дополнительного корректирующего звена регулятора теоретически должна иметь вид:

$$W_{\text{п}}(p) = k_{\text{п}} p,$$

т. е. корректирующее звено должно быть идеальным дифференцирующим звеном.

На рис. 6-6 представлена одна из возможных структурных схем системы автоматического регулирования, включающей корректирующее дифференцирующее звено с передаточной функцией $W_{\text{п}}(p)$.

Передаточная функция регулятора

$$W_{\text{р}}(p) = W_{\text{у}}(p) [W_{\text{ст}}(p) + W_{\text{аст}}(p) + W_{\text{п}}(p)].$$

Подставив значения передаточных функций отдельных звеньев, получим:

$$W_{\text{р}}(p) = k_{\text{у}}^* \left(k_{\text{ст}}^* + \frac{k_{\text{аст}}^*}{p} + k_{\text{п}}^* p \right).$$

Вынеся за скобки $k_{\text{ст}}^*$ и обозначив

$$k_{\text{у}}^* k_{\text{ст}}^* = k_{\text{р}}^*; \quad \frac{k_{\text{ст}}^*}{k_{\text{аст}}^*} = T_{\text{и}} \quad \text{и} \quad \frac{k_{\text{п}}^*}{k_{\text{ст}}^*} = T_{\text{пр}},$$

получим:

$$\begin{aligned}
 W_p(p) &= k_p^* \left(1 + T_{\text{пр}} p + \frac{1}{T_{\text{и}} p} \right) = \\
 &= k_p^* \frac{T_{\text{пр}} T_{\text{и}} p^2 + T_{\text{и}} p + 1}{T_{\text{и}} p}. \quad (6-13)
 \end{aligned}$$

Сопоставляя формулы (2-64) и (6-13) убеждаемся, что рассматриваемый регулятор относится к классу ПИД-регуляторов.

Для системы с ПИД-регулятором, приведенной на рис. 6-6, приняв передаточную функцию объекта в общем виде $W_{\text{об}}(p) = \frac{Q_{\text{об}}(p)}{P_{\text{об}}(p)}$, определим передаточную функцию по каналу возмущающего воздействия:

$$\Phi_f(p) = \frac{T_{\text{и}} p Q_{\text{об}}(p)}{k_p^* T_{\text{пр}} T_{\text{и}} p^2 Q_{\text{об}}(p) + T_{\text{и}} p [P_{\text{об}}(p) + k_p^* Q_{\text{об}}(p)] + k_p^* Q_{\text{об}}(p)}. \quad (6-14)$$

Подставив $p = 0$ в формулу (6-14), убеждаемся, что по окончании переходного процесса $\Phi_f(0) = 0$, т. е. система с ПИД-регулятором является астатической.

Соответствующими настройками ПИД-регулятора можно в качестве частных случаев получить П- и ПИ-законы регулирования.

Так, при постоянной времени предварения $T_{\text{пр}} = 0$ формула (6-14) превращается в формулу (6-11), и мы получаем ПИ-регулятор, а при $T_{\text{пр}} = 0$ и $T_{\text{и}} = \infty$ система с ПИД-регулятором становится системой с П-регулятором, т. е. формула (6-13) превращается в формулу (2-58).

Причины улучшения динамических свойств системы при введении в закон регулирования составляющей, пропорциональной производной от отклонения регулируемой величины, можно наглядно объяснить с помощью рис. 6-7. Допустим, что суммарный закон регулирования составляется из трех регулирующих воздействий: статического $x_{\text{р.ст}}$, пропорционального отклонению x регулируемой величины от заданного значения; астатического $x_{\text{р.аст}}$, пропорционального

интегралу $\int_0^t x(t) dt$, и корректирующего $x_{\text{р.п}}$, пропорционального производной dx/dt . Предположим, что в результате появления в системе значительного постоянного возму-

шающего воздействия f_0 начинает увеличиваться отклонение x . В начальный момент времени две из трех составляющих из закона регулирования $x_{p, аст}$ и $x_{p, ст}$ равны нулю, так как отклонение еще только начинает появляться и его значение пока мало отличается от нуля.

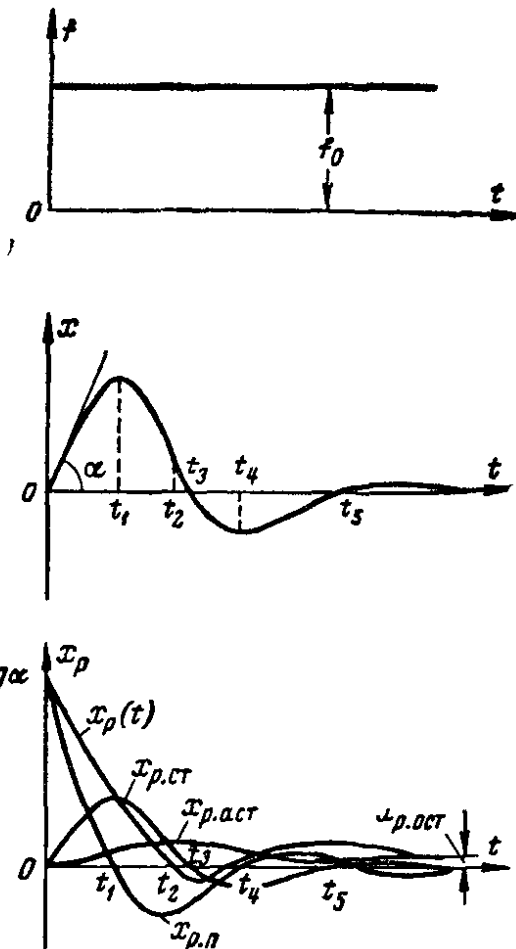


Рис. 6-7. Переходные процессы и их составляющие в системе с ПИД-регулятором.

но так как скорость нарастания отклонения в начальный момент времени, наоборот, максимальна и равна $\text{tg}\alpha$, то третья составляющая закона регулирования $x_{p, п}$ будет иметь максимальное значение, равное

$$x_{p, п} = k_{п} \text{tg}\alpha.$$

Благодаря этому регулятор при фактически еще отсутствующем отклонении начинает воздействовать на объект в сторону ликвидации формирующегося отклонения регулируемой величины в системе. Иными словами, регулирующее воздействие $x_{p, п}$ создается регулятором с опережением в предвидении только еще возникающих отклонений x .

Только после появления достаточно большого отклонения в законе регулирования появятся ощутимые составляющие регулирующего воздействия, сформированные статической и астатической частями регулятора.

По мере нарастания составляющих $x_{p, ст}$ и $x_{p, аст}$ составляющая, пропорциональная производной от отклонения, будет резко уменьшаться, поскольку суммарное регулирующее воздействие будет замедлять нарастание отклонения x . По истечении времени t_1 , когда отклонение регулируемой величины достигнет максимального значения, наибольшую величину будет иметь составляющая $x_{p, ст}$, составляющая $x_{p, аст}$ будет также существенной, а составляющая $x_{p, п}$ уменьшится до нуля.

Благодаря наличию большого регулирующего воздействия, пропорционального производной dx/dt , результирующее воздействие x_p регулятора именно в начале переходного процесса энергично подавляет эффект от возмущающего воздействия, поступившего в систему, что приводит к быстрому прекращению увеличения, а затем и к уменьшению отклонения регулируемой величины.

Как только отклонение регулируемой величины начнет уменьшаться, регулирующее воздействие, пропорциональное производной от отклонения, становится отрицательным, уменьшая регулирующее воздействие, создаваемое двумя другими составляющими регулятора; этим предупреждается появление в дальнейшем слишком больших отрицательных отклонений регулируемой величины, вызываемых в первую очередь действием интегральной составляющей, которая, непрерывно нарастая, может к этому времени создать слишком большое регулирующее воздействие $x_{p \text{ аст}}$. Следовательно, именно в тот момент t_3 , когда отклонение регулируемой величины x уменьшится до нуля и дальнейшее ее уменьшение не должно иметь места, интегральная составляющая регулятора будет оказывать максимальное воздействие $x_{p \text{ аст}}$ на объект в направлении дальнейшего уменьшения регулируемой величины x . Это воздействие может быть компенсировано только отрицательным воздействием $x_{p \text{ п}}$. Поэтому при настройке ПИД-регулятора воздействие, пропорциональное производной, необходимо отрегулировать таким образом, чтобы в момент времени t_3 оно полностью компенсировало регулирующее воздействие, созданное интегральной частью регулятора. Иными словами, в момент времени t_3 (имея в виду, что при этом $x = 0$ и, следовательно, $x_{p \text{ аст}} = 0$) суммарное регулирующее воздействие регулятора x_p должно стать равным нулю.

Однако в силу инерционности объектов достигнутое равновесное состояние системы не сохранится и за описанным этапом работы системы последует дальнейшее увеличение отклонения с обратным знаком, на которое регулятор будет реагировать так же, как это было описано (участок $t_3 - t_4 - t_5$ на рис. 6-7), но с меньшей величиной максимального отклонения. Возникающие колебания x относительно заданного значения постепенно затухают.

В случае большой инерционности объекта необходимо во избежание больших перерегулирований настраивать регулятор так, чтобы результирующее воздействие x_p регулятора стало равным нулю не тогда, когда регулирую-

емая величина будет равна заданной, т. е. не при $t = t_3$, а несколько раньше — при $t = t_2 < t_3$. Тогда при $t = t_3$ получим $|x_{p \text{ п}}| > |x_{p \text{ аст}}|$ и результирующее воздействие регулятора на объект будет в этот момент отрицательным; поэтому регулятор будет энергичнее предупреждать возможные существенные отклонения регулируемой величины в обратную сторону. При этом чем быстрее шло уменьшение регулируемой величины при подходе ее к заданному значению, тем больше будет отрицательная составляющая регулирующего воздействия, пропорциональная производной dx/dt , и тем в большей степени она будет препятствовать возникновению отрицательного перерегулирования, вызываемого действием астатической части регулятора.

Таким образом, при введении в закон регулирования составляющей, пропорциональной производной от отклонения регулируемой величины, регулирующее воздействие на объект создается с предварением, учитывающим предстоящие отклонения регулируемой величины от заданного значения и максимально компенсирующим их еще в процессе возникновения и первоначального развития.

При правильной настройке ПИД-регулятора переходные процессы в системе быстро затухают даже при больших возмущающих воздействиях и значительной инерционности объекта регулирования.

В системах с ПИД-регулятором по окончании переходного процесса, когда регулируемая величина возвращается к заданному значению, на выходе регулятора благодаря наличию в нем астатической части остается постоянное регулирующее воздействие, которое полностью компенсирует сохраняющееся постоянное внешнее возмущающее воздействие f_0 ; этим и обеспечивается астатизм системы.

Если объектом регулирования будет сушильный шкаф с передаточной функцией, выраженной формулой (2-76), то передаточная функция по каналу возмущающего воздействия для системы, изображенной на рис. 6-6, сообразно с формулой (6-14) примет вид:

$$\Phi_f(p) = \frac{k_{об}^* T_n p}{T_{ш} T_n T_n p^3 + (T_{ш} + T_n + k_p^* k_{об}^* T_{np}) \times \dots \times T_n p^2 + (1 + k_p^* k_{об}^*) T_n p + k_p^* k_{об}^*} \quad (6-15)$$

Характеристическое уравнение системы запишется как

$$T_{ш} T_{н} T_{и} p^3 + (T_{ш} + T_{н} + k_p^* k_{об}^* T_{пр}) T_{и} p^2 + (1 + k_p^* k_{об}^*) T_{и} p + k_p^* k_{об}^* = 0. \quad (6-16)$$

По коэффициентам характеристического уравнения найдем условие устойчивости системы, пользуясь алгоритмом Рауса — Гурвица [см. формулы (4-2)]:

$$(T_{ш} + T_{н} + k_p^* k_{об}^* T_{пр}) (1 + k_p^* k_{об}^*) \times \times T_{и} > T_{ш} T_{н} k_p^* k_{об}^*. \quad (6-17)$$

Из условия (6-17) найдем значения постоянной времени предварения

$$T_{пр} > \frac{T_{ш} T_{н}}{T_{и} (1 + k_p^* k_{об}^*)} - \frac{T_{ш} + T_{н}}{k_p^* k_{об}^*} \quad (6-18)$$

и постоянной времени издрома

$$T_{и} > \frac{T_{ш} T_{н} k_p^* k_{об}^*}{(T_{ш} + T_{н} + k_p^* k_{об}^* T_{пр}) (1 + k_p^* k_{об}^*)},$$

обеспечивающих устойчивость системы.

Из выражения (6-13), определяющего передаточную функцию ПИД-регулятора, видно, что чем больше будет постоянная времени предварения $T_{пр}$, тем большее влияние на закон регулирования оказывает составляющая, пропорциональная производной dx/dt , и, наоборот, чем меньше будет постоянная времени издрома $T_{и}$, тем больше сказывается на законе регулирования интегральная (аstaticкая) составляющая регулятора.

Имея в виду эти зависимости при рассмотрении условия (6-17), нетрудно прийти к выводу, что введение в закон регулирования составляющей, пропорциональной производной dx/dt , увеличивает устойчивость системы, так как при этом возрастает левая часть неравенства и притом в тем большей степени, чем больше постоянная времени $T_{пр}$. Устойчивость системы возрастает еще более резко при увеличении постоянной времени издрома $T_{и}$, т. е. при уменьшении влияния интегральной составляющей на суммарный закон регулирования.

Таким образом, основным назначением корректирующих устройств, создающих интегральную составляющую закона

регулирования, является ликвидация статической ошибки, а назначением корректирующих устройств, создающих составляющую закона регулирования, пропорциональную производной dx/dt , — улучшение динамических свойств системы, что повышает качество процесса регулирования. При этом следует иметь в виду, что регулирующее воздействие, пропорциональное производной, может применяться только в целях улучшения качества регулирования при наличии других составляющих в законе регулирования.

Если же применить для целей регулирования регулятор, закон регулирования которого включает только одну составляющую, пропорциональную производной, то он окажется совершенно неработоспособным.

Покажем это на примере регулирования температуры сушильного шкафа, передаточная функция которого определяется выражением (2-76).

Передаточная функция регулятора будет $W_p(p) = k_p^* p$.

Передаточная функция системы по каналу возмущающего воздействия будет равна:

$$\Phi_f(p) = \frac{k_{об}^*}{T_{ш} T_{н} p^2 + (T_{ш} + T_{н} + k_p^* k_{об}^*) p + 1}.$$

По окончании переходного процесса получим:

$$\Phi_f(0) = \frac{X(0)}{F(0)} = \frac{x}{f_0} = k_{об}^*,$$

откуда

$$x = k_{об}^* f_0.$$

Таким образом, при постоянном возмущающем воздействии f_0 отклонение регулируемой величины x в установившемся состоянии будет пропорционально этому возмущающему воздействию с коэффициентом пропорциональности, равным передаточному коэффициенту объекта. Такое установившееся отклонение регулируемой величины безусловно недопустимо.

С другой стороны, согласно формуле (2-55) передаточная функция системы по каналу регулирующего воздействия будет равна:

$$\Phi(p) = \frac{k_p^* k_{об}^* p}{T_{ш} T_{н} p^2 + (T_{ш} + T_{н} + k_p^* k_{об}^*) p + 1}.$$

При поступлении на вход регулятора постоянного задающего воздействия g_0 получим по окончании переходного процесса:

$$\Phi(0) = \frac{X(0)}{G(0)} = \frac{x}{g_0} = 0,$$

откуда $x = 0$.

Таким образом, система не воспринимает задающего воздействия, т. е. оказывается неуправляемой системой. В связи с этим регуляторы с законом регулирования, зависящим только от производной dx/dt , на практике и не применяются как самостоятельные. Выпускаемые отечественной промышленностью устройства, в которых выходная величина зависит только от производной входной величины (блоки предварения системы АУС, Старт, УСЭПА, электронный дифференциатор ВТИ и др.), можно применять только в качестве корректирующих устройств в дополнение к другим регуляторам для улучшения динамических свойств систем автоматического регулирования.

Так как наличие интегральной составляющей в законе регулирования уменьшает устойчивость системы, то И-регуляторы могут применяться только в сочетании со статическими объектами. В качестве регуляторов для астатических объектов они непригодны, так как астатические объекты сами по себе неустойчивы.

Предположим, например, что астатический объект характеризуется передаточной функцией $W_{об}(p) = k_{об}/p$. В случае использования в системе И-регулятора с передаточной функцией k_p/p передаточная функция системы по каналу регулирующего воздействия равна:

$$\Phi(p) = \frac{\frac{k_{об}}{p} \frac{k_p}{p}}{1 + \frac{k_{об}}{p} \frac{k_p}{p}} = \frac{k}{p^2 + k},$$

где $k = k_p k_{об}$ — коэффициент передачи системы.

Характеристическое уравнение системы запишется как

$$p^2 + k = 0, \quad \text{или} \quad \frac{1}{k} p^2 + 1 = 0.$$

Определив по формуле (2-39) корни этого уравнения при $T_1 = 0$ и $T_2 = \frac{1}{\sqrt{k}}$, убедимся, что корни характери-

стического уравнения чисто мнимые: $p_1 = -j\sqrt{k}$ и $p_2 = j\sqrt{k}$; поэтому переходный процесс в системе согласно формуле (2-48) определяется выражением

$$x = g_0 (1 - \cos \sqrt{k}t).$$

Таким образом, в рассматриваемой системе при поступлении на вход регулятора постоянного задающего воздействия g_0 на выходе возникают незатухающие гармонические колебания (см. рис. 2-14, б) около заданного значения регулируемой величины $g_0 = x_{o. \text{вых}}$ с амплитудой $g_0 = x_{o. \text{вых}}$ и периодом $T = 2\pi/\sqrt{k}$, что и делает эту систему практически непригодной.

В качестве средства улучшения качества процесса регулирования широкое применение находят отрицательные обратные связи.

В качестве звеньев, осуществляющих отрицательные обратные связи, наиболее часто применяют усилительные и инерционные звенья первого порядка, идеальные и реальные дифференцирующие звенья.

Отрицательная обратная связь в виде усилительного звена, или инерционного звена первого порядка, или, вообще говоря, в виде любого статического звена оказывает влияние на систему как во время переходного процесса, так и в установившемся состоянии. Такие связи называются *жесткими отрицательными обратными связями*.

Отрицательная обратная связь в виде идеального или реального дифференцирующего звена или в общем случае в виде любого астатического звена оказывает воздействие на систему только во время переходного процесса; обратные связи этого типа называются *гибкими отрицательными обратными связями*.

С помощью обратных связей можно изменять динамические свойства и отдельных элементов, и системы автоматического регулирования в целом, обеспечивая тем самым разнообразные требуемые показатели качества регулирования. Так, в § 2-4 уже было показано, что при охвате интегрирующего звена жесткой отрицательной обратной связью в виде усилительного звена мы получаем инерционное звено первого порядка, а при охвате такой же обратной связью инерционного звена первого порядка — тоже инерционное звено первого порядка, но с меньшей постоянной времени.

В общем случае при охвате любого звена с передаточной функцией $W_1(p)$ жесткой отрицательной обратной связью в виде усилительного звена с передаточной функцией $W_{oc}(p) = k_{oc}$ согласно формуле (2-51) получим звено с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + k_{oc} W_1(p)} = \frac{1}{\frac{1}{W_1(p)} + k_{oc}}. \quad (6-19)$$

При достаточно большом коэффициенте k_{oc} , т.е. когда $k_{oc} \gg 1/W_1(p)$, имеем:

$$W(p) \approx \frac{1}{k_{oc}}. \quad (6-20)$$

Таким образом, получаем весьма важный для практики вывод, что путем охвата жесткой отрицательной обратной связью в виде усилительного звена с большим коэффициентом усиления можно любое звено превратить в безынерционное усилительное.

Рассмотрим замкнутую систему, которая в разомкнутом состоянии состоит из П-регулятора и трех инерционных звеньев первого порядка, соединенных последовательно.

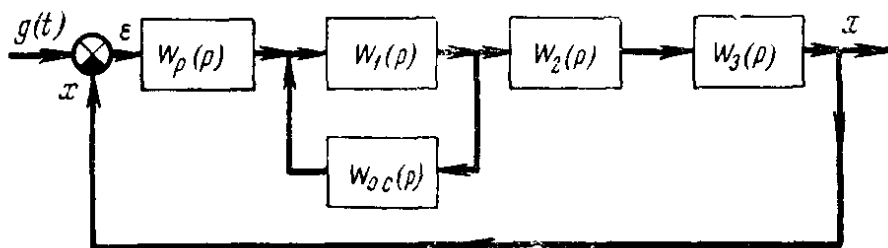


Рис 6-8 Обратные связи в системе автоматического регулирования.

В этой системе охватим дополнительной жесткой обратной связью в виде усилительного звена одно из инерционных звеньев первого порядка. Структурная схема такой системы показана на рис. 6-8.

Передаточные функции элементов системы будут равны:

$$W_p(p) = k_p \text{ — передаточная функция П-регулятора;}$$

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1} \text{ — передаточная функция инерционного звена, охваченного дополнительной обратной связью;}$$

$$W_{oc}(p) = k_{oc} \text{ — передаточная функция дополнительной обратной связи;}$$

$W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}$ и $W_3(p) = \frac{k_3}{T_3 p + 1}$ — передаточные функции инерционных звеньев первого порядка, не охваченных обратной связью.

Согласно формуле (2-52) передаточная функция встречно-параллельно включенных звеньев с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_{o.c}(p)$ будет равна:

$$W_4(p) = \frac{\frac{k_1}{T_1 p + 1}}{1 + \frac{k_1}{T_1 p + 1} k_{o.c}} = \frac{k_1}{T_1 p + k_1 k_{o.c} + 1}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы запишется как

$$W(p) = W_p(p) W_4(p) W_2(p) W_3(p) = \\ = \frac{k_p k_1 k_2 k_3}{(T_1 p + k_1 k_{o.c} + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы согласно формуле (2-54) будет равна:

$$\Phi(p) = \frac{k_p k_1 k_2 k_3}{(T_1 p + k_1 k_{o.c} + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + k_p k_1 k_2 k_3}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$(T_1 p + k_1 k_{o.c} + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + k_p k_1 k_2 k_3 = 0,$$

или иначе:

$$T_1 T_2 T_3 p^3 + [T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 (1 + k_1 k_{o.c})] p^2 + \\ + [T_1 + (T_2 + T_3)(1 + k_1 k_{o.c})] p + k_p k_1 k_2 k_3 + \\ + k_1 k_{o.c} + 1 = 0.$$

Согласно формулам (4-2) условие устойчивости системы запишется так:

$$[T_1 T_3 + T_1 T_2 + T_2 T_3 (1 + k_1 k_{o.c})][T_1 + (T_2 + T_3) \times \\ \times (1 + k_1 k_{o.c})] > T_1 T_2 T_3 (k_p k_1 k_2 k_3 + k_1 k_{o.c} + 1).$$

Деля обе части неравенства на $T_1 T_2 T_3 (1 + k_1 k_{o.c.})$ и имея в виду, что коэффициент передачи системы в разомкнутом состоянии равен:

$$k = W(0) = \frac{k_p k_1 k_2 k_3}{1 + k_1 k_{o.c.}},$$

получим для условия устойчивости системы следующее выражение:

$$k < \left(\frac{1 + k_1 k_{o.c.}}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) \left[\frac{T_1}{1 + k_1 k_{o.c.}} + T_2 + T_3 \right] - 1. \quad (6-21)$$

Правая часть неравенства при прочих равных условиях будет тем больше, чем больше постоянная величина T_1 . При $T_1 \rightarrow \infty$ правая часть неравенства тоже стремится к бесконечности и система всегда будет устойчива. Условие устойчивости всегда удовлетворяется и при достаточно большом коэффициенте усиления k_1 .

Если сравнить условия устойчивости двух систем: одной, состоящей из трех последовательно соединенных инерционных звеньев первого порядка, из которых одно охвачено жесткой отрицательной обратной связью [формула (6-21)], и второй, составленной из таких же трех звеньев, но без обратной связи [см. формулу (4-54)], то очевидно, что при охвате обратной связью звена, имеющего или достаточно большой коэффициент передачи k_1 , или достаточно большую постоянную времени T_1 , увеличивается коэффициент передачи системы в целом и тем самым представляется возможность уменьшить статическую ошибку регулирования без ухудшения условий устойчивости системы.

Из этого же вывода вытекает, что при наличии в системе нескольких последовательно соединенных инерционных звеньев первого порядка для повышения устойчивости системы необходимо охватить жесткой отрицательной обратной связью в виде усилительного звена звено или с большой постоянной времени, или с большим коэффициентом усиления.

При охвате усилительного звена с передаточной функцией $W_y(p) = k$ жесткой обратной связью в виде инерционного звена первого порядка, передаточная функция которого равна $W_{o.c.}(p) = \frac{k_{o.c.}}{T_{o.c.}p + 1}$, получим:

$$W(p) = \frac{k}{1 + \frac{kk_{o.c}}{T_{o.c}p + 1}} = \frac{k(T_{o.c}p + 1)}{(1 + kk_{o.c}) \left(\frac{T_{o.c}p}{1 + kk_{o.c}} + 1 \right)}.$$

При большом значении произведения коэффициентов передачи $kk_{o.c}$, т. е. если $kk_{o.c} \gg 1$, можно принять, что $\frac{T_{o.c}p}{1 + kk_{o.c}} \approx 0$; тогда получим:

$$W(p) = \frac{1}{k_{o.c}} (T_{o.c}p + 1). \quad (6-22)$$

Таким образом, при охвате усилительного звена жесткой отрицательной обратной связью в виде инерционного звена первого порядка, если произведение коэффициентов передачи прямого звена и звена обратной связи будет достаточно велико, в закон регулирования, помимо статической составляющей, войдет дополнительная составляющая, пропорциональная производной. Это важное свойство находит широкое применение в целях улучшения динамических свойств регулирующих систем, о чем более подробно будет сказано в § 6-4.

При охвате колебательного звена с передаточной функцией $W_k(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$ гибкой обратной связью с передаточной функцией $W_{o.c}(p) = k_{o.c} p$ получим:

$$W_p(p) = \frac{\frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}}{1 + \frac{kk_{o.c} p}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}} = \frac{k}{T_2^2 p^2 + (T_1 + kk_{o.c}) p + 1}. \quad (6-23)$$

Характеристическое уравнение системы:

$$T_2^2 p^2 + (T_1 + kk_{o.c}) p + 1 = 0.$$

Для этого же звена без обратной связи характеристическое уравнение запишется как

$$T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0.$$

Следовательно, при введении обратной связи постоянная времени T_1 возрастает на величину $kk_{o.c}$. Как было показано при анализе уравнений (2-45)—(2-48), увеличе-

ние постоянной времени T_1 уменьшает колебательность инерционного звена второго порядка (*демпфирование звена*).

Таким образом, при охвате колебательного звена гибкой обратной связью в виде идеального дифференцирующего звена с передаточной функцией $W_{o.c}(p) = k_{o.c}p$ уменьшается его колебательность в связи с тем, что возрастает постоянная времени демпфирования звена T_1 .

Путем увеличения коэффициента передачи $k_{o.c}$ колебательное звено можно превратить в неколебательное, инерционное звено второго порядка (при $\frac{T_1 + k k_{o.c}}{T_2} \geq 2$).

В любом случае, если какому угодно звену с передаточной функцией $W_{зв}(p)$ требуется придать динамические свойства, определяемые передаточной функцией $W(p)$, то согласно формуле (2-52) этого можно достигнуть, охватив исходное звено обратной связью с передаточной функцией, равной:

$$W_{o.c}(p) = \frac{W_{зв}(p) - W(p)}{W_{зв}(p)W(p)}. \quad (6-24)$$

Если коэффициент передачи $k_{зв}$ звена, охваченного обратной связью, намного больше коэффициента передачи k , входящего в передаточную функцию $W(p)$, которую необходимо получить путем введения упомянутой обратной связи, т. е. если $k_{зв} \gg k$, то выражение (6-24) можно записать в виде:

$$W_{o.c}(p) = \frac{W_{зв}(p) - 0}{W_{зв}(p)W(p)} \approx \frac{1}{W(p)}, \quad (6-25)$$

откуда

$$W(p) \approx \frac{1}{W_{o.c}(p)}. \quad (6-26)$$

Следовательно, при достаточно большом коэффициенте передачи звена, группы звеньев или системы в целом, охваченных обратной связью, динамические свойства соединения определяются только динамическими свойствами цепи обратной связи, которая в этом случае называется *глубокой обратной связью*.

Соединения или системы с глубокой обратной связью называются *предельными*.

6-3. КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА ПО ВОЗМУЩЕНИЮ

Выше мы рассматривали пути и средства улучшения качества регулирования, использующие информацию об отклонении или скорости отклонения регулируемой величины от заданного значения. В устройствах такого рода регулирующее воздействие на систему оказывается только тогда, когда возмущающее воздействие уже прошло от точки его приложения через все звенья системы и регулируемая величина начала отклоняться от заданного значения. До этого момента никаких активных воздействий на систему со стороны регулятора, направленных на компенсацию возмущающих воздействий, не возникает, хотя в промежуточных звеньях системы к этому времени уже появятся иногда довольно значительные отклонения параметров от значений, соответствующих нормальному режиму; эти отклонения впоследствии неизбежно приведут к изменениям регулируемой величины.

Для ускорения реакции автоматизированной регулирующей системы на возмущающее воздействие часто применяют на промежуточных участках системы дополнительные регулирующие устройства, включая их в качестве местных отрицательных обратных связей, охватывающих промежуточные участки; это позволяет значительно улучшить динамические свойства системы.

Если заранее известны наиболее характерные для данной системы возмущающие воздействия, возникающие при ее работе, то наиболее эффективного результата при ликвидации отрицательного влияния этих возмущений на работу системы можно добиться с помощью регулирования по возмущению, при котором в отличие от разобранных ранее систем регулирования по отклонению регулируемой величины основным источником информации для выработки регулирующего воздействия служит возмущающее воздействие, а не вызванные им отклонения регулируемой величины от заданного значения.

Предположим, что в процессе регулирования температуры сушильного шкафа наиболее часто в систему поступают возмущающие воздействия в форме изменения напряжения U_c в сети питания автотрансформатора (см. рис. 6-1).

Если напряжение сети U_c подать параллельно автотрансформатору на дополнительный электромагнит ЭМ_в, сердечник которого будет оказывать дополнительное воз-

действие на коромысло 1 , то получим комбинированную систему регулирования, показанную на рис. 6-9, которая в дополнение к уже описанному ранее регулирующему воздействию по отклонению регулируемой величины вырабатывает дополнительное регулирующее воздействие, зависящее непосредственно от возмущения. В этой системе при падении или повышении напряжения в сети уменьшится или увеличится тяговое усилие электромагнита ЭМ_8 и коромысло 1 сразу же передвинет движок автотрансфор-

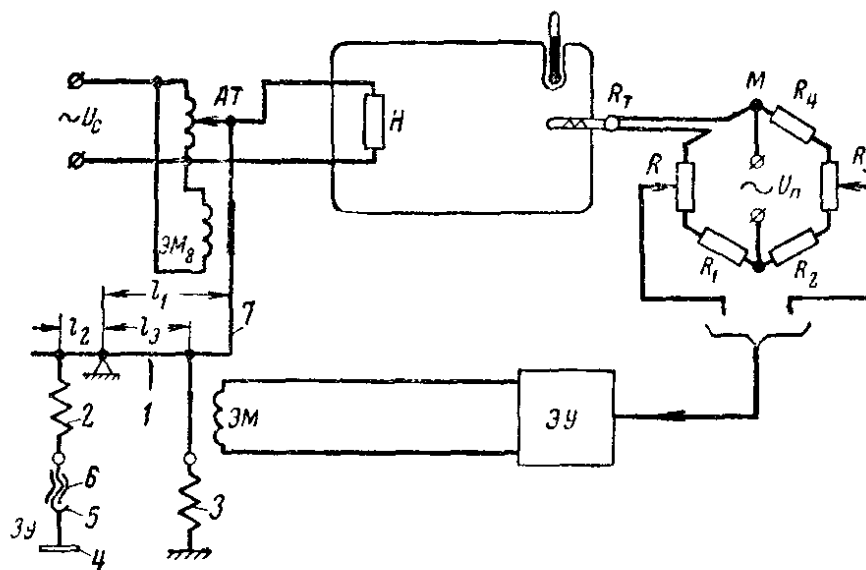


Рис. 6-9. Система автоматического регулирования температуры сушильного шкафа с корректирующим устройством по возмущению.

матора, восстанавливая заданное постоянное напряжение U_c , подводимое к нагревательному элементу еще до того, как изменение напряжения скажется на температуре шкафа.

Таким образом, заранее предвидимое возмущающее воздействие будет ликвидировано сразу же после своего возникновения, т. е. до того момента, когда появятся отклонения регулируемой величины, вызванные этим возмущением; при правильной настройке коэффициента усиления регулятора относительно этого возмущения оно практически не будет оказывать влияния на работу регулирующей системы.

В рассмотренной схеме все другие виды возмущающих воздействий, которые могут возникнуть в системе, будут ликвидироваться по отклонениям регулируемой величины. Такие комбинированные системы находят на практике большое применение. Структурная схема системы, изображен-

ной на рис. 6-9, представлена на рис. 6-10: возмущающее воздействие $f(t)$, проходя через звено с передаточной функцией $W_b(p)$, вырабатывает корректирующее воздействие, которое поступает на вход объекта параллельно регулируемому воздействию x_p и возмущающему воздействию $f(t)$, компенсируя последнее еще до того, как оно, пройдя в объект, вызовет изменение регулируемой величины x .

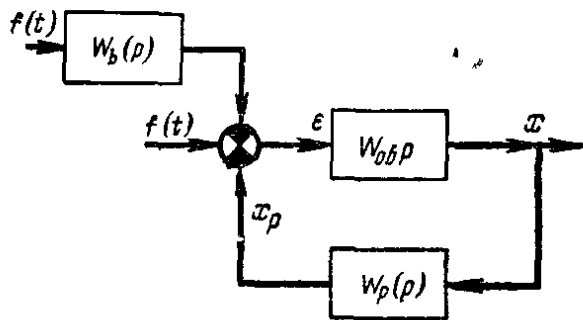


Рис. 6-10. Структурная схема системы с корректирующим воздействием по возмущению.

Передаточная функция системы по каналу возмущающего воздействия определится выражением

$$\Phi_f(p) = [1 + W_b(p)] \times \frac{W_{об}(p)}{1 + W_p(p) W_{об}(p)}.$$

Так как звено, вырабатывающее регулирующее воздействие по возмущению, является уси-

тельным, то его передаточная функция равна $W_b(p) = k_b^*$; подставив значения передаточных функций регулятора и объекта из формул (6-8) и (2-76), найдем аналогично формуле (6-9):

$$\Phi_f(p) = \frac{k_{об}^* (1 + k_b^*)}{T_{ш} T_{п} p^2 + (T_{ш} + T_{п}) p + 1 + k_p^* k_{об}^*}. \quad (6-27)$$

Сравнивая передаточную функцию (6-27) системы по рис. 6-9 с передаточной функцией (6-9) системы, изображенной на рис. 6-1, видим, что при введении в систему дополнительного регулирующего воздействия по возмущению характеристическое уравнение системы не изменяется. А так как переходные процессы в системе определяются ее характеристическим уравнением, то введение в закон регулирования составляющей по возмущению не оказывает никакого влияния на переходные процессы.

Передаточная функция (6-27) для установившегося состояния системы (т. е. при $p = 0$) равна:

$$\Phi_f(0) = \frac{k_{об}^* (1 + k_b^*)}{1 + k_p^* k_{об}^*}.$$

Если взять $k_b^* = -1$, то получим:

$$\Phi_f(0) = 0.$$

Физический смысл выбора величины передаточной функции $W_{\text{в}}(p) = k_{\text{в}}^* = -1$ состоит в том, что в этом случае возмущающее воздействие $f(t)$, пройдя через корректирующее звено по возмущению, только меняет знак, но не величину; в связи с этим на два входа суммирующего устройства подаются сигналы $+f(t)$ и $-f(t)$, сумма которых всегда будет равна нулю: $f(t) - f(t) = 0$. Следовательно, в данной схеме возмущающее воздействие $f(t)$ вообще не попадает в объект и не создает никакой ошибки в процессе регулирования.

Таким образом, зная заранее характер возмущающих воздействий, могущих возникнуть в регулирующей системе, можно надлежащим выбором передаточной функции корректирующего устройства по возмущению полностью ликвидировать статическую ошибку системы, вызываемую этими возмущающими воздействиями, без ухудшения динамических свойств системы автоматического регулирования. Это свойство, присущее устройствам, создающим в системе регулирующее воздействие по возмущению, имеет исключительно важное значение, так как ликвидация статической ошибки другими способами обычно связана в той или иной степени с ухудшением устойчивости системы.

Если на систему действуют два или более характерных возмущающих воздействия, то в систему может быть введено несколько корректирующих устройств.

6-4. ОСНОВНЫЕ СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ПРОМЫШЛЕННЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

В § 2-6 приведены динамические характеристики четырех типов идеальных регуляторов, которые желательно применять в системах автоматического регулирования. При конструировании реальных регуляторов необходимо стремиться к тому, чтобы по своим динамическим свойствам они возможно больше приближались к одному из пяти идеальных типов регуляторов, осуществляющих пропорциональный, интегральный, пропорционально-интегральный, пропорционально-дифференциальный или пропорционально-интегрально-дифференциальный закон регулирования.

Однако создание регуляторов, близких к идеальным их типам, практически далеко не всегда возможно по техническим причинам, конструктивным соображениям или вследствие экономической нецелесообразности. В связи с этим промышленные регуляторы имеют весьма различные

структурные схемы, а осуществляемые ими законы регулирования в большей или меньшей степени содержат в себе нежелательные составляющие, которые отрицательно влияют на качество регулирования и устойчивость системы в целом, внося в идеальные процессы регулирования разнообразные погрешности. Для оценки возможностей и областей применения того или иного регулятора и правильной его настройки необходимо в каждом конкретном случае учитывать эти погрешности.

В настоящем параграфе будут рассмотрены структурные схемы некоторых промышленных автоматических регуляторов, процессы их работы и дан анализ их важнейших погрешностей.

1. П-регуляторы

Осуществление пропорционального закона регулирования при исполнительном механизме, который в динамическом отношении с достаточной для практики точностью можно представить в виде усилительного звена, особых трудностей не составляет (см. рис. 6-1).

Однако в ряде случаев из конструктивных соображений в качестве исполнительного механизма, служащего для перемещения регулирующего органа объекта, целесообразно использовать электродвигатель или гидравлический сервомотор, которые в динамическом отношении представляются интегрирующими звеньями с передаточной функцией вида $W_{и.м}(p) = \frac{1}{T_{и.м} p}$. Чтобы в этих случаях получить пропорциональный закон регулирования, часть структурной схемы регулятора, содержащую исполнительный механизм, охватывают глубокой жесткой отрицательной обратной связью, имеющей вид усилительного звена (см. рис. 1-8). Структурная схема такого П-регулятора в общем виде представлена на рис. 6-11, а. Обратной связью упомянутого вида в этой схеме охвачены два последовательных звена: усилительное с передаточной функцией $W_2(p) = k_2$ и интегрирующее (исполнительный механизм).

Передаточная функция регулятора равна:

$$W_p(p) = \frac{\frac{k_1 k_2}{T_{и.м} p}}{1 + \frac{k_2 k_{о.с}}{T_{и.м} p}} = \frac{k_1}{k_{о.с}} \left(\frac{1}{\frac{T_{и.м} p}{k_2 k_{о.с}} + 1} \right). \quad (6-28)$$

Следовательно, реальный регулятор со структурной схемой по рис. 6-11, а можно представить в виде идеального П-регулятора с передаточной функцией

$$W_{\Pi}(p) = k_p = \frac{k_1}{k_{0.c}} \quad (6-29)$$

и некоторого балластного звена с передаточной функцией

$$W_{\delta}(p) = \frac{1}{T_{\delta}p + 1}, \quad (6-30)$$

соединенных последовательно:

$$W_p(p) = W_{\Pi}(p) W_{\delta}(p). \quad (6-31)$$

Балластное звено является инерционным звеном первого порядка с постоянной времени

$$T_{\delta} = \frac{T_{и.м}}{k_2 k_{0.c}}. \quad (6-32)$$

Чем больше постоянная времени балластного звена, тем больше погрешность, вносимая им в идеальный закон пропорционального регулирования (рис. 6-11, б).

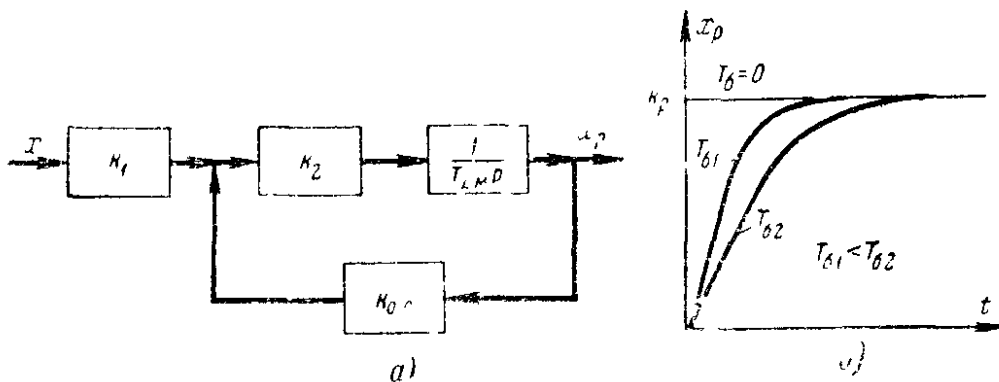


Рис. 6-11. Структурная схема и переходные процессы П-регулятора с интегрирующим исполнительным механизмом.

При $k_2 k_{0.c} \rightarrow \infty$ и конечном значении постоянной времени $T_{и.м}$ имеем $T_{\delta} \rightarrow 0$ и $W_{\delta}(p) \rightarrow 1$. В этом случае получаем предельную систему, практически не отличающуюся от идеального П-регулятора.

Таким образом, для уменьшения погрешностей, искажающих идеальный закон регулирования, в структурной схеме по рис. 6-11 необходимо применять глубокую обратную связь с большим коэффициентом передачи $k_{0.c}$.

Из частотных характеристик инерционного звена первого порядка (см. рис. 3-8) следует, что изменение выходной величины балластного звена стремится к нулю с увеличением частоты изменений входной величины, т. е. с возрастанием ω , закон регулирования будет все больше отклоняться от чисто пропорционального. При $\omega \rightarrow \infty$ балластное звено (при $T_6 \neq 0$) полностью прекращает выработку выходной величины, которая при любых изменениях входной величины остается равной нулю. Физически это объясняется, тем, что изменение выходной величины исполнительного механизма, например перемещение поршня сервомотора, постепенно; при быстром колебании входной величины исполнительный механизм не успевает сколь-либо существенно изменить выходную величину и привести ее в полное соответствие с входной; интенсивность проявления этого явления зависит от постоянной времени $T_{и м}$, так как скорость перемещения исполнительного органа обратно пропорциональна этой постоянной времени. Величина $T_{и м}$ не может быть уменьшена до нуля (для гидравлического сервомотора постоянная времени равна времени перемещения поршня из одного крайнего положения в другое), и поэтому при некотором значении ω описанные искажения неизбежно становятся ощутимыми.

Если в регуляторе нельзя обеспечить достаточно малую величину постоянной времени балластного звена, то регулятор со структурной схемой по рис. 6-11 следует рекомендовать только для применения в системах автоматического регулирования с относительно редкими и постоянными по величине возмущающими воздействиями.

Из формулы (6-32) следует также, что для уменьшения T_6 в схемах, схожих с изображенной на рис. 6-11, необходимо применять исполнительные механизмы с малыми значениями постоянной времени $T_{и м}$.

2. И-регулятор

Интегральный закон регулирования, близкий к идеальному, наиболее просто можно получить, применяя в регулирующих системах исполнительные механизмы, которые в динамическом отношении представляют собой интегрирующие звенья, но с условием, что остальные звенья регулятора являются усилительными и исполнительный механизм не охватывается обратными связями (см., например, рис. 1-5).

Если же регулятор имеет, помимо усилительных, также звенья других видов, то они должны быть охвачены глубокими отрицательными обратными связями, имеющими вид усилительного звена, с таким расчетом, чтобы полученные встречно-параллельные соединения можно было рассматривать как усилительные звенья.

Рассмотрим структурную схему реального И-регулятора, представленную на рис. 6-12, а. В этой схеме усилительное и интегрирующее звенья охвачены обратной связью в виде усилительного звена.

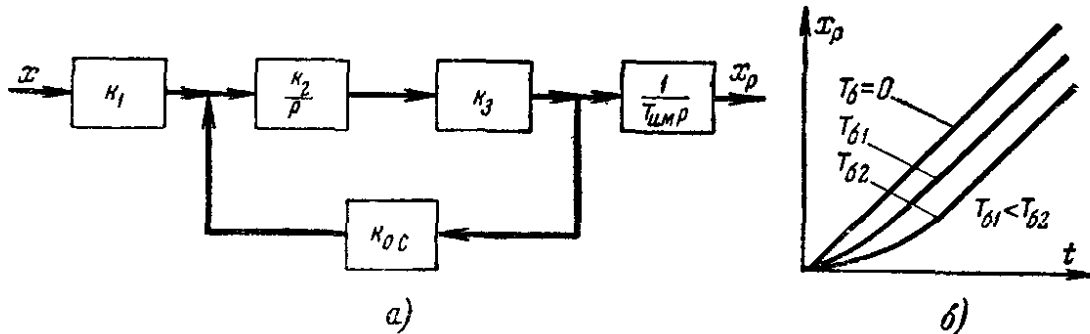


Рис. 6-12. Структурная схема и переходные процессы И-регулятора с интегрирующим исполнительным механизмом и промежуточным интегрирующим звеном.

Передаточная функция регулятора

$$W_p(p) = \frac{\frac{k_2 k_3}{p}}{1 + \frac{k_2 k_3 k_{oc}}{p}} \cdot \frac{k_1}{T_{им} p} = \frac{k_1}{k_{oc} T_{им} p} \times \frac{1}{\frac{p}{k_2 k_3 k_{oc}} + 1}.$$

Обозначив

$$T_{и} = \frac{k_{oc}}{k_1} T_{им} \text{ и } T_{б} = \frac{1}{k_2 k_3 k_{oc}}, \quad (6-33)$$

видим, что реальный регулятор можно представить в виде идеального И-регулятора с передаточной функцией

$$W_{и}(p) = \frac{1}{T_{и} p}$$

и балластного инерционного звена первого порядка с передаточной функцией (6-30), соединенных последовательно:

$$W_p(p) = W_{и}(p) W_{б}(p). \quad (6-34)$$

Из формул (6-33) видно, что чем больше коэффициент передачи звена обратной связи и коэффициенты передачи звеньев, охваченных этой обратной связью, тем меньше постоянная времени T_6 [формула (6-33)] балластного звена и, следовательно, тем меньше погрешность в законе регулирования (рис. 6-12, б). Поэтому необходимо стремиться охватить глубокой обратной связью не только звено, не являющееся усилительным, но вместе с тем также ряд последовательно с ним соединенных усилительных звеньев с большими коэффициентами передачи.

3. ПИ-регуляторы

Закон регулирования, достаточно близкий к пропорционально-интегральному, можно получить, например, при структурной схеме регулятора, представленной на рис. 6-4,

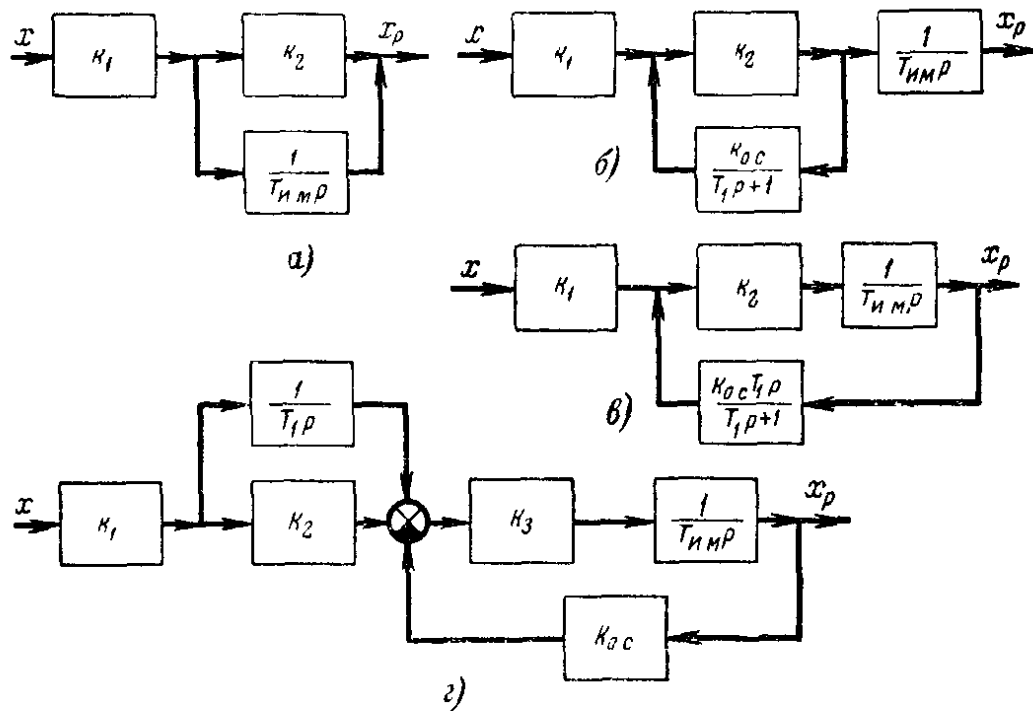


Рис 6-13. Структурные схемы ПИ-регуляторов с интегрирующими исполнительными механизмами

т. е. путем подключения изодромного устройства параллельно статической части регулятора, имеющей пропорциональный закон регулирования, близкий к идеальному.

Аналогичную структурную схему имеет регулятор, представленный на рис. 6-13, а, но здесь вместо изодромного устройства применен электродвигатель или гидравлический сервомотор. В этом случае при отклонении регулируемой

величины от заданного значения электромагнит мгновенно переместит движок автотрансформатора на величину, пропорциональную отклонению регулируемой величины, а затем постепенно электродвигатель или сервомотор будет перемещать движок автотрансформатора в ту же сторону, вводя тем самым интеграл от отклонения в закон регулирования.

Передаточная функция регулятора со структурной схемой по рис. 6-13, *а*

$$W_p(p) = k_1 \left(k_2 + \frac{1}{T_{и м} p} \right) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_{и} p} \right), \quad (6-35)$$

где

$$k_p = k_1 k_2 \quad \text{и} \quad T_{и} = k_2 T_{и м}.$$

Следовательно, регулятор имеет закон регулирования идеального ПИ-регулятора.

Однако практически конструктивное сочленение регулирующего органа объекта с пропорциональным исполнительным механизмом не всегда возможно.

Аналогичным путем нетрудно установить, что регулятор со структурной схемой по рис. 6-13, *б* имеет передаточную функцию

$$W(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_{и} p} \right) \frac{1}{T_{б} p + 1} = W_{ПИ}(p) W_{б}(p), \quad (6-36)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_p &= \frac{k_1 k_2 T_1}{T_{и м} (1 + k_2 k_{о с})}; \quad T_{и} = T_1 \\ \text{и} \quad T_{б} &= \frac{T_1}{1 + k_2 k_{о с}}. \end{aligned} \right\} \quad (6-37)$$

Таким образом, регулятор может быть представлен как идеальный ПИ-регулятор, последовательно соединенный с балластным инерционным звеном первого порядка, постоянная времени которого равна $T_{б}$.

Передаточная функция регуляторов со структурными схемами по рис. 6-13, *в* и *г* также может быть представлена выражением (6-36). Коэффициент передачи и постоянные

времени для регулятора со структурной схемой (рис. 6-13, в) определяются выражениями:

$$k_p = \frac{k_1 k_2 T_1}{T_{и м} + k_2 k_{о с} T_1}; T_n = T_1 \text{ и } T_б = \frac{T_1 T_{и м}}{T_{и м} + k_2 k_{о с} T_1}. \quad (6-38)$$

Соответственно для регулятора со структурной схемой по рис. 6-13, г имеем:

$$k_p = \frac{k_1 k_2}{k_{о с}}; T_n = T_1 k_2 \text{ и } T_б = \frac{T_{и м}}{k_3 k_{о с}}. \quad (6-39)$$

Формулы (6-37) и (6-38) показывают, что структурные схемы на рис. 6-13, б и в в динамическом отношении примерно равноценны. Однако при прочих равных условиях следует отдать предпочтение схеме по рис. 6-13, б, так как в этом случае сокращается общая протяженность кабельных трасс в связи с тем, что исполнительный механизм не охватывается обратной связью.

Существенным недостатком схем на рис. 6-13, б и в является то, что при настройке постоянной времени изодрома $T_n = T_1$ одновременно изменяется коэффициент передачи k_p регулятора, зависящий от T_1 . В связи с этим при оптимальной настройке астатической части регулятора путем изменения постоянной времени T_1 звена обратной связи необходимо каждый раз делать подстройку его статической части путем изменения коэффициента передачи k_1 . При увеличении постоянной времени изодрома увеличивается и постоянная времени балластного звена $T_б$, что также является недостатком схемы.

Параметры настройки регулятора со структурной схемой по рис. 6-13, г такой взаимозависимости не имеют, что видно из формул (6-39).

На рис. 6-14 приведены законы регулирования реальных ПИ-регуляторов со структурной схемой по рис. 6-13 в зависимости от величины постоянной времени балластного звена $T_б$.

Из рис. 6-14 видно, что чем меньше постоянная времени балластного звена, тем ближе закон регулирования реального ПИ-регулятора к идеальному пропорционально-интегральному.

Для уменьшения погрешности в законе регулирования необходимо во всех случаях увеличивать передаточные ко-

эффиценты звеньев как в прямой цепи, так и в цепях отрицательных обратных связей.

С увеличением частоты входной величины регулятора отрицательное влияние балластного звена увеличивается.

В качестве примера рассмотрим более детально динамические характеристики электронных регулирующих приборов серии РПИК при работе их в комплекте с исполнительными механизмами, имеющими постоянную скорость вращения.

Приборы РПИК состоят из электронного и измерительного блоков, конструктивно смонтированных в общем металлическом корпусе. Электронные блоки у всех регулирующих приборов РПИК, управляющих исполнительными механизмами с постоянной скоростью вращения, одинаковы.

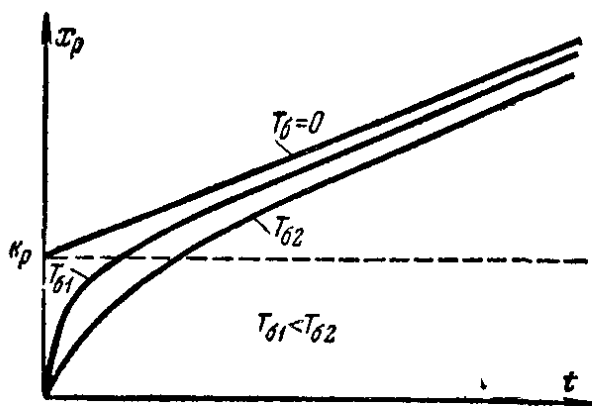


Рис 6 14 Переходные процессы ПИ-регуляторов рис 6 13 при различных значениях постоянной времени балластного звена

Измерительные блоки имеют несколько модификаций в зависимости от типа применяемых датчиков и их количества. Измерительные блоки предназначаются для предварительного усиления сигнала, поступающего от датчика или первичного прибора, и превращения его в унифицированный сигнал напряжения постоянного тока, подаваемый на вход электронного блока.

На рис. 6-15 представлена принципиальная электрическая схема измерительного блока И-С-62, работающего в комплекте с одним термометром сопротивления R_T . Заданное значение температуры устанавливается задатчиком типа ЗРУ-24, сопротивление которого включено в одно из плеч измерительного моста блока. Термометр сопротивления включен в другое плечо измерительного моста. В одну из диагоналей моста подается напряжение переменного тока от обмотки IV трансформатора $Tr-1$ через потенциометр R_{82} , которым регулируется чувствительность измерительного блока. При заданной температуре измерительный мост уравновешен и напряжение на его выходе равно нулю; равновесное состояние моста обеспечивается соответствующим выбором величины сменного сопротивления R_{76} и мо-

жет быть дополнительно откорректировано путем перемещения движка сопротивления R_{81} .

При отклонении температуры от заданного значения в другой диагонали моста появляется напряжение переменного тока, которое через усилительный трансформатор $Tr-2$ подается на вход полупроводникового усилителя,

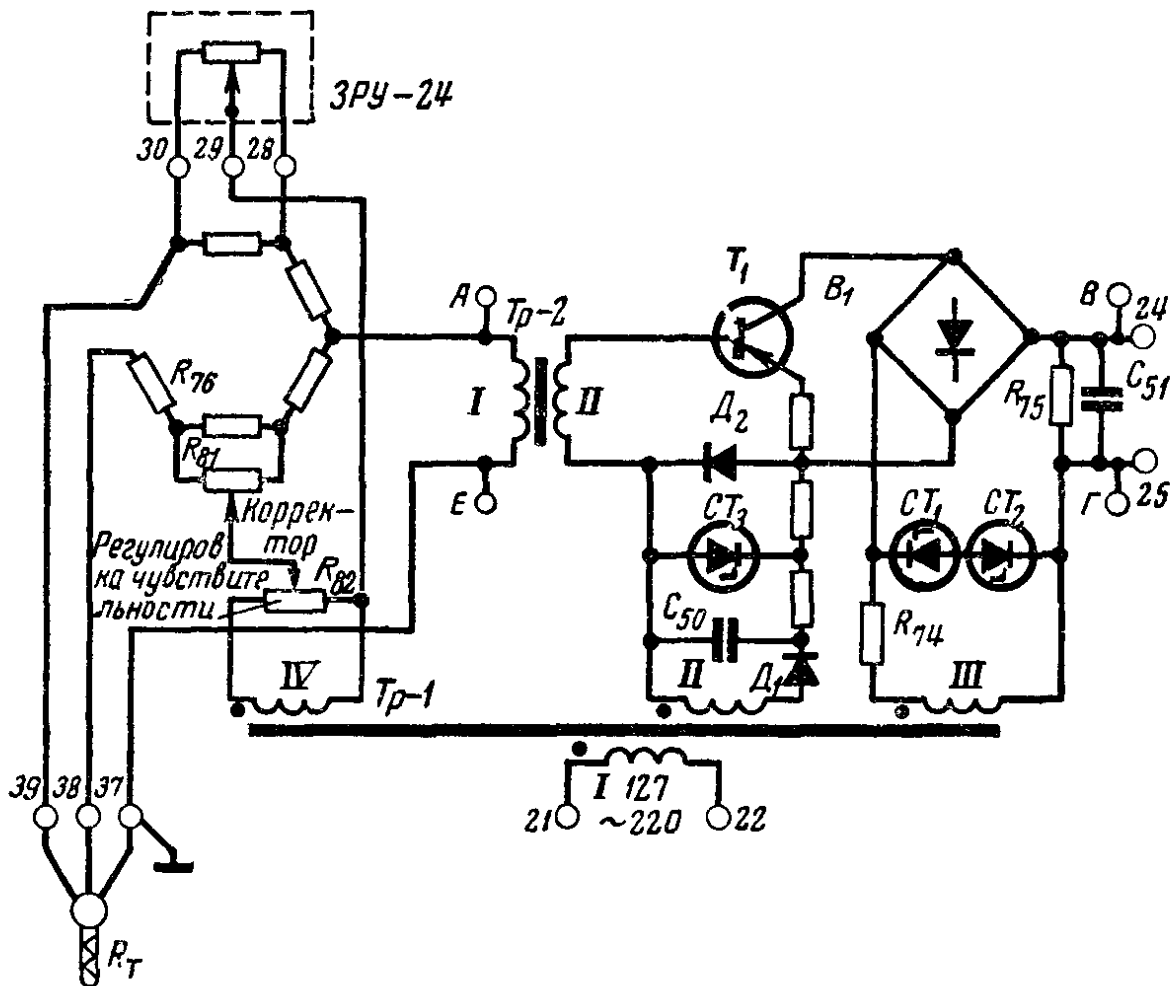


Рис. 6-15. Принципиальная электрическая схема измерительного блока И-С-62.

собранный на транзисторе T_1 . На базу транзистора для стабилизации рабочей точки подается постоянное напряжение с диода D_2 , на который поступает напряжение с обмотки II трансформатора $Tr-1$, выпрямленное диодом D_1 .

На эмиттер и коллектор транзистора подается постоянное напряжение с двухполупериодного выпрямителя B_1 . Напряжение переменного тока подается на выпрямитель от обмотки III трансформатора $Tr-1$. При равновесии измерительного моста на базу транзистора T_1 подается только постоянное напряжение с диода D_2 , а через эмиттер и коллектор транзистора T_1 в каждый полупериод от выпрямителя проходят одинаковые токи в одном направлении.

В нагрузке же, состоящей из сопротивления R_{75} и емкости C_{51} , в каждый полупериод проходят токи в разных направлениях, так как сопротивление нагрузки включено до выпрямителя. Таким образом, при отсутствии входного сигнала через нагрузку проходит переменный ток и постоянная составляющая на выходе измерительного блока (на зажимах 24 и 25) равна нулю.

При отклонении температуры от заданного значения с измерительного моста через трансформатор $Tr-2$ на вход транзистора T_1 будет подаваться переменное напряжение. Так как в каждый полупериод ток через транзистор проходит в одном направлении, то в течение положительного полупериода входного сигнала ток транзистора, а следовательно, и ток нагрузки будут увеличиваться, а в течение отрицательного полупериода — уменьшаться.

На нагрузке усилителя появится постоянная составляющая напряжения $U_{и}$, пропорциональная разности токов, проходящих через коллектор транзистора в разнополярные полупериоды. Так как эта разность токов пропорциональна отклонению температуры $x_{вх}$, то постоянная составляющая напряжения нагрузки $U_{и}$ будет пропорциональна отклонению температуры $x_{вх}$ от заданного значения.

Следовательно, измерительный блок в динамическом отношении является усилительным звеном с передаточной функцией

$$W_{и}(p) = \frac{U_{и}(p)}{X_{вх}(p)} = k_{и}.$$

Стабилитроны $СТ_1$ и $СТ_2$ в измерительном блоке служат для стабилизации напряжения на вторичной обмотке III трансформатора $Tr-1$.

Стабилитрон $СТ_3$ обеспечивает дополнительную стабилизацию напряжения на диоде D_2 .

Емкость нагрузки C_{51} дает возможность выделить постоянную составляющую при разряде емкости на сопротивление R_{75} в тот полупериод, в котором величина тока уменьшается при разбалансе измерительного моста.

В зависимости от знака отклонения регулируемой величины от заданного значения меняется фаза напряжения на входе полупроводникового усилителя, в результате чего меняется полярность постоянной составляющей напряжения на выходе измерительного блока.

Принципиальная электрическая схема электронного блока ЭР-62 из серии приборов РПИК изображена на рис. 6-16.

Электронный блок состоит из двухкаскадного электронного усилителя, выходных реле P_1 и P_2 и устройства упругой обратной связи.

Первый каскад электронного усилителя собран на двойном триоде Λ_1 по балансной схеме. При равенстве напряжений на сетках триодов их анодные токи равны и напряжение

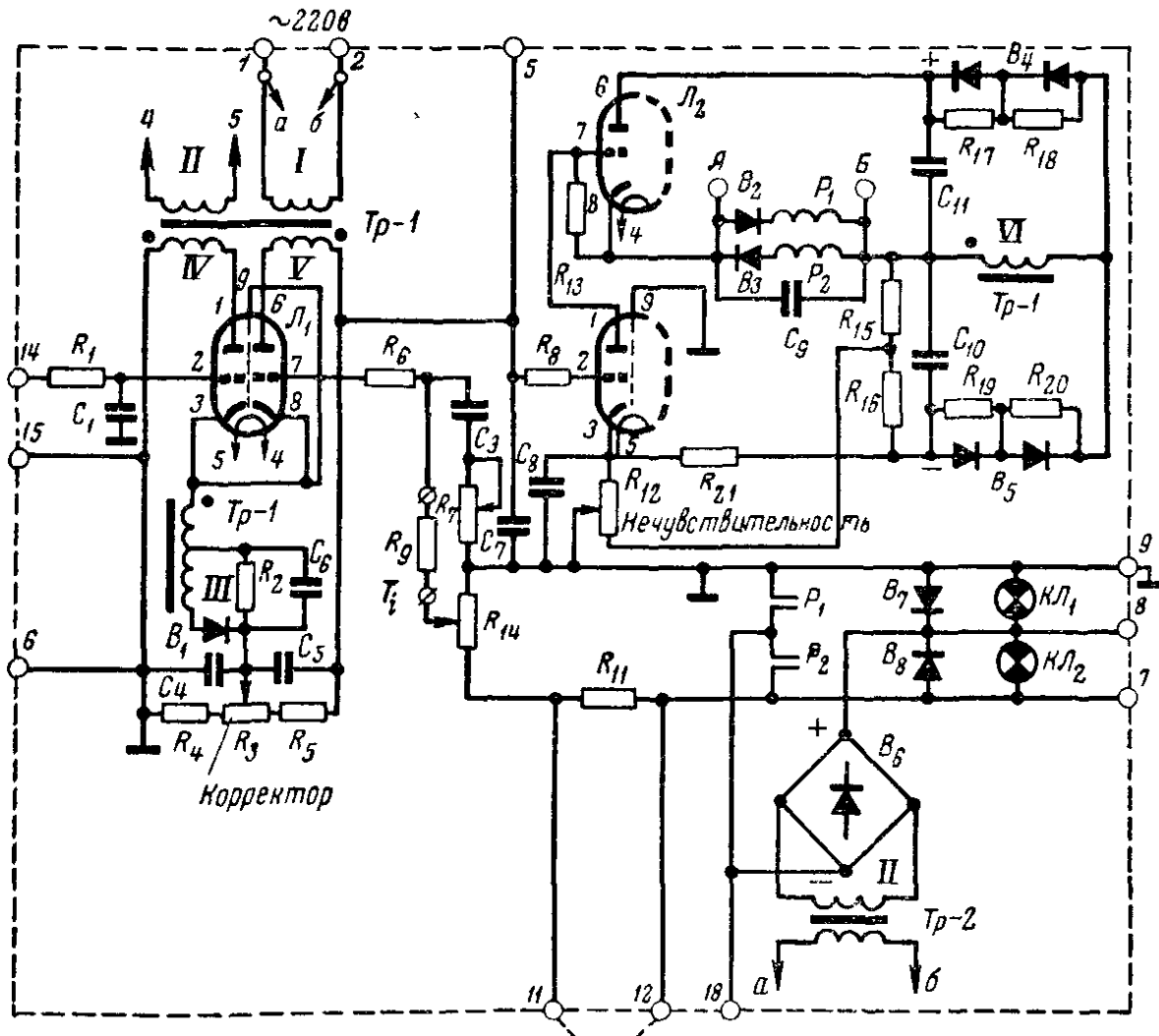


Рис. 6-16. Принципиальная электрическая схема электронного блока ЭР-62.

на выходе этого каскада равно нулю; откорректировать работу каскада можно путем перемещения движка сопротивления R_3 . Нагрузка обоих триодов находится в цепи катода. Отрицательное смещение на сетках по отношению к катодам обеспечивается подачей постоянного напряжения на сопротивление R_2 через вентиль B_1 от вторичной обмотки III трансформатора $Tr-1$. Емкость C_6 сглаживает пульсацию напряжения отрицательного смещения. Кроме постоянного отрицательного напряжения, на сетки лампы Λ_1 от части вторичной обмотки III трансформатора $Tr-1$ подается не-

большое переменное напряжение в фазе с переменным анодным напряжением. В результате этого в нерабочий полупериод на сетки лампы подается дополнительное отрицательное переменное напряжение, что уменьшает сеточные токи ламп. Емкости C_4 и C_5 служат для уменьшения пульсаций напряжения на сопротивлениях нагрузки.

Сигнал от измерительного блока поступает на зажимы 14—15 электронного блока. Сопротивление R_1 и емкость C_1 образуют фильтр, через который на сетку 2 лампы L_1 поступает только постоянная составляющая сигнала.

Для повышения устойчивости работы первого каскада усилителя его левый триод работает в режиме катодного повторителя и напряжение с его катодной нагрузки подается через сопротивление R_{75} измерительного блока на сетку 2, суммируясь с напряжением сигнала. Чтобы обеспечить при этом равновесие балансной схемы первого каскада усилителя (при отсутствии входного сигнала), напряжение с нагрузки левого триода подается и на сетку 7 правого триода лампы L_1 , на которую поступает также напряжение (через сопротивление R_6) с выхода цепи обратной связи.

При поступлении напряжения сигнала на сетку 2 лампы L_1 в зависимости от его полярности увеличивается или уменьшается анодный ток левого (по схеме) триода, равновесие первого каскада электронного усилителя нарушается и на вход второго каскада через сопротивление R_8 подается напряжение той или иной полярности.

Второй каскад электронного усилителя собран на двойном триоде L_2 по схеме баланса токов. Этот каскад является усилителем мощности. Триоды лампы включены последовательно и питаются постоянным напряжением от вторичной обмотки VI трансформатора *Tr-1* через вентили B_4 и B_5 . Емкости C_{10} и C_{11} обеспечивают стабилизацию анодного напряжения. Нагрузкой второго каскада усилителя являются реле P_1 и P_2 . Этот каскад настроен так, что при отсутствии напряжения на его входе токи, текущие через триоды, сбалансированы, падение напряжения на триодах будет одинаковым, а напряжение на нагрузке равно нулю, так как оба реле включены в диагональ моста, образованного равными по величине емкостями C_{10} и C_{11} и триодами лампы L_2 .

При отклонении регулируемой величины от заданного значения на сетку 2 лампы L_2 подается напряжение, сопротивление правого триода лампы L_2 увеличивается или уменьшается в зависимости от полярности сигнала и на нагрузке появляется напряжение. В зависимости от поляр-

ности этого напряжения срабатывает или реле P_1 , или реле P_2 , которые через свои нормально открытые контакты подают напряжение постоянного тока от вторичной обмотки II трансформатора $Tr-2$ через выпрямитель B_6 на исполнительный механизм и устройство обратной связи, состоящее из сопротивлений R_{11} , R_{14} , R_7 , R_9 и емкости C_3 .

Исполнительный механизм подключается к зажимам 7, 8 и 9. Плюс выпрямителя B_6 постоянно подключен к зажиму 8, а минус подается или на зажим 9 при срабатывании реле P_1 , или на зажим 7 при срабатывании реле P_2 . Таким образом, меняется полярность напряжения, подаваемого на исполнительный механизм, который начнет вращаться в ту или другую сторону, воздействуя на объект в направлении восстановления заданного значения регулируемой величины. Одновременно с этим при срабатывании реле P_1 загорается лампа KL_1 и от выпрямителя B_6 будет проходить ток через негорящую лампу KL_2 , сопротивления R_{11} и R_{14} и контакт реле P_1 .

При срабатывании реле P_2 загорается лампа KL_2 и в то же время ток проходит через негорящую лампу KL_1 , сопротивления R_{14} и R_{11} и контакт реле P_2 . Следовательно, полярность падения напряжения на сопротивлении обратной связи R_{14} меняется в зависимости от знака отклонения регулируемой величины.

Часть напряжения с сопротивления R_{14} , определяемая положением его движка, через устройство обратной связи подается на сетку 7 правого триода лампы L_1 . Полярность напряжения на сопротивлении R_{14} должна обеспечивать восстановление равновесия первого каскада электронного усилителя. Так, например, при поступлении отрицательного сигнала на сетку 2 левого триода лампы L_1 , на сетку 7 правого триода через устройство обратной связи при срабатывании реле подается также отрицательное напряжение.

После восстановления равновесия первого каскада усиления благодаря действию обратной связи на сетку 2 лампы L_2 напряжение поступать не будет, во втором каскаде усиления баланс токов восстановится, реле P_1 или P_2 отключится и исполнительный механизм остановится. Вследствие наличия емкости C_3 в цепи устройства обратной связи при срабатывании реле нарастание напряжения обратной связи на сетке 7 лампы L_1 происходит постепенно. Так же постепенно происходит и уменьшение этого напряжения при отключении реле, так как при этом емкость C_3 разряжается через сопротивление R_9 и части сопротивлений R_7 и R_{14} .

Если после остановки исполнительного механизма, обусловленного действием обратной связи, окажется, что перемещение регулирующего органа было недостаточным для восстановления заданного значения регулируемой величины, то в результате разрядки емкости C_3 и уменьшения напряжения на сетке 7 лампы L_1 вновь наступает разбаланс первого каскада усиления, разбаланс второго каска-

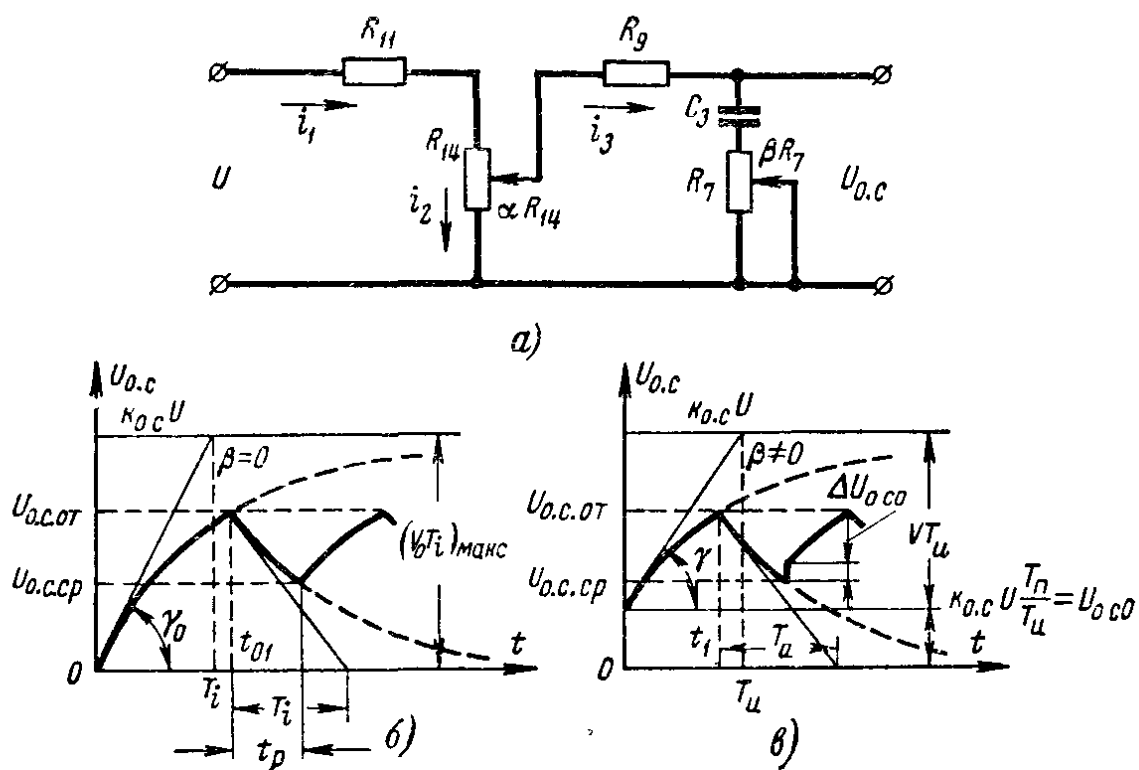


Рис. 6-17. Принципиальная электрическая схема устройства обратной связи электронного блока ЭР-62 и переходные процессы в ней.

да, повторное срабатывание выходного реле, новое включение исполнительного механизма и подача компенсирующего напряжения по цепи устройства обратной связи.

Так, периодически будет включаться и выключаться исполнительный механизм до тех пор, пока регулирующий орган не будет перемещен в положение, обеспечивающее восстановление заданного значения регулируемой величины в установившемся состоянии.

На рис. 6-17, а отдельно представлена принципиальная электрическая схема устройства обратной связи электронного блока ЭР-62 регулирующих приборов РПИК.

Обозначив часть сопротивления R_{14} , вводимую в контур цепи с емкостью C_3 , через αR_{14} , а часть сопротивления R_7

в этом контуре через βR_7 , и составив уравнения Кирхгофа для схемы на рис. 6-17, а, получим систему уравнений:

$$\text{I. } U = i_1 R_{11} + i_1 (1 - \alpha) R_{14} + i_2 \alpha R_{14}.$$

$$\text{II. } i_2 \alpha R_{14} = i_3 R_9 + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt + i_3 \beta R_7.$$

$$\text{III. } \frac{1}{C_3} \int i_3 dt + i_3 \beta R_7 = U_{oc}.$$

$$\text{IV. } i_2 \alpha R_{14} = i_3 R_9 + U_{oc}.$$

$$\text{V. } i_1 = i_2 + i_3.$$

Подставим в уравнение I величину i_1 из уравнения V:

$$\begin{aligned} U &= (i_2 + i_3) (R_{11} + R_{14} - \alpha R_{14}) + i_2 \alpha R_{14} = \\ &= i_2 (R_{11} + R_{14}) + i_3 [R_{11} + (1 - \alpha) R_{14}]. \end{aligned} \quad (6-39a)$$

Из уравнения IV следует:

$$i_2 = i_3 \frac{R_9}{\alpha R_{14}} + \frac{U_{oc}}{\alpha R_{14}}.$$

Подставив полученное выражение для i_2 в выражение (6-39a), получим:

$$\begin{aligned} U &= i_3 \left[\frac{R_9 (R_{11} + R_{14})}{\alpha R_{14}} + R_{11} + (1 - \alpha) R_{14} \right] + \\ &+ U_{oc} \frac{R_{11} + R_{14}}{\alpha R_{14}}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \alpha R_{14} U - (R_{11} + R_{14}) U_{oc} &= i_3 \{ R_9 (R_{11} + R_{14}) + \\ &+ \alpha R_{14} [R_{11} + (1 - \alpha) R_{14}] \}. \end{aligned}$$

Продифференцировав полученное уравнение, найдем:

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{\alpha R_{14} \frac{dU}{dt} - (R_{11} + R_{14}) \frac{dU_{oc}}{dt}}{R_9 (R_{11} + R_{14}) + \alpha R_{14} [R_{11} + (1 - \alpha) R_{14}]}. \quad (6-39б)$$

Продифференцировав уравнение III, получим:

$$i_3 = C_3 \left[\frac{dU_{oc}}{dt} - \beta R_7 \frac{di_3}{dt} \right]. \quad (6-39в)$$

Подставив величину $i_2 \alpha R_{14}$ из уравнения IV в уравнение I; получим:

$$U = i_1 [R_{11} + R_{14} - \alpha R_{14}] + i_3 R_9 + U_{oc}.$$

Отсюда получим:

$$i_1 = \frac{U - \iota_3 R_9 - U_{o.c.}}{R_{11} + R_{14} - \alpha R_{14}}.$$

Подставив полученные выше значения i_1 и i_2 в уравнение V, получим:

$$\begin{aligned} \frac{U - U_{o.c.}}{R_{11} + R_{14} - \alpha R_{14}} - i_3 \frac{R_9}{R_{11} + R_{14} - \alpha R_{14}} - i_3 \frac{R_9}{\alpha R_{14}} - \\ - \frac{U_{o.c.}}{\alpha R_{14}} - i_3 = 0, \end{aligned}$$

или, подставив в полученное уравнение величину i_3 из выражения (6-39в)

$$\begin{aligned} \frac{U - U_{o.c.}}{R_{11} + R_{14} - \alpha R_{14}} - \frac{U_{o.c.}}{\alpha R_{14}} = C_3 \left[\frac{dU_{o.c.}}{dt} - \beta R_7 \frac{d\iota_3}{dt} \right] \times \\ \times \left[\frac{R_9 (R_{11} + R_{14})}{\alpha R_{14} (R_{11} + R_{14} - \alpha R_{14})} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Приведя к общему знаменателю и подставив значение $\frac{d\iota_3}{dt}$ из выражения (6-39б), получим:

$$\begin{aligned} \alpha R_{14} U - (R_{11} + R_{14}) U_{o.c.} = \\ = [R_9 (R_{11} + R_{14}) + \alpha R_{14} (R_{11} + R_{14}) - \alpha^2 R_{14}^2] C_3 \times \\ \times \left[\frac{dU_{o.c.}}{dt} - \beta R_7 \frac{\alpha R_{14} \frac{dU}{dt} - (R_{11} + R_{14}) \frac{dU_{o.c.}}{dt}}{(R_9 + \alpha R_{14}) (R_{11} + R_{14}) - \alpha^2 R_{14}^2} \right], \end{aligned}$$

или, упростив правую часть:

$$\begin{aligned} \alpha R_{14} U - (R_{11} + R_{14}) U_{o.c.} = \\ = [(R_9 + \alpha R_{14})(R_{11} + R_{14}) - \alpha^2 R_{14}^2] C_3 \frac{dU_{o.c.}}{dt} - \\ - \beta R_7 C_3 \alpha R_{14} \frac{dU}{dt} + \beta R_7 C_3 (R_{11} + R_{14}) \frac{dU_{o.c.}}{dt}. \end{aligned}$$

Сгруппировав переменные и их производные, получим:

$$\begin{aligned} \alpha R_{14} \left(U + \beta R_7 C_3 \frac{dU}{dt} \right) = (R_{11} + R_{14}) \times \\ \times \left\{ U_{o.c.} + C_3 \left[R_9 + \alpha R_{14} + \beta R_7 - \frac{\alpha^2 R_{14}^2}{R_{11} + R_{14}} \right] \frac{dU_{o.c.}}{dt} \right\}. \end{aligned}$$

В окончательном виде система уравнений I—V приводится к уравнению

$$U + \beta R_7 C_3 \frac{dU}{dt} = \frac{R_{11} + R_{14}}{\alpha R_{14}} \times \\ \times \left[U_{o.c} + \left(R_9 + \alpha R_{14} + \beta R_7 - \frac{\alpha^2 R_{14}^2}{R_{11} + R_{14}} \right) C_3 \frac{dU_{o.c}}{dt} \right].$$

В операторной форме это уравнение запишется как

$$U(p) [1 + \beta R_7 C_3 p] = \frac{R_{11} + R_{14}}{\alpha R_{14}} \times \\ \times \left\{ U_{o.c}(p) \left[1 + p C_3 \left(R_9 + \alpha R_{14} + \beta R_7 - \frac{\alpha^2 R_{14}^2}{R_{11} + R_{14}} \right) \right] \right\}.$$

Передаточная функция устройства обратной связи будет иметь вид:

$$W_{o.c}(p) = \frac{U_{o.c}(p)}{U(p)} = k_{o.c} \frac{T_n p + 1}{T_n p + 1}, \quad (6-40)$$

где

$$k_{o.c} = \frac{\alpha R_{14}}{R_{11} + R_{14}}; \quad T_n = \beta R_7 C_3; \quad (6-41)$$

$$T_n = C_3 \left(\beta R_7 + R_9 + \alpha R_{14} - \frac{\alpha^2 R_{14}^2}{R_{11} + R_{14}} \right).$$

Таким образом, устройство обратной связи является интегро-дифференцирующим звеном.

При $\beta = 0$, т. е. при полностью закороченном сопротивлении R_7 , $T_n = 0$ и обратная связь превращается в инерционное звено первого порядка:

$$W_{o.c}(p) = \frac{k_{o.c}}{T_i p + 1}, \quad (6-42)$$

где

$$T_i = C_3 \left(R_9 + \alpha R_{14} - \frac{\alpha^2 R_{14}^2}{R_{11} + R_{14}} \right) \quad (6-43)$$

Передаточная функция каскадов усилителей электронного блока при их общем коэффициенте усиления k_y запишется как

$$W_y(p) = k_y.$$

Релейный элемент относится к числу нелинейных элементов, рассматриваемых дальше, в гл. 7. Линеаризация релейного элемента (см. § 7-2) приводит к выражению (7-22), которым определяется его передаточная функция:

$$W_{p \text{ э}}(p) = k_n.$$

Если не производить линеаризации релейного элемента, то расчет регулятора можно выполнить с помощью метода приспособывания, изложенного в гл. 7 (§ 7-2,1).

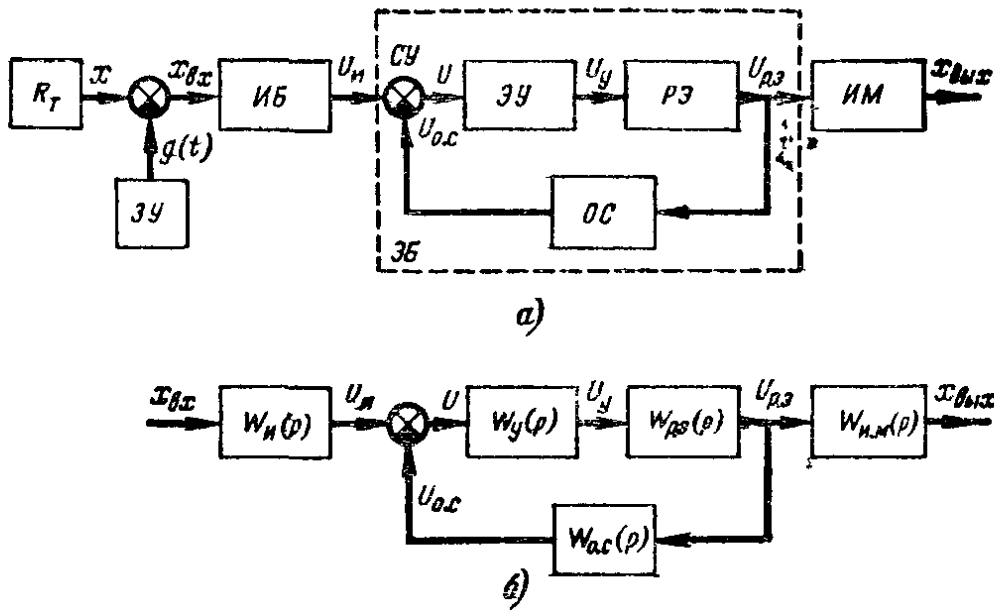


Рис 6-18 Регулятор с регулирующим прибором РПИК
а — функциональная блок схема, б — структурная схема.

На рис. 6-18, а и б изображены функциональная и структурная схемы регулятора, состоящего из прибора РПИК и исполнительного механизма ИМ с передаточной функцией

$$W_{н \text{ м}}(p) = \frac{1}{T_{н \text{ м}} p}.$$

Передаточная функция электронного блока ЭБ, состоящего из усилителя ЭУ, релейного элемента РЭ и устройства обратной связи ОС, имеет вид:

$$W_{э \text{ б}}(p) = \frac{W_y(p) W_{p \text{ э}} p}{1 + W_y(p) W_{p \text{ э}}(p) W_{о \text{ с}}(p)}. \quad (6-44)$$

Передаточная функция регулятора, включающего в себя, помимо упомянутых, также измерительный блок ИБ, имеет вид:

$$\begin{aligned} W_p(p) &= W_n(p) W_{\text{эб}}(p) W_{\text{им}}(p) = \\ &= \frac{W_n(p) W_y(p) W_{p\text{э}}(p) W_{\text{им}}(p)}{1 + W_y(p) W_{p\text{э}}(p) W_{oc}(p)} \end{aligned} \quad (6-45)$$

Подставляя значения передаточных функций, находим:

$$W_p(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_{\text{нп}}} p \right) \frac{1}{T_{\text{б}} p + 1} = W_{\text{пн}}(p) W_{\text{б}}(p), \quad (6-46)$$

где

$$k_p = \frac{k_{\text{н}} k_y k_{\text{н}} T_{\text{н}}}{T_{\text{нм}} (1 + k_y k_{\text{н}} k_{oc})}; \quad (6-47)$$

$$T_{\text{б}} = \frac{T_{\text{н}} + k_y k_{\text{н}} k_{oc} T_{\text{п}}}{1 + k_y k_{\text{н}} k_{oc}} \quad \text{при } \beta \neq 0 \quad (6-48)$$

и

$$T_{\text{б}} = \frac{T_{\text{н}}}{1 + k_y k_{\text{н}} k_{oc}} \quad \text{при } \beta = 0 \text{ [т. е. при } T_{\text{п}} = \beta R_7 C_3 = 0]. \quad (6-49)$$

Таким образом, регулирующие электронные приборы РПИК при работе в комплекте с исполнительным механизмом в виде интегрирующего звена осуществляют с некоторыми искажениями пропорционально-интегральный закон регулирования.

Структурная схема этого регулятора соответствует типовой структурной схеме, изображенной на рис. 6-13, б.

При настройке приборов РПИК всегда осуществляют глубокую обратную связь; для этого случая расчет регулятора может быть существенно упрощен.

Поделив числитель и знаменатель формулы (6-44) на $W_y(p) W_{p\text{э}}(p)$, найдем:

$$W_{\text{эб}}(p) = \frac{1}{\frac{1}{W_y(p) W_{p\text{э}}(p)} + W_{oc}(p)} = \frac{1}{\frac{1}{k_y k_{\text{н}}} + W_{oc}(p)}.$$

Так как при глубокой обратной связи $k_y k_{\text{н}} \gg 1$ и $\frac{1}{k_y k_{\text{н}}} \approx 0$, получим:

$$W_{\text{эб}}(p) = \frac{1}{W_{oc}(p)}.$$

При этом передаточная функция регулятора примет вид:

$$W_p(p) = \frac{W_n(p)}{W_{oc}(p)} W_{nm}(p) = \frac{k_n(T_n p + 1)}{k_{oc}(T_n p + 1)} \cdot \frac{1}{T_{nm} p}, \quad (6-50)$$

или, умножив на T_n числитель и знаменатель в выражении (6-50), получим

$$W_p(p) = \frac{k_n T_n}{k_{oc} T_{nm}} \left(1 + \frac{1}{T_n p} \right) \frac{1}{T_n p + 1}.$$

Следовательно, при $\beta \neq 0$ рассматриваемый ПИ-регулятор с глубокой обратной связью сохраняет вид передаточной функции согласно формуле (6-46), но с иными величинами коэффициента усиления и постоянной времени балластного звена:

$$k_p = \frac{k_n T_n}{k_{oc} T_{nm}} \quad \text{и} \quad T_b = T_n.$$

При $\beta = 0$ постоянная времени T_n равна нулю и в этом случае описываемый регулятор с достаточной для практики точностью можно рассматривать как идеальный ПИ-регулятор с коэффициентом усиления $k_p = \frac{k_n T_n}{K_{oc} T_{nm}}$ и постоянной времени изодрома T_n . Переходный процесс регулятора имеет вид, представленный на рис. 6-14. На рис. 6-17, б и в представлен переходный процесс изменения выходного напряжения U_{oc} устройства обратной связи при поступлении на вход электронного блока ЭР-62 напряжения U_n от измерительного блока при $\beta = 0$ (см. рис. 6-17, б) и $\beta \neq 0$ (рис. 6-17, в).

При подаче на вход электронного блока (т. е. на сетку 2 лампы L_1) напряжения U_n нарушается равновесие каскадов усиления, срабатывает выходное реле и на устройство обратной связи поступает напряжение U (рис. 6-17, а). При $\beta = 0$ в первый момент времени напряжение $U_{oc} = 0$. В дальнейшем емкость C_3 постепенно начинает заряжаться, подавая на сетку 7 лампы L_1 напряжение U_{oc} . При коэффициенте усиления каскадов электронного блока k_y на реле будет подаваться напряжение $U_y = k_y(U_n - U_{oc})$ (рис. 6-18).

Релейные элементы, использованные в схеме, неравнозначны (см. § 7-1, б в и г), т. е. они включаются при величине подводимого напряжения $U_y = U_{\text{ср}}$, а отключаются при подаче напряжения отпускания $U_y = U_{\text{от}}$, причем $U_{\text{от}} < U_{\text{ср}}$. При увеличении $U_{\text{о.с}}$, когда напряжение U_y понизится до напряжения отпускания реле $U_{\text{от}}$, реле отпадет, и с этого момента емкость C_3 начнет разряжаться по замкнутому контуру сопротивлений и напряжение $U_{\text{о.с}}$ будет уменьшаться. Таким образом, выходное реле отпадает при напряжении обратной связи $U_{\text{о.с.от}} = U_{\text{н}} - \frac{U_{\text{от}}}{k_y}$. При последующем уменьшении $U_{\text{о.с}}$ напряжение U_y увеличивается, и когда оно станет равным напряжению срабатывания реле:

$$U_y = k_y (U_{\text{н}} - U_{\text{о.с}}) = U_{\text{ср}},$$

реле снова включится.

Напряжение обратной связи, при котором включается выходное реле, равно

$$U_{\text{о.с.ср}} = U_{\text{н}} - \frac{U_{\text{ср}}}{k_y}.$$

Если $\beta = 0$, то чем больше постоянная времени изодрома T_i , тем медленнее разряжается емкость C_3 и тем большее время t_p будет разомкнут контакт выходного реле (см. рис. 6-17, б). Из формулы (6-43) следует, что T_i лучше всего настраивать подбором величины сменного сопротивления R_9 . Постоянная времени изодрома в приборах РПИК может изменяться в пределах от 1 до 500 сек, что соответствует изменению величины сопротивления R_9 в пределах от 33 ком до 17 Мом.

По терминологии завода-изготовителя максимальная скорость нарастания напряжения $U_{\text{о.с}}$, которая имеет место в первый момент времени при подаче напряжения сигнала на вход электронного блока и равна $\left(\frac{dU_{\text{о.с}}}{dt}\right)_{\text{макс}} = V_0 = \text{tg } \gamma_0$, называется *скоростью обратной связи*.

Скорость обратной связи определяет время t_{01} , в течение которого контакт выходного реле замкнут. Скорость обратной связи изменяется при изменении или постоянной времени изодрома, или величины напряжения $k_{\text{о.с}} U = i_2 \alpha R_{14}$, подаваемого с сопротивления R_{14} в RC-контур. Это напряже-

ние, снимаемое с сопротивления R_{14} , равно произведению скорости обратной связи на постоянную времени изодрома:

$$k_{o.c} U = (V_0 T_i)_{\text{макс}} \quad (6-51)$$

Чем меньше это напряжение, тем меньше скорость обратной связи.

Существенный недостаток регулирующих приборов РПИК состоит в том, что настройка времени изодрома оказывает влияние на настройку скорости обратной связи и наоборот. В связи с этим рекомендуется сначала подбором величины сопротивления R_9 установить оптимальное значение времени изодрома, а затем путем перемещения движка сопротивления R_{14} установить требуемую скорость обратной связи. После этого необходимо снова уточнить значение времени изодрома.

Сопротивление R_{11} нормально закорочено перемычкой между зажимами 11 и 12 (см. рис. 6-16). При снятии этой перемычки скорость обратной связи может быть уменьшена примерно в 10 раз, что вытекает из формул (6-43) и (6-51).

Если $\beta \neq 0$, то при подаче напряжения U на устройство обратной связи напряжение $U_{o.c}$ мгновенно скачком примет значение $U_{o.c0} = k_{o.c} U T_{п}/T_{и}$. Это объясняется тем, что хотя в начальный момент времени емкость C_3 и ведет себя, как закороченный участок цепи, это не приведет к закорачиванию выхода вследствие наличия сопротивления βR_7 , на котором в первый момент времени в результате прохождения тока i_3 будет падение напряжения, равное $U_{o.c0}$ (см. § 2-3, п. 5). После этого увеличение напряжения будет происходить по экспоненциальному закону. Переходный процесс для этого случая представлен на рис. 6-17, в.

Так как $U_{o.c0} = k_{o.c} U T_{п}/T_{и}$, то чем больше постоянная времени $T_{п}$ и чем меньше постоянная времени $T_{и}$, тем больше $U_{o.c0}$. Кроме того, с уменьшением $T_{и}$ увеличивается скорость нарастания напряжения $U_{o.c}$ по экспоненциальному закону (см. § 2-3, п. 5).

Следовательно, при $\beta \neq 0$ увеличением отношения постоянных времени $T_{п}/T_{и}$ время t_1 увеличения $U_{o.c}$ от нуля до значения $U_{o.c0}$ может быть существенно уменьшено, т. е. можно существенно уменьшить длительность включенного состояния выходного реле ($t_1 < t_{01}$). Так как β входит в выражение (6-41) для $T_{п}$ в качестве множителя, а в выражение для $T_{и}$ в качестве множителя только одного из слагаемых, то с увеличением β отношение $T_{п}/T_{и}$ увеличивается. Таким образом, положением движка сопротивления R_7

устанавливается длительность включенного состояния выходного реле, которую принято называть длительностью импульса.

При отключении выходного реле емкость C_3 будет разряжаться на RC -контур $(\beta R_7 + \alpha R_{14} + R_9)C_3$ и напряжение $U_{o.c.}$ будет уменьшаться от значения $U_{o.c.от}$ до значения $U_{o.c.ср}$. При $U_{o.c.} = U_{o.c.ср}$ снова включается выходное реле. При этом в первый момент времени напряжение $U_{o.c.}$ скачком увеличится на величину $\Delta U_{o.c.} = (k_{o.c.} U - U_{o.c.ср}) T_{п}/T_{и}$ и далее будет возрастать по экспоненциальному закону до $U_{o.c.} = U_{o.c.от}$. Длительность включения выходного реле при возрастании $U_{o.c.}$ от значения $U_{o.c.} = U_{o.c.ср}$ до значения $U_{o.c.от}$ будет, естественно, меньше, нежели при возрастании $U_{o.c.}$ от значения $U_{o.c.} = 0$ до $U_{o.c.} = U_{o.c.от}$. Скорость обратной связи при $\beta \neq 0$ равна $V = \operatorname{tg} \gamma$ (см. рис. 6-17, в). При этом чем меньше β , тем больше произведение $VT_{и} = k_{o.c.} U \left(1 - \frac{T_{п}}{T_{и}}\right)$. Так, при $\beta = 0$ согласно формуле (6-41), имеем: $T_{п} = 0$; $T_{и} = T_i$ [см. выражение (6-43)] и произведение $VT_{и}$ принимает максимальное значение, определяемое выражением (6-51).

Производить настройку длительности импульса необходимо после установки всех остальных органов настройки. При этом необходимо иметь в виду, что если в RC -контур устройства обратной связи будет введена слишком большая часть сопротивления R_7 , может случиться, что при подаче напряжения U на устройство обратной связи величина напряжения $U_{o.c0}$, появляющегося скачкообразно, может принять значение $U_{o.c0} > U_{o.c.от}$, вследствие чего сразу же отключается включенное реле, а если $U_{и} < U_{o.c0} > U_{o.c.от}$ (см. рис. 6-18), то даже включается другое реле. При $U_{и} > U_{o.c0} > U_{o.c.от}$ напряжение на исполнительный механизм будет подаваться короткими импульсами, процесс регулирования затягивается, а если регулятор подключен к астатическому объекту, то система автоматического регулирования может потерять устойчивость.

При $U_{и} < U_{o.c0} > U_{o.c.от}$ начнется непрерывная переброска выходных реле и система будет неработоспособной как при астатическом, так и при статическом объектах.

На рис. 6-19 приведены диаграммы, показывающие характер изменения: 1) напряжения $U_{o.c.}$ обратной связи; 2) напряжения U_y , получаемого на выходе электронного усилителя и подаваемого на реле; 3) напряжения $U_{р.э.}$, по-

ступающего на исполнительный механизм и устройство обратной связи (без учета небольшого падения напряжения на лампах $KЛ_1$ или $KЛ_2$), а также кривая закона регулирования $x_{\text{вых}}(t)$, осуществляемого регулятором при поступлении на его вход постоянного сигнала.

На рис. 6-19 пунктиром показан расчетный закон регулирования, получаемый при расчете регулятора как линейной системы (т. е. при линеаризации релейного элемента).

При отключении обратной связи: $k_{oc} = 0$, регулятор осуществляет интегральный закон регулирования, т. е. превращается в И-регулятор.

Передаточная функция И-регулятора определяется из выражения (6-45), принимая в нем $W_{oc}(p) = 0$ и подставив значения передаточных функций звеньев:

$$W_p(p) = \frac{k_i k_y k_n}{T_{им} p}$$

Электронные регулирующие приборы серии РПИБ и электронные корректирующие приборы серии КПИ имеют такие же структурные схемы и динамические характеристики, как и приборы РПИК.

4. ПИД-регуляторы

Структурная схема ПИД-регулятора может быть получена из структурной схемы ПИ-регулятора путем дополнительного введения структурных звеньев, формирующих в законе регулирования составляющую, пропорциональную производной изменения регулируемой величины по времени.

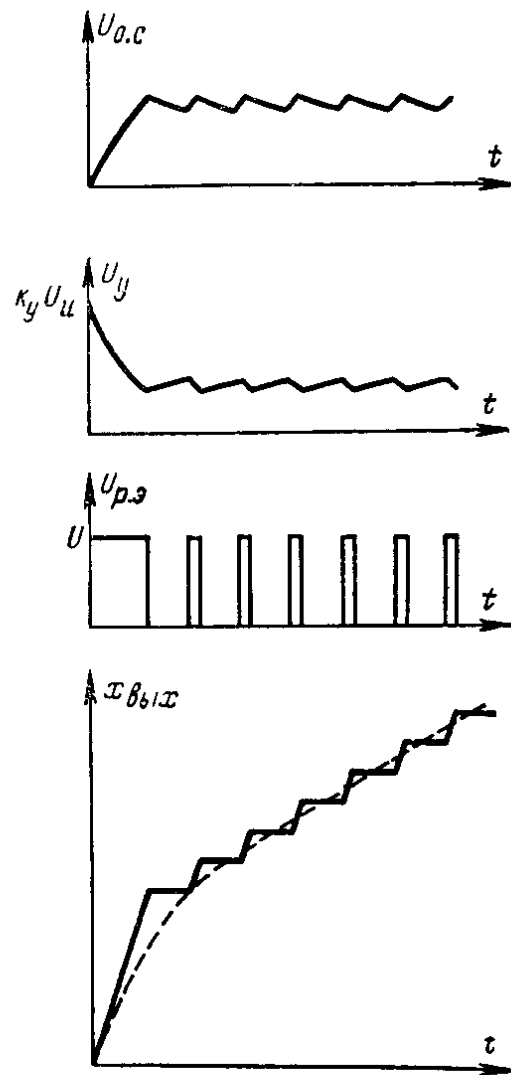


Рис. 6-19. Закон регулирования и переходные процессы регулятора с регулирующим прибором РПИК.

В качестве примера на рис. 6-20 представлены две структурные схемы реальных ПИД-регуляторов.

Структурная схема на рис. 6-20, а отличается от структурной схемы на рис. 6-13, б (ПИ-регулятора) вторым инерционным звеном первого порядка, введенным последовательно с первым таким же звеном, в линию обратной связи. Этим и обеспечивается введение производной в закон регулирования.

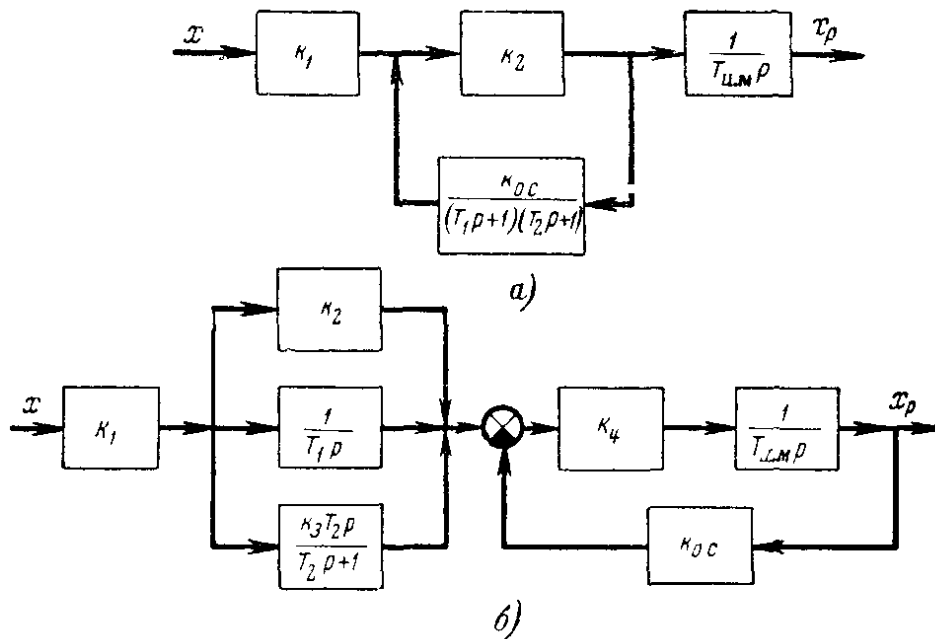


Рис. 6-20. Структурные схемы ПИД-регулятора с интегрирующим исполнительным механизмом.

Передаточная функция регулятора запишется так:

$$W_p(p) = \frac{k_1}{T_{и м} p} \cdot \frac{k_2}{1 + \frac{k_2 k_{о с}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}}.$$

Выделив передаточную функцию идеального ПИД-регулятора [см. формулу (2-64)], получим:

$$W_p(p) = k_p \left(1 + T_{пр} p + \frac{1}{T_{и} p} \right) \times \\ \times \frac{1}{T_{б2}^2 p^2 + T_{б1} p + 1} = W_{пид}(p) W_б(p), \quad (6-52)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_p &= \frac{k_1 k_2 (T_1 + T_2)}{(1 + k_2 k_o c) T_{н м}}; & T_{пр} &= \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}; \\ T_{н} &= T_1 + T_2; & T_{б1} &= \frac{T_1 + T_2}{1 + k_2 k_o c}; \\ T_{б2} &= \sqrt{\frac{T_1 T_2}{1 + k_2 k_o c}}. \end{aligned} \right\} \quad (6-53)$$

Следовательно, реальный ПИД-регулятор со структурной схемой по рис. 6-20, а в динамическом отношении можно представить как идеальный ПИД-регулятор, последовательно соединенный с балластным звеном.

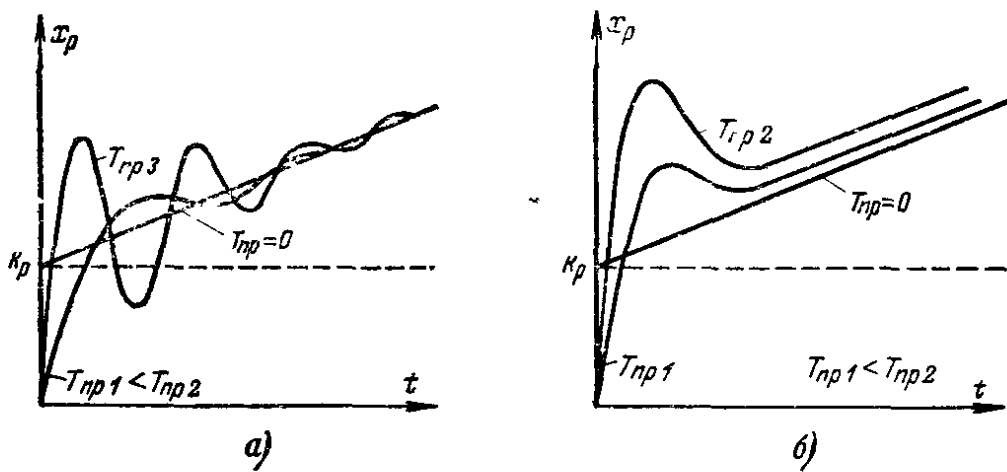


Рис. 6-21 Переходные процессы ПИД-регулятора
а — со структурной схемой рис. 6-20, а, б — со структурной схемой рис. 6-20, б

Отношение постоянных времени балластного звена

$$\frac{T_{б1}}{T_{б2}} = \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2 (1 + k_2 k_o c)}}$$

практически всегда устанавливается меньше 2, так как значения передаточных коэффициентов k_2 и $k_o c$ выбираются достаточно большими в целях уменьшения постоянных времени балластного звена $T_{б1}$ и $T_{б2}$, а следовательно, и погрешности в законе регулирования. Но тогда балластное звено в динамическом отношении является колебательным звеном (см. § 2-3, п. 6).

Закон регулирования рассматриваемого ПИД-регулятора в зависимости от величин постоянных времени и предварения представлен на рис. 6-21, а.

Отношение постоянной времени предварения к постоянной времени изодрома регулятора равно:

$$k_{\text{пр}} = \frac{T_{\text{пр}}}{T_{\text{И}}} = \frac{T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} = \frac{\frac{T_1}{T_2}}{\left[\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + 1\right]^2}. \quad (6-54)$$

Найдем значение отношения T_1/T_2 , при котором отношение $k_{\text{пр}}$ имеет максимальное значение:

$$\frac{dk_{\text{пр}}}{d\left(\frac{T_1}{T_2}\right)} = \frac{\left[\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + 1\right]^2 - 2\left[\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + 1\right]\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}{\left[\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + 1\right]^4} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left[\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + 1\right]^2 - 2\left[\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + 1\right]\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 1,$$

откуда

$$\frac{T_1}{T_2} = 1.$$

Следовательно, при значении $T_1/T_2 = 1$ величина отношения $k_{\text{пр}}$ будет максимальной и равной:

$$k_{\text{пр. макс}} = 0,25. \quad (6-55)$$

Из приведенных расчетов следует, что возможности настройки параметров регулятора со структурной схемой по рис. 6-20, а ограничены: помимо ограничения, налагаемого формулой (6-55), настройка регулятора затруднена тем, что каждый из настроечных параметров одновременно влияет на несколько постоянных, входящих в выражение (6-52).

Структурная схема ПИД-регулятора, приведенная на рис. 6-20, б, отличается от структурной схемы на рис. 6-13, г тем, что параллельно усилительному звену с коэффициентом передачи k_2 и интегрирующему звену с передаточной функцией, равной $\frac{1}{T_1 p}$, включено реальное дифференцирующее

звено, которое обеспечивает введение в закон регулирования составляющей, пропорциональной производной отклонения регулируемой величины от заданного значения. Передаточная функция этих трех звеньев и усилительного звена с коэффициентом передачи k_1 будет равна:

$$W_1(p) = k_1 \left(k_2 + \frac{1}{T_1 p} + \frac{k_3 T_2 p}{T_2 p + 1} \right) = \frac{k_1 (T_2 + k_2 T_1)}{T_1} \times \\ \times \left[1 + \frac{T_1 T_2 (k_2 + k_3)}{T_2 + k_2 T_1} p + \frac{1}{(T_2 + k_2 T_1) p} \right] \frac{1}{T_2 p + 1}. \quad (6-56)$$

Таким образом, только этими четырьмя звеньями полностью реализуется ПИД-закон регулирования. Следовательно, остальные два звена регулятора должны быть охвачены глубокой отрицательной обратной связью в виде усилительного звена; передаточная функция этих трех звеньев запишется так:

$$W_2(p) = \frac{\frac{k_4}{T_{и.м} p}}{1 + \frac{k_4 k_{о.с}}{T_{и.м} p}} = \frac{1}{k_{о.с} \left(\frac{T_{и.м}}{k_4 k_{о.с}} p + 1 \right)}.$$

Передаточная функция регулятора равна:

$$W_p(p) = W_1(p) W_2(p) = k_p \left(1 + T_{пр} p + \frac{1}{T_{и} p} \right) \times \\ \times \frac{1}{(T_{б1} p + 1)(T_{б2} p + 1)} = W_{пид}(p) W_б(p), \quad (6-57)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_p &= \frac{k_1 (T_2 + k_2 T_1)}{T_1 k_{о.с}}; & T_{пр} &= \frac{T_1 T_2 (k_2 + k_3)}{T_2 + k_2 T_1}; \\ T_{и} &= T_2 + k_2 T_1; & T_{б1} &= T_2; & T_{б2} &= \frac{T_{и.м}}{k_4 k_{о.с}}. \end{aligned} \right\} \quad (6-58)$$

Таким образом, регулятор со структурной схемой по рис. 6-20, б может быть представлен, как и регулятор со схемой по рис. 6-20, а, в виде идеального ПИД-регулятора, последовательно соединенного с балластным звеном в виде инерционного звена второго порядка. Закон регулирования в зависимости от соотношения постоянных времени $T_{б1}$ и $T_{б2}$ балластного звена представлен на рис. 6-21, б.

Так как из выражения (6-57) следует, что балластное звено в динамическом отношении является инерционным звеном второго порядка с вещественными отрицательными корнями $p_1 = -\frac{1}{T_{01}}$ и $p_2 = -\frac{1}{T_{02}}$, то, следовательно, оно не вносит в закон регулирования колебательных составляющих (см. § 2-3, п. 6).

Из выражений (6-58) найдем отношение постоянной времени предварения к постоянной времени изодрома:

$$k_{\text{пр}} = \frac{T_{\text{пр}}}{T_{\text{и}}} = \frac{T_1 T_2 (k_2 + k_3)}{(T_2 + k_2 T_1)^2}.$$

При $\frac{T_1}{T_2} = 1$ это отношение имеет максимальное значение, равное:

$$k_{\text{пр макс}} = \frac{k_2 + k_3}{(1 + k_2)^2}. \quad (6-59)$$

Таким образом, в ПИД-регуляторе со структурной схемой, представленной на рис. 6-21, б, нет ограничения в выборе величины отношения постоянной времени предварения к постоянной времени изодрома. Так, из формулы (6-59) следует, что путем изменения коэффициента усиления k_3 можно максимальное отношение $k_{\text{пр макс}} = \frac{T_{\text{пр}}}{T_{\text{и}}}$ менять в любых требуемых пределах.

Аналогичным образом можно исследовать динамические свойства любых реальных автоматических ПИД-регуляторов с различными структурными схемами. В качестве примера определим закон регулирования электронного регулирующего устройства РУ4-16А. Принципиальная электрическая схема этого регулирующего устройства представлена на рис. 6-22.

Собственно устройство РУ4-16А состоит из электронного усилителя ЭУ, выходных реле P_1 и P_2 , образующих релейный элемент РЭ (рис. 6-23), элемента суммирования СУ и устройства отрицательной обратной связи ОС.

Регулирующее устройство может работать только в комплексе с измерительными приборами, снабженными реостатными задатчиками и исполнительными механизмами, имеющими встроенные реостаты обратной связи.

На рис. 6-23, а представлена функциональная блок-схема системы автоматического регулирования, состоящая из

измерительного прибора ИП, регулятора и объекта регулирования. Заданное значение регулируемой величины $g(t)$ устанавливается вручную путем перемещения реохорда задающего устройства ЗУ по реостатному задатчику R_{33} . Величина задания равна $g(t) = U_{ав}$ (см. рис. 6-22).

Перемещение стрелки измерительного прибора ИП однозначно связано с перемещением реохорда измерительного устройства ИУ по реостатному задатчику R_{33} . Таким обра-

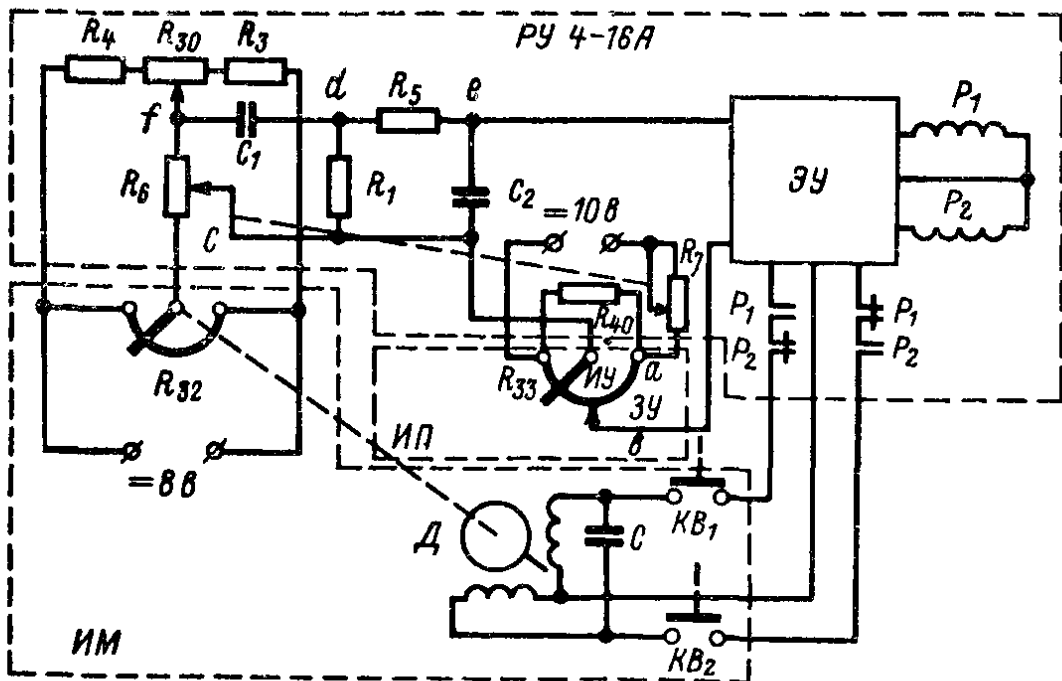


Рис 6-22 Принципиальная электрическая схема регулятора с регулирующим устройством РУ4-16А

зом, действительное значение регулируемой величины определяется величиной напряжения $U_{ас}$. На вход регулятора поступает сигнал ошибки (рассогласования) $U_{вс} = U_{ав} - U_{ас}$. Следовательно, реостатный задачик с сопротивлением R_{33} и двумя реохордами образует суммирующее устройство СУ измерительного прибора.

Обратная связь в регулирующем устройстве является гибкой, т. е. ее действие проявляется только во время переходных процессов. Если система автоматического регулирования (рис. 6-23, а) находится в равновесии, то заданное значение регулируемой величины $U_{ав}$ равно ее действительному значению $U_{ас}$ и на вход регулятора сигнала не поступает, т. е. $U_{вс} = 0$. При этом регулирующее воздействие $U_{се}$ также равно нулю. Следовательно,

$$U_{ве} = U_{вс} - U_{се} = 0.$$

При изменении заданного значения регулируемой величины получаем $U_{ав} \neq U_{ас}$ и на вход регулятора поступает сигнал рассогласования $U_{вс} = U_{ав} - U_{ас}$, которое усиливается электронным усилителем и в зависимости от знака отклонения регулируемой величины от задания, т. е. от полярности напряжения, поступающего на релейный элемент, вызывает срабатывание выходного реле P_1 или P_2 регулятора.

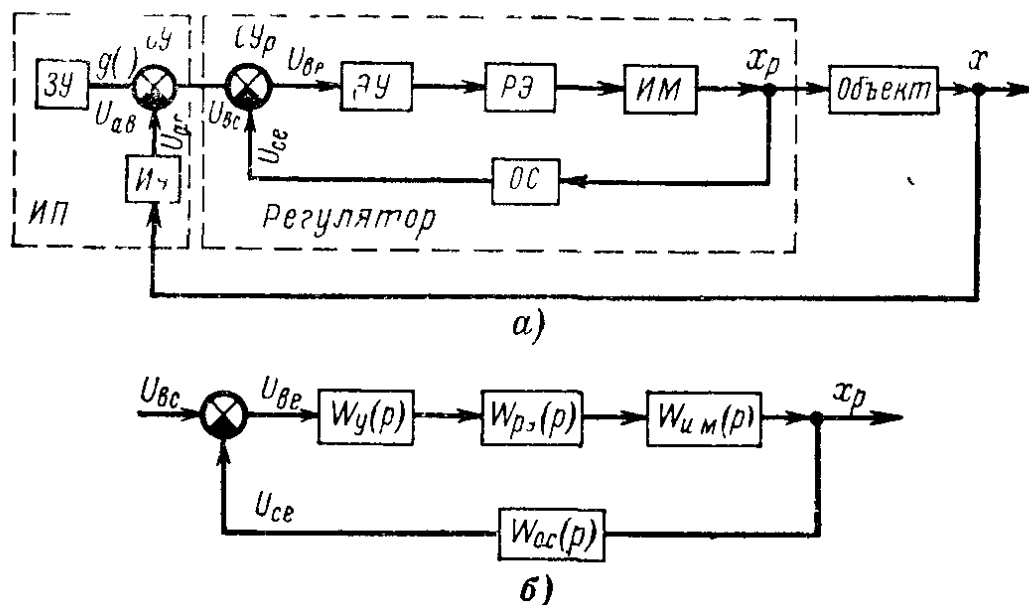


Рис 6-23 Регулятор с регулирующим устройством РУ4-16А.
а — функциональная блок схема, б — структурная схема

Выходное реле включает исполнительный механизм $ИМ$, электродвигатель которого начинает вращаться, воздействуя на регулирующий орган объекта в сторону восстановления заданного значения регулируемой величины. Одновременно исполнительный механизм перемещает реохорд реостата обратной связи $R_{з2}$, с которого на сумматор $СУ_r$ регулятора РУ4-16А будет подаваться напряжение $U_{се}$ обратной полярности по отношению к напряжению $U_{вс}$, поступающему от измерительного прибора. Когда разность этих напряжений, усиленная электронным усилителем, станет меньше напряжения отпускания выходного реле, исполнительный механизм отключится.

Обозначив передаточную функцию электронного усилителя $W_y(p)$, передаточную функцию релейного элемента $W_{рэ}(p)$, передаточную функцию исполнительного механизма $W_{им}(p)$ и передаточную функцию обратной связи $W_{ос}(p)$, можем представить структурную схему регулятора в виде, изображенном на рис. 6-23, б.

Так как электронный усилитель в динамическом отношении является усилительным звеном, то, обозначив его коэффициент усиления через k_y , получим $W_y(p) = k_y$. После линеаризации релейный элемент также можно представить в виде некоторого усилительного звена с коэффициентом усиления k_n и передаточной функцией $W_{p \text{ э}}(p) = k_n$.

Так как в качестве исполнительного механизма в регуляторе применен электродвигатель, то его передаточная функция равна $W_{и м}(p) = \frac{1}{T_{и м} p}$.

Обратную связь с передаточной функцией $W_{о с}(p)$ можно представить в виде трех звеньев с передаточными функциями $W_1(p)$, $W_2(p)$ и $W_3(p)$, соединенных последовательно, т. е. $W_{о с}(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)$. Входной величиной первого звена является угол поворота x_p выходного вала исполнительного механизма (рис. 6-23), а выходной величиной — перемещение реохорда реостата обратной связи R_{32} (см. рис. 6-22). Так как исполнительный механизм кинематически жестко связан с реохордом, то это звено является усилительным. Обозначив его коэффициент передачи через k_1 , получим $W_1(p) = k_1$. Входной величиной второго звена является перемещение реохорда сопротивления обратной связи R_{32} , которое образует два плеча электрического моста обратной связи, а выходной величиной — напряжение u_{cf} , снимаемое с сопротивления R_6 , включенного в диагональ этого моста. Как было показано в § 2-8, электрический мост в динамическом отношении является усилительным звеном. Обозначив его коэффициент передачи через k_2 , получим передаточную функцию второго звена в виде $W_2(p) = k_2$. На рис. 6-24, а представлена принципиальная электрическая схема суммирующего устройства измерительного прибора и обратной связи. Как видно из схемы, коэффициент передачи k_2 можно изменять путем перемещения вручную движка сопротивления R_6 , в результате чего изменяется величина напряжения U_{cf} . Третье звено представляет собой электрическую цепь, состоящую из сопротивлений R_1 и R_5 и емкостей C_1 и C_2 . Его принципиальная электрическая схема представлена на рис. 6-24, б.

Входной величиной этого звена является напряжение U_{cf} , а выходной величиной — напряжение U_{ce} , которое является выходным напряжением обратной связи регулятора $U_{ce} = U_{о с}$.

Согласно законам Кирхгофа для электрической цепи,

изображенной на рис. 6-24, б, можем написать систему уравнений:

$$(I) \quad u_{cf} = \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + i_2 R_1; \quad (II) \quad i_2 R_1 = i_3 R_5 + \frac{1}{C_2} \int i_3 dt;$$

$$(III) \quad \frac{1}{C_2} \int i_3 dt = u_{oc}; \quad (IV) \quad i_1 = i_2 + i_3.$$

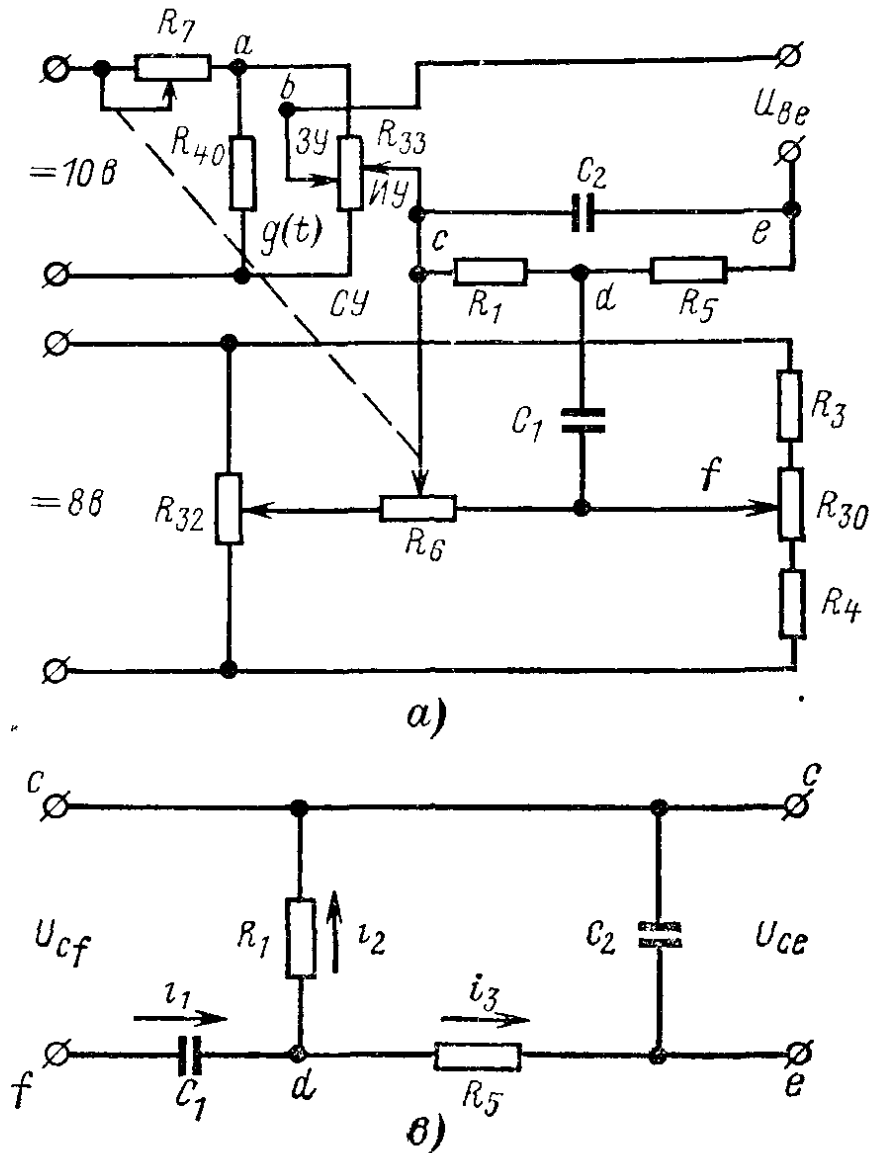


Рис 6 24 Принципиальная электрическая схема суммирующего устройства и обратной связи РУ4-16А

Продифференцировав уравнение (III), получим:

$$i_3 = C_2 \frac{du_{oc}}{dt} \quad (V)$$

После вторичного дифференцирования получим:

$$\frac{di_3}{dt} = C_2 \frac{d^2 u_{oc}}{dt^2}$$

Из уравнений (II), (III) и (V) находим

$$i_2 = \frac{R_5}{R_1} i_3 + \frac{u_{o\ c}}{R_1} = C_2 \frac{R_5}{R_1} \cdot \frac{du_{o\ c}}{dt} + \frac{u_{o\ c}}{R_1}$$

Продифференцировав полученное выражение, получим.

$$\frac{di_2}{dt} = C_2 \frac{R_5}{R_1} \cdot \frac{d^2 u_{o\ c}}{dt^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{du_{o\ c}}{dt}.$$

Продифференцировав уравнение (I), найдем:

$$\frac{du_{cf}}{dt} = \frac{i_1}{C_1} + R_1 \frac{di_2}{dt};$$

подставив в это уравнение найденное выражение для di_2/dt и решив его относительно i_1 , будем иметь:

$$i_1 = C_1 \frac{du_{cf}}{dt} - C_1 R_1 \left(C_2 \frac{R_5}{R_1} \cdot \frac{d^2 u_{o\ c}}{dt^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{du_{o\ c}}{dt} \right).$$

Подставляя в уравнение (IV) найденные величины i_1 , i_2 и i_3 , получим выражение

$$\begin{aligned} C_1 \frac{du_{cf}}{dt} - C_1 R_1 \left(C_2 \frac{R_5}{R_1} \cdot \frac{d^2 u_{o\ c}}{dt^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{du_{o\ c}}{dt} \right) = \\ = C_2 \frac{R_5}{R_1} \cdot \frac{du_{o\ c}}{dt} + \frac{u_{o\ c}}{R_1} + C_2 \frac{du_{o\ c}}{dt}, \end{aligned}$$

которое представляет собой дифференциальное уравнение звена обратной связи.

В окончательном виде дифференциальное уравнение, вытекающее из системы уравнений (I) — (IV), запишется как

$$\begin{aligned} R_1 R_5 C_1 C_2 \frac{d^2 u_{o\ c}}{dt^2} + (C_1 R_1 + C_2 R_5 + C_2 R_1) \times \\ \times \frac{du_{o\ c}}{dt} + u_{o\ c} = R_1 C_1 \frac{du_{cf}}{dt}. \end{aligned}$$

В операторной форме можем записать:

$$\begin{aligned} [R_1 R_5 C_1 C_2 p^2 + (R_1 C_1 + C_2 R_5 + C_2 R_1) p + 1] \times \\ \times u_{o\ c}(p) = R_1 C_1 p u_{cf}(p). \end{aligned}$$

Отсюда

$$W_3(p) = \frac{R_1 C_1 p}{R_1 R_5 C_1 C_2 p^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_5 C_2) p + 1}.$$

Учитывая, что $W_{o\ c}(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p)$, подставив выражения для передаточных функций и обозначив коэф-

коэффициент передачи обратной связи через $k_{o.c} = k_1 k_2$, получим передаточную функцию обратной связи регулятора:

$$W_{o.c}(p) = \frac{k_{o.c} R_1 C_1 p}{R_1 R_5 C_1 C_2 p^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_5 C_2) p + 1} \quad (6-60)$$

Из структурной схемы (см. рис. 6-23, б) найдем передаточную функцию регулятора:

$$W_p(p) = \frac{W_y(p) W_{p.э}(p) W_{н.м}(p)}{1 + W_y(p) W_{p.э}(p) W_{н.м}(p) W_{o.c}(p)}$$

Подставив выражение для передаточных функций звеньев, получим:

$$W_p(p) = \frac{k_y k_H [R_1 R_5 C_1 C_2 p^2 + (R_1 C_1 + \dots \rightarrow \\ \leftarrow \dots + R_1 C_2 + R_5 C_2) p + 1]}{p [R_1 R_5 C_1 C_2 T_{н.м} p^2 + (R_1 C_1 + \dots \rightarrow \\ \leftarrow \dots + R_1 C_2 + R_5 C_2) T_{н.м} p + T_{н.м} + k_{o.c} k_y k_H R_1 C_1]}$$

или

$$W_p(p) = k_p \left(1 + T_{пр} p + \frac{1}{T_H p} \right) \times \\ \times \frac{1}{T_{\delta 2}^2 p^2 + T_{\delta 1} p + 1} = W_{ПИД}(p) W_{\delta}(p), \quad (6-61)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_p &= \frac{k_y k_H (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_5 C_2)}{T_{н.м} + k_y k_H k_{o.c} R_1 C_1}; \\ T_H &= R_1 (C_1 + C_2) + R_5 C_2; \\ T_{пр} &= \frac{R_1 R_5 C_1 C_2}{R_1 (C_1 + C_2) + R_5 C_2}; \\ T_{\delta 2} &= \sqrt{\frac{T_{н.м} R_1 R_5 C_1 C_2}{T_{н.м} + k_y k_H k_{o.c} R_1 C_1}}; \\ T_{\delta 1} &= \frac{[R_1 (C_1 + C_2) + R_5 C_2] T_{н.м}}{T_{н.м} + k_y k_H k_{o.c} R_1 C_1}. \end{aligned} \right\} \quad (6-62)$$

Таким образом, регулятор осуществляет пропорционально-интегрально-дифференциальный закон регулирования с некоторой погрешностью, определяемой наличием после-

довательно включенного балластного инерционного звена второго порядка с передаточной функцией

$$W_6(p) = \frac{1}{T_{62}^2 p^2 + T_{61} p + 1}.$$

Сравнивая выражения (6-61) и (6-62) с выражениями (6-52) и (6-53), видим, что структурная схема рассматриваемого регулятора в динамическом отношении равноценна структурной схеме, изображенной на рис. 6-20, а, хотя она и имеет принципиальное отличие, заключающееся в том, что в регуляторе РУ4-16А обратная связь охватывает не только регулирующее устройство, но и исполнительный механизм. Закон регулирования РУ4-16А и ПИД-режиме имеет вид, показанный на рис. 6-21, а.

Из выражений (6-62) следует, что уменьшение отрицательного влияния балластного звена может быть достигнуто или путем уменьшения постоянной времени исполнительного механизма $T_{и м}$, или увеличением коэффициентов передачи электронного усилителя k_y релейного элемента k_n и обратной связи $k_{о с}$.

Путем изменения величины сопротивления R_1 постоянная времени изодрома $T_{и}$ в регуляторе РУ4-16А может изменяться в пределах от 1 до 3 000 сек.

Постоянная времени предварения $T_{пр}$ может устанавливаться в пределах от 0,2 до 420 сек изменением сопротивления R_5 .

В то же время из формул (6-62) видно, что изменение сопротивления R_1 изменяет также $T_{пр}$, а изменение сопротивления R_5 оказывает значительное влияние не только на $T_{пр}$, но и на $T_{и}$.

Изменяя величины коэффициента усиления электронного усилителя k_y и коэффициента передачи обратной связи $k_{о с}$, можно устанавливать величину коэффициента усиления регулятора k_p в пределах от 1 до 250.

Одним из существенных недостатков рассматриваемого регулятора является то, что между параметрами настройки k_p , $T_{и}$ и $T_{пр}$ имеются тесные взаимосвязи и воздействие на любой из них отражается и на двух других, и на балластном звене.

Максимальная величина отношения $T_{пр}/T_{и}$ в регуляторе РУ4-16А не превосходит 0,18—0,19.

При отсоединении емкости C_2 в цепи обратной связи (т. е. если $C_2 = 0$) выражения (6-61) и (6-62) приобретают иной вид:

$$W_p(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_{и} p} \right) \frac{1}{T_6 p + 1} = W_{пн}(p) W_6(p), \quad (6-63)$$

где

$$k_p = \frac{k_y k_H R_1 C_1}{T_{и м} + k_y k_H k_{о, с} R_1 C_1}; \quad T_{и} = R_1 C_1;$$

$$T_6 = \frac{R_1 C_1 T_{и м}}{T_{и м} + k_y k_H k_{о, с} R_1 C_1}. \quad (6-64)$$

Таким образом, при $C_2 = 0$ регулятор работает в пропорционально-интегральном режиме. Отрицательное влияние балластного звена может быть уменьшено путем уменьшения постоянной времени исполнительного механизма и увеличения коэффициентов передачи электронного усилителя, релейного элемента или обратной связи.

Закон регулирования РУ4-16А в ПИ-режиме имеет вид, изображенный на рис. 6-14.

Если при $C_2 = 0$ дополнительно замкнуть емкость C_1 , что соответствует условию $C_1 = \infty$, то из выражений (6-63) и (6-64) получим:

$$W_p(p) = k_p \frac{1}{T_6 p + 1} = W_{п}(p) W_6(p), \quad (6-65)$$

где

$$k_p = \frac{1}{k_{о, с}}, \quad T_6 = \frac{T_{и м}}{k_y k_H k_{о, с}}. \quad (6-66)$$

Следовательно, в таких условиях регулятор будет работать в режиме реального П-регулятора со структурной схемой по рис. 6-11, а. Закон регулирования имеет вид, представленный на рис. 6-11, б.

Если в цепи обратной связи замкнуть только емкость C_1 , сохранив $C_2 \neq 0$, то из выражений (6-61) и (6-62) при $C_1 = \infty$ получим:

$$W_p(p) = k_p \frac{1}{(1 + T_{пр} p) T_{62}^2 p^2 + T_{61} p + 1}, \quad (6-67)$$

где

$$k_p = \frac{1}{k_{о, с}}; \quad T_{пр} = R_5 C_2. \quad (6-68)$$

$$T_{б1} = \frac{T_{и \cdot м}}{k_y k_H k_{о \cdot с}} ; \quad T_{б2} = \sqrt{\frac{T_{и \cdot м} R_s C_2}{k_y k_H k_{о \cdot с}}} .$$

Следовательно, в этом случае регулятор работает в режиме пропорционального регулирования с предварением (ПД-режим) с сохранением искажающего влияния балластного звена.

Если в цепи обратной связи закоротить сопротивления R_1 и R_5 и отключить емкость C_2 , что равноценно отключению действия обратной связи (так как при $R_1 = R_5 = C_2 = 0$ получим $W_{о \cdot с} = 0$), то регулятор будет осуществлять интегральный закон регулирования с передаточной функцией

$$W_p(p) = \frac{k_p}{p} , \quad (6-69)$$

где

$$k_p = \frac{k_y k_H}{T_{и \cdot м}} . \quad (6-70)$$

Таким образом, регулирующее устройство РУ4-16А в комплекте с интегрирующим исполнительным механизмом и измерительным прибором может осуществлять при несложных переналадках в широких пределах различные законы автоматического регулирования.

Электронные регулирующие приборы серий РПИК, РПИБ и корректирующие приборы КПИ могут формировать ПИД-закон регулирования только при работе в комплекте с дифференцирующими устройствами, например ДЛ-Т.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ПОНЯТИЕ О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

К нелинейным системам автоматического регулирования относятся системы, которые содержат не менее одного существенно нелинейного звена или элемента. Для нелинейного элемента (НЭ) характерно то, что между его входной и выходной величинами нет однозначной линейной зависимости.

Нелинейные зависимости между входной и выходной величинами звена или элемента называются нелинейностями.

7-1. НЕКОТОРЫЕ ТИПИЧНЫЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ

К числу типичных можно отнести следующие нелинейности.

1. Нечувствительность

При возрастании входного воздействия $x_{вх}$ по абсолютной величине в ту или иную сторону от нуля до некоторой величины $\pm a$ этот сигнал через нелинейный элемент не проходит. При $x_{вх} > a$ или $x_{вх} < -a$ зависимость между входной и выходной величинами линейна.

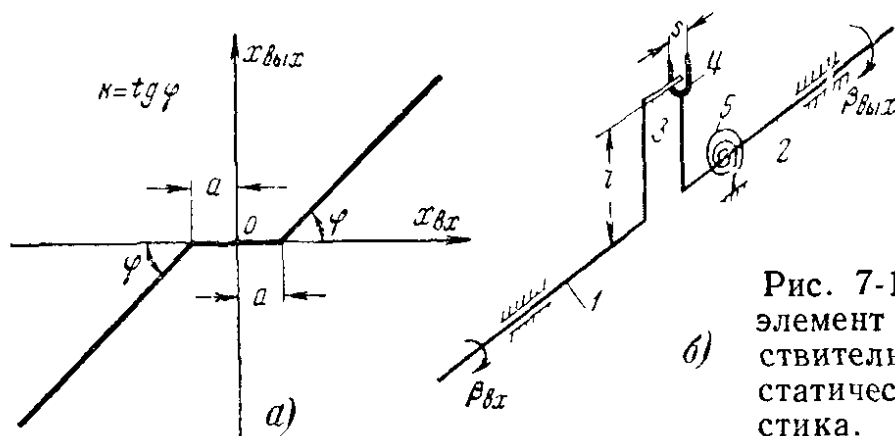


Рис. 7-1. Нелинейный элемент с зоной нечувствительности и его статическая характеристика.

Статическая характеристика такого нелинейного элемента представлена на рис. 7-1, а. Аналитически она определяется зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{вых}} &= 0 && \text{при } |x_{\text{вх}}| \leq a; \\ x_{\text{вых}} &= k(x_{\text{вх}} - a) && \text{при } x_{\text{вх}} \geq a; \\ x_{\text{вых}} &= k(x_{\text{вх}} + a) && \text{при } x_{\text{вх}} \leq -a, \end{aligned} \right\} \quad (7-1)$$

где k — коэффициент пропорциональности, равный $\text{tg } \varphi$. Величина $2a$ называется зоной нечувствительности нелинейного элемента.

В качестве иллюстрации нелинейного элемента с зоной нечувствительности может служить передача вращения от ведущего вала 1 к ведомому валу 2 (рис. 7-1, б), если за входную и выходную величины принять их углы поворота. Ведущий вал имеет палец 3, который заходит в вилку 4 ведомого вала. Ведомый вал фиксируется в нулевом положении пружиной 5.

При диаметре пальца d , расстоянии от оси пальца до оси ведущего вала l и ширине вилки s , если $\frac{s-d}{2} \ll l$, зона нечувствительности элемента будет равна:

$$2a = \frac{s-d}{l}.$$

При повороте ведущего вала от нулевого положения на угол $\pm \beta_{\text{вх}} \leq a = \pm \frac{s-d}{2l}$ ведомый вал будет находиться в покое.

Только при $|\beta_{\text{вх}}| > a$ ведомый вал будет вращаться от ведущего вала.

Если после поворота ведущего вала на угол $\beta_{\text{вх}} > \alpha$ вращать ведущий вал в обратную сторону, то благодаря пружине ведомый вал сразу же, как и ведущий, начнет вращаться тоже в обратную сторону.

При достижении ведомым валом нулевого положения он остановится, так как действие пружины прекратится, и снова начнет вращаться в ту же сторону только после того, как ведущий вал, продолжая вращаться в ту же сторону, пройдет зону нечувствительности 2α .

2. Ограничение

На выходную величину может быть наложено ограничение, заключающееся в том что, она не может превысить по абсолютной величине определенный предел B . При $|x_{\text{вых}}| < B$ между входной и выходной величинами имеется линейная зависимость. Когда выходная величина достигает значения $\pm B$, дальнейшее увеличение входной величины не приводит к изменениям выходной величины, которая остается постоянной.

Статическая характеристика нелинейного элемента с ограничением представлена на рис. 7-2, а. Аналитически она определяется зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{вых}} &= kx_{\text{вх}} \quad \text{при} \\ |x_{\text{вх}}| &\leq \frac{B}{k}; \\ x_{\text{вых}} &= B \quad \text{при} \\ x_{\text{вх}} &\geq \frac{B}{k}; \\ x_{\text{вых}} &= -B \quad \text{при} \\ x_{\text{вх}} &< -\frac{B}{k}. \end{aligned} \right\} (7-2)$$

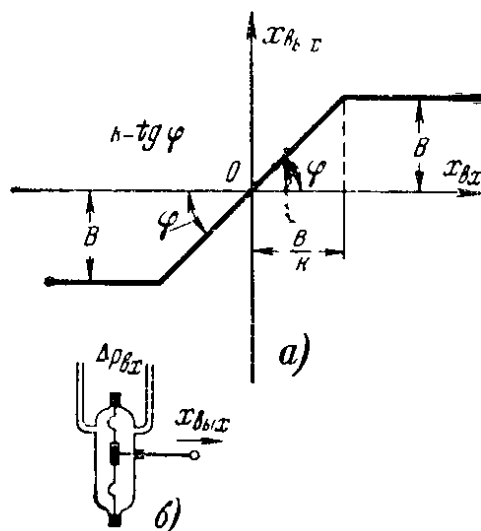


Рис. 7-2. Нелинейный элемент с ограничением и его статическая характеристика.

В качестве примера нелинейного элемента с ограничением можно привести мембранный чувствительный элемент (рис. 7-2, б), если в качестве входной величины принять перепад давлений, действующих с двух сторон на мембрану — $\Delta p_{\text{вх}}$, а за выходную величину — перемещение $x_{\text{вых}}$ штока, жестко связанного с мембраной.

При небольшом входном воздействии на мембрану между входной и выходной величинами имеется линейная зависимость

$$x_{\text{вых}} = k \Delta p_{\text{вх}}.$$

При возрастании перепада на мембране, когда она упрется в корпус и перемещение штока достигнет максимальной величины $x_{\text{вых.макс}} = B$, дальнейшее увеличение перепада давлений не приведет к дополнительному перемещению штока.

3. Нечувствительность и ограничение

Статическая характеристика нелинейного элемента с нечувствительностью и ограничением изображена на рис. 7-3. Аналитически она определяется зависимостями.

$$\left. \begin{aligned}
 x_{\text{ВЫХ}} &= 0 \quad \text{при} \quad |x_{\text{ВХ}}| \leq a; \\
 x_{\text{ВЫХ}} &= k(x_{\text{ВХ}} - a) \quad \text{при} \quad a < x_{\text{ВХ}} < \frac{B}{k} + a; \\
 x_{\text{ВЫХ}} &= B \quad \text{при} \quad x_{\text{ВХ}} \geq \frac{B}{k} + a; \\
 x_{\text{ВЫХ}} &= k(x_{\text{ВХ}} + a) \quad \text{при} \quad -\left(\frac{B}{k} + a\right) \leq x_{\text{ВХ}} \leq -a; \\
 x_{\text{ВЫХ}} &= -B \quad \text{при} \quad x_{\text{ВХ}} \leq -\left(\frac{B}{k} + a\right).
 \end{aligned} \right\} (7-3)$$

Если мембранный чувствительный элемент (см. рис. 7-2, б) применить для поворота вала 2 (см. рис. 7-1, б), осуществив их сочленение посредством пальца на штоке и вилки на вале, то, при-

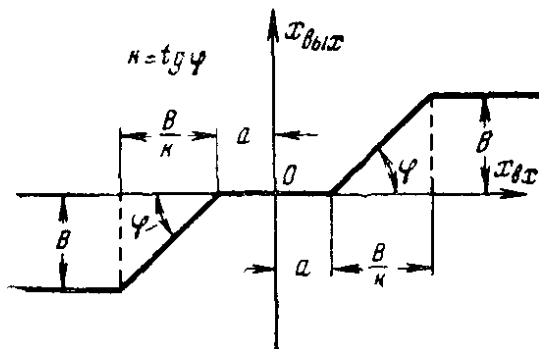


Рис. 7-3. Статическая характеристика нелинейного элемента с зоной нечувствительности и ограничением.

няв за входную величину перепад давлений $\Delta p_{\text{ВХ}}$, а за выходную величину $\beta_{\text{ВЫХ}}$, получим нелинейный элемент с зоной нечувствительности и ограниченным значением выходной величины.

4. Люфт

Если в нелинейном элементе (см. рис. 7-1, б) убрать пружину, фиксирующую ведомый вал в нулевом положении, то получим нелинейность с принципиально отличной статической характеристикой. В этом случае при изменении вращения ведомого вала в любом положении ведомый вал до тех пор не будет вращаться, пока не будет выбран люфт $2a$ между пальцем и вилкой (рис. 7-4, б).

Статическая характеристика нелинейного элемента с люфтом представлена на рис 7-4, а. Аналитически она определяется зависимостями

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{ВЫХ}} &= k(x_{\text{ВХ}} - a) \quad \text{при} \quad \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} > 0 \quad \text{и} \quad kx_{\text{ВХ}} - x_{\text{ВЫХ}} = ka; \\ x_{\text{ВЫХ}} &= k(x_{\text{ВХ}} + a) \quad \text{при} \quad \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} < 0 \quad \text{и} \quad x_{\text{ВЫХ}} - kx_{\text{ВХ}} = ka; \\ \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dx_{\text{ВХ}}} &= 0 \quad \text{при} \quad \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} > 0 \quad \text{и} \quad kx_{\text{ВХ}} - x_{\text{ВЫХ}} < ka; \\ \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dx_{\text{ВХ}}} &= 0 \quad \text{при} \quad \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} < 0 \quad \text{и} \quad x_{\text{ВЫХ}} - kx_{\text{ВХ}} < ka. \end{aligned} \right\} \quad (7-4)$$

Наличие люфта в большей или меньшей степени присуще всем механическим кинематическим передачам.

5. Люфт и ограничение

Статическая характеристика этой нелинейности представлена на рис 7-4, б

Нелинейный элемент с люфтом и ограничением можно получить, применив, например, в качестве привода вала 2 на рис. 7-4, б чувствительный мембранный элемент по рис. 7-2, б, сочленив их посредством пальца на штоке и вилки на вале 2.

6. Релейные элементы

Элементы, в которых выходная величина может принимать лишь конечное число значений при непрерывном изменении входной величины, называются релейными.

Релейные элементы имеют следующие основные разновидности, обладающие различными статическими характеристиками

а) Релейные элементы с зоной нечувствительности

При изменении входной величины от нуля до некоторого ее значения $a > x_{\text{ВХ}} > -a$ выходная величина релейного элемента равна нулю.

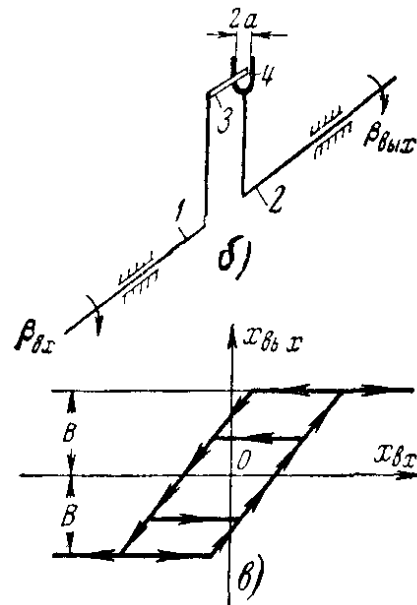
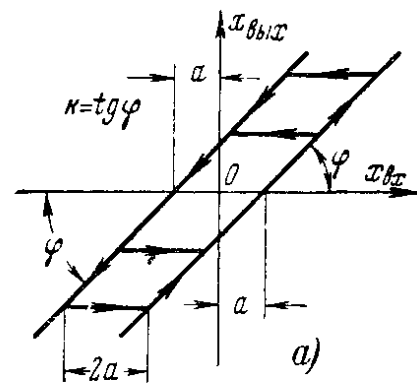


Рис 7-4. Нелинейный элемент с люфтом и его статическая характеристика при отсутствии ограничения (а) и с ограничением (б).

При некотором абсолютном значении входной величины $|x_{вх}| = a$ выходная величина скачком принимает определенное абсолютное значение $|x_{вых}| = B$, которое остается постоянным при дальнейшем изменении входной величины в том же направлении. При обратном изменении входной величины и достижении ею значения

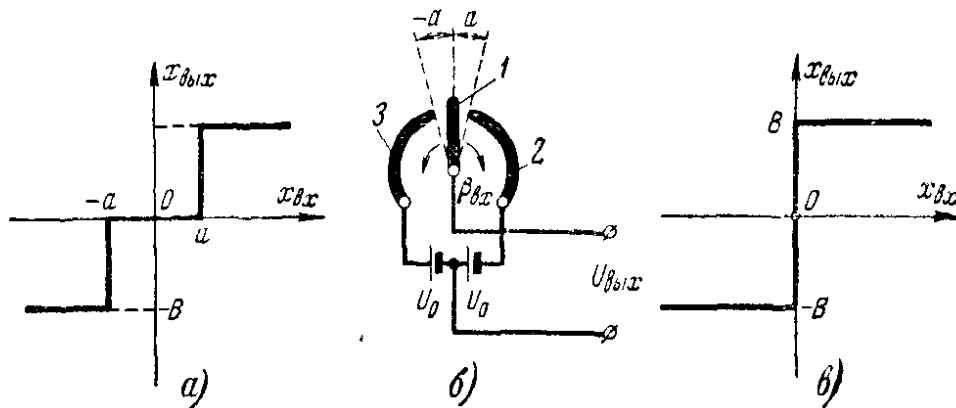


Рис. 7-5. Однозначный трехпозиционный релейный элемент (б) и его статические характеристики при наличии зоны нечувствительности (а) и отсутствии зоны нечувствительности с фиксированным нулевым положением (в).

$|x_{вх}| = a$ выходная величина скачком принимает нулевое значение. Характеристика такого звена представлена на рис. 7-5, а. Аналитически она определяется зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} x_{вых} &= 0 && \text{при } -a < x_{вх} < a; \\ x_{вых} &= B && \text{при } x_{вх} \geq a; \\ x_{вых} &= -B && \text{при } x_{вх} \leq -a. \end{aligned} \right\} \quad (7-5)$$

Величина $2a$ называется зоной нечувствительности элемента.

В качестве примера релейного элемента с зоной нечувствительности может служить устройство, изображенное на рис. 7-5, б. За входную величину принят угол поворота $\beta_{вх}$ движка 1, а за выходную величину — напряжение $U_{вых}$. При повороте движка по часовой стрелке на угол $\beta_{вх} < a$ напряжение $U_{вых} = 0$. При $\beta_{вх} \geq a$ движок коснется медной шины 2 и выходное напряжение будет равно напряжению батареи $U_{вых} = U_0$.

При дальнейшем повороте движка по часовой стрелке значение $U_{вых} = U_0$ остается постоянным.

При обратном вращении движка при $-a < \beta_{вх} < a$ получим $U_{вых} = 0$.

При $\beta_{вх} \leq -a$ движок касается медной шины 3 и напряжение $U_{вых} = -U_0$.

б) Релейные элементы без зоны нечувствительности

Если величина зоны нечувствительности устройства по рис. 7-5, будет очень мала и практически ее можно считать равной нулю,

получим идеализированную релейную характеристику по рис. 7-5, в. Аналитически она определяется зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{ВЫХ}} &= 0 && \text{при } x_{\text{ВХ}} = 0; \\ x_{\text{ВЫХ}} &= B && \text{при } x_{\text{ВХ}} > 0; \\ x_{\text{ВЫХ}} &= -B && \text{при } x_{\text{ВХ}} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (7-6)$$

В этом случае получаем релейный элемент без зоны нечувствительности с нейтральным нулевым положением. Если при этом релейный элемент не имеет нейтрального нулевого положения, а

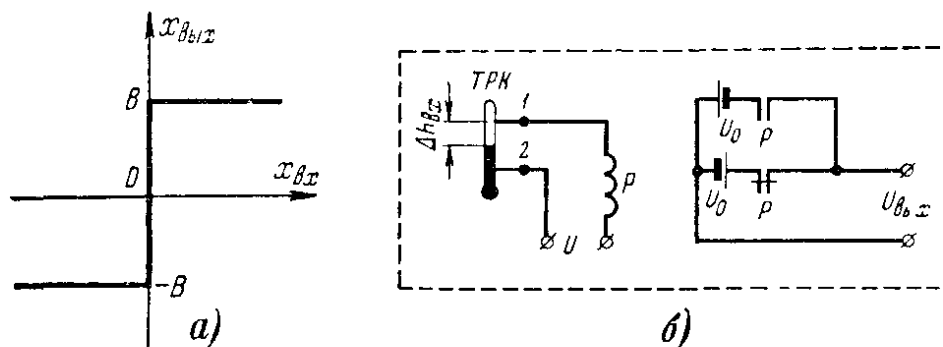


Рис. 7-6. Однозначный двухпозиционный релейный элемент без зоны нечувствительности и его статическая характеристика.

при переходе $x_{\text{ВХ}}$ через нуль величина $x_{\text{ВЫХ}}$ скачкообразно изменяется от B до $-B$ или наоборот, получим релейную характеристику по рис. 7-6, а. Она определяется зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{ВЫХ}} &= B && \text{при } x_{\text{ВХ}} \geq 0; \\ x_{\text{ВЫХ}} &= -B && \text{при } x_{\text{ВХ}} \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-7)$$

Такое звено может быть получено, например, в виде схемы на рис. 7-6, б.

За входную величину принято расстояние $\Delta h_{\text{ВХ}}$ от свободной поверхности столбика ртути в ртутном термометре с электроконтактами ТРК до верхнего контакта, пропорциональное изменению температуры в объекте, а за выходную величину принято напряжение $U_{\text{ВЫХ}}$.

При заданном значении температуры столбик ртути находится на уровне контакта 1, и тогда $\Delta h_{\text{ВХ}} = 0$.

Выходное напряжение может принимать только два значения: $U_{\text{ВЫХ}} = U_0$ при $\Delta h_{\text{ВХ}} \geq 0$ (температура выше заданной) и $U_{\text{ВЫХ}} = -U_0$ при $\Delta h_{\text{ВХ}} < 0$ (температура ниже заданной).

в) Неоднозначные релейные элементы без зоны нечувствительности

Неоднозначный релейный элемент без зоны нечувствительности имеет характеристику, представленную на рис. 7-7, а. Она определяется зависимостями:

$$\left. \begin{aligned}
 x_{\text{ВЫХ}} &= B \quad \text{при} \quad x_{\text{ВХ}} \geq b; \\
 x_{\text{ВЫХ}} &= -B \quad \text{при} \quad x_{\text{ВХ}} \leq -b; \\
 x_{\text{ВЫХ}} &= B \quad \text{при} \quad -b < x_{\text{ВХ}} < b \quad \text{и} \quad \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} < 0; \\
 x_{\text{ВЫХ}} &= -B \quad \text{при} \quad -b < x_{\text{ВХ}} < b \quad \text{и} \quad \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} > 0.
 \end{aligned} \right\} (7-8)$$

Величина $2b$ определяет величину зоны неоднозначности релейного элемента. При $b = 0$ получаем характеристику по рис. 7-6, а. Таким образом, характеристика на рис. 7-6, а является

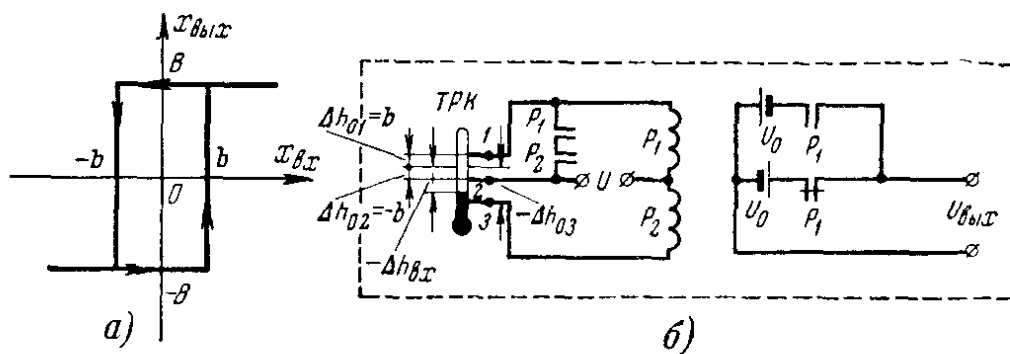


Рис. 7-7. Неоднозначный релейный элемент без зоны нечувствительности и его статическая характеристика.

идеализированной, характеристикой по рис. 7-7, а. Примером неоднозначного релейного элемента без зоны нечувствительности может служить схема, изображенная на рис. 7-7, б.

Входной величиной $\Delta h_{\text{ВХ}}$ является положение свободной поверхности столбика ртути в ртутном термометре ТРК с электроконтактами относительно некоторого начального его положения, соответствующего заданному значению температуры в объекте, а выходной величиной — напряжение $U_{\text{ВЫХ}}$. При заданном значении температуры свободная поверхность столбика ртути находится в среднем положении между контактами 1 и 2. При этом $\Delta h_{\text{ВХ}} = 0$.

Если столбик ртути находится ниже контакта 3 и $\Delta h_{\text{ВХ}} < -\Delta h_{03}$, то напряжение $U_{\text{ВЫХ}} = -U_0$, так как нормально замкнутый контакт реле P_1 замкнут. При повышении температуры и замыкании контактов 2—3 ртутным столбиком срабатывает реле P_2 , замыкая свой нормально открытый контакт P_2 . При дальнейшем повышении температуры замыкаются контакты 1—2 ртутного термометра и $\Delta h_{\text{ВХ}} = \Delta h_{01} = b$, при этом срабатывает реле P_1 , размыкается его нормально замкнутый контакт и замыкаются два нормально открытых контакта. Выходное напряжение меняет фазу, принимая значение $U_{\text{ВЫХ}} = U_0$, а реле P_1 встает на самопитание через свой замкнувшийся нормально открытый контакт и ранее замкнувшийся нормально открытый контакт реле P_2 . При $\Delta h_{\text{ВХ}} > \Delta h_{01} = b$ выходное напряжение сохраняет свою величину $U_{\text{ВЫХ}} = U_0$.

При понижении температуры сначала размыкаются контакты 1 и 2 термометра, но реле P_1 остается включенным, так как оно находится на самопитании через замкнувшиеся нормально открытые контакты реле P_1 и P_2 .

При дальнейшем понижении температуры размыкаются контакты 2—3 термометра, реле P_2 обесточивается, размыкается его нормально открытый контакт в цепи питания реле P_1 и оно также обесточивается. Поэтому размыкаются его нормально открытые контакты, а нормально замкнутый контакт замыкается, выходное напряжение скачком меняет фазу, принимая значение $U_{\text{ВЫХ}} = -U_0$, и остается постоянным при дальнейшем снижении температуры.

При повышении температуры последовательность работы элементов схемы повторяется.

г) Неоднозначные релейные элементы с зоной нечувствительности

Релейные элементы этого вида имеют характеристику, изображенную на рис. 7-8, а.

Аналитически она определяется зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{ВЫХ}} &= B \quad \text{при} \quad x_{\text{ВХ}} \geq a_2; \\ x_{\text{ВЫХ}} &= -B \quad \text{при} \quad x_{\text{ВХ}} \leq -a_2; \\ x_{\text{ВЫХ}} &= 0 \quad \text{при} \quad -a_1 \leq x_{\text{ВХ}} \leq a_1; \\ x_{\text{ВЫХ}} &= B \quad \text{при} \quad a_1 \leq x_{\text{ВХ}} \leq a_2 \quad \text{и} \quad \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} < 0; \\ x_{\text{ВЫХ}} &= 0 \quad \text{при} \quad a_1 \leq x_{\text{ВХ}} \leq a_2 \quad \text{и} \quad \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} > 0; \\ x_{\text{ВЫХ}} &= -B \quad \text{при} \quad -a_2 < x_{\text{ВХ}} < -a_1 \quad \text{и} \quad \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} > 0; \\ x_{\text{ВЫХ}} &= 0 \quad \text{при} \quad -a_2 \leq x_{\text{ВХ}} \leq -a_1 \quad \text{и} \quad \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (7-9)$$

При возрастании входной величины от нулевого положения до значения $x_{\text{ВХ}} = a_2$ значение выходной величины равно нулю.

При $x_{\text{ВХ}} = a_2$ выходная величина скачком принимает значение $x_{\text{ВЫХ}} = B$, которое остается постоянным при $x_{\text{ВХ}} > a_2$.

При уменьшении входной величины выходная величина остается постоянной ($x_{\text{ВЫХ}} = B$) до значения входной величины $x_{\text{ВХ}} = a_1 < a_2$. При $x_{\text{ВХ}} = a_1$ выходная величина скачком уменьшается до нуля. При дальнейшем уменьшении входной величины до значения $x_{\text{ВХ}} = -a_2$ входная величина скачком принимает значение $x_{\text{ВЫХ}} = -B$, которое остается постоянным при $x_{\text{ВХ}} < -a_2$.

При изменении $x_{\text{ВХ}}$ в обратную сторону (при ее возрастании) выходная величина скачком принимает нулевое значение при $x_{\text{ВХ}} = -a_1 > -a_2$.

Минимальное абсолютное значение a_2 входной величины $x_{\text{ВХ}}$, при котором выходная величина от нуля скачком принимает определенное абсолютное значение B , называется параметром срабатывания.

Минимальное абсолютное значение a_1 входной величины $x_{вх}$, при котором выходная величина скачком возвращается к нулевому значению, называется параметром отпускания

Отношение величины параметра отпускания к величине параметра срабатывания a_1/a_2 называется *коэффициентом отпускания*

Параметры срабатывания и отпускания характеризуют нечувствительность релейного элемента соответственно при срабатывании и отпускании

Разность $a_2 - a_1$ определяет зону неоднозначности релейного элемента. При $a_1 = a_2 = a$ из характеристики на рис 7-8, а получаем характеристику по рис 7 5, а, которая, таким образом, является частным случаем более общей релейной характеристики

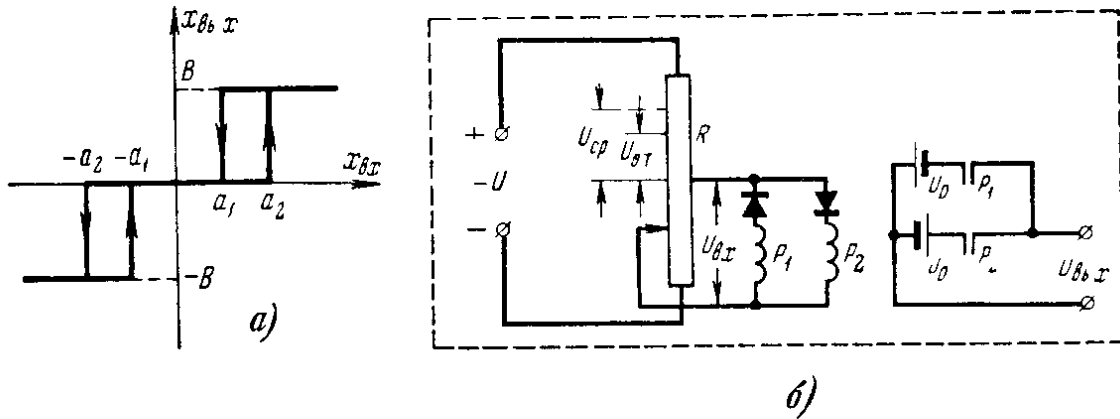


Рис. 7-8. Неоднозначный релейный элемент с зоной нечувствительности и его статическая характеристика

по рис 7 8, а при равенстве параметров срабатывания и отпускания. На рис 7 8, б приведена схема неоднозначного релейного элемента с зоной нечувствительности. За входную величину принято напряжение $U_{вх}$, снимаемое с потенциометра R , а за выходную — выходное напряжение $U_{вых}$.

При перемещении движка потенциометра вверх от среднего нулевого положения при возрастании входного напряжения до напряжения срабатывания ($U_{вх} = U_{ср}$) выходное напряжение $U_{вых} = 0$. При $U_{вх} = U_{ср}$ срабатывает реле P_1 , замыкается его нормально открытый контакт P_1 и выходное напряжение скачком принимает значение $U_{вых} = U_0$, которое при дальнейшем увеличении $U_{вх}$ остается постоянным. При перемещении движка потенциометра вниз, вследствие того что для удержания электромагнитного реле в замкнутом состоянии требуется меньшее усилие, чем при срабатывании, якорь реле P_1 отпадет только при значении входного напряжения, равном напряжению отпускания ($U_{вх} = U_{от} < U_{ср}$). При этом размыкается нормально открытый контакт P_1 и выходное напряжение скачком уменьшается до нуля. При дальнейшем перемещении движка потенциометра вниз аналогичным образом при напряжении $U_{вх} = -U_{ср}$ срабатывает реле P_2 и выходное напряжение скачком принимает значение $U_{вых} = -U_0$, при последующем перемещении движка вверх реле P_2 обесточивается при $U_{вх} = -U_{от}$ и $U_{вых}$ скачкообразно становится равным нулю.

В релейных элементах по рис 7-5, а и б и 7-8 а и б выходная величина может принимать три постоянных значения B , 0 и $-B$, поэтому такие релейные элементы называются *трехпозиционными*

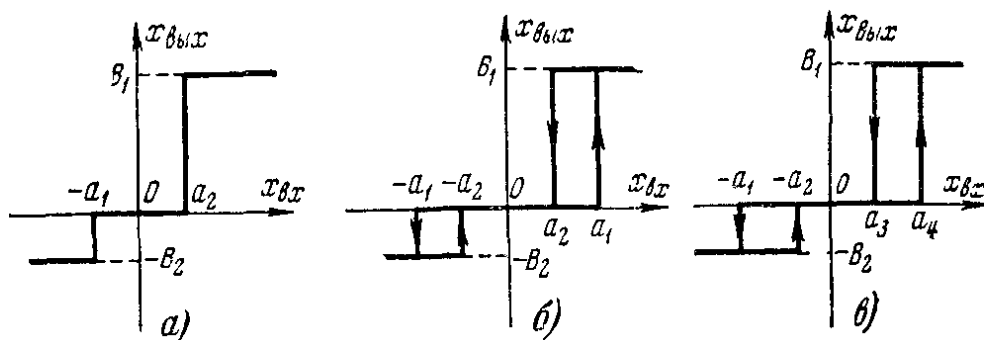


Рис 7-9 Статические характеристики несимметричных релейных элементов с зоной нечувствительности.

В релейных элементах по рис 7-6 и 7-7 выходная величина может принимать только два значения B и $-B$, поэтому такие релейные элементы называются *двухпозиционными*

В общем случае трехпозиционные релейные элементы (рис 7-9) могут иметь значения выходной величины, равные B_1 , 0 и $-B_2 \neq -B_1$

В двухпозиционных релейных элементах (рис 7-10) выходная величина тоже может принимать значения B_1 и $-B_2 \neq -B_1$, в частности значения B и 0

В общем случае абсолютные значения a и $-a$ или b и $-b$ также могут быть не равны. Такие релейные элементы называются *несимметричными*

Несимметричность в релейном элементе может быть достигнута, например, за счет несимметричного начального положения движка относительно контактных пластин (см рис 7-5, б) или при различных напряжениях питания $U_0 - U_0$ (рис 7-5, б, 7-7, б и 7-8)

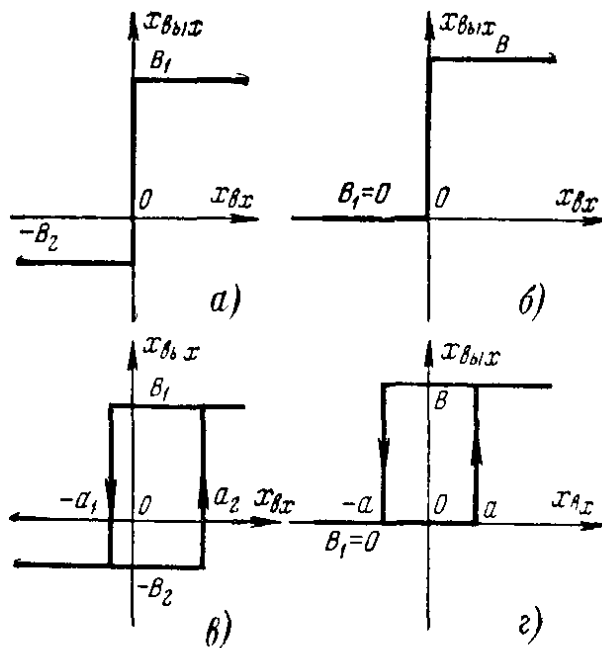


Рис 7-10 Статические характеристики несимметричных релейных элементов без зоны нечувствительности

7-2. ОСОБЕННОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Нелинейные системы автоматического регулирования, помимо нелинейных элементов, всегда содержат группу линейных звеньев. Для исследования нелинейной системы ее структурную схему пре-

образовывают таким образом, чтобы получить простейшую одно-контурную систему (рис. 7-11), в которой нелинейный элемент $НЭ$ и линейная часть $ЛЧ$ были бы соединены последовательно.

Рассмотрим несколько примеров преобразования структурных схем нелинейных систем автоматического регулирования с целью

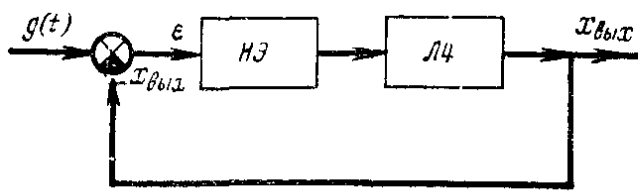
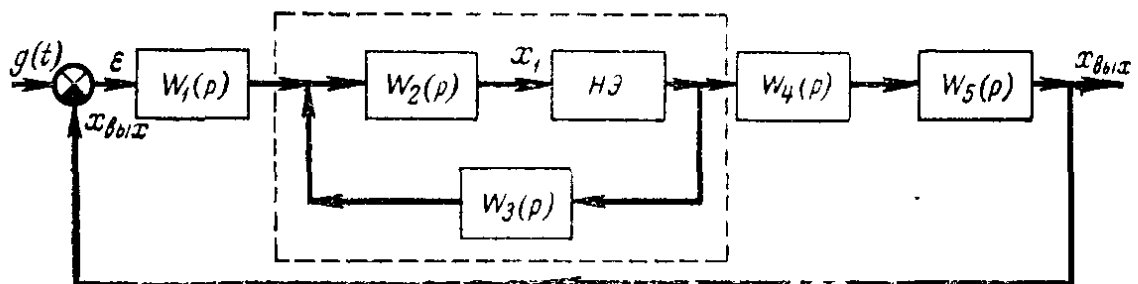


Рис. 7-11. Простейшая структурная схема нелинейной системы регулирования.

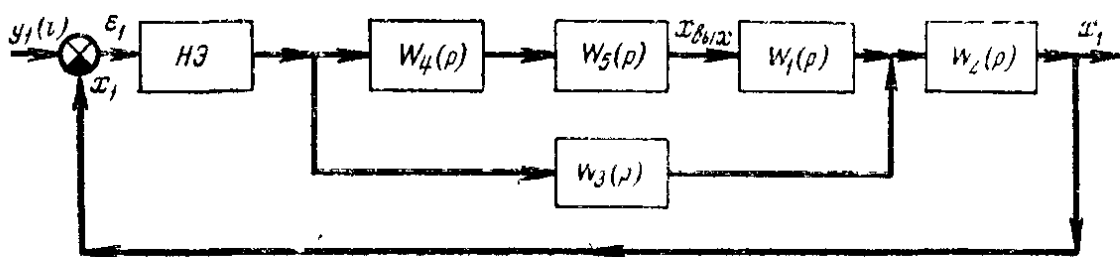
приведения их к виду, представленному на рис. 7-11

На рис. 7-12, а представлена структурная схема системы автоматического регулирования параметра $x_{\text{вых}}$ объекта, имеющего передаточную функцию $W_5(p)$, регулирование осуществляется регулятором, в котором последовательно соединены чувствительный

элемент с передаточной функцией $W_1(p)$, усилитель с передаточной функцией $W_2(p)$ и нелинейный элемент $НЭ$, выходная величина которого воздействует на исполнительный механизм с передаточ-



а)



б)

Рис. 7-12 Преобразование структурной схемы к простейшей при наличии нелинейного элемента в прямой цепи системы регулирования.

а — исходная схема; б — преобразованная схема

ной функцией $W_4(p)$, а также подается на вход усилителя регулятора по линии отрицательной обратной связи, имеющей передаточную функцию $W_3(p)$.

Разомкнем схему перед нелинейным элементом, т. е. преобразуем схему так, чтобы здесь был вход системы, тогда выходной величиной системы будет выходная величина усилителя x_1 . Регулирующее воздействие должно быть приложено к новому входу системы, поэтому сюда следует перенести регулирующее воздействие

$g(t)$. Согласно рис. 2-24, ϵ и z новое регулирующее воздействие $g_1(t)$, перед тем как попасть на вход нелинейного элемента, должно пройти через звенья с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$. Следовательно,

$$L_1 [g_1(t)] = G_1(p) = L [g(t)] W_1(p) W_2(p) = G(p) W_1(p) W_2(p).$$

Все остальные связи между звеньями сохраняются, и схема примет вид, показанный на рис. 7-12, б.

Передаточная функция линейной части схемы на рис. 7-12, б будет равна:

$$W_{л.ч}(p) = [W_1(p) W_4(p) W_5(p) + W_3(p)] W_2(p).$$

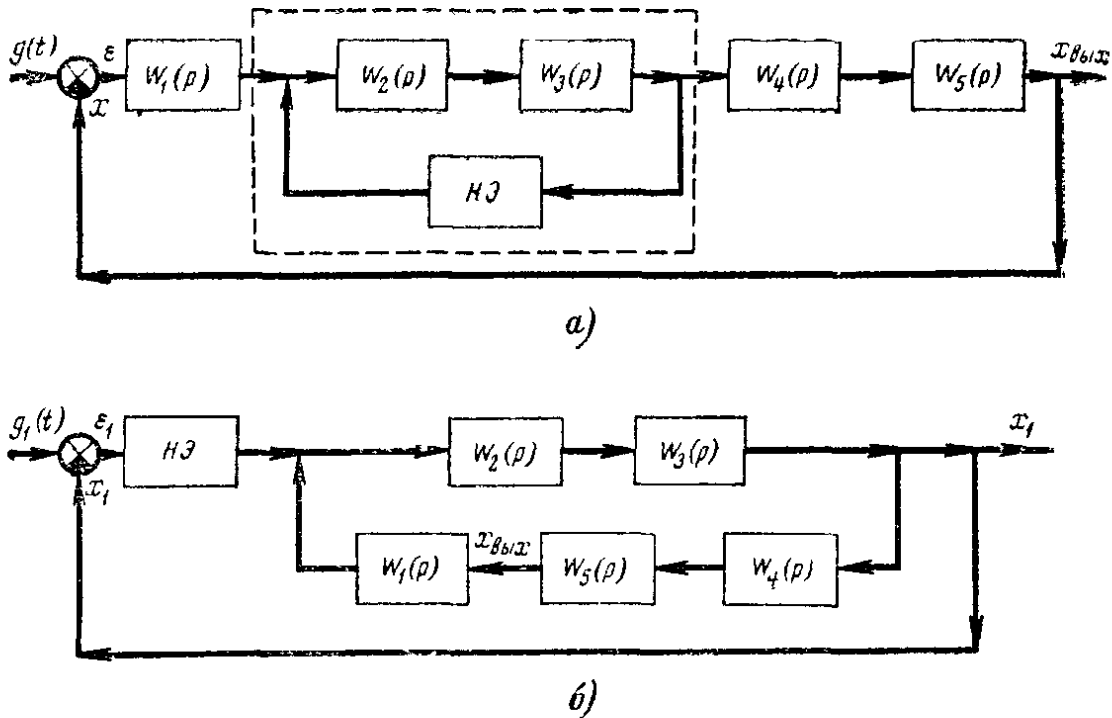


Рис. 7-13 Преобразование структурной схемы к простейшей при наличии нелинейного элемента в цепи обратной связи.

а — исходная схема, б — преобразованная схема.

Таким образом, схема по рис. 7-12, а приведена к виду, показанному на рис. 7-11.

Если в регуляторе нелинейный элемент находится в обратной связи (рис. 7-13, а), а выходное звено регулятора, действующее на исполнительный механизм, линейно и имеет передаточную функцию $W_3(p)$, то, размыкая, как и в предыдущем случае, систему перед нелинейным звеном и перенося на новый вход системы регулирующее воздействие $g(t)$, получим:

$$G_1(p) = G(p) W_1(p) W_2(p) W_3(p).$$

Структурная схема приобретает вид, показанный на рис. 7-13, б; из этой схемы следует, что передаточная функция линейной части равна:

$$W_{л.ч}(p) = \frac{W_2(p) W_3(p)}{1 + W_1(p) W_2(p) W_3(p) W_4(p) W_5(p)}.$$

Очевидно, что и в этом случае схема приобретает тот же вид, что и на рис. 7-11.

Причинами появления нелинейности в цепи обратной связи могут быть ограничения в передаче сигнала, нечувствительность, люфты в кинематических парах, трение в них, неоднозначность релейных звеньев и т. п.

Исследование нелинейных систем является более сложной задачей, чем исследования линейных систем.

Для расчетов нелинейных систем в настоящее время разработаны приближенные методы, позволяющие достаточно просто и с точностью, удовлетворительной для целей практики, решать большинство производственных задач.

Рассмотрим некоторые методы исследования работы нелинейных систем автоматического регулирования.

1. Метод припасовывания

В этом методе используется возможность расчленения переходного процесса нелинейной системы на участки, соответствующие различным диапазонам изменения регулируемой величины,

причем в пределах каждого из этих участков система может рассматриваться как линейная.

Исследуем нелинейную систему автоматического регулирования температуры сушильного шкафа по рис. 7-14, а. При включении рубильника на нагревательный элемент H подается напряжение U и температура θ в сушильном шкафу начнет повышаться. При замыкании столбиком ртутного термометра ТРК с электроконтактами срабатывает реле P_2 . При замыкании контактов $1-2$ срабатывает реле P_1 , прекращая подачу энергии в объект, вследствие размыкания размыкающего контакта P_1 . Одновременно реле P_1 встает на самопитание через свой замыкающий контакт и ранее замкнувшийся замыкающий контакт реле P_2 . Когда температура шкафа уменьшается, при размыкании контактов $2-3$ отпадает якорь реле P_2 , в результате чего реле P_1 теряет самопитание и подача энергии в объект через замкнувшийся размыкающий контакт P_1 возобновляется. Заданное значение температуры θ_3 находится в середине между контактами 1 и 2 . Температуру, соответствующую делениям шкалы термометра, на которых установлены элек-

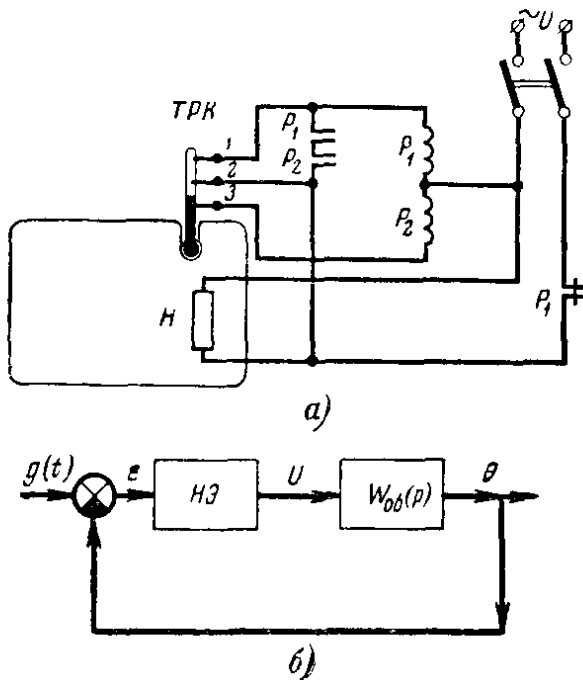


Рис. 7-14. Нелинейная система автоматического регулирования температуры сушильного шкафа с двухпозиционным релейным элементом без зоны нечувствительности и ее структурная схема.

тронными контактами устанавливаются.

троконтакты 1 и 2, обозначим соответственно Θ_1 и Θ_2 . Следовательно, $\Theta_3 = \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}$

Пусть передаточная функция сушильного шкафа имеет вид

$$W_{об}(p) = \frac{k}{Tp + 1}, \quad (7-10)$$

а нелинейная функция релейного элемента может быть представлена как

$$U_H = F_H(\Delta\Theta) \quad (7-11)$$

Дифференциальное уравнение системы запишется как

$$T \frac{d\Delta\Theta}{dt} + \Delta\Theta = k\Delta U_H, \quad (7-12)$$

где $\Delta\Theta = \Theta_x - \Theta_3$ — отклонение текущего значения температуры Θ_x от заданного Θ_3 ,

$\Delta U_H = (U_H - U_3)$ — отклонение напряжения U_H , фактически подводимого к нагревательному элементу, от напряжения U_3 , которое необходимо для поддержания заданной температуры Θ_3 ,

k — коэффициент передачи объекта в абсолютных единицах,

T — постоянная времени объекта

Предположим, что напряжение, подводимое к нагревательному элементу, в 2 раза больше напряжения, которое требуется для обеспечения заданного значения температуры $U = 2U_3$

Ниже даны вид уравнения (7-11) и величина ΔU_H в зависимости от величины отклонения температуры $\Delta\Theta$

$$\left. \begin{aligned} U_H = U, \quad \Delta U_H = U_3 \quad \text{при} \quad \Theta_x < \Theta_2, \quad \text{т.е. при} \\ \Delta\Theta < \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2} = \Theta_2 - \Theta_3, \\ \\ U_H = 0, \quad \Delta U_H = -U_3 \quad \text{при} \quad \Theta_x \geq \Theta_1, \quad \text{т.е. при} \\ \Delta\Theta \geq -\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2} = \Theta_1 - \Theta_3, \\ \\ U_H = 0, \quad \Delta U_H = -U_3 \quad \text{при} \quad \Theta_2 - \Theta_3 < \Delta\Theta < \Theta_1 - \Theta_3 \quad \text{и} \quad \frac{d\Delta\Theta}{dt} < 0, \\ \\ U_H = U, \quad \Delta U_H = U_3 \quad \text{при} \quad \Theta_2 - \Theta_3 < \Delta\Theta < \Theta_1 - \Theta_3 \quad \text{и} \quad \frac{d\Delta\Theta}{dt} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-13)$$

Таким образом, если за входную величину релейного элемента на рис 7-14 принять отклонение температуры от заданной $\Delta\Theta$, а за выходную — абсолютное значение U_H напряжения, подводимого к нагревательному элементу, то характеристика релейного элемента является несимметричной и имеет вид, изображенный на рис 7-10, *г*. Если же за выходную величину принять ΔU_H , то характеристика релейного элемента будет симметричной без зоны нечувствительности (рис 7-7, *а*) и с зоной неоднозначности 2 $b = 2|\Theta_2 - \Theta_3| = 2|\Theta_1 - \Theta_3|$

Для перехода к относительным величинам примем за базовые величины напряжение U и максимальное установившееся значение температуры $\Theta_{уст}$ при достаточно длительной подаче этого напряжения на нагревательный элемент. Разделив уравнение (7-12) на $U\Theta_{уст}$, получим:

$$T \frac{d \frac{\Delta\Theta}{\Theta_{уст}}}{dt} + \frac{\Delta\Theta}{\Theta_{уст}} = k^* \frac{U}{\Theta_{уст}} \cdot \frac{\Delta U_H}{U},$$

или

$$T \frac{dx^*}{dt} + x^* = k^* \frac{\Delta U_H}{U},$$

где $x^* = \frac{\Delta\Theta}{\Theta_{уст}}$ — текущее относительное отклонение регулируемого параметра (температуры) от заданного значения Θ_3 ;

$k^* = k \frac{U}{\Theta_{уст}}$ — передаточный коэффициент системы в относительных единицах.

Подставив в это уравнение значения $\Delta U_H/U$ из формул (7-13), получим систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dx^*}{dt} + x^* &= ku^* \quad \text{при } x^* \leq -b^*; \\ T \frac{dx^*}{dt} + x^* &= -k^* u^* \quad \text{при } x^* \geq b^*; \\ T \frac{dx^*}{dt} + x^* &= k^* u^* \quad \text{при } -b^* < x^* < b^* \text{ и } \frac{dx^*}{dt} > 0; \\ T \frac{dx^*}{dt} + x^* &= -k^* u^* \quad \text{при } -b^* < x^* < b^* \text{ и } \frac{dx^*}{dt} < 0, \end{aligned} \right\} (7-14)$$

где $u^* = U_3/U$ — относительное отклонение величины напряжения, подаваемого на нагревательный элемент, от напряжения, необходимого для поддержания заданного значения регулируемого параметра;

$2b^* = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_{уст}}$ — зона неоднозначности релейного элемента в относительных единицах.

Переходный процесс в нелинейной системе может быть найден путем решения дифференциальных уравнений (7-14) по участкам, границы между которыми определяют относительные переключающие значения входной величины x^* (относительное отклонение температуры от заданного значения) $x_1^* = -b^*$, $x_2^* = b^*$. При решении дифференциальных уравнений на каждом участке за начальные условия принимаются конечные значения переменных величин на предыдущем участке.

Такой метод нахождения переходного процесса в системе путем решения дифференциальных уравнений на отдельных участках изменения исследуемого параметра x^* при условии согласования между собой значений самого параметра x^* и его производных dx^*/dt в конце предыдущего и начале последующего участков называется *методом припасовывания или сшивания*.

Характеристическое уравнение системы, изображенной на рис. 7-14, $Tr + 1 = 0$ имеет один действительный корень: $p = -\frac{1}{T}$. Согласно формуле (2-37) общее решение однородного дифференциального уравнения (7-14) в таком случае имеет вид:

$$x^*(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T}}.$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения при подаче напряжения на нагревательный элемент, т. е. при $U_H = U$, можно найти как установившееся значение параметра, т. е. принимая, что $dx^*/dt = 0$. Тогда $x_{H \text{ уст}}^* = k^* u^*$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения складывается из суммы общего решения его однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x^* = x^*(t) + x_{H \text{ уст}}^* = C_1 e^{-\frac{t}{T}} + k^* u^*.$$

Обозначив $x^* = -x_{0H}^*$ при $t = 0$ и при $U_H = U$, получим:

$$C_1 = -x_{0H}^* - k^* u^*.$$

Таким образом, переходный процесс в системе при $U_H = U$ определяется выражением

$$x^* = k^* u^* \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) - x_{0H}^* e^{-\frac{t}{T}}, \quad (7-15)$$

которое справедливо на участках, где $x^* \leq -b^*$ и $-b^* < x^* < b^*$ при $\frac{dx^*}{dt} > 0$. Частное решение неоднородного дифференциального уравнения при $U_H = 0$ будет равно:

$$x_{0 \text{ уст}}^* = -k^* u^*.$$

Обозначив через x_{00}^* начальное значение параметра x^* в дифференциальном уравнении при $U_H = 0$, аналогично предыдущему найдем выражение для переходного процесса:

$$x^* = k^* u^* \left(e^{-\frac{t}{T}} - 1\right) + x_{00}^* e^{-\frac{t}{T}}. \quad (7-16)$$

Этим выражением процесс регулирования определяется на участках, где $x^* \geq b^*$ и $-b^* < x^* < b^*$ при $\frac{dx^*}{dt} < 0$.

Из уравнений (7-15) и (7-16) видно, что переходный процесс на каждом участке представляется как сумма двух экспоненциальных зависимостей.

Полная кривая процесса регулирования, построенная по уравнениям (7-15) и (7-16), представлена на рис. 7-15.

Предположим, что объект включен в работу при $x^* = x_{0H}^* = x_{0 \text{ уст}}^*$, так как при этом $x^* < -b^*$, то на первом участке процесс регулирования определяется выражением (7-15). Поскольку на

первом участке кривой регулируемый параметр будет возрастать, имеем $\frac{dx^*}{dt} > 0$, поэтому переключение релейного элемента произойдет только при $x^* = b^*$. С этого момента начнется второй участок переходного процесса, который определяется выражением (7-16). Начальное значение параметра для второго участка $x_{0.0}^* = b^*$. Так как в конце первого участка реле P_1 срабатывает (см. рис. 7-14) и подача энергии в объект прекращается, то температура сушильного шкафа начнет уменьшаться и $\frac{dx^*}{dt} < 0$. Следовательно, процесс

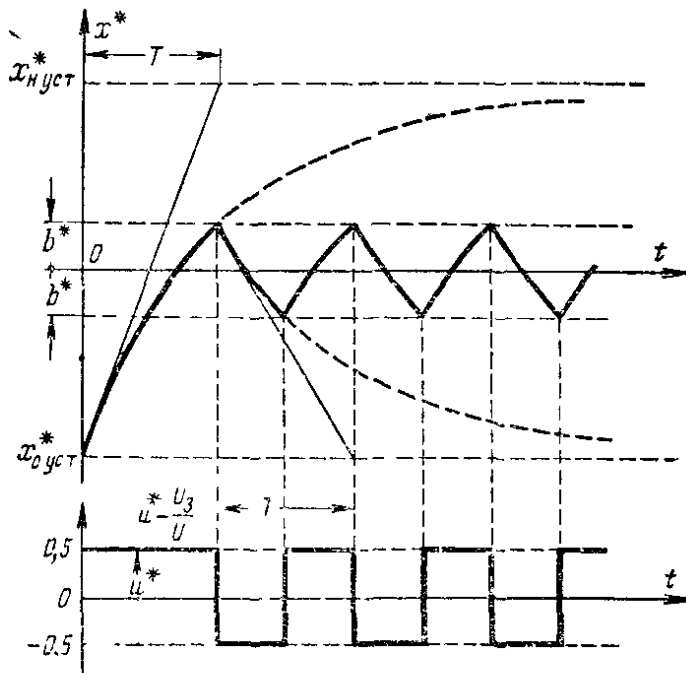


Рис. 7-15. Переходный процесс системы регулирования рис. 7-14.

регулирования будет определяться выражением (7-16) до достижения регулируемым параметром значения $x^* = -b^*$. В этот момент согласно уравнениям (7-14) переключается релейный элемент, отключается реле P_1 и возобновляется подача энергии в объект. С этого момента начнется третий участок, определяемый, как и первый, выражением (7-15), но при начальном значении параметра $x^* = -b^*$.

Третий участок закончится при $x^* = b^*$.

Затем начнется четвертый участок, который полностью аналогичен второму.

Пятый участок аналогичен третьему и т. д.

Таким образом, начиная со второго участка, в нелинейной системе по рис. 7-14 установятся незатухающие колебания, которые при $U = 2U_3$ и $|\Theta_2 - \Theta_3| = |\Theta_1 - \Theta_3|$ определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} x^* &= ku^* \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) - b^* e^{-\frac{t}{T}} \\ \text{при } -b^* < x^* < b^* \text{ и } \frac{dx^*}{dt} > 0; \\ x^* &= k^* u^* \left(e^{-\frac{t}{T}} - 1 \right) + b^* e^{-\frac{t}{T}} \\ \text{при } b^* > x^* > -b^* \text{ и } \frac{dx^*}{dt} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (7-17)$$

Методом припасовывания можно определить переходный процесс любой нелинейной системы по участкам между соседними срабатываниями и отпусканиями релейного элемента. Из приведенного примера следует, что метод припасовывания основан на том поло-

жении, что по существу на протяжении отрезка времени между двумя смежными переключениями релейного элемента нелинейная система может рассматриваться как линейная, и на этом участке для исследования системы применимы обычные методы исследования линейных систем. За счет переключений релейного элемента от участка к участку изменяется структурная схема системы, а следовательно, и динамические характеристики линейной системы, эквивалентной на данном участке исходной нелинейной.

2. Метод гармонического баланса

Метод гармонического баланса исследования нелинейных систем тоже использует их приближенную линеаризацию.

При подаче на вход линейной системы или звена устойчивых гармонических колебаний $x_{\text{вх}} = A_{\text{вх}} \sin \omega t$ на выходе системы также возникают гармонические колебания, но с другой амплитудой и фазой $x_{\text{вых}} = A_{\text{вых}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{вых}})$. Отношение выходной гармонической величины к входной, выраженное в комплексной форме, определяет амплитудно-фазовую характеристику звена $W(j\omega)$.

Если подавать на вход нелинейного элемента такие же синусоидальные колебания, то на выходе нелинейного элемента также получим периодические колебания, но по форме существенно отличающиеся от синусоидальных колебаний. На рис. 7-16 представлен характер периодических колебаний выходной величины в нелинейных элементах разных видов при подаче на их входы синусоидальных колебаний.

Как известно, любая периодически изменяющаяся переменная величина может быть представлена как сумма бесконечного множества гармоник (разложение в ряд Фурье). Первая гармоническая составляющая имеет тот же период T , что и исходные периодические несинусоидальные колебания. Частота колебаний первой гармоники $\omega_1 = 2\pi/T$. Частоты колебаний последующих гармоник: $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$; $\omega_4 = 4\omega_1$, $\omega_n = n\omega_1$ и т. д. до $n = \infty$. Амплитуда колебаний от гармоники к гармонике резко уменьшается.

Системы автоматического регулирования, как правило, обладают существенной инерционностью. Так, если в системе по рис. 1-5 при установившемся значении температуры медленно перемещать движок трансформатора по синусоидальному закону, то температура объекта также будет изменяться по синусоидальному закону с той же частотой. Но если движок перемещать по синусоидальному закону с большой частотой, то в силу инерционности объекта его температура не сможет так быстро изменяться, а будет иметь постоянную величину, соответствующую среднему положению движка. Это эквивалентно тому, как если бы движок вообще не перемещался. Иными словами, входная величина большой частоты практически не проходит через инерционную систему и не оказывает на нее существенного влияния. В связи с этим, а также учитывая, что амплитуда выходных колебаний уменьшается от гармоники к гармонике, для приближенной оценки выходной величины, рассматриваемой как спектр гармоник, в большом числе случаев достаточно учесть только первую гармоническую составляющую ее.

На каждом из графиков на рис. 7-16 пунктиром указана первая гармоника, которой приближенно можно заменить периодически изменяющуюся выходную величину релейного элемента.

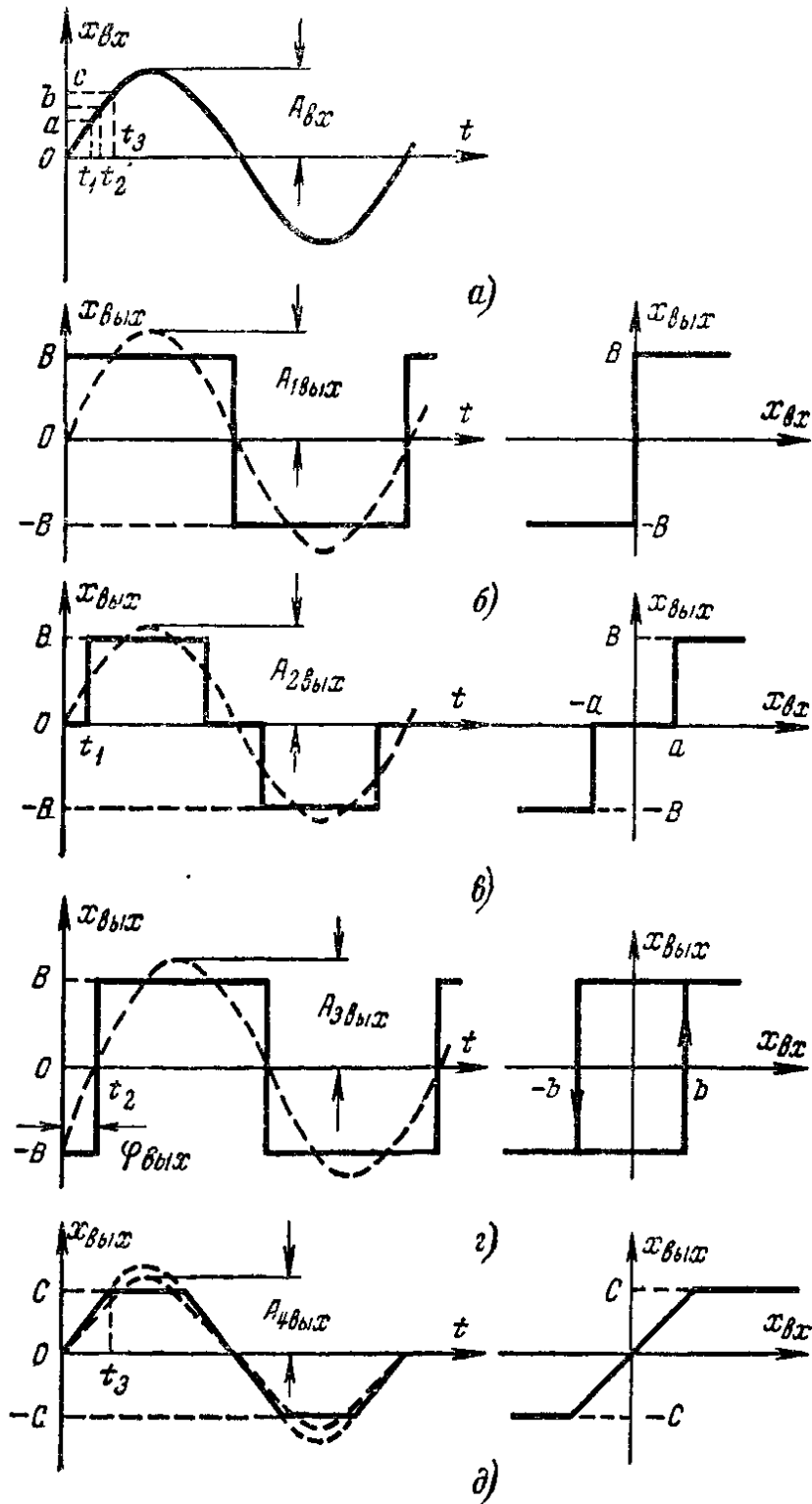


Рис. 7-16. Изменение выходной величины нелинейных элементов при поступлении на вход синусоидальной входной величины.

Заменяв фактическую выходную величину первой гармонической составляющей, мы можем ввести понятие амплитудно-фазовой характеристики нелинейного элемента как представленного в комплексной форме отношения выходной величины, замененной своей первой гармоникой, к входной синусоидальной величине.

Как следует из рис. 7-16, первая гармоника выходной величины нелинейного элемента при однозначной его характеристике равна:

$$x_{\text{ВЫХ}} = A_{\text{ВЫХ}} \sin \omega t.$$

Амплитудно-фазовая характеристика

$$W_H(A) = \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{A_{\text{ВХ}}} = k_H. \quad (7-18)$$

Амплитуда первой гармоники $A_{\text{ВЫХ}}$ выходной величины определяется по формулам разложения выходной периодической функции в ряд Фурье. Так, для релейного элемента, изображенного на рис. 7-16, б, она определяется выражением

$$A_{\text{ВЫХ}} = \frac{4B}{\pi}. \quad (7-19)$$

Таким образом, нелинейный элемент с однозначной статической характеристикой может быть приближенно представлен усиленным линейным звеном.

Для нелинейного элемента с неоднозначной статической характеристикой (см. рис. 7-16, в) первая гармоника выходной величины имеет отставание по фазе относительно синусоидальной входной величины на угол $\varphi_{\text{ВЫХ}}$, т. е.

$$x_{\text{ВЫХ}} = A_{\text{ВЫХ}} \sin(\omega t - \varphi_{\text{ВЫХ}}),$$

или в комплексной показательной форме

$$x_{\text{ВЫХ}} = A_{\text{ВЫХ}} e^{j(\omega t - \varphi_{\text{ВЫХ}})}.$$

Учитывая, что синусоидальная входная величина в комплексной показательной форме равна $x_{\text{ВХ}} = A_{\text{ВХ}} e^{-j\omega t}$, найдем амплитудно-фазовую характеристику нелинейного элемента с неоднозначной статической характеристикой:

$$W_H(A) = \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{A_{\text{ВХ}}} e^{j\varphi_{\text{ВЫХ}}} = k_H e^{j\varphi_{\text{ВЫХ}}}. \quad (7-20)$$

Величины $A_{\text{ВЫХ}}$ и $\varphi_{\text{ВЫХ}}$ определяются формой неоднозначной статической характеристики нелинейного звена. Так, например, для релейной характеристики, изображенной на рис. 7-16, в, эти величины равны:

$$A_{\text{ВЫХ}} = \frac{4B}{\pi}; \quad \varphi_{\text{ВЫХ}} = \arcsin \frac{b}{A_{\text{ВХ}}}. \quad (7-21)$$

Таким образом, амплитудно-фазовая характеристика нелинейного элемента в отличие от такой же характеристики линейного звена не зависит от частоты, а является функцией амплитуды входной величины, величин зоны нечувствительности и зоны неоднозначности, величины ограничения, люфта и т. п.

Так как при данной статической характеристике нелинейного элемента его амплитудно-фазовая характеристика зависит только от амплитуды входной величины и не зависит от частоты, то амплитудно-фазовая характеристика нелинейного элемента обозначается $W_H(A)$.

Заменяв в амплитудно-фазовых характеристиках символ $j\omega$ на p , получим выражения для передаточных функций нелинейных элементов.

Для элемента с однозначной статической характеристикой

$$W_H(p) = k_H; \quad (7-22)$$

для элемента с неоднозначной статической характеристикой

$$W_H(p) = k_H e^{j\frac{p}{\omega} \varphi_{\text{ВЫХ}}}. \quad (7-23)$$

Используя приближенные выражения для передаточной функции и амплитудно-фазовой характеристики нелинейного элемента, мы тем самым заменяем фактическую нелинейную связь между входной и выходной величинами нелинейного элемента линейной зависимостью. Эта замена носит название *гармонической линеаризации*.

Гармоническая линеаризация дает нам возможность заменить нелинейную систему приближенно соответствующей ей линейной системой. После этого система исследуется методами, обычными для линейных систем. Такой метод исследования нелинейных систем носит название *метода гармонического баланса*.

7-3. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Для исследования нелинейных систем автоматического регулирования, в которых линейная часть с достаточной для практики точностью может быть в динамическом отношении представлена дифференциальным уравнением второго порядка, широкое применение получил метод изображения процесса регулирования на фазовой плоскости.

Фазовой плоскостью называется плоскость, на которой изображается изменение какой-либо переменной величины x в функции скорости ее изменения $y = dx/dt$.

Рассмотрим изображение незатухающих гармонических колебаний $x = A \sin \omega t$ на фазовой плоскости.

Скорость изменения переменной x выразится как

$$y = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t.$$

Исключив переменную t , найдем:

$$y = A\omega \cos \arcsin \frac{x}{A} = A\omega \cos \arccos \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

откуда

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 \omega^2} = 1. \quad (7-24)$$

Следовательно, незатухающие гармонические колебания изображаются на фазовой плоскости в виде эллипса (рис 7-17) с полуосями A и $A\omega$

Для различных амплитуд A при заданной частоте ω можно построить семейство таких эллипсов, вложенных один в другой и заполняющих всю фазовую плоскость.

При заданной амплитуде A для частот, изменяющихся от 0 до $\pm\infty$, получим семейство эллипсов с общей осью $2A$ по оси координат

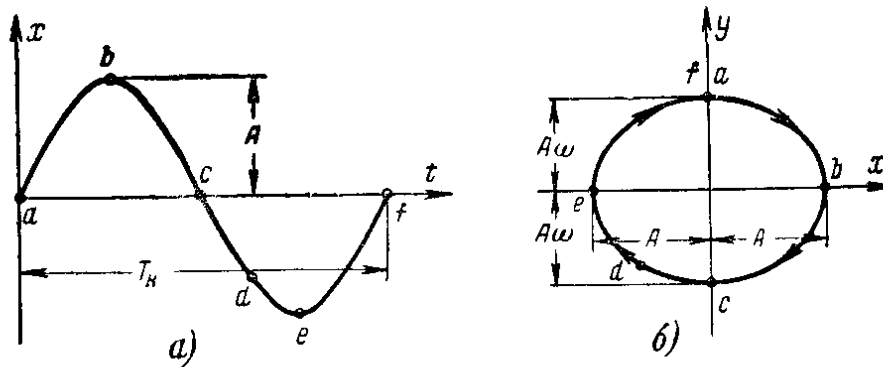


Рис 7-17. Изображение на фазовой плоскости незатухающих гармонических колебаний

нат x и изменяющейся длиной оси $2A\omega$, при $\omega = 0$ эллипс вырождается в прямую, совпадающую с осью $2A$, а при $\omega = \pm\infty$ он распадается на две прямые, параллельные оси координат y и отстоящие от начала координат на расстоянии $\pm A$.

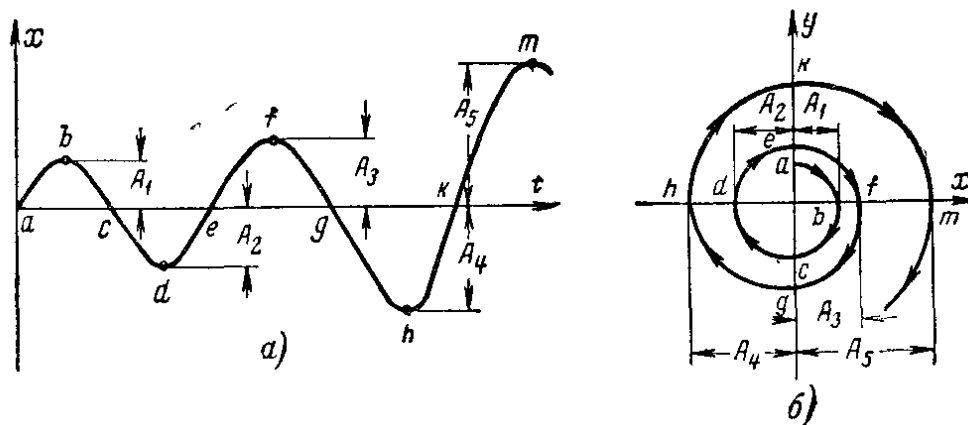


Рис 7-18 Изображение на фазовой плоскости расходящихся колебаний

При изменении величины x соответствующая ей точка M на фазовой плоскости, называемая изображающей точкой, будет перемещаться вдоль эллипса по часовой стрелке с периодом обращения T_k

Кривая движения изображающей точки на фазовой плоскости называется *фазовой траекторией*

Если колебательный процесс будет расходящимся (рис. 7-18), то амплитуда колебаний A будет увеличиваться и изображение

процесса на фазовой плоскости будет иметь вид расходящейся логарифмической спирали.

Наоборот, затухающий колебательный процесс (рис. 7-19) на фазовой плоскости изображается в виде логарифмической спирали, сходящейся к началу координат

Таким образом, по виду *фазовой картины* можно наглядно судить об устойчивости системы

Так как в верхней половине фазовой плоскости $y = \frac{dx}{dt} > 0$, то изображающая точка вдоль фазовой траектории движется в сторону увеличения x .

В нижней половине $y < 0$; следовательно, изображающая точка движется вдоль фазовой траектории в сторону уменьшения x .

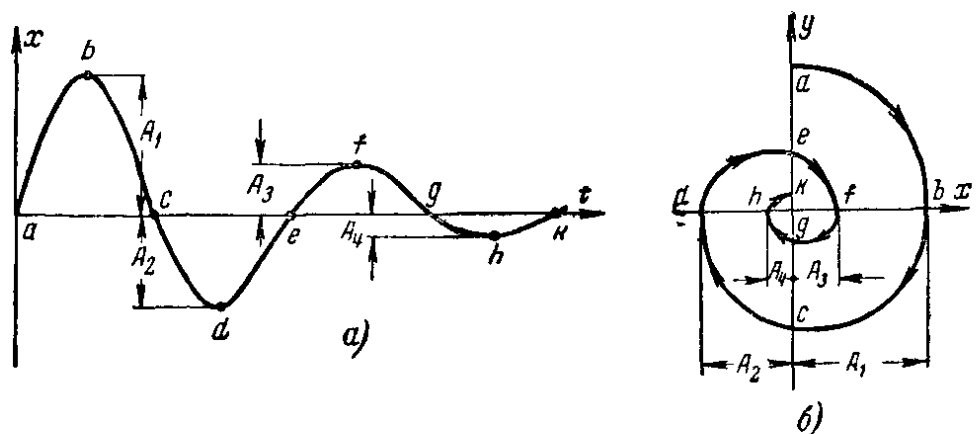


Рис. 7-19. Изображение на фазовой плоскости затухающих колебаний.

Так как на фазовой плоскости в пересечениях фазовых траекторий с осью x производная $y = \frac{dx}{dt} = 0$, то фазовые траектории пересекают ось x под прямым углом.

В качестве примера построим фазовую картину нелинейной системы автоматического регулирования температуры сушильного шкафа, изображенной на рис. 7-20. Система содержит регулятор с нелинейным элементом, имеющим однозначную релейную характеристику с зоной нечувствительности (см рис 7-5, а) Входной величиной релейного элемента является отклонение x температуры в объекте от заданной, а выходной — напряжение U_d , подаваемое на электродвигатель D .

Если температура в объекте меньше заданной и это отклонение $\varepsilon = -x < -a$, то контакты 2 и 3 ртутного термометра ТРК разомкнуты и реле P_1 не возбуждено; реле P_3 срабатывает через нормально замкнутый контакт P_1 , включая электродвигатель D в сторону увеличения подачи энергии в объект. При $-a < \varepsilon < a$ контакты 2 и 3 термометра ТРК замыкаются, срабатывает реле P_1 , отпадает реле P_3 и электродвигатель D останавливается.

При $\varepsilon \geq a$ замыкаются контакты 1 и 2, в результате чего срабатывает реле P_2 , включая электродвигатель в сторону уменьшения подачи энергии в объект

При последующем понижении температуры до $a > \varepsilon > -a$ электроконтакты 1 и 2 снова размыкаются и реле P_2 отпадает, от-

ключая электродвигатель D благодаря размыканию нормально открытого контакта P_1 . Если при этом понижение температуры будет продолжаться, то при $\varepsilon \leq -a$ размыкаются электроконтакты 2 и 3, отпадает реле P_1 и срабатывает реле P_3 , включая электродвигатель D в сторону увеличения подачи энергии в объект. Такие периодические переключения с отключением, а затем с реверсом двигателя D будут происходить до тех пор, пока при отключенном двигателе количество энергии, подаваемой в объект, не будет соответствовать заданному значению температуры в пределах зоны нечувствительности $-a < \varepsilon < a$. Тогда система будет в устойчивом состоянии.

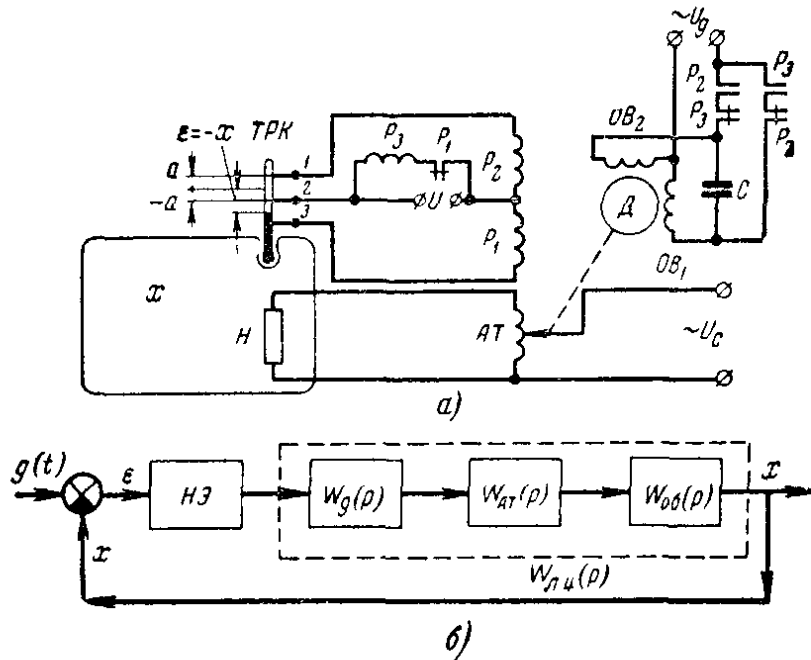


Рис. 7-20. Нелинейная система автоматического регулирования температуры сушильного шкафа с релейным однозначным нелинейным элементом с зоной нечувствительности и ее структурная схема.

Структурная схема описанной нелинейной системы представлена на рис. 7-20, б.

Приняв передаточную функцию электродвигателя $W_d(p) = k_d/p$, передаточную функцию автотрансформатора $W_{AT}(p) = k_{AT}$ и передаточную функцию сушильного шкафа $W_{об}(p) = \frac{k_{об}}{Tp + 1}$, найдем передаточную функцию линейной части системы:

$$W_{л.ч}(p) = W_d(p) W_{AT}(p) W(p) = \frac{k}{(Tp + 1)p}, \quad (7-25)$$

где $k = k_d k_{AT} k_{об}$ — коэффициент передачи линейной части системы;

T — постоянная времени инерционного звена первого порядка, которым в динамическом отношении представлен сушильный шкаф.

Так как на вход линейной части системы (электродвигателя) при значениях регулируемой величины $x \leq -a$ подается напряже-

ние U_d , при $x \geq a$ — напряжение $-U_d$, а при $-a < x < a$ цепи реле P_2 и P_3 разомкнуты и электродвигатель обесточен (рис 7-20, а), то, исходя из формулы (7-25), можно написать следующие дифференциальные уравнения определяющие переходный процесс в системе для трех указанных выше диапазонов изменений величины x [при $g(t) = 0$]

$$\left. \begin{aligned} T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} &= kU_d \quad \text{при } x \leq -a; \\ T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} &= 0 \quad \text{при } -a < x < a; \\ T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} &= -kU_d \quad \text{при } x \geq a \end{aligned} \right\} \quad (7-26)$$

Так как $y = \frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$, то дифференциальное уравнение при $-a < x < a$ запишется так:

$$T \frac{dy}{dt} + y = 0$$

Подставив в это уравнение $y = dx/dt$ и умножив обе части уравнения на dt/dx , найдем уравнение фазовых траекторий на той части фазовой плоскости, где значения x определяются неравенством $-a < x < a$

$$T \frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

или

$$T dy = -dx$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$y = -\frac{1}{T} x + C_1, \quad (7-27)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

При значениях C_1 от $-\infty$ до $+\infty$ получаем на участке $-a < x < a$ фазовой плоскости бесконечное множество параллельных прямых (рис 7-21, а) с углом наклона к оси абсцисс $\alpha = \arctg\left(-\frac{1}{T}\right)$

Эти прямые пересекают ось ординат в точках $(0, C_1)$

При $x \leq -a$ дифференциальное уравнение системы может быть получено из первого из уравнений (7-26) и выражения для производной y .

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dy}{dt} + y &= kU_d \\ \text{и} \quad \frac{dx}{dt} &= y \end{aligned} \right\} \quad (7-28)$$

Исключив из этих уравнений переменную времени, получим уравнение фазовых траекторий при $x \leq -a$

$$Ty \frac{dy}{dx} + y = kU_d$$

Разделив переменные, найдем

$$dx = -\frac{Ty dy}{y - kU_d}$$

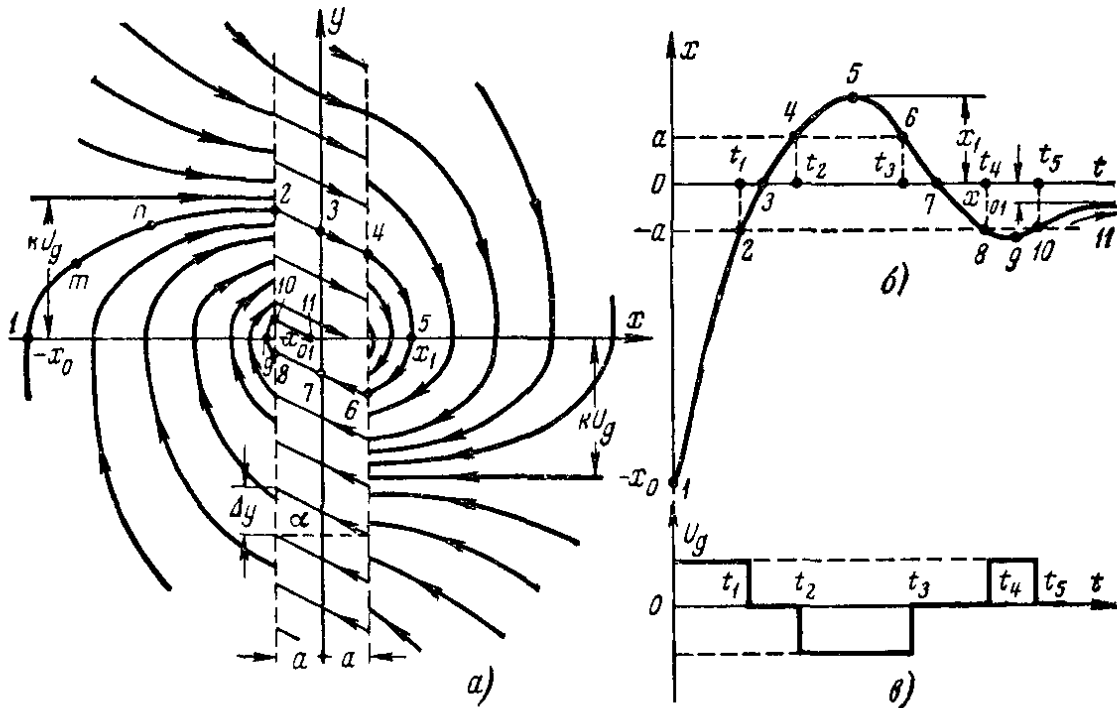


Рис 7-21 Фазовые траектории и переходный процесс системы регулирования по рис 7-20

Проинтегрировав это уравнение, по таблицам интегралов рациональных функций получим:

$$x = -T [y + kU_d \ln(y - kU_d)] + C_2 \quad (7-29)$$

Постоянную интегрирования C_2 находим из следующих начальных условий $x = x_0$ и $y = y_0$:

$$C_2 = x_0 + T [y_0 + kU_d \ln(y_0 - kU_d)]$$

Подставив полученное выражение для C_2 в уравнение (7-29) найдем уравнение фазовых траекторий:

$$x = x_0 + T [y_0 - y + kU_d \ln \frac{y_0 - kU_d}{y - kU_d}] \quad (7-30)$$

Подставив в это уравнение известную величину напряжения U_d и различные сочетания значений начальных условий x_0 и y_0 , получим семейство фазовых траекторий для диапазона значений регулируемой величины $x \leq -a$.

Семейство фазовых траекторий для диапазона $x \geq a$ получим из того же уравнения (7-30), заменив в нем напряжение U_d на $-U_d$

Для рассматриваемой системы все фазовые траектории, определяемые выражением (7-30), имеют вид логарифмических спиралей, сходящихся к началу координат. Для других систем их вид может быть иным.

Полная фазовая картина процесса автоматического регулирования нелинейной системы по рис. 7-20, динамические свойства которой определяются дифференциальными уравнениями (7-26), имеет вид, представленный на рис. 7-21, а.

Проследим на фазовой плоскости характер протекания переходного процесса, например, при включенном регуляторе и температуре объекта x_0 об, меньшей, чем ее заданное значение $x_{зад}$, которое определено настройкой контактной группы ртутного термометра ТРК; пусть при этом начальное отклонение температуры $x_0 = x_{0об} - x_{зад} < -a$.

Так как производная постоянной величины равна нулю, то начальное значение $y_0 = dx_0/dt$ также равно нулю. Следовательно, в рассматриваемом случае начальное состояние системы изображается на фазовой плоскости точкой 1 с координатами $x = -x_0$ и $y_0 = 0$.

Так как при $x < -a$ контакты 1—2 и 2—3 термометра ТРК разомкнуты, то, как было показано выше, реле P_3 находится под током и электродвигатель D включен и перемещает движок автотрансформатора AT в сторону увеличения подачи энергии к объекту. Будем считать фазу напряжения U_d , подаваемого при этом на конденсатор C и обмотку возбуждения OB_2 , положительной. Температура в объекте будет возрастать.

В точке 2, когда отклонение температуры достигнет величины $x = -a$, произойдет отключение электродвигателя, так как в этот момент замкнутся контакты 2 и 3 ТРК и размыкающий контакт реле P_1 разорвет цепь питания реле P_3 . В связи с инерционностью объекта температура в нем будет продолжать повышаться и в точке 3 достигнет заданного значения. Но состояние системы в этой точке не будет устойчивым, так как поступление энергии в объект будет большим, чем это требуется для поддержания заданного значения температуры.

В точке 4, когда отклонение температуры достигнет величины $x = a$, замкнутся электроконтакты 1 и 2 ртутного термометра ТРК и включится релейный элемент (сработает реле P_2), подавая напряжение на двигатель D , который начнет вращаться, перемещая движок автотрансформатора AT в сторону уменьшения подачи энергии в объект. Будем считать фазу напряжения U_d , подаваемого при этом на конденсатор C и обмотку возбуждения OB_1 , отрицательной. В связи с инерционностью объекта его температура будет вначале все еще возрастать до некоторой точки 5, после чего начнется ее уменьшение, в точке 6 отклонение температуры от заданной будет равно $x = a$. В следующий момент, когда $x < a$, разомкнутся электроконтакты 1 и 2 термометра ТРК, отпадет реле P_2 и электродвигатель остановится. В точке 7 температура в объекте вторично будет равна заданной, но и в этой точке система не будет устойчивой, так как поступление энергии в объект недостаточно для компенсации его потерь на теплоотдачу. Вследствие этого температура будет продолжать уменьшаться и в точке 8 отклонение ее от заданной достигнет $x = -a$.

В следующий момент, когда $x < -a$, снова размыкаются электроконтакты 2 и 3 ртутного термометра, отпадает реле P_1 и сраба-

тывает реле P_3 , включая электродвигатель D . Так как конденсатор C включается последовательно с обмоткой возбуждения OB_2 и фаза напряжения, подводимого к ним, противоположна фазе напряжения, которое подается к конденсатору C и обмотке возбуждения OB_1 при срабатывании реле P_2 , то двигатель D будет вращаться в обратную сторону, увеличивая подачу энергии в объект

Вследствие инерционности объекта температура некоторое время будет продолжать понижаться и только в точке 9 станет увеличиваться. В точке 10 отклонение ее от заданного значения станет равным $x = -a$, и тогда электродвигатель, как и в точке 2, отключится. Но и после этого температура будет увеличиваться до значения x_{01} в точке 11. В этой точке включения электродвигателя ни на увеличение, ни на уменьшение подачи энергии произойти не может, так как температура объекта находится между теми двумя значениями ее, при которых происходит переключение контактов 1 и 2 термометра (т. е. $-a < x_{01} < a$), и ни одно из реле (P_2 или P_3), включающих электродвигатель сработать не может.

В то же время в точке 11 величина $y = dx/dt$ равна нулю и, следовательно, в системе установилось равенство потоков энергии, подводимой к объекту и отводимой от него, поэтому в дальнейшем температура объекта не изменяется

Таким образом, в точке 11 система стабилизируется и процесс регулирования закончится. Остаточное отклонение температуры в системе от заданного значения равно $-x_{01}$. Величина этого отклонения может быть любой в пределах от $-a$ до a

На рис 7-21, б процесс регулирования изображен в функции от времени кривая $x(t)$ является разверткой во времени фазовой траектории 1—2—3—...—10—11.

На рис 7-21, в показано изменение во времени напряжения $U_d(t)$, подводимого к электродвигателю D ; эта диаграмма показывает моменты включения и отключения электродвигателя и направления вращения его вала

Решив первое из дифференциальных уравнений системы (7-28) при начальных условиях $t = 0$ и $y = y_0$, получим зависимость координаты y фазовой плоскости от времени

$$y = y_0 e^{-\frac{t}{T}} + kU_d \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (7-31)$$

Интегрируя второе уравнение из системы (7-28), находим выражение для координаты x фазовой плоскости в функции от времени:

$$x = \int y dt + C_3 = -Ty_0 e^{-\frac{t}{T}} + kU_d \left(t + Te^{-\frac{t}{T}} \right) + C_3, \quad (7-32)$$

где C_3 — постоянная интегрирования

Из начальных условий $t = 0$; $x = x_0$ и $y = y_0$ находим

$$C_3 = x_0 + T(y_0 - kU_d)$$

Подставив найденное значение постоянной C_3 в уравнение (7-31), получим:

$$x = x_0 + y_0 T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) + kU_d \left[t - T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] \quad (7-33)$$

Решив совместно выражения (7-31) и (7-33), получим:

$$x = x_0 + T(y_0 - y) + kU_d t \quad (7-34)$$

С помощью выражения (7-34) можно осуществить переход от фазовой картины к процессам во времени

Определим, например, в общем виде время, соответствующее переходу системы по фазовой плоскости (рис 7-21, а) из точки $m(x_m, y_m)$ в точку $n(x_n, y_n)$;

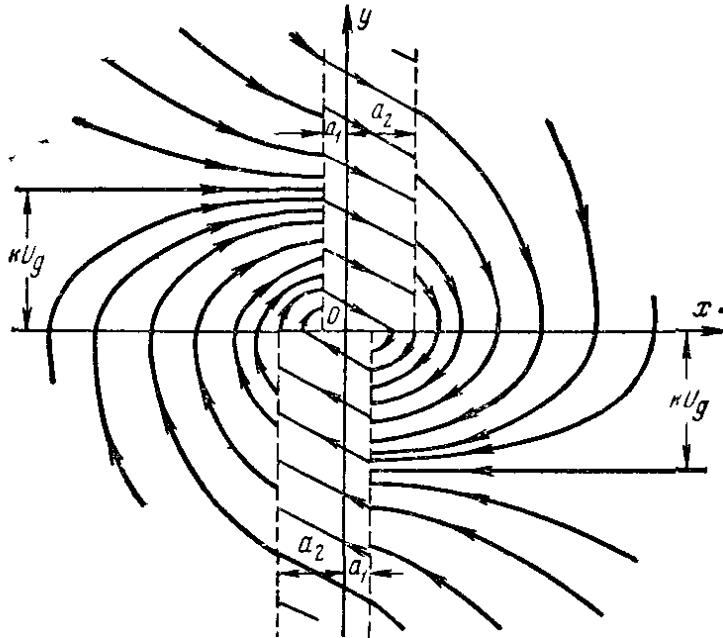


Рис 7-22 Фазовые траектории нелинейной системы с релейным однозначным несимметричным элементом с зоной нечувствительности

Уравнение (7-34) для точки m напишется так

$$x_m = x_0 + T(y_0 - y_m) + kU_d t_m$$

Соответственно для точки n

$$x_n = x_0 + T(y_0 - y_n) + kU_d t_n$$

Решая оба эти уравнения совместно, находим время перехода $\Delta t_{mn} = (t_n - t_m)$ системы из точки m в точку n :

$$\Delta t_{mn} = \frac{1}{kU_d} [x_n - x_m + T(y_n - y_m)]$$

По этой формуле определим например, время t_1 , затрачиваемое для перехода системы на фазовой плоскости из точки 1 в точку 2 (рис 7-21, а); в этом случае имеем

$$x_m = x_1 = -x_0; \quad y_m = y_1 = y_0 = 0;$$

$$x_n = x_2 = -a \quad \text{и} \quad y_n = y_2 \approx kU_d.$$

Искомое время будет равно:

$$t_1 = \frac{1}{kU_d} [-a + x_0 + T(kU_d - 0)] = T + \frac{x_0 - a}{kU_d}.$$

Следовательно, имея фазовую картину системы автоматического регулирования, можно решить задачу исследования работы системы при любых начальных условиях, используя развертку во времени фазовых траекторий.

На рис. 7-22 приведена фазовая картина аналогичной системы в случае, если включенный в нее релейный элемент является несимметричным однозначным с зоной нечувствительности $|a_2| > |a_1|$; статическая характеристика такого релейного элемента была показана на рис. 7-9, а.

На рис. 7-23 изображена фазовая картина той же системы регулирования в случае, если включенный в нее релейный элемент является однозначным симметричным и не имеет зоны нечувствительности; такой элемент имеет статическую характеристику, вид которой дан на рис. 7-6, а.

По фазовой картине системы автоматического регулирования можно судить также об устойчивости системы и характере переходных процессов в ней; один из примеров такого использования фазовой картины рассмотрен в § 7-4.

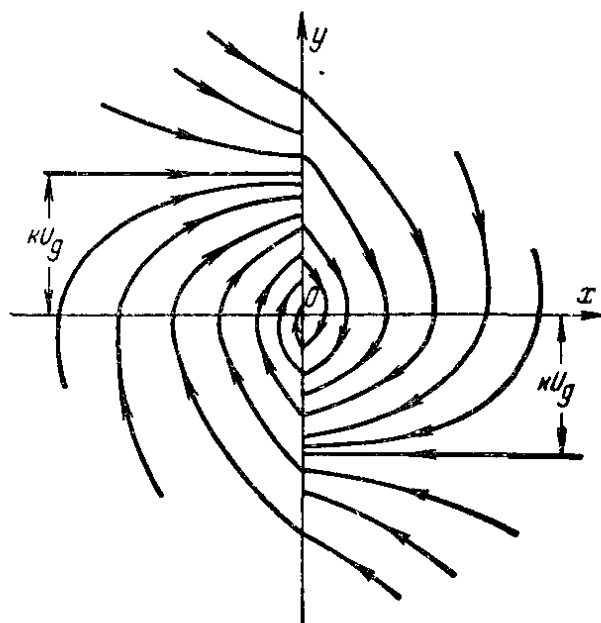


Рис 7-23. Фазовые траектории нелинейной системы с двухпозиционным релейным элементом без зоны нечувствительности

7-4. УСТОЙЧИВОСТЬ И АВТОКОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим нелинейную систему автоматического регулирования, линейная часть которой имеет передаточную функцию, представленную выражением (7-25), а нелинейный элемент — релейную неоднозначную статическую характеристику без зоны нечувствительности (см рис. 7-7, а). Нелинейный элемент в этом случае имеет только два состояния и при переключении меняет фазу напряжения, подводимого к обмоткам электродвигателя, только этим система и отличается от системы автоматического регулирования, приведенной на рис. 7-20, переходный процесс в которой определяется тремя дифференциальными уравнениями (7-26). Поэтому переходный процесс в рассматриваемой системе будет характеризоваться одним из двух дифференциальных уравнений, отличающихся одно от другого только фазой (знаком) напряжения U_d , подаваемого к обмоткам электродвигателя; среднее из уравнений (7-26) к данной системе неприменимо. Вместе с тем каждое из двух упомянутых дифференциальных уравнений будет применимо в диапазоне изменений регулируемой величины от $-b$ до b в зависимости от знака производной dx/dt .

Итак, переходный процесс в рассматриваемой системе определяется дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} &= kU_d \quad \text{при } x \leq -b; \\ T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} &= -kU_d \quad \text{при } x \geq b; \\ T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} &= kU_d \quad \text{при } -b < x < b \text{ и } \frac{dx}{dt} > 0; \\ T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} &= -kU_d \quad \text{при } -b < x < b \text{ и } \frac{dx}{dt} < 0. \end{aligned} \right\} (7-35)$$

Решения уравнений (7-35), т. е. уравнения фазовых траекторий, даны выражениями (7-29) или (7-30) и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= -T [y + kU_d \ln(y - kU_d)] + C_1 \quad \text{при } x \leq -b; \\ x &= T [kU_d \ln(y + kU_d) - y] + C_2 \quad \text{при } x \geq b; \\ x &= -T [y + kU_d \ln(y - kU_d)] + C_1 \\ &\quad \text{при } -b < x < b \text{ и } \frac{dx}{dt} > 0; \\ x &= T [kU_d \ln(y + kU_d) - y] + C_2 \\ &\quad \text{при } -b < x < b \text{ и } \frac{dx}{dt} < 0. \end{aligned} \right\} (7-36)$$

В этом случае моменты переключения релейного элемента при возрастании $y = dx/dt$ будут сдвинуты вправо, а при убывании y — влево от начала координат на величину b . Фазовая картина такой системы представлена на рис. 7-24. Если начальная амплитуда колебаний регулируемого параметра достаточно велика, то фазовые траектории, так же как и на рис. 7-21, будут сходиться к центру.

Если же начальная амплитуда колебаний регулируемого параметра небольшая, то фазовые траектории имеют вид спиралей, расходящихся от центра. Наличие затухающих колебаний при больших начальных значениях амплитуды и наличие расходящихся колебаний при небольших ее начальных значениях свидетельствуют о том, что при некотором промежуточном значении входной амплитуды в нелинейной системе по рис. 7-24 должны возникать устойчивые незатухающие периодические колебания, а на фазовой плоскости должна образоваться замкнутая фазовая траектория, которая называется *устойчивым предельным циклом*.

К устойчивому предельному циклу асимптотически приближаются фазовые траектории как изнутри, так и снаружи замкнутого контура. Устойчивые свободные собственные периодические колебания нелинейной системы, соответствующие устойчивому предельному циклу, называются *автоколебаниями*.

На рис. 7-25 изображены как устойчивые автоколебания нелинейной системы в функции времени, так и кривые, характеризующие поведение этой системы при амплитудах начальных колебаний меньше (A_1) и больше (A_2), чем амплитуда автоколебаний (A).

Автоколебания являются специфической особенностью, свойственной только нелинейным системам автоматического регулирования. Если амплитуда автоколебаний системы находится в пределах допустимых отклонений регулируемой величины и частота

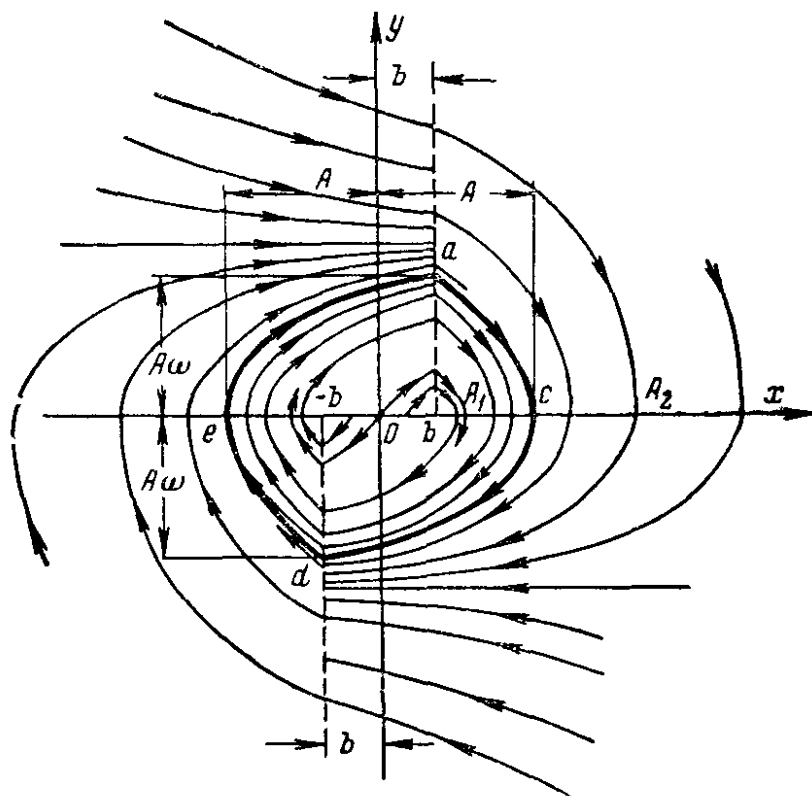


Рис. 7-24. Фазовые траектории с устойчивым предельным циклом нелинейной системы с неоднозначным релейным элементом без зоны нечувствительности.

колебаний также является допустимой, то система регулирования будет удовлетворять предъявленным к ней требованиям и, следовательно, такая система является *практически устойчивой*.

Если амплитуда автоколебаний в системе превышает допустимые отклонения регулируемой величины от заданного значения или если частота колебаний опасна для системы (возникают перенапряжения, вибрации и т. п.), такая система не пригодна для целей регулирования данного параметра и является *практически неустойчивой*.

Амплитуда и частота автоколебаний не зависят от внешних возмущающих воздействий, а определяются только собственными параметрами самой системы регулирования: ее инерционностью, зоной нечувствительности нелинейного элемента, коэффициентом передачи системы и т. п.

Если в фазовой картине нелинейной системы все фазовые траектории сходящиеся (см. рис. 7-19), то система будет устойчивой,

а устойчивые автоколебания в ней не возникают. Если же все фазовые траектории будут расходящимися (рис. 7-18), это указывает на то, что в такой системе выходные периодические колебания будут иметь все возрастающую во времени амплитуду, т. е. что такая нелинейная система будет неустойчивой.

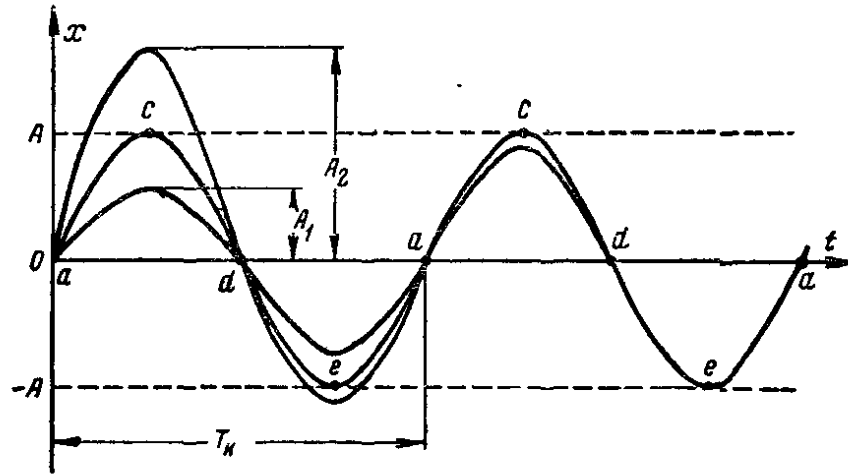


Рис. 7-25. Переходные процессы в нелинейной системе с устойчивым предельным циклом.

На рис. 7-15 были построены устойчивые автоколебания нелинейной системы, изображенной на рис. 7-14. Из дифференциальных уравнений (7-14) этой системы найдем зависимости, определяющие фазовые траектории:

$$y^* = -\frac{1}{T} (x^* - k^* u^*) \quad (7-37)$$

при $x^* \leq -b^*$, а также при $-b^* < x^* < b^*$ и $y^* > 0$;

$$y^* = -\frac{1}{T} (x^* + k^* u^*) \quad (7-38)$$

при $x^* \geq b^*$, а также при $-b^* < x^* < b^*$ и $y^* < 0$.

В этих выражениях принято $y^* = dx^*/dt$. Фазовая картина представлена на рис. 7-26, а.

Амплитуда автоколебаний в системе равна $\pm b^*$. Период колебаний можно определить, исходя из устойчивого предельного цикла (рис. 7-26, а) с учетом выражений (7-17).

Обозначим время изменения регулируемого параметра от $x^* = -b^*$ до $x^* = b^*$ при $y^* > 0$ через t_1 ; напишем первое из выражений (7-17) для конечного значения $x^* = b^*$ этого участка переходного процесса:

$$b^* = k^* u^* \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T}} \right) - b^* e^{-\frac{t_1}{T}},$$

откуда

$$e^{-\frac{t_1}{T}} = \frac{k^* u^* - b^*}{k^* u^* + b^*}.$$

Прологарифмировав это выражение, получим:

$$t_1 = T \ln \frac{k^* u^* + b^*}{k^* u^* - b^*}.$$

В течение этого времени изображающая точка пройдет участок 2—4 фазовой траектории.

Так как время прохождения изображающей точкой участка 4—6 фазовой траектории, соответствующего обратному изменению регулируемого параметра от $x^* = b^*$ до $x^* = -b^*$, также равно t_1 , то период колебаний будет равен:

$$T_k = 2T \ln \frac{k^* u^* + b^*}{k^* u^* - b^*}. \quad (7-39)$$

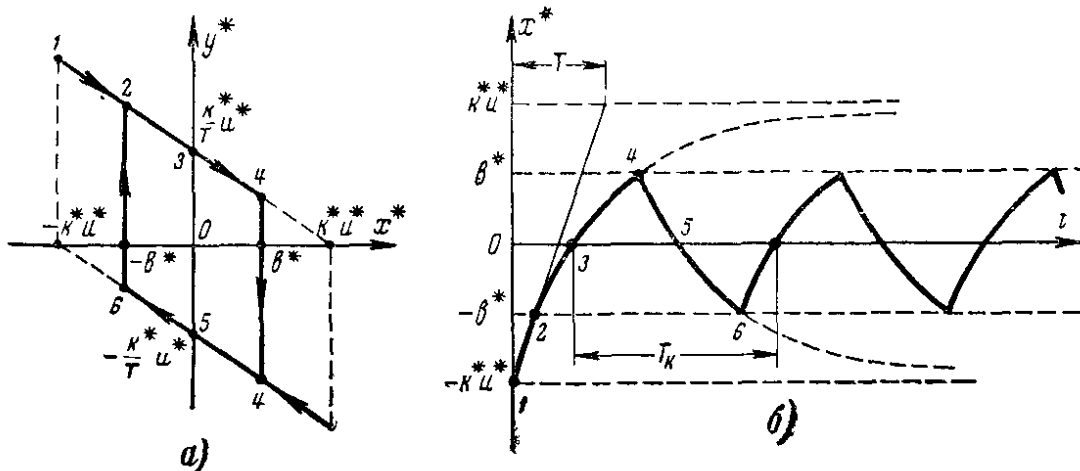


Рис. 7-26. Фазовые траектории и переходный процесс системы регулирования рис. 7-14.

Из выражения (7-39) следует, что чем больше инерционность объекта, характеризуемая постоянной времени T , и чем больше зона неоднозначности b^* , тем больше период автоколебаний. Чем больше напряжение u^* , подводимое к объекту, тем период автоколебаний меньше (рис. 7-26).

7-5. ДВУХПОЗИЦИОННОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Процессы регулирования в нелинейной системе, в которую входит объект с запаздыванием, имеют свои особенности в связи с тем, что изменения выходной величины такого объекта отстают на время запаздывания τ по отношению к изменениям входной величины.

Объект с запаздыванием в общем случае можно представить в виде двух последовательно соединенных звеньев: звена, не имеющего запаздывания, передаточная функция $W(p)$ которого определяется динамическими свойствами звена без учета запаздывания, и звена с чистым запаздыванием, имеющего передаточную функцию $W_\tau(p) = e^{-p\tau}$ [см. формулу (2-49)].

При поступлении на вход величины $x_{0\text{вх}}$ выходная величина x первого звена будет изменяться (рис. 7-27) по закону, определяемо-

му его передаточной функцией без учета запаздывания. Величина x будет являться входной величиной для звена с чистым запаздыванием, в связи с чем его выходная величина $x_{\text{вых}}$, являющаяся выходной величиной объекта, будет изменяться по такому же закону, как и

промежуточная величина x , но с отставанием по времени на время запаздывания τ .

При регулировании выходной величины объекта $x_{\text{вых}}$ для ускорения реакции регулятора на ее изменение целесообразно было бы осуществлять регулирование по промежуточной величине x , но это не всегда возможно, так как физически промежуточная величина не всегда является практически доступной величиной, которую можно было бы выделить, измерить и использовать как исходную информацию для целей регулирования.

Рассмотрим нелинейную систему, структурная схема которой показана на рис. 7-28, а и состоит из релейного регулятора без зоны нечувствительности и неоднозначности и объекта, который можно представить как инерционное звено первого порядка с передаточной функцией $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$, последовательно соединенное со звеном чистого запаздывания, имеющим передаточную функцию $W_\tau(p) = e^{-p\tau}$. Согласно формуле (3-88) передаточная функция объекта равна:

$$W_{\text{об}}(p) = W(p) W_\tau(p) = \frac{ke^{-p\tau}}{Tp + 1} \quad (7-40)$$

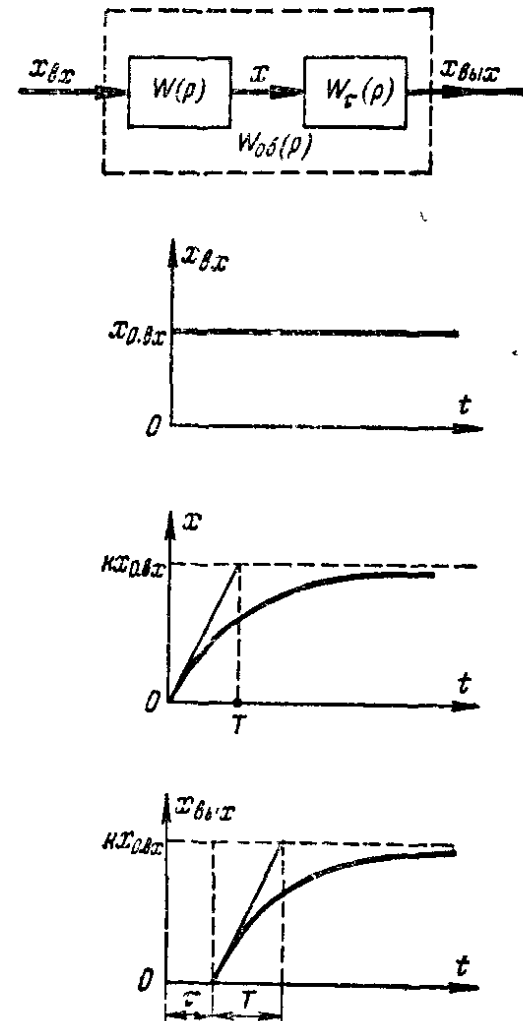


Рис. 7-27. Переходный процесс инерционного звена первого порядка с запаздыванием.

Переходный процесс в инерционном звене первого порядка, выраженный в отклонениях от заданного значения, определяется дифференциальным уравнением

$$T \frac{dx}{dt} + x = kx_{\text{н.р.}}$$

где $x_{\text{н.р}}$ — выходная величина регулятора, равная $x_{\text{н.р}} = x_{\text{н}}$ при $\epsilon > 0$ и $x_{\text{н.р}} = -x_0$ при $\epsilon < 0$.

Решив это уравнение, аналогично решению уравнений (7-14), найдем:

$$\left. \begin{aligned}
 x &= kx_H \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) - x_{0.н} e^{-\frac{t}{T}} \\
 &\text{при } \varepsilon > 0 \text{ и } x_{н.р} = x_H; \\
 x &= kx_0 \left(e^{-\frac{t}{T}} - 1 \right) + x_{0.о} e^{-\frac{t}{T}} \\
 &\text{при } \varepsilon < 0 \text{ и } x_{н.р} = -x_0.
 \end{aligned} \right\} (7-41)$$

Здесь $x_{0н}$ и $x_{0.о}$ — значения величины x в начальный момент переходного процесса, т. е. при $t = 0$.

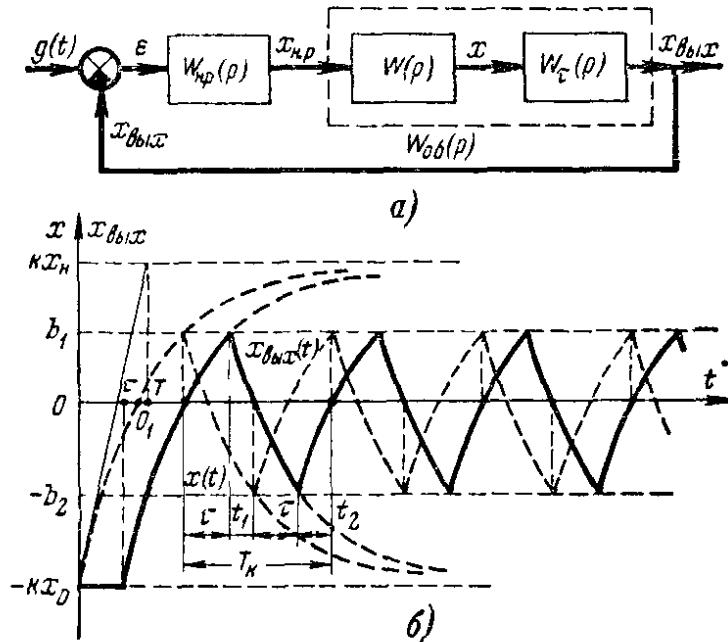


Рис. 7-28. Структурная схема и переходный процесс нелинейной системы регулирования с запаздыванием и двухпозиционным релейным элементом без зоны нечувствительности.

Выходная величина объекта будет следовать за изменением x с отставанием по времени на τ . Следовательно,

$$\left. \begin{aligned}
 x_{\text{ВЫХ}} &= kx_H \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}} \right) - x_{0н} e^{-\frac{t-\tau}{T}} \\
 &\text{при } \varepsilon > 0 \text{ и } x_{н.р} = x_H; \\
 x_{\text{ВЫХ}} &= kx_0 \left(e^{-\frac{t-\tau}{T}} - 1 \right) + x_{0.о} e^{-\frac{t-\tau}{T}} \\
 &\text{при } \varepsilon < 0 \text{ и } x_{н.р} = -x_0.
 \end{aligned} \right\} (7-42)$$

Так как на вход регулятора подается не выходная величина инерционного звена x , а выходная величина объекта $x_{\text{ВЫХ}}$, а переключение регулятора происходит при переходе ε через нуль, то это переключение будет происходить, когда регулируемая величина

объекта будет равна заданному значению, т. е. когда отклонение $x_{\text{ВЫХ}}$ этой величины от заданного значения равно нулю.

Перенесем начало координат в точку O_1 , где кривая $x(t)$ пересекает ось абсцисс. Тогда для этой точки имеем: $x = 0$ при $t = 0$. Величина $x_{\text{ВЫХ}}$ примет это же нулевое значение с опозданием, по истечении времени τ . Подставив значение $x_{\text{ВЫХ}} = 0$ и $t = \tau$ в уравнения (7-42), для этой нулевой точки найдем: $x_{0Н} = 0$ и $x_{0О} = 0$.

Подставив $x_{0Н} = 0$; $x_{0О} = 0$ и $t = \tau$ в выражения (7-41), получим значения x , при которых будет переключаться регулятор, так как в эти моменты $x_{\text{ВЫХ}} = 0$:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = b_1 = kx_H \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right) \\ \text{при } \varepsilon = 0 \text{ и } \frac{dx}{dt} > 0; \\ x_2 = -b_2 = kx_0 \left(e^{-\frac{\tau}{T}} - 1 \right) \\ \text{при } \varepsilon = 0 \text{ и } \frac{dx}{dt} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (7-43)$$

Таким образом, хотя релейный регулятор и не имеет зоны нечувствительности и неоднозначности, но за счет запаздывания в объекте регулируемая величина будет совершать автоколебания (рис. 7-28) с амплитудами, определяемыми выражениями (7-43). Диапазон колебаний регулируемой величины

$$\Delta x = b_1 + b_2 = k(x_H + x_0) \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right). \quad (7-44)$$

Поскольку при $x_{\text{ВЫХ}} = 0$ величины x определяются уравнениями (7-43), перенеся начало координат в точки, где $x_{\text{ВЫХ}} = 0$, получим при $t = 0$:

$$x = b_1 \text{ или } x = -b_2.$$

Подставив эти значения x соответственно во второе и первое из уравнений (7-41), найдем:

$$x_{0О} = b_1 \text{ и } x_{0Н} = b_2.$$

В свою очередь, подставив полученные значения $x_{0О}$ и $x_{0Н}$ в уравнения (7-42) и приняв в них $\tau = 0$, получим уравнения автоколебаний системы в виде:

$$x_{\text{ВЫХ}} = kx_H \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) - b_2 e^{-\frac{t}{T}} \quad (7-45)$$

при возрастании $x_{\text{ВЫХ}}$ от $-b_2$ до b_1 ;

$$x_{\text{ВЫХ}} = kx_0 \left(e^{-\frac{t}{T}} - 1 \right) + b_1 e^{-\frac{t}{T}} \quad (7-46)$$

при убывании $x_{\text{ВЫХ}}$ от b_1 до $-b_2$.

Период автоколебаний (рис. 7-28) равен:

$$T_k = 2\tau + t_1 + t_2.$$

За время t_1 значение $x_{\text{вых}}$ уменьшается согласно формуле (7-46) на величину b_1 и станет равно нулю, следовательно,

$$kx_0 \left(e^{-\frac{t_1}{T}} - 1 \right) + b_1 e^{-\frac{t_1}{T}} = 0,$$

откуда

$$t_1 = T \ln \left(1 + \frac{b_1}{kx_0} \right).$$

Аналогично из формулы (7-45) найдем:

$$t_2 = T \ln \left(1 + \frac{b_2}{kx_H} \right).$$

Используя полученные выражения для t_1 и t_2 , найдем:

$$T_k = 2\tau + T \ln \left(1 + \frac{b_1}{kx_0} \right) \left(1 + \frac{b_2}{kx_H} \right), \quad (7-47)$$

или с учетом выражений (7-43)

$$T_k = 2\tau + T \ln \left\{ \left[1 + \frac{x_H}{x_0} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right) \right] \left[1 + \frac{x_0}{x_H} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right) \right] \right\}. \quad (7-48)$$

Сравнивая выражения (7-45) и (7-46) с равенствами (7-17), находим, что последовательное соединение релейного элемента без зон нечувствительности и неоднозначности со звеном, имеющим чистое запаздывание, в динамическом отношении эквивалентно релейному звену с зоной неоднозначности, но без зоны нечувствительности.

Величина зоны неоднозначности является функцией динамических свойств объекта и времени запаздывания.

Так, если объект является инерционным звеном первого порядка с запаздыванием, как это было в приведенном выше анализе системы, изображенной на рис. 7-28, то зона неоднозначности определяется выражениями (7-43), вытекающими из динамических свойств инерционного звена с учетом запаздывания.

Если в системе, показанной на рис. 7-28, объект астатический и без учета запаздывания может быть представлен, например, интегрирующим звеном с передаточной функцией $W(p) = 1/Tp$, то увеличение параметра $x_{\text{вых}}$ будет происходить по линейному закону

$$x_{\text{вых}} = \frac{x_H}{T} t, \text{ а уменьшение — по закону } x_{\text{вых}} = \frac{x_0}{T} t, \text{ где } x_H \text{ — ре-}$$

гулирующее воздействие регулятора на объект, направленное на увеличение регулируемой величины, x_0 — то же, но направленное на уменьшение регулируемой величины.

Так как при наличии в системе запаздывания τ увеличение регулируемой величины, начинающееся от установившегося состояния, будет происходить только в течение этого времени запаздывания τ , после чего регулятор переключится, то предельное положительное

отклонение регулируемой величины от заданного значения будет равно:

$$b_1 = \frac{x_H}{T} \tau.$$

Аналогично амплитуда отрицательного отклонения определяется выражением

$$b_2 = \frac{x_0}{T} \tau.$$

Диапазон колебаний будет равен:

$$\Delta x = b_1 + b_2 = (x_H + x_0) \frac{\tau}{T}. \quad (7-49)$$

Период колебаний составит:

$$T_K = \tau \left(2 + \frac{x_0}{x_H} + \frac{x_H}{x_0} \right). \quad (7-50)$$

Из выражения (7-49) следует, что при наличии запаздывания в системе с астатическим объектом диапазон колебаний регулируемой величины будет тем больше, чем больше время запаздывания τ , регулирующие воздействия x_H и x_0 , поступающие на объект, и коэффициент передачи объекта $k_{об} = 1/T$.

Для статического объекта согласно формуле (7-43) диапазон колебаний регулируемой величины будет, кроме того, тем больше, чем меньше постоянная времени объекта.

Период колебаний для статических и астатических объектов, как это видно из формул (7-47)—(7-50), увеличивается с увеличением времени запаздывания τ ; зависимость же периода колебаний от соотношения величин регулирующих воздействий x_H и x_0 имеет более сложный вид.

Определим из выражения (7-50) производную периода колебаний T_K по отношению x_H/x_0 :

$$\frac{dT_K}{d\left(\frac{x_H}{x_0}\right)} = \tau \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{x_H}{x_0}\right)^2} \right] = \tau \left(1 - \frac{x_0^2}{x_H^2} \right).$$

Приравняв эту производную нулю, найдем, что период колебаний будет минимальным при $\frac{x_H}{x_0} = 1$. Аналогичный результат можно получить и из выражения (7-48).

Следовательно, минимальный период колебаний в системах, состоящих из релейного регулятора и любого объекта с запаздыванием, будет при симметричной статической характеристике регулятора ($x_H = x_0 = x_p$). При этом для объекта, представленного (без учета запаздывания) инерционным звеном первого порядка, получим

$$b_1 = b_2 = b = kx_p \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right). \quad (7-51)$$

Диапазон колебаний регулируемой величины для этого случая будет равен:

$$\Delta x_{\text{вых}} = 2b = 2kx_p \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right), \quad (7-52)$$

а период колебаний

$$T_k = 2 \left[\tau + T \ln \left(1 + \frac{b}{kx_p} \right) \right]. \quad (7-53)$$

Для объекта, представленного в динамическом отношении интегрирующим звеном с запаздыванием, найдем:

$$b_1 = b_2 = b = x_p \frac{\tau}{T}. \quad (7-54)$$

Диапазон колебаний регулируемой величины будет равен:

$$\Delta x_{\text{вых}} = 2b = 2x_p \frac{\tau}{T}, \quad (7-55)$$

а период колебаний

$$T_k = 4\tau. \quad (7-56)$$

Из приведенного анализа видно, что автоколебания в системах с релейными регуляторами, имеющими симметричные характеристики, будут симметричны относительно заданного значения регулируемой величины.

При несимметричной характеристике релейного регулятора период колебаний увеличивается; так, при $x_n = 0$ и $x_0 \neq 0$ или при $x_0 = 0$ и $x_n \neq 0$ период колебаний равен бесконечности. Фактически при этом никаких автоколебаний возникать в системе не будет, так как при отсутствии возмущающих воздействий на систему регулируемая величина будет асимптотически приближаться к ее заданному значению x_0 или x_n .

ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Пункт №	Оригинал	Изображение
1	$x(t)$	$L[x(t)]$
3	1	$\frac{1}{p}$
5	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{\sqrt{p}}{p}$
7	t	$\frac{1}{p^2}$
9	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p(p + \alpha)(p + \gamma)}$
11	$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}}{\gamma - \alpha}$	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \gamma)}$
13	$\frac{1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$	$\frac{1}{p(p + \alpha)^2}$
15	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$
17	$\frac{1}{2} \alpha t \sin \alpha t$	$\frac{p\alpha^2}{(p^2 + \alpha^2)^2}$
19	$\frac{e^{-\gamma t}}{\alpha} \sin \alpha t$	$\frac{1}{(p + \gamma)^2 + \alpha^2}$
21	$e^{-\gamma t} \cos \alpha t$	$\frac{p + \gamma}{(p + \gamma)^2 + \alpha^2}$
23	$\frac{1}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha t)$	$\frac{1}{(p^2 + \alpha^2)p}$

ВАНИЙ ЛАПЛАСА

Пункт №	Оригинал	Изображение
2	$x_1(t) \pm x_2(t)$	$L[x_1(t)] \pm L[x_2(t)]$
4	x_0	$\frac{x_0}{p}$
6	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{p}}{p^2}$
8	$e^{\pm at}$	$\frac{1}{p \mp a}$
10	$\frac{1}{a} (e^{at} - 1)$	$\frac{1}{(p - a)p}$
12	te^{-at}	$\frac{1}{(p + a)^2}$
14	$\frac{e^{-at} + at - 1}{a^2}$	$\frac{1}{(p + a)p^2}$
16	$\frac{1}{t} \sin at$	$\operatorname{arctg} \frac{a}{p}$
18	$e^{-\gamma t} \sin at$	$\frac{a}{(p + \gamma)^2 + a^2}$
20	$t \cos at$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$
22	$te^{-\gamma t} \cos at$	$\frac{(p + \gamma)^2 - a^2}{[(p + \gamma)^2 + a^2]^2}$
24	$\frac{\cos at - \cos \gamma t}{\gamma^2 - a^2}$	$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + \gamma^2)}$

ТАБЛИЦА h -ФУНКЦИЙ

$\tau \backslash x$	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,138	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231	0,240
1,0	0,310	0,326	0,340	0,356	0,371	0,386	0,401	0,417	0,432	0,447	0,461
1,5	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594	0,603	0,617	0,646	0,665
2,0	0,572	0,597	0,628	0,655	0,683	0,709	0,732	0,761	0,786	0,810	0,833
2,5	0,674	0,707	0,739	0,771	0,802	0,833	0,862	0,891	0,917	0,943	0,967
3,0	0,755	0,790	0,828	0,863	0,896	0,928	0,958	0,987	1,013	1,038	1,061
3,5	0,815	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095	1,115
4,0	0,857	0,896	0,938	0,974	1,008	1,039	1,060	1,090	1,110	1,127	1,142
4,5	0,883	0,923	0,960	0,997	1,029	1,057	1,080	1,104	1,120	1,129	1,138
5,0	0,896	0,936	0,978	1,012	1,042	1,067	1,087	1,103	1,112	1,117	1,118
5,5	0,900	0,940	0,986	1,015	1,042	1,063	1,079	1,088	1,092	1,097	1,092
6,0	0,903	0,942	0,982	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062	1,051
6,5	0,904	0,943	0,980	1,009	1,030	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033	1,018
7,0	0,904	0,944	0,979	1,006	1,024	1,035	1,037	1,033	1,023	1,009	0,993
7,5	0,907	0,945	0,980	1,006	1,019	1,027	1,025	1,020	1,005	0,989	0,974
8,0	0,910	0,951	0,985	1,008	1,020	1,024	1,021	1,012	0,998	0,981	0,966
8,5	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,022	1,018	1,007	0,992	0,977	0,966
9,0	0,924	0,965	0,997	1,016	1,025	1,025	1,018	1,006	0,992	0,978	0,970
9,5	0,932	0,972	1,004	1,022	1,029	1,027	1,019	1,006	0,993	0,982	0,975
10,0	0,939	0,978	1,009	1,025	1,031	1,027	1,019	1,006	0,993	0,987	0,982
10,5	0,946	0,985	1,013	1,028	1,033	1,028	1,017	0,005	0,993	0,989	0,987
11,0	0,947	0,988	1,015	1,029	1,031	1,025	1,014	1,002	0,993	0,991	0,993
11,5	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,999	0,991	0,989	0,997
12,0	0,950	0,990	1,015	1,025	1,024	1,014	1,004	0,994	0,988	0,990	0,997

ЕДИНИЧНЫХ ТРАПЕЦИЙ

0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	—
0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314	0,5
0,476	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,562	0,575	0,590	0,603	1,0
0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844	1,5
0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,956	0,974	0,991	1,008	1,200	2,0
0,985	1,010	1,030	1,050	1,067	1,084	1,090	1,105	1,120	1,133	2,5
1,082	1,100	1,117	1,130	1,142	1,154	1,164	1,169	1,175	1,178	3,0
1,132	1,145	1,158	1,165	1,170	1,174	1,174	1,175	1,176	1,175	3,5
1,152	1,158	1,162	1,163	1,161	1,156	1,149	1,141	1,131	1,118	4,0
1,141	1,141	1,138	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053	4,5
1,115	1,107	1,098	1,084	1,069	1,053	1,037	1,019	1,001	0,986	5,0
1,076	1,070	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932	5,5
1,037	1,021	1,003	0,984	0,956	0,949	0,934	0,922	0,914	0,906	6,0
1,001	0,982	0,966	0,948	0,936	0,920	0,910	0,906	0,903	0,905	6,5
0,975	0,975	0,941	0,927	0,917	0,911	0,908	0,909	0,915	0,925	7,0
0,958	0,944	0,931	0,922	0,919	0,920	0,927	0,934	0,946	0,962	7,5
0,951	0,941	0,935	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,004	8,0
0,954	0,948	0,948	0,961	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041	8,5
0,960	0,961	0,966	0,976	0,990	1,006	1,023	1,039	1,053	1,061	9,0
0,972	0,980	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,066	1,066	9,5
0,985	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056	10,0
0,996	1,007	1,017	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033	10,5
1,002	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005	11,0
1,006	1,017	1,029	1,037	1,039	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977	11,5
1,006	1,010	1,026	1,027	1,025	1,015	1,000	0,984	0,969	0,958	12,0

$x \backslash \alpha$	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
12,5	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,999	0,990	0,986	0,989	0,997
13,0	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	0,005	0,994	0,983	0,985	0,989	0,997
13,5	0,950	0,990	1,011	1,017	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,989	0,998
14,0	0,952	0,989	1,011	1,016	1,009	1,997	0,988	0,983	0,985	0,991	1,000
14,5	0,954	0,990	1,012	1,015	1,008	0,996	0,987	0,985	0,988	0,996	1,002
15,0	0,956	0,993	1,012	1,014	1,007	0,995	0,988	0,987	0,991	1,000	1,005
15,5	0,959	0,995	1,014	1,014	1,006	0,995	0,989	0,988	0,996	1,004	1,008
16,0	0,961	0,997	1,015	1,014	1,006	0,995	0,991	0,992	0,998	1,007	1,011
16,5	0,964	0,999	1,016	1,014	1,005	0,995	0,993	0,995	1,002	1,009	1,011
17,0	0,965	1,001	1,016	1,013	1,005	0,995	0,994	0,997	1,005	1,010	1,012
17,5	0,966	1,002	1,015	1,012	1,003	0,995	0,994	0,998	1,006	1,010	1,009
18,0	0,966	1,002	1,015	1,011	1,002	0,995	0,955	1,001	1,008	1,010	1,008
18,5	0,966	1,001	1,015	1,009	1,001	0,994	0,995	1,001	1,007	1,009	1,006
19,0	0,967	1,000	1,015	1,008	0,998	0,992	0,995	1,001	1,006	1,006	1,001
19,5	0,967	1,000	1,014	1,006	0,996	0,991	0,995	1,001	1,005	1,004	0,998
20,0	0,967	1,000	1,013	1,005	0,995	0,991	0,995	1,001	1,005	1,002	0,996
20,5	0,968	1,002	1,012	1,004	0,994	0,991	0,996	1,002	1,004	1,001	0,995
21,0	0,968	1,002	1,011	1,003	0,994	0,992	0,997	1,003	1,004	1,001	0,995
21,5	0,969	1,002	1,011	1,003	0,995	0,992	0,999	1,004	1,004	1,000	0,996
22,0	0,971	1,002	1,011	1,002	0,995	0,993	1,000	1,005	1,004	0,999	0,996
22,5	0,973	1,002	1,011	1,002	0,996	0,995	1,002	1,006	1,004	0,999	0,997
23,0	0,974	1,005	1,011	1,002	0,996	0,996	1,004	1,007	1,003	0,998	0,998
23,5	0,975	1,005	1,010	1,002	0,996	0,998	1,004	1,008	1,003	0,998	0,999
24,0	0,975	1,005	1,010	1,001	0,996	0,999	1,005	1,007	1,005	0,997	1,000
24,5	0,975	1,005	1,009	1,000	0,996	0,999	1,005	1,006	1,001	0,997	1,000
25,0	0,975	1,005	1,008	1,000	0,995	0,999	1,005	1,004	1,005	0,996	1,000
25,5	0,975	1,005	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004	1,003	0,998	0,996	1,000
26,0	0,975	1,005	1,107	0,999	0,995	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996	1,000

Продолжение приложения 2

0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	$\frac{x}{\tau}$
1,006	1,015	1,019	1,017	1,010	0,995	0,979	0,965	0,954	0,949	12,5
1,066	1,012	1,012	1,005	0,993	0,980	0,964	0,955	0,950	0,955	13,0
1,006	1,010	1,005	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970	13,5
1,006	1,008	0,999	0,987	0,974	0,965	0,961	0,965	0,976	0,990	14,0
1,006	1,005	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010	14,5
1,007	1,002	0,993	0,983	0,976	0,978	0,987	1,001	1,017	1,030	15,0
1,007	1,001	0,993	0,985	0,984	0,991	1,003	1,019	1,032	1,040	15,5
1,008	1,000	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,039	1,039	16,0
1,008	1,001	0,996	0,995	1,001	1,014	1,027	1,036	1,038	1,028	16,5
1,007	0,999	0,997	0,999	1,008	1,200	1,030	1,032	1,027	1,012	17,0
1,005	0,997	0,998	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,988	17,5
1,002	0,997	0,998	1,004	1,014	1,020	1,018	1,008	0,993	0,979	18,0
0,999	0,995	0,998	1,003	1,012	1,014	1,007	0,993	0,978	0,969	18,5
0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	1,007	0,981	0,969	0,956	19,0
0,992	0,992	0,996	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973	19,5
0,991	0,992	0,998	1,003	1,001	0,991	0,979	0,972	0,974	0,985	20,0
0,991	0,994	0,999	1,001	0,996	0,986	0,976	0,974	0,990	1,001	20,5
0,993	0,997	1,001	0,999	0,993	0,983	0,975	0,981	1,002	1,016	21,0
0,995	1,000	0,995	0,998	0,992	0,986	0,988	0,997	1,013	1,024	21,5
0,996	1,000	1,004	0,997	0,991	0,991	0,997	1,012	1,024	1,029	22,0
1,000	1,004	1,005	0,996	0,992	0,998	1,008	1,022	1,028	1,026	22,5
1,001	1,006	1,007	0,997	0,994	1,002	1,015	1,025	1,027	1,016	23,0
1,002	1,007	1,006	0,998	0,997	1,007	1,017	1,023	1,023	1,002	23,5
1,002	1,008	1,003	0,999	1,000	1,008	1,017	1,015	1,012	0,988	24,0
1,002	1,006	1,003	1,000	1,002	1,008	1,014	1,005	0,995	0,979	24,5
1,002	1,004	0,993	1,001	1,003	1,005	1,008	0,991	0,985	0,975	25,0
1,002	1,002	0,997	1,002	1,004	1,004	1,001	0,986	0,978	0,977	25,5
1,002	1,000	0,995	1,002	1,004	1,002	0,987	0,984	0,977	0,983	26,0

ЛИТЕРАТУРА

1 В о р о н о в А А , Основы теории автоматического управления, ч 1, изд во «Энергия», 1965

2 Г о р о х о в В М , Г о м е л ь с к и й Ю С , Новые регуляторы системы «Теплоавтомат», изд во «Энергия», 1965

3 К л ю е в А С 1 Электромеханическая корректирующая приставка к двухпозиционному регулируемому прибору, «Приборостроение», 1962, № 10, 2 Релейно контактная корректирующая приставка к двухпозиционному регулируемому прибору, Авторское свидетельство СССР, № 138989, «Бюллетень изобретений», 1962, № 12, 3 К вопросу об улучшении качества двухпозиционного регулирования, «Приборостроение», 1963, № 5, 4, 5 Исследование системы автоматического регулирования с помощью амплитудно-фазовых критериев, необходимой устойчивости по модулю и фазе, Известия вузов, «Радиофизика», т VIII, 1965, 6 Определение границы области устойчивости систем автоматического регулирования по амплитудно фазовой характеристике объекта в плоскости параметров настройки регуляторов, «Автоматика», 1965, № 5

4 К р а с о в с к и й А А , П о с п е л о в Г С , Основы автоматики и технической кибернетики, Госэнергоиздат, 1962

5 К р у г Е К , М и н и н а О М , Электротехнические регуляторы автоматики, Госэнергоиздат, 1962

6 Л е р н е р А Я , Введение в теорию автоматического регулирования, Машгиз, 1958

7 М а й з е л ь М М , Основы автоматического регулирования технологических процессов, Ростехиздат, 1960

8 М е е р о в М В , Введение в теорию автоматического регулирования электрических машин, Академиздат, 1965

9 О р д ы н ц е в В М , Ш е н д л е р Ю И , Автоматическое регулирование технологических процессов, Машгиз, 1960.

10 П а н т а е в Н Ф , Д и а н о в В Г , Основы теории автоматического регулирования и авторегуляторы, изд во «Недра», 1965

11 П р у с е н к о В С , Одноконтурные пневматические системы автоматического регулирования тепловых процессов, Госэнергоиздат, 1963

12 Р о т а ч В Я , Расчет настройки промышленных систем регулирования, Госэнергоиздат, 1961

13 С е р е б р я н с к и й А Я , Динамические характеристики и особенности настройки регулятора ИР-130М, «Приборостроение», 1962, № 6

14 Старикова М В , Автоколебания и скользящий режим в системах автоматического регулирования, Машгиз, 1962

15 Третьяков С А , Методы инженерных расчетов динамики двухпозиционного регулирования тепловых процессов, «Приборостроение», 1962, № 6

16 Фатеев А В , Основы линейной теории автоматического регулирования, Госэнергоиздат, 1954

17 Черепанов А И , Об улучшении качества двухпозиционного регулирования, «Автоматика и телемеханика», 1958, № 5

18 Цыпкин Я З , Теория линейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955

19 Труды ЦНИИКА, изд во «Энергия», вып 3, 1961

20 Энциклопедия современной техники, Автоматизация производства и промышленная электроника, изд во «Советская энциклопедия»

21 Черепанов А И , Анализ систем автоматического регулирования с коррекцией при постоянных длительных возмущениях, «Автоматика и телемеханика», 1960, № 3

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
<i>Глава первая. Системы автоматического регулирования .</i>	<i>5</i>
1-1. Основные определения и понятия	5
1-2. Классификация систем автоматического регулирования	11
1. Классификация по основному признаку	11
2. Классификация по другим признакам	16
<i>Глава вторая. Структурные схемы, уравнения и передаточные функции звеньев и систем</i>	<i>19</i>
2-1. Структурные схемы и уравнения систем автоматического регулирования	19
2-2. Передаточные функции	23
2-3. Типовые звенья и их передаточные функции	27
1. Усилительное звено	28
2. Интегрирующее звено	29
3. Инерционное звено первого порядка	32
4. Дифференцирующее звено	36
5. Интегро-дифференцирующее звено	38
6. Инерционное звено второго порядка	41
7. Запаздывающее звено	51
2-4. Соединения звеньев. Передаточные функции соединений	53
1. Последовательное соединение звеньев	54
2. Параллельное соединение звеньев	55
3. Встречно-параллельное соединение звеньев, или соединение с обратной связью	56
2-5. Передаточные функции систем автоматического регулирования	59
2-6. Эквивалентные преобразования структурных схем	64
2-7. Типовые передаточные функции автоматических регуляторов	66
1. Пропорциональные регуляторы	66

2.	Интегральные регуляторы	67
3.	Пропорционально-интегральные регуляторы	67
4.	Пропорционально-интегрально - дифференциальные регуляторы	69
2-8.	Примеры определения передаточных функций звеньев и систем автоматического регулирования	70
<i>Глава третья. Основные характеристики линейных систем автоматического регулирования</i>		84
3-1.	Статические характеристики	84
3-2.	Временные характеристики	95
3-3.	Частотные характеристики	97
3-4.	Динамические характеристики типовых звеньев и их соединений	104
1.	Усилительное звено	105
2.	Интегрирующее звено	105
3.	Инерционное звено первого порядка	106
4.	Дифференцирующее звено	108
5.	Интегро-дифференцирующее звено	111
6.	Инерционное звено второго порядка	115
7.	Запаздывающее звено	121
3-5.	Экспериментальное определение динамических характеристик регулируемых объектов	123
1.	Определение временных характеристик	123
2.	Определение частотных характеристик	129
3.	Определение частотных характеристик по временным характеристикам	131
<i>Глава четвертая. Устойчивость линейных систем автоматического регулирования</i>		137
4-1.	Понятие устойчивости линейных систем	137
4-2.	Критерий устойчивости Рауса — Гурвица	144
1.	Система первого порядка	146
2.	Система второго порядка	146
3.	Система третьего порядка	147
4.	Система четвертого порядка	148
4-3.	Критерий устойчивости Михайлова	148
4-4.	Критерий устойчивости Найквиста	156
4-5.	Выделение областей устойчивости в плоскости параметров системы	163
1.	Выделение областей устойчивости для двух переменных параметров	165
2.	Выделение областей устойчивости для одного переменного параметра	171
3.	Выделение областей устойчивости для систем третьего порядка	173

4-6. Примеры исследования систем автоматического регулирования на устойчивость	175
Глава пятая. Качество процессов регулирования линейных систем	181
5-1. Показатели качества процесса регулирования	181
1. Время регулирования	181
2. Перерегулирование	182
3. Установившаяся ошибка	182
4. Колебательность	183
5-2. Переходные функции систем автоматического регулирования	183
5-3. Степень устойчивости и степень колебательности систем	185
5-4. Запас устойчивости по модулю и фазе. Показатель колебательности	189
5-5. Амплитудно-фазовые критерии запаса устойчивости по модулю и фазе	193
5-6. Выделение в плоскости параметров настройки регулятора области с заданными запасами устойчивости по модулю и фазе	195
5-7. Выделение в плоскости параметров настройки регулятора области с необходимым запасом устойчивости по экспериментальной амплитудно-фазовой характеристике объекта	197
1. Система с П-регулятором	198
2. Система с И-регулятором	199
3. Система с ПИ-регулятором	201
5-8. Интегральные оценки качества	204
5-9. Частотные методы	208
5-10. Определение вещественных частотных характеристик замкнутой системы	212
5-11. Примеры оценки качества системы автоматического регулирования	217
Глава шестая. Средства улучшения качества процесса автоматического регулирования	223
6-1. Ликвидация статической ошибки	223
6-2. Последовательные и параллельные корректирующие устройства	230
6-3. Корректирующие устройства по возмущению	250
6-4. Основные структурные схемы промышленных регуляторов	253
1. П-регуляторы	254
2. И-регуляторы	256
3. ПИ-регуляторы	258
4. ПИД-регуляторы	277

<i>Глава седьмая. Понятие о некоторых нелинейных системах автоматического регулирования</i>	291
7-1. Некоторые типичные нелинейности	292
1. Нечувствительность	292
2. Ограничение	293
3. Нечувствительность и ограничение	294
4. Люфт	294
5. Люфт и ограничение	295
6. Релейные элементы	295
7-2. Особенности исследования нелинейных систем	301
1. Метод припасовывания	304
2. Метод гармонического баланса	309
7-3. Изображение процесса регулирования на фазовой плоскости	312
7-4. Устойчивость и автоколебания в нелинейных системах	321
7-5. Двухпозиционное регулирование объектов с запаздыванием	325
<i>Приложения</i>	332
<i>Литература</i>	338