

## **Лекція 6. Моделювання соціально-економічних систем в умовах невизначеності даних засобами нечіткої математики**

**Мета:** ознайомитися з сутністю та методологією моделювання соціально-економічних систем в умовах невизначеності даних за допомогою інструментарію нечіткої логіки.

### **План**

- 6.1. Теорія нечіткої логіки (або теорія нечітких множин, або Fuzzy Logic): передумови, основні поняття, інструмент.
- 6.2. Переваги та недоліки методу.
- 6.3. Приклад застосування методу нечіткої логіки для аналізу інвестиційних проектів
- 6.4. Застосування методу нечіткої логіки за допомогою пакета MATLAB.

**Перелік ключових термінів і понять:** *теорія нечіткої логіки (або теорія нечітких множин, або FUZZY LOGIC), лінгвістична змінна, терм-множина, функція приналежності, фазифікація, дефазифікація, база правил системи нечіткого виведення.*

### **6.1. Теорія нечіткої логіки (або теорія нечітких множин, або Fuzzy Logic): передумови, основні поняття, інструмент**

*Теорія нечіткої логіки (або теорія нечітких множин, або Fuzzy Logic) – новий підхід до опису бізнес-процесів, у яких присутня невизначеність, що ускладнює і навіть виключає застосування точних кількісних методів і підходів.*

#### ***Історія:***

Теорія нечітких множин (fuzzy sets theory) бере свій початок з 1965 р., коли професор Лотфі Заде (Lotfi Zadeh) з університету Берклі опублікував основну роботу «Fuzzy Sets» в журналі «Information and Control».

#### ***Основні етапи формування теорії:***

**1 етап – формування основних теоретичних постулатів** (1965 – початок 80-х рр.);

- Zadeh L.A. (1965, 1973);
- Dubois D., Prade H. (1979, 1980) – операції над нечіткими числами.

**2 етап – практичних розробок в різних сферах життя, заснованих на нечіткій логіці; народження нового наукового напрямку в рамках нечіткої логіки «Fuzzy Economics»** (1973 – початок 90-х рр.);

- Buckley, J. (1987,1992) – «Рішення нечітких рівнянь в економіці і фінансах» і «Нечітка математика в фінансах»;
- Kosko, Bart. (1993) – доведена основоположна FAT-теорема (Fuzzy Approximation Theorem), яка підтвердила повноту нечіткої логіки;
- і багато інших;

**3 етап** – масового використання продукції, в основі роботи яких лежить нечітка логіка (1995 – наш час). 48 японських компаній утворили спільну лабораторію LIFE (Laboratory for International Fuzzy Engineering – Міжнародна лабораторія розробок, заснованих на нечіткій логіці).

**Основна відмінність методу:**

Введення лінгвістичних змінних (суб'єктивних категорій).

**Лінгвістичні змінні** – змінні, які не можна описати за допомогою математичної мови, тобто їм складно надати точну (об'єктивну) кількісну оцінку. Наприклад, поняття «малий» і «середній» (кажучи про бізнес), «висока» або «низька» (про процентну ставку) не мають чіткої межі і не можуть бути представлені точним математичним описом.

Згідно Л. Заде, **лінгвістичною змінною** називається така змінна, значеннями якої є слова або речення природної мови.

У літературі нечітких множин лінгвістичні змінні також називають **термами** (а їх множини – **терм-множинами**, від англ. Term – називати).

**Приклад 1.**

Часто, для отримання інтегральної оцінки ризику недостатньо тільки значень зміни ціни, попиту та інших кількісних змінних. Необхідно також враховувати і багато якісних змінних, як наприклад, сила конкурентів, грамотність менеджменту, погодні умови (особливо актуально для будівельних проєктів). Так, для отримання чисельної оцінки лінгвістичної змінної «умови для проведення будівельних робіт» визначемо інтервал значень оцінки від 0 до 10, де 0 – найсуворіші умови, що заважають процесу проведення робіт. На основі здорового глузду й експертних оцінок, можна стверджувати, що якщо роботи планується вести в житловій зоні (де підвищені ризики) і в умовах відсутності підготовчих робіт, то її оцінка буде коливатися від 0 до 3 балів, що буде означати суворі умови будівельних робіт. Якщо ж будувати будинок планується на вже підготовленому до роботи майданчику, в умовах сухої місцевості і далеко від житлових будинків, то оцінки змінної будуть набувати значень від 7 до 10 балів, що означає сприятливі умови будівельних робіт. Змінна набуде значення в інтервалі від 3 до 7 балів, якщо погодним умовам будуть притаманні як сприяючі, так і перешкоджаючі будівництву характеристики. Відповідні бали присвоюються або оцінювачами, або групою експертів, безпосередньо залучених до процесу аналізу інвестиційного проєкту.

**Приклад 2.**

Ще одним прикладом оцінки лінгвістичної змінної може бути нечіткість межі змінної «низька процентна ставка». Яка ставка відсотка по кредиту вважається низькою? Відповідь на це питання може бути знайдено шляхом опитування безлічі експертів. Так, ґрунтуючись на здоровій логіці, можуть бути отримані відповіді, наприклад, що ставка по кредиту менше 7% – низька, від 8

до 15% – середня, а від 16% і вище – висока. Отже, межі між цими уявленнями – нечіткі, розмиті, і поняття «низька вартість кредиту» є суб'єктивною оцінкою.

**Основний інструмент методу:**

функція приналежності.

**Функція приналежності** – інструмент перекладу лінгвістичних змінних на математичну мову для подальшого застосування методу нечітких множин.

Функцією приналежності є якась математична функція, що задає ступінь або впевненість, з якою елементи деякої множини належать заданій нечіткій множині А. Чим більше аргумент  $x$  відповідає нечіткій множині А, тим більше значення, тобто тим ближче значення аргументу до 1.

Підставою для побудови функції приналежності можуть слугувати експертні оцінки.

**Приклад 3** (продовження прикладу 2).

На рис. 6.1 представлена функція приналежності для змінної «висока ставка відсотка», де по осі X розташовуються значення ставки відсотка, а по осі У – значення функції приналежності для терм-множини «високий відсоток».

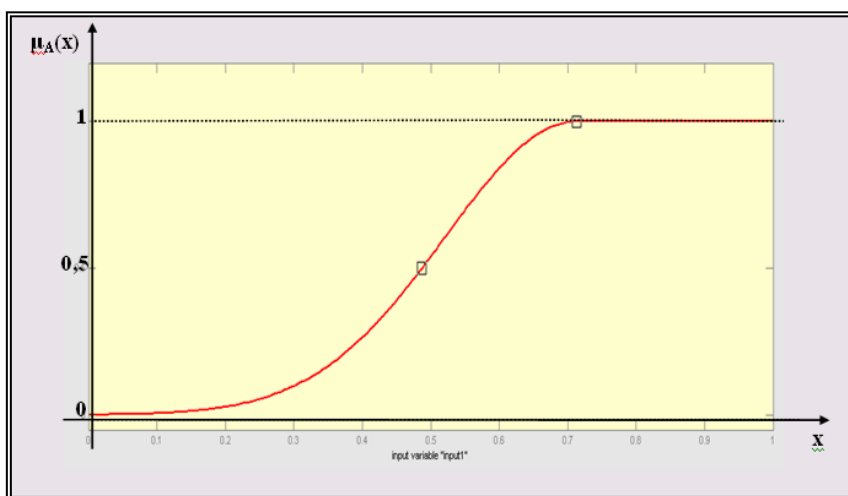


Рис. 6.1. Функція приналежності для змінної «висока ставка відсотка»

Оскільки значення від 16% і вище були визнані експертами як висока ставка відсотка, то функція приналежності набуває значення 1, що відповідає істинності приналежності відсотка терм-безлічі «високий відсоток». При значеннях відсотка від 0 до 7% (тобто низька ставка відсотка) значення функції приналежності дорівнює нулю. У проміжку від 7 до 16% функція приналежності монотонно зростає, тим самим, підвищуючи достовірність висловлювання при наближенні значень відсотка до 16%.

**Види функцій приналежності.**

Основні види функцій приналежності:

- трикутні;

- трапецієвидні;
- кусково-лінійні;
- дзвоноподібні (розподілу Гаусса);
- сігмоїдні.

### ***Методи побудови функцій приналежності.***

Виділяють дві групи методів побудови за експертними оцінками функцій приналежності нечіткої множини: прямі і непрямі методи.

Прямі методи характеризуються тим, що експерт безпосередньо задає правила визначення значень функції приналежності, що характеризує елемент  $x$ . Прикладами прямих методів є безпосереднє завдання функції приналежності таблицею, графіком або формулою. Недоліком цієї групи методів є велика частка суб'єктивізму.

У непрямих методах значення функції приналежності вибираються таким чином, щоб задовольнити заздалегідь сформульованим умовам. Експертна інформація є тільки вихідною інформацією для подальшої обробки. До групи цих методів можна віднести такі методики побудови функцій приналежності, як побудова функцій приналежності на основі парних порівнянь, з використанням статистичних даних, на основі рангових оцінок і т.д.

### ***Передумови для аналізу за допомогою методу нечіткої логіки.***

Оскільки теорія нечітких множин – окремий розділ математики, то він базується на своїх передумовах.

У роботі Л. Заде і Р. Беллмана вказані основні властивості, які повинні мати нечіткі множини:

- a. Нормальність.
- b. Унімодальність.
- c. Опуклість.

## **6.2. Переваги і недоліки методу нечітких множин**

Використання методу нечітких множин дає низку *переваг*, тому що дозволяє:

- включати в аналіз якісні змінні;
- оперувати нечіткими вхідними даними;
- оперувати лінгвістичними критеріями;
- швидко моделювати складні динамічні системи і порівнювати їх із заданим ступенем точності;
- долати недоліки й обмеження існуючих методів оцінки проектних ризиків.

*Недоліки методу:*

- існує суб'єктивність у виборі функцій приналежності і формуванні правил нечіткого введення;
- відсутність інформованості про метод, а також незначна увага до застосування методу професійними фінансовими установами;
- необхідність спеціального програмного забезпечення, а також фахівців, які вміють з ним працювати.

Незважаючи на недоліки і обмеження теорії, метод нечітких множин отримав визнання як перспективного і дає точні результати найбільшими міжнародними компаніями (Motorola, General Electric, Otis Elevator, Pacific Gas & Electric, Ford). Для України, а також ринків, що розвиваються, використання методу нечіткої логіки особливо перспективне. Аналіз ризиків на основі статистичних методів для більшої частини компаній, що недавно утворилися, не застосовується, тому що немає накопиченої статистичної інформації для отримання об'єктивних оцінок.

Отже, метод нечітких множин не виключає застосування статистичних методів, а стає інструментом, коли інші підходи до оцінки ризику неприйнятні.

Характерне застосування теорії нечітких множин до фінансового менеджменту такі:

- 1) аналіз ризику банкрутства підприємства;
- 2) оцінка ризику інвестиційного проєкту;
- 3) побудова оптимального портфеля цінних паперів і бізнесів;
- 4) оцінка справедливої вартості об'єктів (у тому числі об'єктів нерухомості);
- 5) оцінка інвестиційної привабливості акцій і облігацій;
- 6) аналіз необхідності та обґрунтованості ІТ-рішень.

### **6.3. Приклад застосування методу нечіткої логіки для аналізу інвестиційних проєктів**

Трикутний вид функції приналежності – найчастіше використовуваний в практиці аналізу інвестиційних проєктів.

Трикутне число  $A$  задається за допомогою трьох параметрів: мінімальне значення ( $a$ ), модальне ( $b$ ) і максимальне ( $c$ ), що відповідають песимістичному, базовому та оптимістичним сценаріями.

Математично трикутний вид функції приналежності можна описати, як  $P_1 = (m_1, n_1) = (a_1 + \alpha \times (b_1 - a_1), c_1 + \alpha \times (b_1 - c_1))$ , де при будь-якому  $\alpha$  функція приналежності  $\mu_A(X)$  набуває значення  $m = a + \alpha \times (b - a)$ , а  $n = c + \alpha \times (b - c)$ .

*Основні операції над нечіткою множиною.*

1. Додавання.  $P_1 + P_2 = C = (m, n)$ , де  $m = m_1 + m_2$ ,  $n = n_1 + n_2$ .
2. Множення.  $P_1 \times P_2 = C = (m, n)$ , де  $m = m_1 \times m_2$ ,  $n = n_1 \times n_2$ .

3. Ділення.  $P_1/P_2 = C = (m, n)$ , де  $m = m_1/n_2$ ,  $n = n_1/m_2$ , якщо  $P_1, P_2$  додатні, та  $m = m_1/m_2$ ,  $n = n_1/n_2$ , якщо  $P_1$  від'ємні.

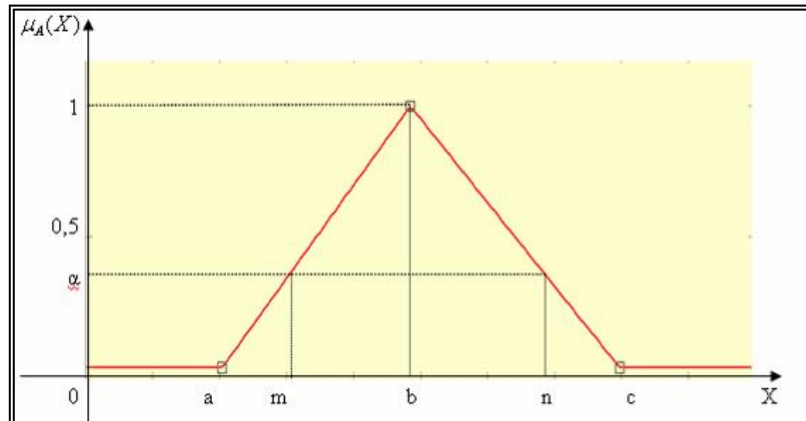


Рис. 6.2. Вид трикутної функції приналежності

**Оцінка ризику на основі інтегральної оцінки ризику V&M (Воронова і Максимова)**

Розглянемо будь-який інвестиційний проєкт, в якому  $NPV$  можна звести до трикутного числа  $NPV = (NPV_1, \overline{NPV}, NPV_2)$ ,

де  $NPV_1$  – чистий грошовий дохід (ЧГД) при оптимістичному сценарії;

$NPV_2$  – ЧГД при песимістичному сценарії;

$\overline{NPV}$  – очікуваний ЧГД.

$G$  – критерій ефективності проєкту (зазвичай приймається рівним нулю).

Проєкт визнається прибутковим, якщо  $NPV$  більше заданого інвесторами критерію  $G$ .

Визначивши крайні значення ЧГД, можна описати функцію приналежності:

$$NPV_1 = \alpha(\overline{NPV} - NPV_{\min}) + NPV_{\min}$$

$$NPV_2 = NPV_{\max} - \alpha(NPV_{\max} - \overline{NPV})$$

$$V \& M^* = \int_0^{\alpha_1} \phi^*(\alpha) d\alpha, (*)$$

$$\text{де } \phi^*(\alpha) = \begin{cases} 0, & G \leq NPV_1 \\ \frac{G - NPV_1}{NPV_2 - NPV_1}, & NPV_1 < G < NPV_2 \\ 1, & NPV_2 \leq G \end{cases}$$

Обчисливши інтеграл, можна перетворити наведені вище рівняння до вигляду:

$$V \& M^* = \begin{cases} 0, & G < NPV_{\min} \\ R \times \left( 1 + \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \ln(1 - \alpha_1) \right), & NPV_{\min} \leq G < \overline{NPV} \\ 1 - (1 - R) \times \left( 1 + \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \ln(1 - \alpha_1) \right), & \overline{NPV} \leq G < NPV_{\max} \\ 1, & NPV_{\max} \leq G \end{cases} \quad (**),$$

$$\text{де } R = \begin{cases} \frac{G - NPV_{\min}}{NPV_{\max} - NPV_{\min}}, & G < NPV_{\max} \\ 1, & NPV_{\max} \leq G \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0, & G < NPV_{\min} \\ \frac{G - NPV_{\min}}{\overline{NPV} - NPV_{\min}}, & NPV_{\min} \leq G < \overline{NPV} \\ \frac{NPV_{\max} - G}{NPV_{\max} - \overline{NPV}}, & \overline{NPV} \leq G < NPV_{\max} \\ 0, & NPV_{\max} \leq G \end{cases}$$

#### Оцінка:

- набуває значення від 0 до 1;
- кожен інвестор, виходячи зі своїх інвестиційних переваг, може класифікувати значення, виділивши для себе відрізок неприйнятних значень ризику.

#### Переваги методу:

- на основі теорії нечітких множин формується повний спектр можливих сценаріїв інвестиційного процесу;
- рішення приймається не на основі двох оцінок ефективності проекту, а по всій сукупності оцінок;
- очікувана ефективність проекту не є точковим показником, а являє собою поле інтервальних значень зі своїм розподілом очікувань, що характеризується функцією приналежності відповідного нечіткого числа.

#### Приклад 4.

Розглянемо інвестиційний проєкт з такими показниками:

- Проєкт буде здійснюватися протягом трьох років,  $t = 3$ ;
- Розмір стартових інвестицій відомий точно і становить  $I = 2$  млн. грн;
- Ставка дисконтування може коливатися в межах від 10% до 20% річних;
- Чистий грошовий потік планується в діапазоні від  $CF_{\min} = 0$  до  $CF_{\max} = 2$  млн. грн;
- Залишкова (ліквідаційна) вартість проєкту дорівнює нулю.

Застосуємо метод нечіткої логіки для аналізу ризику.

$$\text{Отже, } NPV_{\min} = -2 + \frac{0}{(1+0,2)^1} + \frac{0}{(1+0,2)^2} + \frac{0}{(1+0,2)^3} = -2$$

$$NPV_{\max} = -2 + \frac{2}{(1+0,1)^1} + \frac{2}{(1+0,1)^2} + \frac{2}{(1+0,1)^3} = 2,97 =$$

Оскільки  $CF_{av} = 1$  млн.,  $R_{av} = 15\%$ , то  $NPV_{av} = 0,28$ .

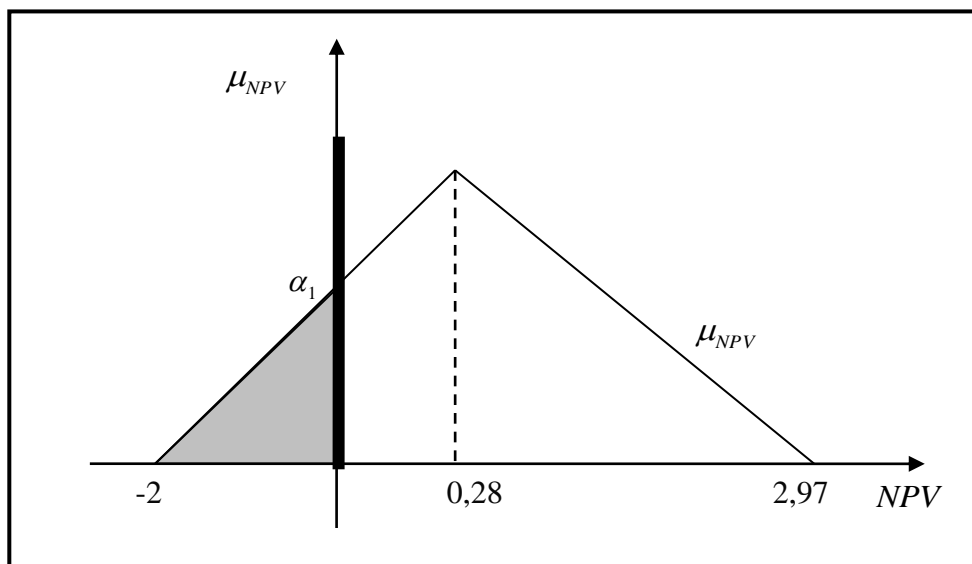


Рис. 6.3. Трикутна функція приналежності для NPV

Отже, трикутне число для Проєкту, що розглядається становить  $NPV = (-2, 0,28, 2,97)$ .

Оскільки  $NPV_{\min} < G = 0 < \overline{NPV}$ , то за формулою (\*\*):

$$\alpha_1 = 0,8759, R = 0,402, V \& M^* = 0,283.$$

Ризик-менеджер може самостійно встановити шкалу неприйняття ризику, в залежності від додаткових параметрів проєкту і своїх переваг.

Якщо використати табл. 6.1, яка визначає таку шкалу, то можна зробити висновок, що ризик цього інвестиційного проєкту середній.

Таблиця 6.1. Терм-множина для визначення ступеню ризику

$V \& M$	Ступінь ризику	Рішення компанії відносно інвестування
<b>0 – 0,07</b>	дуже низький	Точно прийняти проєкт
<b>0,07 – 0,15</b>	низький	Прийняти, але з обережністю і подальшим моніторингом
<b>0,16 – 0,35</b>	середній	Прийняти з обмеженнями
<b>0,36 – 0,4</b>	високий	Відхилити та переглянути проєкт
<b>&gt; 0,40</b>	дуже високий	Відмовитись з впевненістю



## 6.4. Застосування методу нечіткої логіки за допомогою пакета MATLAB.

Говорячи про метод нечіткої логіки, найчастіше мають на увазі системи нечіткого виведення, які лежать в основі різних експертних і керуючих процесів. Основними етапами нечіткого виводу є:

1. Формування бази правил системи нечіткого виведення.
2. Фазифікації вхідних параметрів.
3. Агрегація.
4. Активізація підумов у нечітких правилах.
5. Дефазифікація.

Ця схема відноситься до алгоритму нечіткого висновку Мамдані, який один із перших знайшов застосування в системах нечітких множин.

Опускаючи математичні подробиці теорій нечітких множин, розглянемо основні особливості кожного з цих етапів, основні з яких зображені на прикладі рис. 6.4.

Розглянемо модель, що складається з трьох параметрів, де «А» і «В» – вхідні змінні, а «С» – вихідна. Причому, кожна зі змінних може набувати відповідні значення, тобто володіє своєю лінгвістично заданою терм-множиною, тобто  $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ ,  $B = \{B_1, B_3\}$ ,  $C = \{C_1, C_2, C_3\}$ . Своєю чергою для кожної з терм-множини задається функція приналежності. Завдання нечіткого виведення для цього прикладу є визначення числового значення для вихідної змінної С.

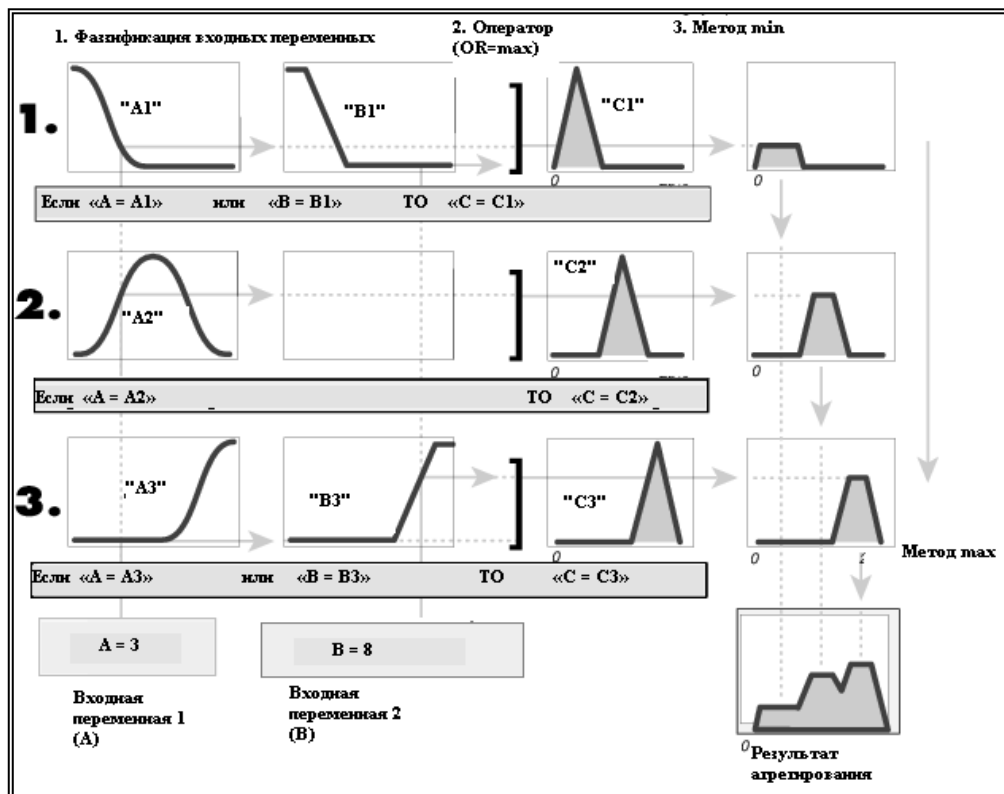


Рис. 6.4. Етапи нечіткого виведення

### **Формування бази правил системи нечіткого виводу**

Процес формування бази правил нечіткого виводу є формальне подання емпіричних знань експерта в тій чи іншій проблемній області. Найбільш часто база правил має вигляд структурованого тексту:

Правило\_1: Якщо «Умова\_A1» або «Умова\_B1», то «Наслідок\_C1».

Правило\_2: Якщо «Умова\_A2» або «Умова\_B2», то «Наслідок\_C2».

...

Правило\_n: Якщо «Умова\_An» або «Умова\_Bn», то «Наслідок\_Cn»,

де «Умова\_A1», «Умова\_A2», ..., «Умова\_An» та «Умова\_B1», «Умова\_B2», ..., «Умова\_Bn» – вхідні лінгвістичні змінні,

«Наслідок\_C1», «Наслідок\_C2», ..., «Наслідок\_Cn» – вихідні лінгвістичні змінні.

Слід зазначити, що вхідні та вихідні лінгвістичні змінні вважаються визначеними, якщо для них задані функції приналежності. Так, на рис. 6.4 зображений етап формування трьох груп правил (етапи 1-3), де для кожної зі змінних задані функції приналежності.

### **Фазифікація вхідних параметрів**

Фазифікацією, або введенням нечіткості, називається процес знаходження функції приналежності нечітких множин на основі звичайних вихідних даних. На цьому етапі встановлюється відповідність між чисельним значенням вхідної змінної системи нечіткого виведення і значенням функції приналежності відповідної їй лінгвістичної змінної. Для прикладу на рис. 6.4 групою експертів вхідна змінна «А» була оцінена в 3 бали за 10-бальною шкалою, а змінна «В» – у 8 балів. Причому оцінка в 0 балів показує «низьку» якість змінної (наприклад, погана якість продукції, низька репутація команди), а оцінка в 10 балів – «чудові» характеристики описуваного параметра (наприклад, вигідні умови кредитування, висока конкурентоспроможність товарів).

### **Агрегація**

Метою цього етапу є визначення ступеня істинності кожного з підвисновків по кожному з правил систем нечіткого виводу. Далі це приводить до однієї нечіткої множини, яка буде призначена кожній вихідній змінній для кожного правила. Як правило логічного висновку зазвичай використовуються операції  $\min$  (мінімум) або  $\text{prod}$  (множення). У логічному висновку за допомогою функції  $\min$  приналежність висновку «відсікається» по висоті, що відповідає ступеню істинності передумови правила (нечітка логіка «І») (рис. 6.4).

### **Активізація підумови в нечітких правилах**

Нечіткі підмножини, призначені для кожної вихідної змінної, об'єднуються разом, щоб сформувати одну нечітку підмножину для кожної змінної.

### **Дефазифікація**

Отримані результати всіх вихідних змінних на попередніх етапах нечіткого виведення перетворюються в звичайні кількісні значення кожної з вихідних

змінних. Дефазифікація нечіткої множини  $C = \int_{[x;x]} \mu_A(x) / x$  за методом центра ваги

$$c = \frac{\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} x \times \mu_A(x) dx}{\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \mu_A(x) dx} .$$

Результати дефазифікації шляхом знаходження центру тяжіння фігури зображені на рис. 6.5.

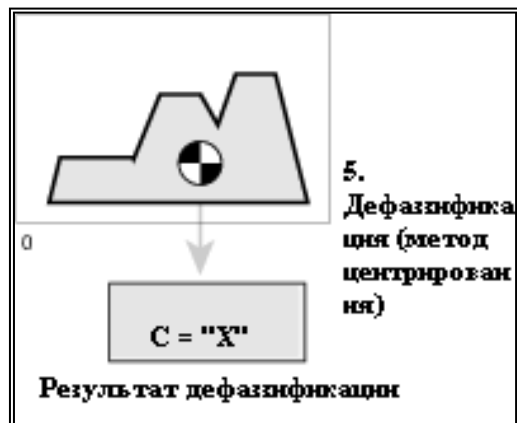


Рис. 6.5. Результати дефазифікації

Фізичним аналогом цієї формули є знаходження центра ваги плоскої фігури, обмеженої осями координат і графіком функції приналежності нечіткої множини.

#### Питання для самоконтролю:

1. Що є головною особливістю методу нечіткої логіки?
2. У яких випадках доцільно застосовувати метод нечіткої логіки?
3. Що є основним інструментом Fuzzy Logic&
4. Яким шляхом визначається вид функції приналежності?
5. Який алгоритм нечіткого висновку застосовується у пакеті MATLAB?
6. У якому вигляді задається база правил у пакеті MATLAB?
7. Що є фізичним аналогом процедури дефазифікації?