Лабораторна робота №4
Інтерполяція і апроксимація чисельних даних.
(max=10 б.).

1. Знайти інтерполяційний многочлен Лагранжа $y = L(x)$, який проходить через усі точки дискретної залежності (1). До розв’язання застосувати будь-який пакет прикладних програм, що дозволяє проводити символьні обчислення **(3б).**

Формулу, за якою визначається многочлен Лагранжа можна знайти за посиланням: https://bit.ly/3bNe2Ap

2. Реалізувати метод найменших квадратів. Для апроксимації обрати поліном (многочлен) того самого степеня, що і для лінії тренду лабораторної роботи №3. Виписати отриману функцію $y = G(x)$.

Використання Microsoft Excel оцінюється в **3б.**, написання програмних кодів , у тому числі в системах комп’ютерної алгебри Maple, Mathcad, MathLab, Mathematica і т.п.. – **7б.**

3. Порівняти функції $y = F(x)$ і $y = G(x)$.

Теоретичні відомості

АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ. ВИБІР ЕМПІРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Апроксимація та інтерполяція чисельних даних

Пропонується студентові самостійно пригадати означення апроксимації та інтерполяції чисельних даних. В допомогу на рис. 1.1 (а) наведено числові дані на площині. На рис. 1.1 (б) і (в) зображено їх апроксимація та інтерполяція деякими функцією однієї змінної.

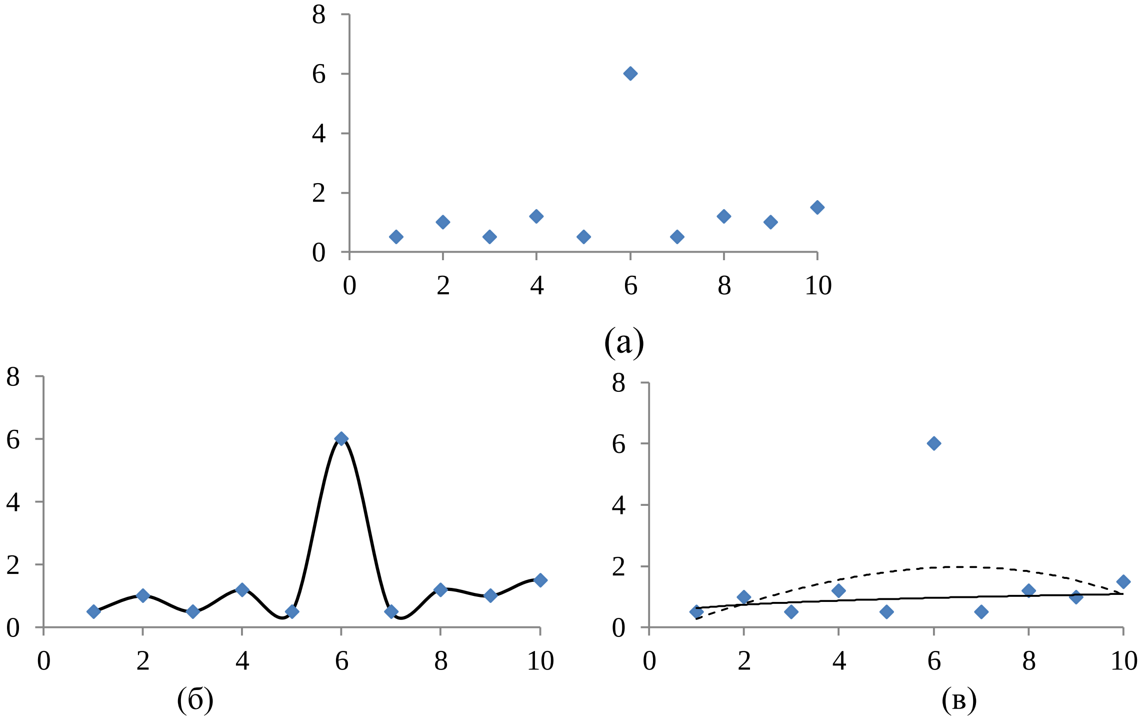


Рис. 1.1

Пропонується дати відповіді на питання:

1. Чим відрізняється інтерполяція від апроксимації?
2. Який саме рисунок серед (рис. 1.1 (а)-(в)) відповідає інтерполяції? апроксимації:
3. Які методи інтерполяції Вам відомі? апроксимації?
4. У яких випадках інтерполяція є невиправданою?
5. На рис. 1.2 показано, до чого призводить фільтрація даних, яку застосовують після процесу апроксимації.

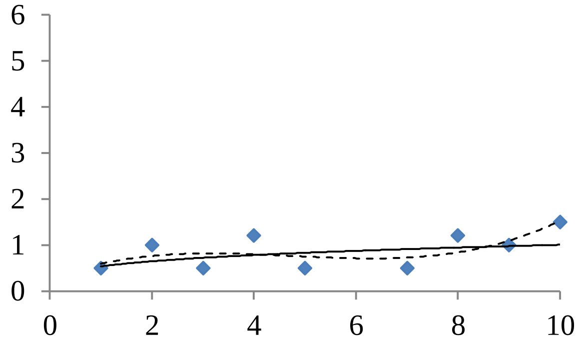


Рис. 1.2

1.2 Точкове квадратичне апроксимування функцій однієї змінної. Вибір емпіричної функції.

1.2.1 Постановка задачі.

Розглянемо сукупність точок на площині $\left\{\left(x_k, y_k\right)\right\}_{k=1}^{n}$, де $y_k = f(x_k),\ k = \overline{1,n}$. Тут функція однієї змінної $f(x)$ визначає емпіричні дані.

Потрібно знайти емпіричну функцію

$$y = \tilde{f}\left(x, a_1, a_2, ..., a_m\right), \tag{1.1}$$

що апроксимує задану множину точок і визначається невідомими параметрами $a_1, a_2, ..., a_m$, при цьому їх кількість $m \ll n$. (Якщо $m = n$, то функція (1.1) є інтерполюючою)

Відхилення в кожній точці визначається як

$$\varepsilon_k = \left|\tilde{f}\left(x_k, a_1, a_2, ..., a_m\right) - y_k\right| = \left|\tilde{f}\left(x_k, a_1, a_2, ..., a_m\right) - f(x_k)\right|, \quad k = \overline{1,n}. \tag{1.2}$$

Загальне відхилення може характеризуватися однією із формул

$$\varepsilon = \max_{k=\overline{1,n}} \varepsilon_k, \quad \varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k, \quad \varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \left(\varepsilon_k\right)^2. \tag{1.3}$$

Метою є мінімізація загального відхилення.

Формула $\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \left(\varepsilon_k\right)^2$ задає *квадратичне відхилення*. А метод, що дозволяє знайти апроксимуючу функцію (1.1), яка відповідає мінімальному значенню квадратичного відхилення, називають *методом найменших квадратів (МНК)*.

1.2.2 Точкове квадратичне апроксимування функції однієї змінної многочленом

Розглянемо [**Error! Reference source not found.**] сукупність точок на площині $\left\{\left(x_k, y_k\right)\right\}_{k=0}^{n}$, де $y_k = f(x_k), k = \overline{0,n}$. За апроксимуючу функцію оберемо многочлен

$$y = P\left(x, a_0, a_1, ..., a_m\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_i x^i + ... + a_m x^m . \tag{1.1a}$$

У загальному випадку, МНК потребує виконання обмеження $m \le n$. Однак на практиці, $m \ll n$. Квадратичне відхилення визначається формулою

$$\begin{gathered} Q\left(a_0, a_1, ..., a_m\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(P\left(x_k, a_0, a_1, ..., a_m\right) - y_k\right)^2 = \\ = \sum_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2\left(x_k\right)^2 + ... + a_i\left(x_k\right)^i + ... + a_m\left(x_k\right)^m - y_k\right)^2 . \end{gathered} \tag{1.4}$$

Потрібно знайти мінімум зазначеної функції.

Знайдемо критичну точку функції багатьох змінних Q:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial a_0} = \sum_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2\left(x_k\right)^2 + ... + a_i\left(x_k\right)^i + ... + a_m\left(x_k\right)^m - y_k\right)\cdot 1 = 0; \\ \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial a_1} = \sum_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2\left(x_k\right)^2 + ... + a_i\left(x_k\right)^i + ... + a_m\left(x_k\right)^m - y_k\right)\cdot x_k = 0; \\ \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial a_2} = \sum_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2\left(x_k\right)^2 + ... + a_i\left(x_k\right)^i + ... + a_m\left(x_k\right)^m - y_k\right)\cdot\left(x_k\right)^2 = 0; \\ ... \\ \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial a_i} = \sum_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2\left(x_k\right)^2 + ... + a_i\left(x_k\right)^i + ... + a_m\left(x_k\right)^m - y_k\right)\cdot\left(x_k\right)^i = 0; \\ ... \\ \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial a_m} = \sum_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2\left(x_k\right)^2 + ... + a_i\left(x_k\right)^i + ... + a_m\left(x_k\right)^m - y_k\right)\cdot\left(x_k\right)^m = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Отриману систему можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} a_0\cdot(n+1)+a_1\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}x_k+a_2\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^2+\ldots+a_i\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^i+\ldots+a_m\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^m=\sum\limits_{k=0}^{n}y_k; \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}x_k+a_1\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^2+a_2\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^3+\ldots+a_i\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^{i+1}+\ldots+a_m\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^{m+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}x_k y_k; \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^2+a_1\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^3+a_2\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^4+\ldots+a_i\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k\right)^{i+2}+\ldots+a_m\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^{m+2}=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^2 y_k; \\ \ldots \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^i+a_1\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^{1+i}+a_2\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^{2+i}+\ldots+a_i\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^{2i}+\ldots+a_m\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^{m+i}=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^i y_k; \\ \ldots \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^m+a_1\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^{1+m}+a_2\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^{2+m}+\ldots+a_i\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^{i+m}+\ldots+a_m\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^{2m}=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^m y_k. \end{cases} \tag{1.6}$$

Уведемо позначення

$$S_r=\sum_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^r,\ r=\overline{0,2m},$$

$$T_p=\sum_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^p y_k,\ p=\overline{0,m},$$

тоді система (1.6) набуде вигляду

$$\begin{cases} a_0\cdot S_0+a_1\cdot S_1+a_2\cdot S_2+\ldots+a_i\cdot S_i+\ldots+a_m\cdot S_m=T_0; \\ a_0\cdot S_1+a_1\cdot S_2+a_2\cdot S_3+\ldots+a_i\cdot S_{i+1}+\ldots+a_m\cdot S_{m+1}=T_1; \\ a_0\cdot S_2+a_1\cdot S_3+a_2\cdot S_4+\ldots+a_i\cdot S_{i+2}+\ldots+a_m\cdot S_{m+2}=T_2; \\ \ldots \\ a_0\cdot S_i+a_1\cdot S_{1+i}+a_2\cdot S_{2+i}+\ldots+a_i\cdot S_{2i}+\ldots+a_m\cdot S_{m+i}=T_i; \\ \ldots \\ a_0\cdot S_m+a_1\cdot S_{1+m}+a_2\cdot S_{2+m}+\ldots+a_i\cdot S_{i+m}+\ldots+a_m\cdot S_{2m}=T_m. \end{cases} \tag{1.7}$$

I спосіб. Систему (1.7) можна подати в матричній формі

$$Z\cdot A=B, \tag{1.8}$$

$$Z=\begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_m \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_{m+1} \\ S_2 & S_3 & S_4 & \ldots & S_{m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_m & S_{m+1} & S_{m+2} & \ldots & S_{2m} \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ \ldots \\ T_m \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

За допомогою II способу нижче буде доведено, що СЛАР (1.7) має єдиний розв'язок, якщо всі абсциси заданих точок нерівні. Оскільки функція Q додатно визначена, то критична точка може бути лише точкою локального мінімуму даної функції. Відповідну точку мінімуму можна знайти за формулою

$$A=Z^{-1}B. \tag{1.10}$$

Якщо $m = n$, то апроксимуюча функція (1.1а) є інтерполяційним многочленом Лагранжа для заданої системи точок.

Для використання засобів табличного редактора (зокрема, MS Excel) зручно застосувати таблицю 1.1.

Таблиця 1.1

x^0	x^1	x^2	…	x^{2m}	y	xy	x^2y	…	$x^m y$
1	x_0	$(x_0)^2$	…	$(x_0)^{2m}$	y_0	x_0y_0	$(x_0)^2 y_0$	…	$(x_0)^m y_0$
1	x_1	$(x_1)^2$	…	$(x_1)^{2m}$	y_1	x_1y_1	$(x_1)^2 y_1$	…	$(x_1)^m y_1$
1	x_2	$(x_2)^2$	…	$(x_2)^{2m}$	y_2	x_2y_2	$(x_2)^2 y_2$	…	$(x_2)^m y_2$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1	x_n	$(x_n)^2$		$(x_n)^{2m}$	y_n	x_ny_n	$(x_n)^2 y_n$		$(x_n)^2 y_n$
S_0	S_1	S_2		S_m	T_0	T_1	T_2		T_m

<u>II спосіб [</u><u>Error! Reference source not found.</u>**<u>].</u>** Подамо матричну форму системи (1.7) в інший спосіб. Для цього розглянемо матрицю M, вектор Y та матричні добутки

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \dots & (x_0)^m \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & & (x_1)^m \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & & (x_2)^m \\ \dots & \dots & \dots & & \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & & (x_n)^m \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$M^tM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ (x_0)^2 & (x_1)^2 & (x_2)^2 & \dots & (x_n)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_0)^m & (x_1)^m & (x_2)^m & \dots & (x_n)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \dots & (x_0)^m \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^m \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n+1 & \sum_{k=0}^{n} x_k & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^2 & \dots & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^m \\ \sum_{k=0}^{n} x_k & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^2 & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^3 & \dots & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^{m+1} \\ \sum_{k=0}^{n} (x_k)^2 & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^3 & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^4 & \dots & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^{n} (x_k)^m & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^{m+1} & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^{m+2} & \dots & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^{2m} \end{pmatrix} = Z.$$

$$M^tY=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n\\ (x_0)^2 & (x_1)^2 & (x_2)^2 & \ldots & (x_n)^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (x_0)^m & (x_1)^m & (x_2)^m & \ldots & (x_n)^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ y_2\\ \ldots\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{n} y_k\\ \sum\limits_{k=0}^{n} x_k y_k\\ \sum\limits_{k=0}^{n} (x_k)^2 y_k\\ \ldots\\ \sum\limits_{k=0}^{n} (x_k)^m y_k\end{pmatrix}=B.$$

Отже, система (1.7) може бути поданою у матричному вигляді в наступний спосіб:

$$M^tMA=M^tY, \tag{1.12}$$

а її розв'язок –

$$A=\left(M^tM\right)^{-1}M^tY. \tag{1.13}$$

Якщо абсциси заданих точок нерівні, то визначник добутку матриць, утворених із стовпців (рядків) матриці Вандермонда M^tM, не дорівнює нулю, що і доводить існування єдиного розв'язку СЛАР (1.7).

Вибір способу подання системи (1.7) у матричній формі (1.8) або (1.12), а її розв'язку у вигляді (1.9) або (1.13) залежить від Ваших власних пріоритетів.

Практична реалізація

Методичні рекомендації щодо реалізації методу найменших квадратів

Задача 1.1 Виконати квадратичну апроксимацію відповідно до таблиці

X	7	12	17	22	27	32	37
Y	83	74	60	51	45	41	37

Розв'язання. Дані, що підлягають апроксимації, розміщено в таблиці MS Excel в комірках C2:D8 (рис. 1.3). Для побудови точкового графіка потрібно у вкладці меню MS Excel в блоці «*Диаграма*» обрати «*Точечная*». Далі можна обрати вигляд графіка такий, як позначено на рис. 1.2. Результуючим буде, наприклад, графік, зображений на рис. 1.3, який відповідає даним, розміщеним в комірках C2:D8.

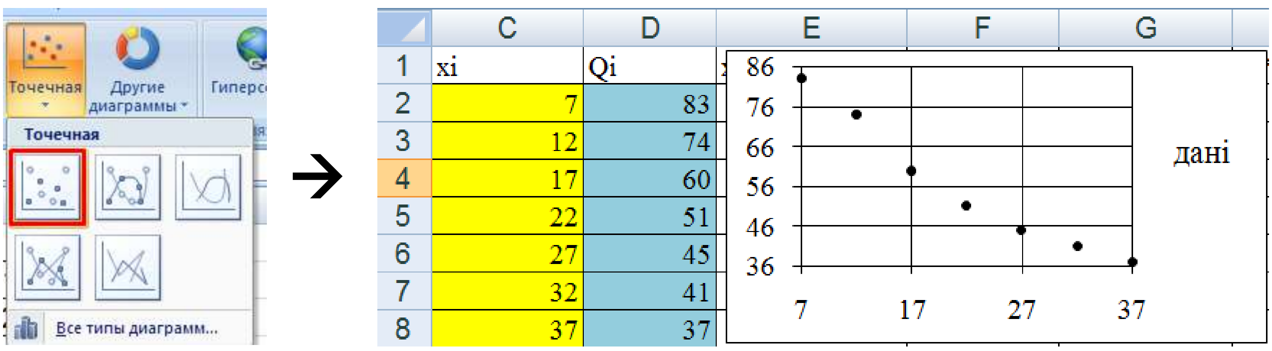
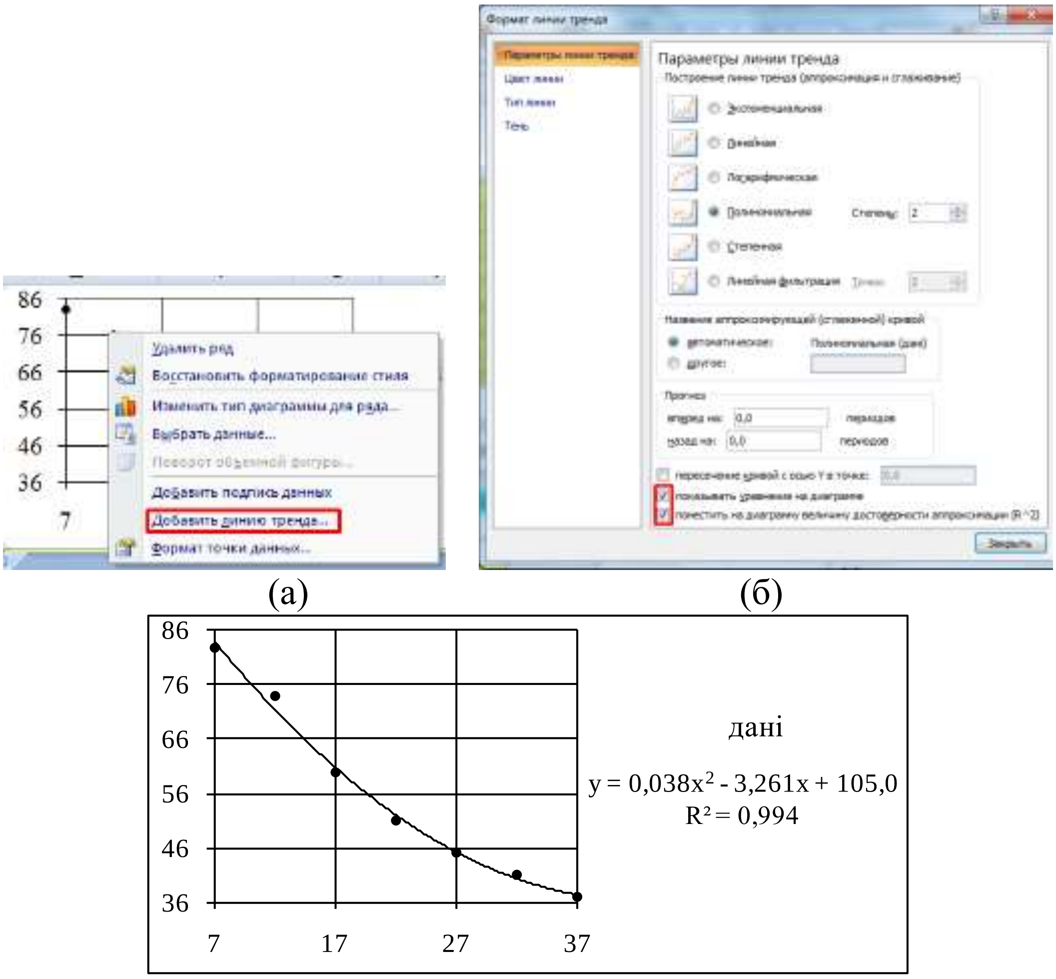


Рис. 1.3

Щоб **додати до діаграми лінію тренда**, клацніть правою кнопкою миші на будь-яку точку графіка і у спадному меню оберіть «*Добавить линию тренда*» (див. рис. 1.4 (а)). Після цього у вікні форматування лінії тренда оберіть параметри лінії тренда і поставте прапорці на «*Показывать уравнение на диаграмме*» і «*Поместить на диаграму величину достоверности аппроксимации (R^2)*» (див. рис.1.4 (б)). На рис. 1.4 (в) наведено результат побудови.



(а) (б)

(в)

Рис. 1.4

Змінюючи параметри лінії тренда, можна обрати ту, що має найближче до одиниці значення достовірності апроксимації. У даному випадку вхідних даних такі значення рівні для поліноміальної лінії тренда степеня 2 і 3, а для 4 – дорівнює майже 1. Однак для такої кількості даних степінь 4 невиправданий для апроксимації. Отже, для даного прикладу обираємо степінь 2.

Реалізація I способу в MS Excel. Заповнюємо таблицю Excel відповідно зо табл. 1.1 (див рис. 1.5). Утворюємо матриці Z і B у позначеннях формул (1.9) і розміщуємо в комірках B11:E13.

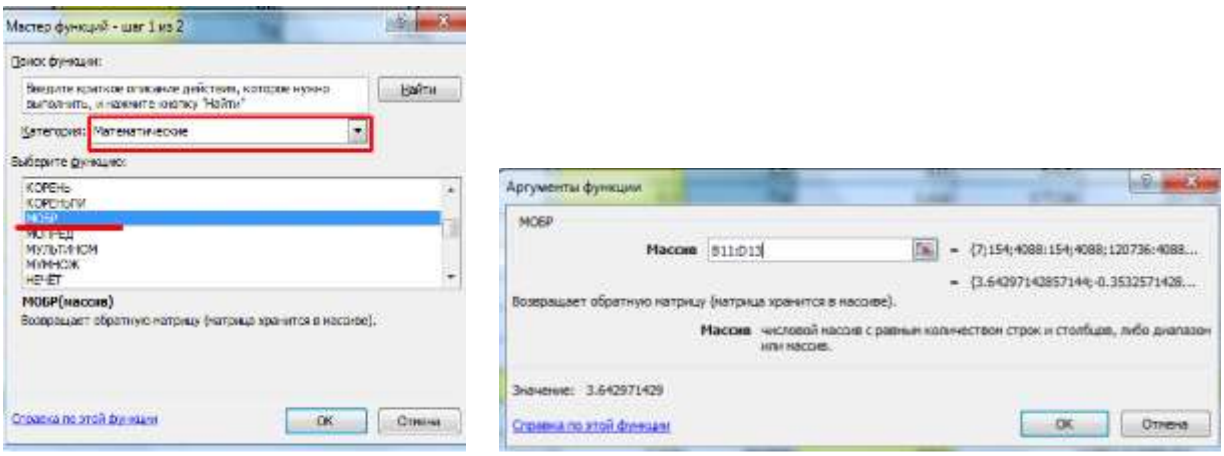
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1			xi	Qi	xi^2	xi^3	xi^4	xi*Qi	Qi*xi^2			
2		1	7	83	49	343	2401	581	4067			
3		1	12	74	144	1728	20736	888	10656			
4		1	17	60	289	4913	83521	1020	17340			
5		1	22	51	484	10648	234256	1122	24684			
6		1	27	45	729	19683	531441	1215	32805			
7		1	32	41	1024	32768	1048576	1312	41984			
8		1	37	37	1369	50653	1874161	1369	50653			
9	Summ	7	154	391	4088	120736	3795092	7507	182189			
10			матриця Z		права частина B							
11	система	7	154	4088	391		3.642971429	-0.353257	0.007314286		105.0829	c
12		154	4088	120736	7507	Z^(-1)	-0.35325714	0.038305	-0.0008381	Z^(-1)*B	-3.261429	b
13		4088	120736	3795092	182189		0.007314286	-0.000838	1.90476E-05		0.038571	a
14								Зворотня матриця				

Рис. 1.5

Для того, щоб застосувати формулу (1.10), потрібно знайти зворотну матрицю, а потім добуток матриць.

Зворотну матрицю можна знайти, виділивши діапазон, що відповідає розміру матриці Z, у даному випадку це G11:I13. В категоріях майстра функції обираємо «*Математические*», а в списку вибору функції – «**МОБР**» (рис. 1.6, (а)). У вікно майстра функції вносимо діапазон, де розміщені елементи матриці, яка потребує обертання. У даному випадку B11:D13 (рис. 1.6, (б)).

<u>УВАГА!!!</u> Для заповнення діапазону G11:I13 елементами зворотної матриці потрібно після одночасного натискання клавіш **Ctrl+Shift** клацнути на **Enter**. Та сама дія виконується і при використанні функцій МОБР, МУМНОЖ, ТРАНСП та ін.



(а) (б)

Рис. 1.6

Щоб знайти добуток матриць, потрібно застосувати функцію **МУМНОЖ** (див рис. 1.7). В результаті отримаємо шуканий набір коефіцієнтів a, b, c (див рис. 1.5, комірки K11:K13).

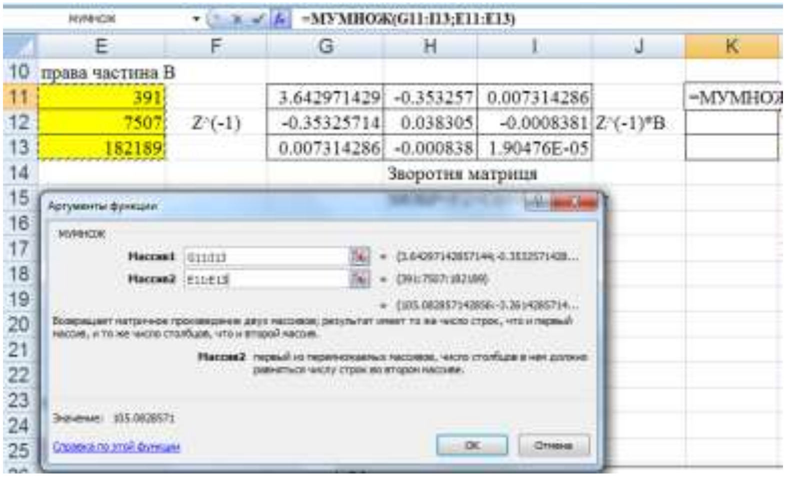


Рис. 1.7

Реалізація II способу в MS Excel. Для застосування формули (1.13) можна поступово використати функції **ТРАНСП, МУМНОЖ** та **МОБР** до матриць M і Q. Сукупність дій показано на рис. 1.8 з результатом на рис. 1.9.

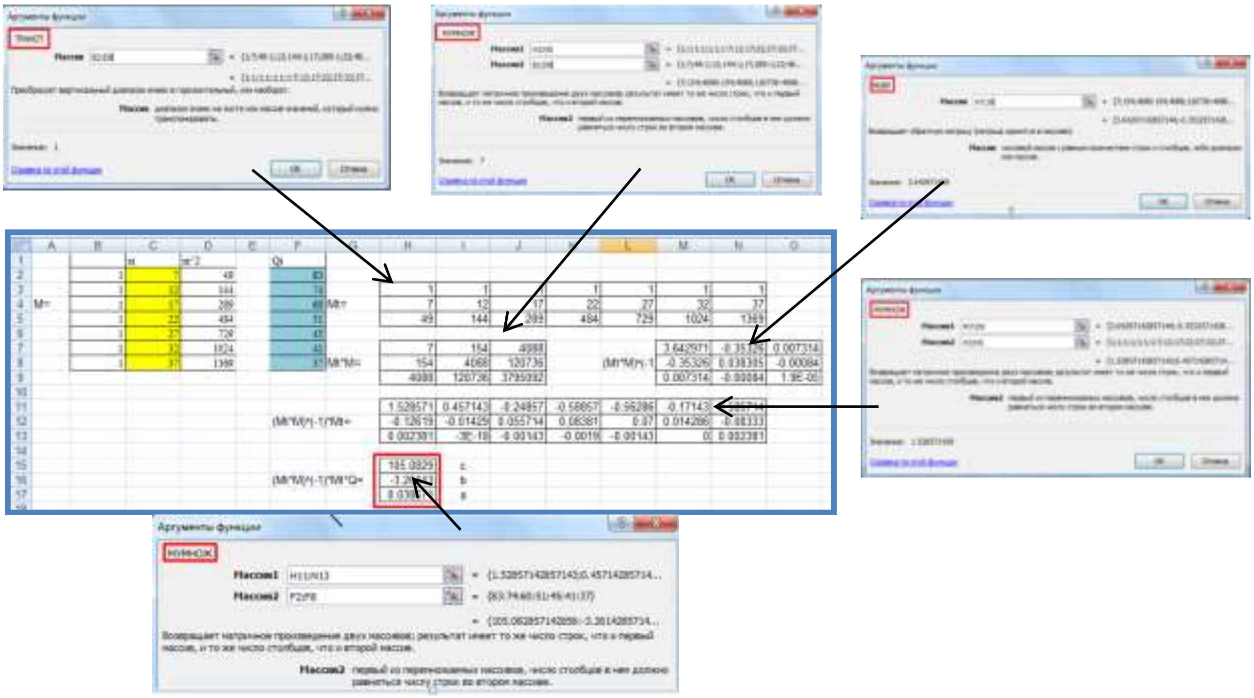


Рис. 1.8

	F	G	H	I
14				
15			105.0829	c
16	(Mt*M)^(-1)*Mt*Q=		-3.26143	b
17			0.038571	a

Рис. 1.9

Порівнюючи значення параметрів a, b, c апроксимуючої функції $y = ax^2 + bx + c$ (див. рис. 1.5 і рис. 1.9) з відповідними коефіцієнтами лінії тренда, приходимо до висновку про високу узгодженість результатів.

Для обчислення **квадратичного відхилення** заповнюємо дані за зразком рис. 1.10. Діапазон A18:A24 заповнюємо абсцисами вхідних даних, діапазон D18:D24 – ординатами. До комірки B18 вносимо формулу

=$D$15*A18^2+$C$15*A18+$B$15

До комірки D18 – формулу і

=(B18-C18)^2

Дані формули копіюються до комірок B19:B24 і D19:D24 за допомогою маркера заповнювання.

	A	B	C	D	E
15		105.0828571	-3.2614286	0.038571429	
16		c	b	a	
17	xi	a*xi^2+b*xi+c	Qi	(a*xi^2+b*xi+c-Qi)^2	
18	7	84.14285714	83	1.306122449	
19	12	71.5	74	6.25	
20	17	60.78571429	60	0.617346939	
21	22	52	51	1	
22	27	45.14285714	45	0.020408163	
23	32	40.21428571	41	0.617346939	кв. откл.
24	37	37.21428571	37	0.045918367	9.857143

Рис. 1.10

Значення квадратичного відхилення знаходимо підсумовуванням елементів діапазону D18:D24. Результат вносимо до комірки E24, куди вписуємо формулу

=СУММ(D18:D24).

Відповідно до діапазону A18:B24 (див. рис. 1.10) додаємо на діаграму **графік апроксимуючої функції** $y = ax^2 + bx + c$ (штрихова лінія на рис. 1.13). Реалізацію процесу обчислень продемонстровано на рис. 1.11:

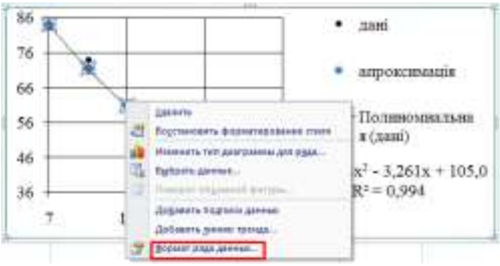
✓ правою кнопкою миші потрібно клацнути по діаграмі → у спадному меню клацнути «*Выбрать данные*» (рис. 1.11 (а)) → у вікні вибору джерела даних клацнути «*Добавить*» (рис. 1.11 (б)) → у вікні зміни ряду внести відповідні діапазони даних (рис. 1.11 (в)).

а б в

Рис. 1.11

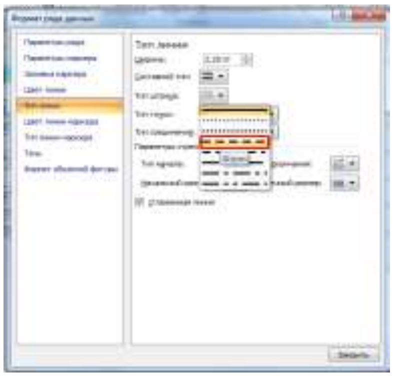
Сформатувати ряд даних побудованого графіка можна такими діями: клацнути по цьому графіку правою кнопкою миші і у спадному меню обрати

«*Формат ряду даних*» (рис. 1.12 (а)) → у вікні формату ряду даних у вкладниці «*Цвет линии*» поставити прапорець «*Сплошная линия*» (рис. 1.12 (б)) → у вкладниці «*Тип линии*» обрати потрібні параметри лінії, наприклад, як показано на рис. 1.12 (в) → краще зняти маркер на графіку спочатку через вкладку «*Цвет маркера*» (рис. 1.12 (г)) →, а потім можна ще прибрати лінію маркера через вкладнику «*Тип линии маркера*», обравши «*Нет линии*».

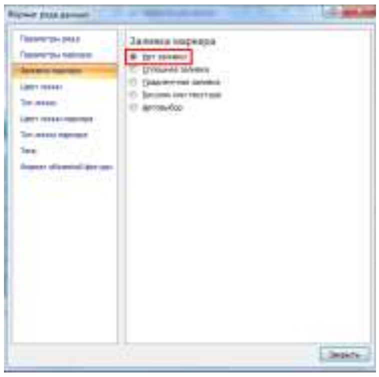


а

б



в



г

Рис. 1.12

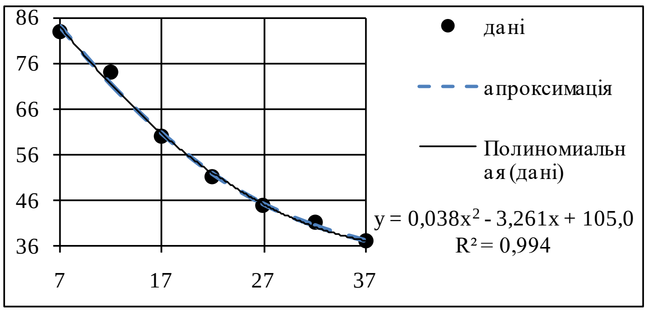


Рис. 1.13

Зауваження. МНК може бути реалізованим з використанням інструмента «*Поиск решения*» в табличному процесорі MS Excel на основі таблиці, аналогічній до рис. 1.10. Самостійна реалізація зазначеного завдання буде нагороджена додатковими балами.

Реалізація МНК в системі комп'ютерної алгебри Maple:

1) Внести вхідні дані у матрицю-вектор можна за допомогою операторів присвоювання:

```
> restart
> X := [7, 12, 17, 22, 27, 32, 37] :
> Y := [83, 74, 60, 51, 45, 41, 37] :
```

2) Відразу визначимо апроксимуючу функцію (у даному випадку маємо многочлен степеня st)

y:=sum(a[i]*x^i, i=0..st);

3) Формула квадратичного відхилення може бути визначеною як

Q:=sum((subs(x=X[j], y) – Y[j])^2, j=1..N);

тут N - кількість вхідних даних.

4) Далі потрібно утворити систему (1.5), що виражає необхідні умови локального екстремуму функції багатьох змінних Q і розв'язати її:

> **for** k **from** 0 **to** st **do** $eq[k] := diff(Q, a[k]) = 0$: **od**:
> $sys := \{seq(eq[h], h = 0..\mathrm{st})\}$:
> $var := \{seq(\mathrm{a}[\mathrm{h}], h = 0..\mathrm{st})\}$:
> $R := solve(sys, var); assign(R)$:

5) Значення квадратичного відхилення містить змінна Q, яку необхідно вивести на екран.

6) Потрібно порівняти значення коефіцієнтів апроксимуючої функції, отриманих за допомогою двох різних інструментів (MS Excel і Maple). Якщо розв'язок системи в Maple (a[h], h=0..st) визначається звичайними дробами, то порівняння здійснювати незручно. Для подання звичайного дробу у вигляді десяткового можна застосувати в Maple оператор evalf(z), де z – число, що підлягає поданню десятковим дробом.

7) Щоб побудувати графік точкової функції, що відповідає вхідним даним, можна виконати такі дії:
- подати дані матрицею

$$data := [seq([X[j], Y[j]], j = 1..N)] :$$

- графік будується, наприклад, із застосуванням оператора

$$plot(data, style = point);$$

8) Для побудови графіка апроксимуючої функції достатньо виписати оператор

plot(y, x=X[1]..X[N]);

9) Щоб побудувати два графіка на одному рисунку можна, наприклад, спочатку підключити пакет графіки with(plots):, а потім застосувати оператор display. Пропонується студентові реалізувати цей крок самостійно. Наведемо тут лише результат (див рис. 1.14).

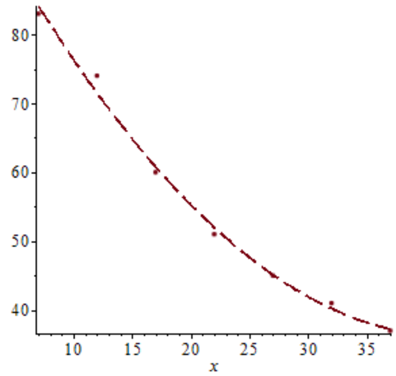


Рис. 1.14

Теоретичні питання для підготовки до лабораторної роботи №4:

- Поняття інтерполяції і апроксимації чисельних даних.
- Інтерполяційний многочлен Лагранжа: формула і алгоритм побудови многочлена Лагранжа, переваги і недоліки його застосування.
- Апроксимація чисельних даних многочленами методом найменших квадратів.
- Реалізація алгоритму методу найменших квадратів засобами програмного забезпечення.