МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.З. Грищак, Н.М. Д’яченко, Є.В. Панасенко

АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ТА ПОЧАТКОВИХ ЗАДАЧ

Навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти доктора філософії спеціальності «Прикладна математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № 2
від 7 вересня 2021р.

Запоріжжя
2021

УДК 517.928(075.8)
Г859

Грищак В.З., Д'яченко Н.М., Панасенко Є.В. Асимптотичні методи розв'язання крайових та початкових задач: Навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти доктора філософії спеціальності «Прикладна математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2021. 68 с.

Посібник спрямований на засвоєння здобувачами вищої освіти доктора філософі теоретичних знань з дисципліни «Асимптотичні методи розв'язання крайових та початкових задач» та набуття ними практичних умінь і навичок застосування асимптотичних методів до аналітичного розв'язання зазначених задач, що дає змогу фахівцю прикладної математики ефективно реалізовувати свою наукову діяльність у широкому спектрі проблематики.

Посібник складається зі вступу, основної частини, списку рекомендованої літератури (основної та додаткової) та додатку, який містить розклад курсу за темами і контрольні завдання.

Видання розраховано як на аспірантів, так і на студентів старших курсів і магістрів спеціальності «Прикладна математика», молодих вчених, наукові дослідження яких пов'язані із розв'язанням сингулярних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами та їх систем.

Автор курсу, професор Грищак В.З., протягом останніх 25 років присвятив свою наукову діяльність розробці гібридних асимптотичних методів розв'язання лінійних та нелінійних рівнянь із змінними коефіцієнтами та їх застосування у задачах математичної фізики. У даному курсі викладач ділиться власним досвідом з молодими дослідниками.

Рецензент

С.І. Гоменюк, доктор технічних наук, професор кафедри програмної інженерії, декан математичного факультету.

Відповідальний за випуск

С. М. Гребенюк, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики.

ЗМІСТ

ВСТУП

Метою вивчення навчальної дисципліни «Асимптотичні методи розв'язання крайових та початкових задач» є засвоєння аспірантом систематичних знань з асимптотичних методів розв'язання крайових і початкових задач для сингулярних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами та їх систем для отримання аналітичного розв'язку зазначених задач, з метою подальшої ефективної реалізації наукової діяльності фахівця прикладної математики у широкому спектрі проблематики.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Асимптотичні методи розв'язання крайових та початкових задач» є:

- оволодіння аспірантами базовими знаннями щодо гібридного асимптотичного підхіду на базі методу фазних інтегралів;
- застосувати гібридний ВКБ-Гальоркін метод до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами;
- опанування доведення теореми про асимптотичний характер гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку;
- засвоєння основними етапами побудови гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами;
- заастосувати гібридний ВКБ-Гальоркін підход до розв'язання крайових задач;
- ознайомлення з гібридним ВКБ-Гальоркін розв'язком для рівняння Бесселя;
- набуття вміння отримувати гібридне ВКБ-Гальоркін наближення у крайових задачах, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядкузі змінними коефіцієнтами;
- набуття вміння знаходити гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок диференціального рівняння спеціального типу із змінними коефіцієнтами;
- застосовувати асимптотичний підхід до розв'язання крайових задач на основі ВКБ-варіаційного методу.

Міждисциплінарні зв'язки. Курс «Асимптотичні методи розв'язання крайових та початкових задач» є логічним продовженням курсу «Математичне моделювання складних систем», застосовує досвід, отриманий здобувачами вищої освіти під час вивчення дисципліни «Чисельні методи розв'язання механічних задач». Набуті при вивченні даного курсу знання необхідні для виконання дисертаційних робіт та / або подальшої дослідницької діяльності в галузі «Математика і статистика» та інших галузях науки та техніки.

Тема 1 ОСНОВНІ ЕТАПИ В РОЗВИТКУ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ

Будь-яка фізична теорія, сформульована у всій своїй загальності, дуже складна з математичної точки зору. Тому при розробці теорії і подальшому її розвитку особливу роль відіграють найпростіші граничні випадки, що припускають аналітичний розв'язок. Саме завдяки використанню асимптотичних методів удається суттєво спростити побудову розв'язку. Крім того, асимптотичні підходи тісно пов'язані з фізичною суттю теорії, дозволяючи краще проникнути в неї. Досить часто ці методи дають можливість єдиного підходу до різних, на перший погляд, задач, дозволяючи виявити їх приховану єдність та спільність. Але значним недоліком асимптотичних методів є локальність одержуваних розв'язків. В останній час багато уваги приділяється методам, що дозволяють розширити область застосування асимптотичних підходів.

В даному курсі лекцій обговорюється один із нових методів до розв'язання крайових задач математичної фізики, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами та параметром при старшій похідній, – гібридний ВКБ-Гальоркін метод, який дозволяє будувати наближений розв'язок на широкому інтервалі зміни параметра.

Значна кількість задач, зокрема механіки деформівного твердого тіла, зводиться до розв'язання звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, що вміщують параметр при старшій похідній. Подібні рівняння, як правило, не можуть бути розв'язані точно. Тому використовують різні наближені методи: при малих значеннях параметра – асимптотичні підходи, за межами малості – чисельні методи. При цьому, як правило, інтервал зміни параметра, на якому можливе застосовування асимптотичного або чисельного методу, залишається невизначеним.

Гібридний ВКБ-Гальоркін метод дозволяє будувати досить точне наближення незалежно від величини параметра при старшій похідній. Основна частина лекцій присвячена дослідженню можливості використання гібридного ВКБ-Гальоркін методу для розв'язання крайових задач. Показано, що при різних значеннях параметра даний підхід забезпечує достатню відповідність точному розв'язку, коли його можливо знайти, та відомим наближеним розв'язкам.

З використанням гібридного ВКБ-Гальоркін методу одержані нові розв'язки задач про напружено-деформований стан та стійкість тонкостінних оболонок, придатні на широкому інтервалі зміни параметра. Таким чином, були удосконалені відомі асимптотичні розв'язки цих задач.

Застосування гібридного підходу дозволяє значно спростити пошук базисних функцій в методі фазних інтегралів.

1.1. Основні етапи в розвитку асимптотичних методів

В процесі пізнання і в прагненні створити детальну картину процесів, що відбуваються, дослідник приходить до необхідності будувати досить складні математичні моделі, що, в свою чергу, вимагають універсального, теоретично обґрунтованого математичного апарату. Аналіз ускладнених моделей часто приводить до систем диференціальних рівнянь, що, як правило, не можуть бути розв'язані точно. Для розв'язання подібних задач дослідник вимушений користуватися різними наближеними методами, зокрема, асимптотичними методами.

В основі асимптотичних підходів лежить ідея розвинення шуканого розв'язку в формальний ряд по степеням деякого малого параметра. При цьому степеневі ряди є, як правило, розбіжні. Проте наближений розв'язок, здобутий шляхом обриву формальних рядів на m-ому члені, виявляється вельми придатним для цілого ряду практичних розрахунків. Одержаний таким чином наближений розв'язок має асимптотичний характер в тому розумінні, що воно наближається до відповідного точного розв'язку не при збільшенні числа m, а при фіксованому m і при наближенні до нуля малого параметра. Через те, що асимптотичні методи дають можливість одержати аналітичний вираз наближеного розв'язку, вони придатні і для дослідження якісної картини поведінки розв'язку на деякому інтервалі незалежної змінної.

Не ставлячи за мету дати повний огляд по історії виникнення і розвитку асимптотичних методів та їх застосувань і посилаючись на такі фундаментальні дослідження в цій області як [7-9] та ін., даний розділ лише стисло характеризує сучасний стан асимптотичної теорії.

Основи асимптотичним методам заклали ще Ж. Фур'є, Ж. Штурм, Ж. Ліувілль [10]. Одним із універсальних методів розв'язання змішаних задач математичної фізики є метод Фур'є, запропонований ним в 1807 р. Цей метод приводить до крайової задачі, яка описується звичайним диференціальним рівнянням, що містить деякий параметр. Оскільки такі диференціальні рівняння мають змінні коефіцієнти, то вони, як правило, не інтегруються. Тільки в окремих випадках Фур'є вдалося знайти розв'язок зазначених диференціальних рівнянь. Ці розв'язки називають ще фундаментальними функціями.

В 1838 р. результати Фур'є були узагальнені Ліувіллем [10], який запропонував метод розвинення довільної функції в ряд по фундаментальним функціям крайової задачі, заданої лінійним диференціальним рівнянням другого порядку, що містить великий параметр. Далі Ліувілль, використовуючи деякі результати Штурму, розв'язав задачу про побудову асимптотичних формул для фундаментальних функцій диференціального рівняння порядку n зі змінними коефіцієнтами.

Завдяки працям цих учених теорія побудови розв'язків диференціальних рівнянь, що містять параметр, у вигляді асимптотичних формул стала досить швидко розвиватись. Проте її застосування обмежувалось лише з'ясуванням характеру збіжності розвинення довільної функції в ряд по фундаментальним функціям. Надалі виявилось, що ця теорія може бути застосована до розв'язання багатьох практичних задач. Так, в працях Фаулера, Локка і Де-Спаар результати Ліувілля були застосовані до розв'язання наближених рівнянь руху снаряда. Де-Спаар використав цей метод при розв'язанні задачі обертального руху снаряда. Асимптотичний характер розв'язку, одержаного Де-Спааром, був доказаний Горном.

Велике значення для розвитку асимптотичного зображення розв'язків диференціальних рівнянь мала знаменита праця А. Пуанкаре [11], в якій він систематизував і значно розвинув асимптотичну теорію. Ідеї Пуанкаре поклали початок методу деформованих координат, розвиненому після цього Лайтхіллом і рядом інших учених.

Проте ці дослідження відносились до узагальнення результатів Ліувілля і зводились до самоспряжених диференціальних рівнянь і їх систем. Ці обмеження були зняті в працях Л. Шлезінгера [12], Г. Біркгофа [13], Я.Д. Тамаркіна [14].

В 1936 р. вийшла праця Тржітзінського [15], в якій дано повний виклад стану питання про асимптотичне зображення як окремих, так і систем диференціальних рівнянь, що містять великий параметр. Крім того, в цій праці була узагальнена теорія Шлезінгера–Біркгофа–Тамаркіна на лінійні інтегро-диференціальні рівняння. В 1940-1945 рр. вийшли праці В.С. Пугачева [16], в яких асимптотичне зображення розв'язків дається в більш загальному вигляді, що дозволило розширити область застосування асимптотичних методів і розповсюдити їх на інші класи диференціальних рівнянь.

І.М. Раппопорт [17], використовуючи результати В.С. Пугачева, побудував перетворення, які зводять широкий клас диференціальних рівнянь до так званої системи L-діагонального вигляду, для розв'язання якої ним були виведені асимптотичні формули відносно незалежної змінної t в околі точки $t = +\infty$. Ідеї В.С. Пугачева, С.Ф. Фещенко [18] використав при асимптотичному розщепленні системи лінійних диференціальних рівнянь з поволі змінними коефіцієнтами.

До робіт по асимптотичному зображенню розв'язків необхідно віднести також [19] і [20], в яких проведене асимптотичне розщеплення систем лінійних диференціальних рівнянь, що містять великий параметр, на підсистеми нижчого порядку.

Закінчуючи огляд класичних праць, що відносяться до асимптотичного зображення розв'язків диференціальних рівнянь, які містять параметр, треба відзначити внесок таких дослідників, як В. Вазов [21], Л. Чезарі [22], Р. Лангер [23], Н.М. Крилов, М.М. Боголюбов, Ю.О. Митропольський [24-26], які поклали початок новим асимптотичним методам в нелінійній механіці. Ці методи є універсальним апаратом для дослідження коливних процесів. Наближені формули, одержані за допомогою асимптотичних методів Крилова і Боголюбова, не містять сингулярних членів, що дає можливість провести дослідження коливного процесу, хоч і на кінцевому, але достатньо великому інтервалі зміни незалежної змінної t.

Базуючись на методах Крилова і Боголюбова, Митропольський створив свій метод [27], який дозволив йому дослідити нестаціонарні коливні процеси в системах з однією і багатьма ступенями волі. Ю.О. Митропольський вперше дослідив вельми складні явища проходження системи крізь внутрішній і зовнішній резонанс при впливі на систему малих збурених періодичних сил. Асимптотичні методи Митропольського справили плодотворний вплив на дослідження цілого ряду як лінійних, так і нелінійних, диференціальних рівнянь. За допомогою цих методів були вивчені найважливіші питання якісної теорії диференціальних рівнянь, а також вирішений ряд технічних завдань.

Ідеї Ю.О. Митропольського одержали свій подальший розвиток в працях його численних учнів: Б.І. Мосеєнкова [28], В.П. Рубаника [29], О.Б. Ликової [30], В.І. Фодчука [31], О.М. Самойленка [32], Д.І. Мартинюка [33], В.Г. Коломийця [34] та ін.

Створений М.М. Боголюбовим метод усереднення [35] одержав подальший розвиток в працях Ю.О. Митропольського [36], В.М. Волосова [37], І.І. Гіхмана [38], М.А. Красносельського і С.Г. Крейна [39]. Із останніх досліджень по цьому методу треба визначити [40], де метод усереднення високого порядку застосовується для умовно періодичних систем.

Хоч асимптотичні методи Крилова, Боголюбова і Митропольського створені для спеціального виду нелінійних диференціальних рівнянь (рівнянь з малою нелінійністю), їх ідеї справили величезний вплив на дослідження лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. І.З. Штокало [41] створив метод, який дозволяє установити критерії стійкості і нестійкості розв’язків лінійних систем диференціальних рівнянь, що містять малий параметр.

Г.І. Бірюк [42] і І.І. Ковтун [43] узагальнили результати Штокала [41] для нелінійних рівнянь на випадок нескінченновимірних просторів.

Питаннями звідності систем лінійних диференціальних рівнянь, що містять великий параметр, займався К.А. Бреус [44]. Ним доказано існування періодичної аналітичної матриці, за допомогою якої початкову систему лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами можна привести до системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Ряд фундаментальних теорем по теорії звідності диференціальних рівнянь одержані Н.П. Єругіним [45]. Ним доказана також можливість застосування методу усереднення до деяких диференціальних рівнянь з поволі змінними коефіцієнтами [46].

Праці С.Ф. Фещенка [47, 48], що з’явилися в 1948-1949 рр., поклали початок систематичному вивченню диференціальних рівнянь з поволі змінними коефіцієнтами. С.Ф. Фещенко [47] розглянув резонансний і нерезонансний випадки диференціального рівняння другого порядку. Ним був доведений асимптотичний характер побудованих розв’язків. Крім того, він довів вельми важливі теореми, що відносяться до розщеплення систем лінійних диференціальних рівнянь.

Результати С.Ф. Фещенка [47] були застосовані Г.Н. Савіним, В.Н. Шевелло, О.І. Кужієм і О.А. Горошко [49-50] до знаходження наближених розв’язків диференціального рівняння, яке описує зусилля, що виникають в шахтових піднімальних канатах.

Теорія асимптотичного розщеплення, розроблена С.Ф. Фещенко [8] для скінченновимірних просторів, була звернута на нескінченновимірні простори

Ю.А. Далецьким [51-52] і С.Г. Крейном [53]. Пізніше різноманітними питаннями теорії асимптотичного розщеплення займалися М.І. Шкіль [54-55], М.М. Старун [56], А.Г. Ілюхін [57] та ін.

Фундаментальні результати по дослідженню диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних, чи як прийнято їх тепер називати, сингулярно збурених рівнянь, одержав А.М. Тихонов [58-59] (спочатку для одного рівняння, а після цього для систем таких рівнянь). Його ідеї знайшли своє відображення в працях багатьох дослідників. Так, сингулярні лінійні диференціальні рівняння з малим параметром при частини похідних досліджувались також І.С. Градштейном [61], В.М. Волосовим [62], К.В. Задиракой [63].

Вельми важливі результати в питанні асимптотичного зображення розв'язків таких рівнянь одержані А.Б. Васильєвою і її учнями [64-65], які застосовували при побудові асимптотики розв'язку сингулярних рівнянь метод примежових функцій. Математичні основи цього методу були закладені в праці М.І. Вішика і Л.А. Люстерника [66] в 1957 році. В останній час метод примежових функцій набув свого подальшого розвитку. Так, можна відзначити [67], в якій побудовано асимптотичне розвинення задачі Коші, описаної виродженою системою рівнянь, що узагальнює відоме розвинення А.Б. Васильєвої. В [68] описаний алгоритм побудови кутових примежових функцій у разі кусково-гладких крайових умов.

Широко застосовується при розв'язанні різноманітних задач метод зрощуваних асимптотичних розвинень. Цей підхід є узагальненням теорії примежового шару. Ідея локальної і глобальної апроксимацій (внутрішнього і зовнішнього розвинень), після цього зрощуваних, застосовувалась до окремих задач ще в минулому віці деякими відомими ученими, починаючи із Лапласа. Після цього ця ідея була розвинута в працях Л. Прандтля і узагальнена ним в метод розв'язання сингулярних рівнянь. Значний внесок у розвиток цього методу вніс Ван-Дайк [69-70]. Із останніх досліджень по використанню цього методу треба відзначити [71-72]. Крайові задачі, що описуються як звичайними рівняннями, так і рівняннями з частинними похідними і містять малий параметр, досліджені в [73-74]. Треба відзначити також [75-79], в яких за допомогою асимптотичних методів одержані цікаві результати для диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами і малим параметром при похідних.

В останні роки за допомогою асимптотичних методів було розв'язано багато практичних задач. Так, в [80] методи збурення застосовуються до задачі націлення променів в гідроакустичному хвилеводі зі слабко збуреною нижньою межею. В [81] побудований алгоритм асимптотичної локалізації задач розсіяння з некоординатними кордонами. Використання методу осереднення до задачі про фільтрацію розпеченого газу через пористе середовище дозволило одержати достатньо прості диференціальні рівняння і аналітично дослідити тепловий режим активної зони аварійного блоку ЧАЕС [82].

Важко переоцінити роль асимптотичних методів при розв'язанні задач механіки. Так, значний розвиток сучасні асимптотичні методи одержали в теорії пластин і оболонок, де наявність малого параметра цілком очевидна. З використанням методів кількох масштабів і осереднення в [83] розв'язана задача про напружено-деформований стан ребристих оболонок. В [84] за допомогою методу Болотіна приводиться аналітичний розв'язок задачі про нелінійні коливання пологої циліндричної оболонки.

Тема 2 ГІБРИДНИЙ АСИМПТОТИЧНИЙ ПІДХІД НА БАЗІ МЕТОДУ ФАЗНИХ ІНТЕГРАЛІВ

2.1 Метод фазних інтегралів (метод ВКБ) та його застосування

Серед безлічі асимптотичних методів особливе місце займає метод фазних інтегралів (або метод ВКБ [85]), який є достатньо потужним наближеним методом розв'язання диференціальних рівнянь з параметром і широко застосовується в науці і техніці. Звичайно цей метод обмежується знаходженням тільки першого члена асимптотичного ряду.

Спочатку метод фазних інтегралів застосовувався до рівнянь виду

$$\frac{d^2w}{dx^2}+h^2q(x,h)w=0, \tag{1.1}$$

де h – великий параметр; $q(x,h)$ – деяка функція.

При деяких умовах на q наближені розв'язки цього рівняння мають вигляд

$$w=q^{-1/4}\exp\left(\pm ih\int_0^x\sqrt{q}dx\right)\left(1+O\left(\frac{1}{h}\right)\right). \tag{1.2}$$

Формули (1.2) перестають бути вірними поблизу точок повороту – значень незалежної змінної x, в яких функція $q(x,h)$ перетворюється на нуль.

Як пише в своїх дослідженнях Дж. Хедінг [85], перше застосування наближених розв'язків по методу ВКБ належить Карліні [86], який розглянув спеціальне рівняння, що називається тепер рівнянням Бесселя, і одержав наближений розв'язок цього рівняння при великих значеннях незалежної змінної. Ліувілль [10] і Грін в 1837 році побудували асимптотичні розв'язки для більш загальних рівнянь, але тільки в тих областях незалежної змінної, що не містять точок повороту. Значний внесок в теорію існування асимптотичних розв'язків на інтервалі, вільному від точок повороту, вніс Хорн.

Чималий розвиток у створення методу ВКБ вніс Дж. Стокс, який всебічно вивчив рівняння, що називається зараз рівнянням Ері. Саме йому належить відкриття факту розривності асимптотичних формул при досягненні певних ліній і способи побудови неперервних асимптотик.

Систематично ВКБ-наближення стосовно рівнянь виду (1.1) стали застосовуватись тільки після появи робіт Вентцєля, Крамерса, Бріллюена і Джеффріса.

Всебічно ефекти, пов'язані з точками повороту, дослідив Ганс в 1915 році у зв'язку з розповсюдженням світла в поволі змінному шаруватому середовищі. В 1920 році Фаулер, вивчаючи аеродинаміку обертового снаряда, прийшов до системи третього порядку, що складається із двох однорідних диференціальних рівнянь. Використовуючи метод Хорна, він збудував для цих рівнянь стандартні ВКБ-розв'язки.

Джеффріс, розглядаючи функції Матьє в зв'язку з вивченням вільних коливань води в еліптичному озері, вперше систематизував ВКБ-розв'язки, вивчаючи головним чином ефекти, пов'язані з точками повороту.

Олвер [87] дослідив величину похибки ВКБ-розв'язків і застосував одержані ним результати до функцій параболічного циліндру і функцій Бесселя великого порядку. Також він розглянув рівняння з двома точками повороту, точний розв'язок якого може бути виражений через функції Вебера. Олвер [87] одержав асимптотичні розвинення для розв'язків, придатні у всій комплексній області, за допомогою наближень ВКБ і наближень, що використовують функції Ері. Хедінг [85] розглянув рівняння з довільним числом точок повороту і вивчив області, в яких асимптотика є рівномірною.

Значний внесок в розвиток методу ВКБ внесли також Шлезінгер [12], Біркгоф [13], Тамаркін [14], Вазов [88] та ін., які побудували асимптотичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь і однорідних систем лінійних диференціальних рівнянь в областях, що не містять точок повороту.

Багато цікавих ідей стосовно використання методу ВКБ до систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь міститься в працях М.М. Моісеєва [89-90] і С.Р. Стіла [91-92].

Рівняннями з точками повороту займались Дородніцин [93], Раппопорт [17], Лангер [94].

В [74], [95] метод ВКБ описаний в застосуванні до лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Існують спроби використання методу ВКБ не тільки для лінійних рівнянь, але також і для ряду нелінійних диференціальних рівнянь. Так, в праці В.П. Маслова [96] пропонується комплексний метод ВКБ для розв'язку нелінійних задач квантової механіки, рівняння кристалічних гратів та ін. Одержані розв'язки локалізовані в околі деяких кривих чи поверхонь. Конструкція таких розв'язків опирається на гамільтонів формалізм механіки вузьких жмутків і відомі солітонні розв'язки відповідних двовимірних задач.

Цікавий підхід до розв'язання нелінійних задач динаміки неоднорідних механічних систем за допомогою методу ВКБ запропонований в працях автора і його учнів [97-99]. Цей підхід ґрунтується на ідеї подвійного асимптотичного розвинення, яке використовується для одержання розв'язку в будь-якому наближенні в зовнішній і внутрішній асимптотиках. При побудові внутрішньої асимптотики використовується метод фазних інтегралів.

2.2 Розвиток гібридного асимптотичного підходу

З розвитком обчислювальної техніки в останні десятиріччя зросло значення асимптотичних методів, що застосовуються для розв'язання різноманітних задач разом з числовими методами, при цьому доповнюючи один одного. Так, наприклад, в багатьох випадках асимптотичний вираз зручно використовувати як нульове наближення при числових розрахунках. Але найбільш повно взаємозв'язок числових і асимптотичних методів проявляється в тому, що одним із істотних моментів в теорії того чи іншого числового методу є дослідження асимптотичних властивостей деяких рівнянь, які відповідають цьому методу. Так, різницеві схеми для числового розв'язку диференціальних рівнянь [100-102] містять деякий малий параметр h (крок), і при використанні такої схеми треба бути упевненим, що розв'язок різницевої системи, відповідаючої наданій схемі, при достатньо малих h близько до розв'язку вихідного диференціального рівняння. Так само, при регуляризації некоректно поставлених задач [103] вводиться допоміжне рівняння, що містить малий регуляризуючий параметр, і питання полягає у встановленні близькості (що розуміється в деякому певному значенні) розв'язку цього допоміжного рівняння до розв'язку вихідної задачі.

Ідея поєднання асимптотичних методів з числовими покладена і в основу підходу, наведеного в цій дисертаційній роботі. Всі асимптотичні методи мають ряд недоліків, головним із яких є обмежена область застосування асимптотичних розв'язків. При збільшенні малого параметра похибка цих методів різко зростає. Виникає необхідність залучення в розв'язок все більшої кількості членів розвинення, що в більшості випадків істотно збільшує складність обчислень. Саме тому виникає необхідність «поліпшення» існуючого асимптотичного розв'язку без залучення більшого числа членів розвинення.

Значна увага в останній час приділяється методам, які дозволяють наближувати точний розв'язок при різних значеннях параметра. Саме до таких підходів можна віднести Паде-апроксимації, зрощування граничних асимптотик, метод ренормалізації та ін. У кожного з цих методів є свої сильні і слабкі сторони.

Ще одним підходом, який «поліпшує» розв'язки, отримані за допомогою методів збурення, є гібридний асимптотичний метод. Він ґрунтується на поєднанні якого-небудь асимптотичного розвинення методу Гальоркіна, і опирається на ідеї, опис яких міститься в працях американських дослідників Гіра і Андерсена [104-108]. Поєднуючи в собі найкращі сторони методів збурення і методу Гальоркіна, гібридний асимптотичний метод в значній мірі компенсує їх недоліки.

Метод Гальоркіна (або метод Бубнова-Гальоркіна [109]) був добре відомий в російській науковій літературі по працям Бубнова і Гальоркіна, в яких цей метод застосовувався до задач пружної рівноваги стрижнів і тонких пластин. Після цього даний підхід був реалізований в працях Дункана (1937 р.), присвячених динаміці авіаційних конструкцій. Після цього Біркли застосував метод Гальоркіна до розв'язання задачі про нестаціонарну теплопередачу шляхом розгляду еквівалентного електричного контуру. В наш час існує велика кількість модифікацій методу Гальоркіна [109]. Так, можна виділити метод Гальоркіна з кінцевими елементами, спектральні методи, метод граничних елементів та ін. Велика кількість прикладних задач розв'язується за допомогою методу Гальоркіна. Так, в [110] цей підхід застосований для інтегрування рівнянь руху аероплану. Праця [111] присвячена розв'язанню інтегральних рівнянь циліндричного і плоского вібраторів. Модифікований метод Гальоркіна на основі методу кінцевих елементів застосований в [112] для моделювання напівпровідникових приладів.

Основним недоліком методу Гальоркіна є складності оптимального вибору базисних функцій, які в більшості випадків вибираються інтуїтивно, бо алгоритму побудови таких функцій в загальному вигляді не існує. Гібридний асимптотичний метод вирішує цю проблему, випереджуючи процес оптимізації по методу Гальоркіна знаходженням базисних функцій по одному із асимптотичних методів.

Перша згадка про можливість гібридного підходу міститься в працях Ахмеда Нура і його співавторів [113-114] стосовно задач нелінійної механіки. Проте в цих працях були використані лише деякі основні принципи. В 1983 році Фінком і Рейнболтом [115] вперше було дано опис гібридного асимптотичного методу з математичної точки зору. Найбільш повно і глибоко даний метод дослідили Гір і Андерсен, які застосовували гібридний підхід до різноманітних класів диференціальних рівнянь.

Ідея гібридного асимптотичного методу міститься у наступному.

Нехай необхідно розв’язати деяку крайову задачу:

$$\Lambda(u,\varepsilon)=0, \tag{1.3}$$

де Λ – диференціальний оператор; $u(x)$ – шукана функція, визначена в деякій області (інтервалі) D зміни x; ε – параметр.

Крайовими умовами приймаються однорідні крайові умови.

Застосування гібридного асимптотичного методу відбувається в два етапи. На першому етапі будується асимптотичне розвинення u в околі одного чи більше спеціальних значень параметра ε ($\varepsilon=\varepsilon_p$, $p=1,2,...,P$)

$$u=\sum_{k=0}^{n_p-1}u_k^p\alpha_k^p(\varepsilon)+O(\alpha_{n_p}^p(\varepsilon)), \tag{1.4}$$

де $\left\{\alpha_k^p(\varepsilon)\right\}$ – певна асимптотична послідовність (наприклад, $\alpha_k^1=\varepsilon^k$).

Функції u_k^p визначаються одним із асимптотичних методів, зокрема, Гір и Андерсен використовують формальне асимптотичне розвинення або метод зрощуваних асимптотичних розвинень.

На другому етапі знайдені функції u_k^p використовуються як координатні функції для методу Гальоркіна. Для цього апроксимація розв’язку задачі (1.3) відшукується у вигляді

$$\tilde{u}=\sum_{i=1}^{N}\delta_i u_i, \tag{1.5}$$

де δ_i – невідомі параметри.

Для визначення параметрів δ_i використовується метод Гальоркіна. Так, (1.5) підставляється в рівняння (1.3), и ставиться умова ортогональності одержаного таким чином відхилу до N координатних функцій u_j у всій області D

$$\int_D \Lambda\left(\sum_{i=1}^{N}\delta_i u_i,\varepsilon\right)u_j dx = 0,\ j = 1,\ldots,N. \tag{1.6}$$

Рівняння (1.6) являють собою систему N алгебраїчних рівнянь відносно N невідомих δ_i.

В своїх працях Гір і Андерсен випробували даний метод на деяких простих прикладах, які допускають точний розв’язок, і застосували до ряду прикладних задач. Так, в [104] розглядається розв’язок задачі визначення енергії негармонічного осцилятора за допомогою гібридного асимптотичного методу. Крайові умови задаються на нескінченності.

В [105] побудоване гібридне наближення розв’язку диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами і малим параметром при старшій похідній. Це наближення базується на методі зрощуваних асимптотичних розвинень в поєднанні з методом Гальоркіна. Цим же методом пропонується розв’язання задачі на власні значення і власні функції лінійного диференціального оператора. Незалежна змінна має нескінченні границі варіювання. Також в цій праці пропонується розв’язок задачі визначення частоти простої механічної системи, математична постановка якої зводиться до нелінійного диференціального рівняння з малим параметром, що входить в структуру нелінійного члена.

Праця [106] присвячена розв’язанню задач математичної фізики, які зводяться до інтегро-диференціальних рівнянь. Їх розв’язок будується за допомогою гібридного підходу на основі формального асимптотичного розвинення по степеням і логарифмам малого параметра. Як модельні розв’язані дві задачі теорії тонких оболонок.

В [107] розглянута нелінійна задача, яка зводиться до рівняння Рейнольдса для ковзної опори. Гібридний розв’язок будується на основі методу зрощуваних асимптотичних розвинень, одержаних для малого і великого значень параметра.

Праця [108] присвячена розв’язанню задач, які зводяться до лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Гібридний розв’язок будується на основі спеціально підібраних асимптотичних функцій.

У всіх п’яти працях одержані результати досить точно співпадають з результатами чисельних методів. Проте треба відзначити наступне. Гібридний метод на основі формального асимптотичного розвинення дає прийнятні результати лише при невеликих значеннях параметра. Використання гібридного підходу на основі методу зрощуваних асимптотичних розвинень ускладнено через труднощі знаходження асимптотичних функцій і потребує додаткового аналізу диференціального рівняння.

Особливий інтерес для розв’язання крайових задач механіки деформівного твердого тіла становлять диференціальні рівняння з параметром при старшій похідній. При цьому параметр може входити в рівняння з самого початку або вводитися штучно. Наприклад, малими параметрами в теорії оболонок можуть виступати такі величини, як відношення товщини оболонки до радіуса, відношення нормального прогину до радіуса, відношення згинних жорсткостей конструктивно-ортотропної оболонки. Параметр також може характеризувати малий відхил вихідної області від кругової, вихідної змінної товщини від постійної і т.д.

Методом, який досить часто використовують для розв'язання таких задач у випадку, коли параметр малий, є метод фазних інтегралів. Але на практиці досить часто бувають випадки, коли деякий параметр може бути як малим, так і великим.

Тому виникла ідея поєднання достатньо вивченого методу ВКБ з методом Гальоркіна, яка обговорюється у курсі лекцій. Метод фазних інтегралів дозволяє уловити структуру розв'язку, і тим самим, вигляд апроксимуючих функцій в методі Бубнова-Гальоркіна. Використання критерію ортогональності дозволяє значно «поліпшити» ВКБ-розв'язок тоді, коли параметр перестає бути малим. Одержане таким чином гібридне ВКБ-Гальоркін наближення значно розширює область застосування методу фазних інтегралів.

Багато сучасних наукових теорій будується за допомогою асимптотичних підходів, які дозволяють проникнути в суть явищ, спростити завдання і створити єдиний підхід до їх розв'язання. Тому розширення області застосування асимптотичних методів є одним з найважливіших завдань сучасної асимптотичної теорії.

Гібридний ВКБ-Гальоркін метод, розробка якого покладена за мету дисертаційної роботи, завдяки поєднанню в собі методу фазних інтегралів і методу Бубнова-Гальоркіна, дозволяє будувати розв'язок крайових задач механіки деформівного твердого тіла, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, на широкому інтервалі зміни параметра.

2.3 Висновки

Багато сучасних наукових теорій будується за допомогою асимптотичних підходів, які дозволяють проникнути в суть явищ, спростити завдання і створити єдиний підхід до їх розв'язання. Тому розширення області застосування асимптотичних методів є одним з найважливіших завдань сучасної асимптотичної теорії.

Гібридний ВКБ-Гальоркін метод завдяки поєднанню в собі методу фазних інтегралів і методу Бубнова-Гальоркіна, дозволяє будувати розв'язок крайових задач математичної фізики, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, на широкому інтервалі зміни параметра.

Тема 3 ГІБРИДНИЙ ВКБ-ГАЛЬОРКІН МЕТОД І ЙОГО ОПИС В ЗАСТОСУВАННІ ДО ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У цих лекціях наводиться опис гібридного ВКБ-Гальоркін методу розв'язання крайових задач, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами та параметром при старшій похідній. Зокрема, для диференціального рівняння другого порядку будується замкнутий аналітичний розв'язок і доводиться асимптотичний характер цього розв'язку при наближенні параметра до нуля. Надається опис гібридного ВКБ-Гальоркін методу в застосуванні до диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами.

3.1 Формальне зображення гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами, що містить параметр при старшій похідній

Нехай потрібно знайти розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$L(U, x, \varepsilon) = 0, \tag{3.1}$$

де L – деякий лінійний диференціальний оператор порядку n; U – шукана функція; x – змінна; ε – параметр.

Змінна x належить певному відрізку $[a,b]$ і U задовольняє деякі крайові умови на кінцях цього відрізка.

Будемо розглядати тільки такі крайові задачі, для яких розв'язок існує, і він єдиний [116].

Запропонований в роботі гібридний метод поєднує в собі два підходи: метод фазних інтегралів і метод Гальоркіна. На першому етапі розв'язок зображається у вигляді

$$U(x, \varepsilon) = \exp\left(\int_a^x \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i(\varepsilon) \psi_i(x) dx \right), \tag{3.2}$$

де $\gamma_i(\varepsilon)$ – задана асимптотична послідовність; $\psi_i(x)$ – невідомі функції.

Відповідно до методу ВКБ вираз (3.2) підставляється у вихідне рівняння (3.1). Збираючи коефіцієнти при однакових степенях параметра ε, дістанемо рекурентну систему рівнянь для визначення невідомих функцій $\psi_i(x)$.

На другому етапі перші $N+1$ асимптотичних функцій використовуються як координатні функції для методу Бубнова-Гальоркіна, і наближення розв'язку рівняння (3.1) будується у вигляді

$$U_H(x, \varepsilon) = \exp\left(\int_a^x \sum_{i=0}^{N} \delta_i(\varepsilon) \psi_i(x) dx \right), \tag{3.3}$$

де $\delta_i(\varepsilon)$ – невідомі функції параметра ε.

Для визначення невідомих $\delta_i\left(\varepsilon\right)$ ($i=0,...,N$) вираз (3.3) підставляється в рівняння (3.1). У результаті дістанемо добуток правої частини (2.3) і деякого виразу, в якому старші похідні функцій $\psi_i\left(x\right)$, знайдених на першому етапі, мають порядок $n-1$, а саме

$$L(U_H,x,\varepsilon)=\exp\left(\int_a^x\sum_{i=0}^N\delta_i\psi_i dx\right)\times$$
$$\times R\left(\psi_0,...\psi_N,\frac{d\psi_0}{dx},...\frac{d^{n-1}\psi_N}{dx^{n-1}},\delta_0,...\delta_N,x,\varepsilon\right). \tag{3.4}$$

Із умови рівності нулю правої частини рівняння (2.4) випливає

$$R\left(\psi_0,...\psi_N,\frac{d\psi_0}{dx},...\frac{d^{n-1}\psi_N}{dx^{n-1}},\delta_0,...\delta_N,x,\varepsilon\right)=0. \tag{3.5}$$

В загальному випадку співвідношення (3.5) не виконується. Тому, відповідно до методу Гальоркіна, умова ортогональності відхилу R до $N+1$ координатних функцій $\psi_i\left(x\right)$ на відрізку $\left[a,b\right]$ приводить до системи алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\int_a^b R(\psi_0,...\psi_N,\frac{d\psi_0}{dx},...\frac{d^{n-1}\psi_N}{dx^{n-1}},\delta_0,...\delta_N,x,\varepsilon)\psi_i dx=0, i=0,...N. \tag{3.6}$$

Рівняння (2.6) являють собою систему $N+1$ алгебраїчних рівнянь відносно невідомих δ_i. В загальному випадку система рівнянь (3.6) розв’язується чисельно. Однак, в ряді випадків можливо одержати замкнутий аналітичний розв’язок рівняння (3.1).

3.2 Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін методу до розв’язання диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

Побудуємо на відрізку $\left[a,b\right]$ гібридний ВКБ-Гальоркін розв’язок диференціального рівняння вигляду

$$\varepsilon^2\frac{d^2U}{dx^2}-g(x)U=0, \tag{3.7}$$

де $U\left(x,\varepsilon\right)=\mathrm{Re}\left(U\left(x,\varepsilon\right)\right)+i\,\mathrm{Im}\left(U\left(x,\varepsilon\right)\right)$ – шукана комплекснозначна функція, що задовольняє на кінцях відрізка такі крайові умови

$$U\left(a,\varepsilon\right)=U_a,\quad U\left(b,\varepsilon\right)=U_b. \tag{3.8}$$

Функція $g(x)$ є відома аналітична комплекснозначна функція, що не перетворюється в нуль на відрізку $[a,b]$.

На першому етапі, згідно з методом ВКБ, зобразимо розв’язок рівняння (3.7) у вигляді

$$U(x,\varepsilon)=\exp\left(\int_a^x\left(\varepsilon^{-1}\psi_0+\psi_1+\varepsilon\psi_2+...\right)dx\right), \tag{3.9}$$

де $\psi_i(x)$ – невідомі функції.

Обмежуючись, наприклад, одним членом розвинення (3.9), запишемо першу і другу похідні $U_{WKB}(x,\varepsilon)$

$$\frac{dU_{WKB}}{dx}=\exp\left(\int_a^x \varepsilon^{-1}\psi_0 dx\right)\varepsilon^{-1}\psi_0, \tag{2.10}$$

$$\frac{d^2U_{WKB}}{dx^2}=\exp\left(\int_a^x \varepsilon^{-1}\psi_0 dx\right)\left(\varepsilon^{-2}\psi_0^2+\varepsilon^{-1}\frac{d\psi_0}{dx}\right). \tag{3.11}$$

Підставимо співвідношення (3.9)-(3.11) у вихідне рівняння (2.7), і збираючи коефіцієнти при ε^0, дістанемо рівняння для визначення шуканої функції ψ_0

$$\psi_0^2-g(x)=0, \tag{3.12}$$

звідки витікає, що

$$\psi_0=\pm\sqrt{g(x)}. \tag{3.13}$$

На другому етапі зобразимо розв'язок $U(x,\varepsilon)$ рівняння (3.7) у вигляді

$$U_H(x,\varepsilon)=\exp\left(\int_a^x \delta_0\psi_0 dx\right). \tag{3.14}$$

Перша і друга похідні будуть мати вигляд

$$\frac{dU_H}{dx}=\exp\left(\int_a^x \delta_0\psi_0 dx\right)\delta_0\psi_0, \tag{3.15}$$

$$\frac{d^2U_H}{dx^2}=\exp\left(\int_a^x \delta_0\psi_0 dx\right)\left(\delta_0^2\psi_0^2+\delta_0\frac{d\psi_0}{dx}\right). \tag{3.16}$$

У результаті підставлення співвідношень (2.14)-(3.16) у вихідне рівняння (3.7), дістанемо вираз для відхилу

$$R=\varepsilon^2\left(\delta_0^2\psi_0^2+\delta_0\frac{d\psi_0}{dx}\right)-g(x). \tag{3.17}$$

Застосовуючи тепер критерій ортогональності Бубнова-Гальоркіна у формі (3.6) і ураховуючи, що

$$\frac{d\psi_0}{dx}=\frac{g'(x)}{\pm 2\sqrt{g(x)}}, \tag{3.18}$$

дістанемо квадратне рівняння для визначення невідомого параметра δ_0 такого вигляду

$$\delta_0^2\int_a^b \varepsilon^2\left(\pm g^{\frac{3}{2}}(x)\right)dx+\delta_0\int_a^b \varepsilon^2\frac{g'(x)}{2}dx-\int_a^b\left(\pm g^{\frac{3}{2}}(x)\right)dx=0. \tag{3.19}$$

Розв'язок цього рівняння запишеться таким чином

$$\delta_{01,2} = \mp \frac{g(b)-g(a)}{4\int\limits_a^b g^{\frac{3}{2}}(x)dx} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{g(b)-g(a)}{4\int\limits_a^b g^{\frac{3}{2}}(x)dx} \right)^2} . \qquad 3.20)$$

Остаточно гібридний ВКБ-Гальоркін розв’язок вихідного рівняння (3.7) з урахуванням (3.20) набуває вигляду

$$U_H(x,\varepsilon) = C_1 \exp\left(\int\limits_a^x \left(\frac{g(a)-g(b)}{4\int\limits_a^b g^{\frac{3}{2}}(x)dx} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{g(b)-g(a)}{4\int\limits_a^b g^{\frac{3}{2}}(x)dx} \right)^2} \right) \sqrt{g(x)}dx \right) +$$

$$+C_2 \exp\left(\int\limits_a^x \left(\frac{g(a)-g(b)}{4\int\limits_a^b g^{\frac{3}{2}}(x)dx} - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{g(b)-g(a)}{4\int\limits_a^b g^{\frac{3}{2}}(x)dx} \right)^2} \right) \sqrt{g(x)}dx \right). \qquad (3.21)$$

Розглянемо випадок, коли функція $g(x)$ є дійсною і не перетворюється в нуль на відрізку $[a,b]$. Тоді можливо, що $g(x)>0$ або $g(x)<0$. Запишемо розв’язок (3.21) для кожного із цих випадків.

Коли $g(x)>0$, гібридний ВКБ-Гальоркін розв’язок набуває вигляду

$$U_H(x,\varepsilon) = \exp\int\limits_a^x \frac{g(a)-g(b)}{4\int\limits_a^b g^{\frac{3}{2}}(x)dx}\sqrt{g(x)}dx \left(C_1 \operatorname{ch}\int\limits_a^x \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{g(b)-g(a)}{4\int\limits_a^b g^{\frac{3}{2}}(x)dx} \right)^2} \sqrt{g(x)}dx + \right.$$

$$\left. +C_2 \operatorname{sh}\int\limits_a^x \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{g(b)-g(a)}{4\int\limits_a^b g^{\frac{3}{2}}(x)dx} \right)^2} \sqrt{g(x)}dx \right). \qquad (3.22)$$

Коли $g(x)<0$, розв’язок (3.21) запишеться у вигляді

$$U_H(x,\varepsilon)=\exp\int_a^x \frac{g(a)-g(b)}{4\int_a^b g^{\frac{3}{2}}(x)dx}\sqrt{g(x)}dx\left(C_1\cos\int_a^x \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-\left(\frac{g(b)-g(a)}{4\int_a^b g^{\frac{3}{2}}(x)dx}\right)^2}\sqrt{g(x)}dx+\right.$$

$$\left.+C_2\sin\int_a^x \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-\left(\frac{g(b)-g(a)}{4\int_a^b g^{\frac{3}{2}}(x)dx}\right)^2}\sqrt{g(x)}dx\right). \qquad (3.23)$$

3.3 Висновки

З використанням гібридного ВКБ-Гальоркін підходу здобутий аналітичний розв'язок лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами, що містить параметр при старшій похідній.

Тема 4 АСИМПТОТИЧНИЙ ХАРАКТЕР ГІБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЬОРКІН РОЗВ'ЯЗКУ

Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок будується на основі розвинення за методом фазних інтегралів. Тому можемо очікувати, що при малих значеннях параметра гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок має асимптотичний характер.

4.1 Теорема про асимптотичність гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку

Згідно з [90] функцію $z(x,\varepsilon)$ будемо називати ε^r-асимптотичним розв'язком, коли для кожного $x\in[a,b]$ шуканий розв'язок можемо зобразити у вигляді

$$U(x,\varepsilon)=z(x,\varepsilon)+\psi(x,\varepsilon)\varepsilon^r, \tag{4.1}$$

де $\psi(x,\varepsilon)$ – функція, обмежена при $\varepsilon\to 0$.

Доведемо асимптотичність гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку рівняння

$$\varepsilon^2 U''+w^2(x,\varepsilon)U=0 \tag{4.2}$$

на відрізку $[a,b]$ з крайовими умовами

$$\begin{aligned} U(a)&=U_a,\\ U(b)&=U_b. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Теорема 2.1. Коли існує розв'язок $U(x,\varepsilon)$ крайової задачі (4.2)-(4.3), а функція $w(x,\varepsilon)$ – диференційована по x на відрізку $[a,b]$, не перетворюється в нуль на цьому відрізку і задовольняє умову $\alpha\le w\le\beta$ на $[a,b]$, тоді для кожного $x\in[a,b]$, функція

$$U_H=C_1\exp\left(\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right)+C_2\exp\left(\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right), \tag{4.4}$$

де

$$t=\frac{w^2(a)-w^2(b)}{4\int\limits_a^b w^3dx} \tag{4.5}$$

є ε-асимптотичним розв'язком рівняння (4.2).

Доведення теореми.

Знайдемо першу і другу похідні гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку (4.4)

$$U_H'=C_1\exp\left(\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right)\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)w+$$

$$+C_2\exp\left(\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right)\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)w, \tag{4.6}$$

$$U''_H=C_1\exp\left(\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right)\times$$

$$\times\left(\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)^2 w^2+\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)w'\right)+$$

$$+C_2\exp\left(\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right)\times$$

$$\times\left(\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)^2 w^2+\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)w'\right). \tag{4.7}$$

Підставивши (4.6) і (4.7) у вихідне рівняння (4.2), дістанемо

$$\varepsilon^2U''_H+w^2U_H=C_1\exp\left(\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right)\times$$

$$\times\left(2\varepsilon^2t^2w^2+2i\varepsilon^2w^2t\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}+\varepsilon^2\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)w'\right)-$$

$$+C_2\exp\left(\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right)\left(2\varepsilon^2t^2w^2-2i\varepsilon^2w^2t\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^2\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)w'\right)=C_1\exp\left(\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right)\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\times$$

$$\times\left(2\varepsilon^2tw^2+\varepsilon^2w'\right)+C_2\exp\left(\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right)\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\times$$

$$\times\left(2\varepsilon^2tw^2+\varepsilon^2w'\right)=\varepsilon^2\left(2tw+\frac{w'}{w}\right)\left(C_1\exp\left(\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)w+C_2\exp\left(\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right)\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)w\right)=$$

$$=\varepsilon^2\left(2tw+\frac{w'}{w}\right)U'_H. \tag{4.8}$$

Таким чином, U_H є загальним розв’язком рівняння

$$\varepsilon^2U''_H-\varepsilon^2\left(2tw+\frac{w'}{w}\right)U'_H+w^2U_H=0. \tag{4.9}$$

Використовуючи спосіб, який застосований у [90], позначимо

$$D = U - U_H \tag{4.10}$$

і запишемо рівняння (4.2) таким чином

$$\varepsilon^2 U'' - \varepsilon^2\left(2tw + \frac{w'}{w}\right)U' + w^2 U = -\varepsilon^2\left(2tw + \frac{w'}{w}\right)U'. \tag{4.11}$$

Позначимо

$$f = -\left(2tw + \frac{w'}{w}\right). \tag{4.12}$$

Віднімаючи із рівняння (4.11) рівняння (4.9) і використовуючи (4.12), дістанемо рівняння, якому задовольняє функція D

$$\varepsilon^2 D'' + \varepsilon^2 fD' + w^2 D = \varepsilon^2 fU'. \tag{4.13}$$

На кінцях відрізка $[a,b]$ функція D задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} D(a) &= 0, \\ D(b) &= 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Рівняння (4.13) можемо розглядати як неоднорідне рівняння відносно D. Тоді згідно з [117] у випадку, коли відповідна лінійна однорідна задача має тривіальний розв’язок (це виконується, крім випадку $\exp\left(2i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - t^2}\int_a^b w dx\right) = 1$, інтегральне зображення розв’язку лінійної неоднорідної задачі (4.13)-(4.14) має єдиний розв’язок

$$D = \varepsilon^2 \int_a^b G(x,s) f(s) U' ds, \tag{4.15}$$

де $G(x,s)$ – функція Гріна задачі (4.13)-(4.14).

Функція $G(x,s)$ визначена при $x \in [a,b]$, $s \in [a,b]$ і при кожному $s \in [a,b]$ має такі властивості: при $x \neq s$ задовольняє відповідне лінійне однорідне рівняння

$$\varepsilon^2 D'' + \varepsilon^2 fD' + w^2 D = 0, \tag{4.16}$$

при $x = a$ і $x = b$ функція $G(x,s)$ задовольняє крайові умови (4.14), при $x = s$ функція $G(x,s)$ неперервна по x, а її похідна по x має розрив першого роду зі стрибком, який дорівнює $1/\varepsilon^2$.

Щоб знайти функцію Гріна задачі (4.13)-(4.14), треба побудувати розв’язок $D_1(x) \neq 0$ рівняння (4.13), який задовольняє лише першу ($x = a$) крайову умову (4.14), і розв’язок $D_2(x) \neq 0$, який задовольняє другу крайову умову.

Позначимо два лінійно незалежні розв’язки рівняння (4.13) U_{H1} та U_{H2}, тобто

$$U_{H1}=\exp\left(\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right), \qquad (4.17)$$

$$U_{H2}=\exp\left(\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx\right). \qquad (4.18)$$

Тоді функції D_1 і D_2 можуть бути визначені, як

$$D_1=U_{H1}-U_{H2}, \qquad (4.20)$$

$$D_2=U_{H1}-\exp\left(2i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\int_a^b wdx\right)U_{H2}. \qquad (4.21)$$

Функцію $G\left(x,s\right)$ шукаємо у вигляді

$$G(x,s)=\begin{cases}\phi(s)D_1(x), & a\le x\le s;\\ \psi(s)D_2(x), & s\le x\le b.\end{cases} \qquad (4.22)$$

Функції $\phi\left(s\right)$ і $\psi\left(s\right)$ вибираються так, щоб виконувались умови, покладені на функцію Гріна, тобто, щоб

$$\left.\begin{aligned}&\psi(s)D_2(x)=\phi(s)D_1(x);\\ &\psi(s)D_2'(x)-\phi(s)D_1'(x)=\frac{1}{\varepsilon^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (4.23)$$

Звідси

$$\phi(s)=\frac{D_2(s)}{\varepsilon^2\left(D_1(s)D_2'(s)-D_1'(s)D_2(s)\right)}, \qquad (4.24)$$

$$\psi(s)=\frac{D_1(s)}{\varepsilon^2\left(D_1(s)D_2'(s)-D_1'(s)D_2(s)\right)}. \qquad (4.25)$$

Позначивши

$$P^*=D_1(s)D_2'(s)-D_1'(s)D_2(s), \qquad (4.26)$$

$$e^*=\exp\left(2i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\int_a^b wdx\right)\neq 1, \qquad (4.27)$$

і враховуючи (4.26)-(4.27), дістанемо

$$\begin{aligned}P^*&=\left(U_{H1}-U_{H2}\right)\left(U_{H1}'-e^*U_{H2}'\right)-\left(U_{H1}'-U_{H2}'\right)\left(U_{H1}-e^*U_{H2}\right)=\\ &=\left(U_{H1}U_{H2}'-U_{H1}'U_{H2}\right)\left(1-e^*\right).\end{aligned} \qquad (4.28)$$

Враховуючи те, що

$$U_{H1}'=U_{H1}\left(t+i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx, \qquad (4.29)$$

$$U_{H2}'=U_{H2}\left(t-i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\right)\int_a^x wdx. \qquad (4.30)$$

будемо мати

$$P* = 2i(1-e*)\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\,wU_{H1}U_{H2} = 2i(1-e*)\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\,w\cdot\exp\left(2t\int_a^s wds\right). \quad (4.31)$$

Запишемо розв’язок задачі (2.36)-(2.37) за допомогою функції Гріна

$$D = \left(U_{H1}(x)-U_{H2}(x)\right)\int_a^x \frac{\left(U_{H1}(s)-e*\cdot U_{H2}(s)\right)f(s)U'(s)}{2i(1-e*)\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\,w\cdot\exp\left(2t\int_a^s wds\right)}ds +$$

$$+\left(U_{H1}(x)-e*U_{H2}(x)\right)\int_x^b \frac{\left(U_{H1}(s)-U_{H2}(s)\right)f(s)U'(s)}{2i(1-e*)\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}\,w\cdot\exp\left(2t\int_a^s wds\right)}ds. \quad (4.34)$$

Зробимо деякі оцінки

$$\left|U_{H1}\right| = \left|U_{H2}\right| = \exp\left(t\int_a^x wdx\right) \le \exp\left(t\beta(b-a)\right), \quad (4.35)$$

$$\left|\frac{f}{w}\right| = \left|2t+\frac{w'}{w^2}\right| \le 2|t| + \frac{|w'|}{\min\limits_{[a,b]} w^2} = \gamma, \quad (4.36)$$

$$\exp\left(2t\int_a^x wdx\right) \ge \exp\left(2t\alpha(x-a)\right) \ge N, \quad (4.37)$$

де

$$N = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ \exp\left(2t\alpha(b-a)\right), & \alpha < 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

Враховуючи (4.36)-(4.38), можемо записати

$$|D| \le \frac{\exp\left(2t\beta(b-a)\right)}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-t^2}}\left|\frac{1+e*}{1-e*}\right|\frac{\gamma}{N}\left|\int_a^b U'(s)ds\right|. \quad (4.39)$$

Позначивши

$$C = \exp\left(2t\beta(b-a)\right)\left|\frac{1+e*}{1-e*}\right|\frac{\gamma}{N}, \quad (4.40)$$

отримаємо

$$|D| \le \frac{C\varepsilon}{\sqrt{1-t^2\varepsilon^2}}\left|U_b-U_a\right|. \quad (4.41)$$

Функція

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{C}{\sqrt{1-t^2\varepsilon^2}}\left|U_b-U_a\right| \quad (4.42)$$

обмежена при $\varepsilon \to 0$.

Таким чином, позначивши

$$K = \frac{C}{\sqrt{1 - t^2 \varepsilon^2}} \left| U_b - U_a \right|, \tag{4.43}$$

дістанемо оцінку

$$\left| U - U_H \right| \le \varepsilon \cdot K, \tag{4.44}$$

що доводить ε-асимптотичність гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку (4.34) рівняння (4.13).

4.2 Висновки

Теорема доведена.

Тема 5 ПОБУДОВА ГІБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЬОРКІН РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Зазначимо, що диференціальні рівняння четвертого порядку та їх системи знаходять досить широке застосування у задачах математичної фізики, зокрема у розв'язанні актуальних проблем механіки деформованого твердого тіла при розгляді напружено-деформованого стану та стійкості неоднорідних стрижнів та пластин та оболонок, а також у сумісних напрямках науки і техніки.

5.1 Формальний розв'язок

Побудуємо на відрізку $[a,b]$ гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок диференціального рівняння четвертого порядку з параметром

$$\varepsilon^4\left(\frac{d^4U}{dx^4}+g_1(x,\varepsilon)\frac{d^3U}{dx^3}+g_2(x,\varepsilon)\frac{d^2U}{dx^2}+g_3(x,\varepsilon)\frac{dU}{dx}\right)-g_4(x,\varepsilon)U=0, \tag{5.1}$$

де $g_i(x,\varepsilon)$, $i=1,...,4$ – аналітичні функції, визначені на $[a,b]$, деякі з яких можуть тотожно дорівнювати нулю.

Нехай функція U задовольняє деякі крайові умови на кінцях відрізка $[a,b]$.

У відповідності з методом фазних інтегралів зобразимо розв'язок рівняння (5.1) у вигляді

$$U_{WKB}=\exp\left(\int_a^x \varepsilon^{-1}\psi_0 dx\right). \tag{5.2}$$

Тоді перші чотири похідні U_{WKB} будуть мати вигляд

$$\frac{dU_{WKB}}{dx}=\exp\left(\int_a^x \varepsilon^{-1}\psi_0 dx\right)\varepsilon^{-1}\psi_0, \tag{5.3}$$

$$\frac{d^2U_{WKB}}{dx^2}=\exp\left(\int_a^x \varepsilon^{-1}\psi_0 dx\right)\left(\varepsilon^{-2}\psi_0^2+\varepsilon^{-1}\psi_0'\right), \tag{5.4}$$

$$\frac{d^3U_{WKB}}{dx^3}=\exp\left(\int_a^x \varepsilon^{-1}\psi_0 dx\right)\left(\varepsilon^{-3}\psi_0^3+3\varepsilon^{-2}\psi_0\psi_0'+\varepsilon^{-1}\psi_0''\right), \tag{5.5}$$

$$\frac{d^4U_{WKB}}{dx^4}=\exp\left(\int_a^x \varepsilon^{-1}\psi_0 dx\right)\left(\varepsilon^{-4}\psi_0^4+6\varepsilon^{-3}\psi_0^2\psi_0'+4\varepsilon^{-2}\psi_0\psi_0''+\right.$$
$$\left.+3\varepsilon^{-2}\left(\psi_0'\right)^2+\varepsilon^{-1}\psi'''\right). \tag{5.6}$$

Підставляючи вирази (5.5)-(5.6) в рівняння (5.1) і збираючи коефіцієнти при ε^0, дістанемо рівняння вигляду

$$\psi_0^4 - g_4(x,\varepsilon) = 0, \tag{5.7}$$

звідки

$$\psi_0 = \sqrt[4]{g_4(x,\varepsilon)}. \tag{5.8}$$

Таким чином, здобуте одночленне ВКБ-розвинення розв'язку рівняння (5.1). Однак побудований розв'язок не ураховує впливу другого, третього і четвертого членів цього рівняння. Для їх урахування необхідно ВКБ-розв'язок будувати з використанням кількох членів розвинення, або шукати функцію ψ_0 з урахуванням інших коефіцієнтів рівняння (5.1). Обидва ці підходи досить складні і не завжди здійсненні. Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін методу в цьому випадку дозволяє використовувати простий вигляд функції ψ_0 і одночасно урахувати вплив усіх коефіцієнтів рівняння (5.1) на шуканий розв'язок. Останнє досягається завдяки використанню критерію ортогональності Гальоркіна.

Опишемо сказане більш докладно, для цього зобразимо розв'язок рівняння (5.1) у вигляді

$$U_H(x,\varepsilon) = \exp\left(\int_a^x \delta_0\psi_0 dx\right). \tag{5.9}$$

Тоді перші чотири похідні функції U_H будуть мати вигляд

$$\frac{dU_H}{dx} = \exp\left(\int_a^x \delta_0\psi_0 dx\right)\delta_0\psi_0, \tag{5.9}$$

$$\frac{d^2U_H}{dx^2} = \exp\left(\int_a^x \delta_0\psi_0 dx\right)\left(\delta_0^2\psi_0^2 + \delta_0\psi_0'\right), \tag{5.10}$$

$$\frac{d^3U_H}{dx^3} = \exp\left(\int_a^x \delta_0\psi_0 dx\right)\left(\delta_0^3\psi_0^3 + 3\delta_0^2\psi_0\psi_0' + \delta_0\psi_0''\right), \tag{5.11}$$

$$\frac{d^4U_H}{dx^4} = \exp\left(\int_a^x \delta_0\psi_0 dx\right)\left(\delta_0^4\psi_0^4 + 6\delta_0^3\psi_0^2\psi_0' + 4\delta_0^2\psi_0\psi_0'' + \right.$$
$$\left. +3\delta_0^2\left(\psi_0'\right)^2 + \delta_0\psi_0'''\right). \tag{5.12}$$

Відхил рівняння (5.1) набуде вигляду

$$R = \varepsilon^4\left(\delta_0^4\psi_0^4 + 6\delta_0^3\psi_0^2\psi_0' + 4\delta_0^2\psi_0\psi_0'' + 3\delta_0^2\left(\psi_0'\right)^2 + \delta_0\psi_0'''\right) +$$
$$+ g_1(x,\varepsilon)\left(\delta_0^3\psi_0^3 + 3\delta_0^2\psi_0\psi_0' + \delta_0\psi_0''\right) + g_2(x,\varepsilon)\left(\delta_0^2\psi_0^2 + \delta_0\psi_0'\right) +$$
$$+ g_3(x,\varepsilon)\delta_0\psi_0 - g_4(x,\varepsilon). \tag{5.13}$$

Використання критерію ортогональності Гальоркіна дає можливість записати рівняння для визначення невідомого δ_0 таким чином

$$k_0\delta_0^4 + k_1\delta_0^3 + k_2\delta_0^2 + k_3\delta_0 + k_4 = 0, \tag{5.14}$$

де

$$k_0 = \int_a^b \varepsilon^4 \psi_0^5 dx, \tag{5.15}$$

$$k_1 = \int_a^b \left(6\varepsilon^4 \psi_0^3 \psi' + g_1 \psi_0^4\right) dx, \tag{5.16}$$

$$k_2 = \int_a^b \left(4\varepsilon^4 \psi_0^2 \psi_0'' + 3\varepsilon^4 \psi_0 \left(\psi_0'\right)^2 + 3g_1 \psi_0^2 \psi_0' + g_2 \psi_0^3\right) dx, \tag{5.17}$$

$$k_3 = \int_a^b \left(\varepsilon^4 \psi_0 \psi_0''' + g_1 \psi_0 \psi_0'' + g_2 \psi_0 \psi' + g_3 \psi_0^2\right) dx, \tag{5.18}$$

$$k_4 = \int_a^b \left(-g_4 \psi_0\right) dx. \tag{5.19}$$

Розв’язок алгебраїчного рівняння четвертого порядку (5.14) виконується чисельно, тому що тільки в ряді випадків можливо його розв’язок зобразити в аналітичному вигляді. Для чисельної реалізації пошуку розв’язків рівняння (5.14) існують спеціально вбудовані процедури. Наприклад, в інтегрованому розрахунковому середовищі Mathcad визначення розв’язків поліноміального рівняння виконується за допомогою функції polyroot (k).

Результатом розв’язку рівняння (5.14) будуть чотири значення δ_0 при виборі координатною однієї із функцій

$$\psi_{01} = +\sqrt[4]{g(x,\varepsilon)}, \tag{5.20}$$

$$\psi_{02} = -\sqrt[4]{g(x,\varepsilon)}, \tag{5.21}$$

$$\psi_{03} = +i\sqrt[4]{g(x,\varepsilon)}, \tag{5.22}$$

$$\psi_{04} = -i\sqrt[4]{g(x,\varepsilon)}, \tag{5.23}$$

які при підстановці в (5.13) дадуть гібридний ВКБ-Гальоркін розв’язок. При цьому має місце така теорема.

5.2Теорема про незалежність вибору фундаментальних функцій розв’язку

Теорема: гібридний ВКБ-Гальоркін розв’язок рівняння (5.1) остається незмінним при виборі будь-якої з функцій (5.20)-(5.23).

Виберемо координатною функцію ψ_{01}. Нехай при такому виборі розв’язками рівняння (5.14) з коефіцієнтами k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 будуть δ_{01}, δ_{02}, δ_{03}, δ_{04}. Тоді при підстановці в гібридний розв’язок (5.14) підінтегральними функціями чотирьох незалежних розв’язків будуть $\delta_{01}\psi_{01}$, $\delta_{02}\psi_{01}$, $\delta_{03}\psi_{01}$, $\delta_{04}\psi_{01}$.

Виберемо координатною функцію $\psi_{02} = -\psi_{01}$. Тоді рівняння (5.14) перепишеться у вигляді

$$-k_0\delta_0^4 + k_1\delta_0^3 - k_2\delta_0^2 + k_3\delta_0 - k_4 = 0. \qquad (5.24)$$

Розв'язками цього рівняння будуть: $-\delta_{01}$, $-\delta_{02}$, $-\delta_{03}$, $-\delta_{04}$. При підстановці в розв'язок (5.14) підінтегральними виразами будуть: $-\delta_{01}\psi_{02} = \delta_{01}\psi_{01}$, $-\delta_{02}\psi_{02} = \delta_{02}\psi_{01}$, $-\delta_{03}\psi_{02} = \delta_{03}\psi_{01}$, $-\delta_{04}\psi_{02} = \delta_{04}\psi_{01}$. Як видно, результат не змінився.

Візьмемо координатною функцію $\psi_{03} = i\psi_{01}$. В цьому випадку рівняння (5.14) перепишеться таким чином

$$ik_0\delta_0^4 + k_1\delta_0^3 - ik_2\delta_0^2 - k_3\delta_0 + ik_4 = 0. \qquad (5.25)$$

Розв'язками цього рівняння будуть: $-i\delta_{01}$, $-i\delta_{02}$, $-i\delta_{03}$, $-i\delta_{04}$. При підстановці цих розв'язків в (5.14) підінтегральні вирази матимуть вигляд: $-i\delta_{01}\psi_{03} = \delta_{01}\psi_{01}$, $-i\delta_{02}\psi_{03} = \delta_{02}\psi_{01}$, $-i\delta_{03}\psi_{03} = \delta_{03}\psi_{01}$, $-i\delta_{04}\psi_{03} = \delta_{04}\psi_{01}$. Вислідний розв'язок залишився без змін і в цьому випадку.

Виберемо тепер $\psi_{04} = -i\psi_{01}$. Рівняння (5.14) буде мати вигляд

$$-ik_0\delta_0^4 + k_1\delta_0^3 + ik_2\delta_0^2 - k_3\delta_0 - ik_4 = 0. \qquad (5.26)$$

Розв'язками цього рівняння будуть: $i\delta_{01}$, $i\delta_{02}$, $i\delta_{03}$, $i\delta_{04}$. Підставляючи ці розв'язки в (5.13), дістанемо підінтегральні функції: $i\delta_{01}\psi_{04} = \delta_{01}\psi_{01}$, $i\delta_{02}\psi_{04} = \delta_{02}\psi_{01}$, $i\delta_{03}\psi_{04} = \delta_{03}\psi_{01}$, $i\delta_{04}\psi_{04} = \delta_{04}\psi_{01}$. Тому гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок буде таким самим, як при виборі координатною функції ψ_{01}.

Таким чином, всі чотири розв'язки, здобуті підстановкою функцій (5.20)-(5.23) у вираз (5.13), мають однаковий вигляд. Тому при побудові гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку координатною може вибиратись будь-яка із функцій (5.20)-(5.23).

Теорема доведена.

Із урахуванням доведеної теореми можемо записати гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок

$$U_H = C_1 \exp\left(\int_a^x \delta_{01}\psi_0 dx\right) + C_2 \exp\left(\int_a^x \delta_{02}\psi_0 dx\right) + C_3 \exp\left(\int_a^x \delta_{03}\psi_0 dx\right) +$$
$$+ C_4 \exp\left(\int_a^x \delta_{04}\psi_0 dx\right). \qquad (5.27)$$

5.3 Висновки

З використанням гібридного ВКБ-Гальоркін підходу побудований аналітичний розв'язок крайової задачі, що описується лінійним диференціальним рівнянням зі змінними коефіцієнтами і параметром при старшій похідній. Для диференціального рівняння четвертого порядку здобутий замкнутий аналітичний розв'язок. Доведений асимптотичний характер цього розв'язку. У випадку рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами побудований гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок і вказані деякі особливості цього підходу.

Тема 6 ЗАСТОСУВАННЯ ГІБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЬОРКІН ПІДХОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

В цій лекції гібридний ВКБ-Гальоркін підхід застосовується до розв'язання ряду крайових задач, які при певних умовах мають точний розв'язок. Зіставлення саме з точними розв'язками дають найбільшу упевненість в правильності здобутих результатів.

6.1 Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок деяких рівнянь другого порядку.

Побудуємо гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок рівняння Ейлера

$$\varepsilon^2 \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{1}{x^2}U = 0. \tag{6.1}$$

При $\varepsilon^2 < 4$ існує точний розв'язок рівняння (6.1), який має вигляд [118]

$$U(x,\varepsilon) = C_1\sqrt{x}\cos(\omega \ln x) + C_2\sqrt{x}\sin(\omega \ln x), \tag{6.2}$$

де

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{4}}. \tag{6.3}$$

Функція (6.2) має точки розриву, коли

$$\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{4\pi^2+1}}, \frac{2}{\sqrt{16\pi^2+1}}, \ldots \frac{2}{\sqrt{n^2\pi^2+1}}, \ldots \tag{6.4}$$

Запишемо розв'язок рівняння Ейлера за допомогою методу ВКБ і гібридного підходу. Для цього спочатку зобразимо розв'язок рівняння (6.1) у вигляді

$$U_{WKB}(x,\varepsilon) = \exp\left(\int_1^x (\varepsilon^{-1}\psi_0 + \psi_1)dx\right). \tag{6.5}$$

Після підстановки виразу (6.5) в рівняння (6.1) будемо мати

$$\exp\left(\int_1^x (\varepsilon^{-1}\psi_0 + \psi_1)dx\right)\left(\psi_0^2 + \varepsilon^2\psi_1^2 + 2\varepsilon\psi_0\psi_1 + \varepsilon\frac{d\psi_0}{dx} + \varepsilon^2\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{1}{x^2}\right) = 0. \tag{6.6}$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра ε у виразі (6.6), дістанемо рекурентну систему диференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій ψ_0 і ψ_1

$$\left.\begin{aligned} &\psi_0^2 + \frac{1}{x^2} = 0, \\ &2\psi_0\psi_1 + \frac{d\psi_0}{dx} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Звідси знайдемо

$$\psi_0 = \pm\frac{i}{x}, \tag{6.8}$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2x}. \tag{6.9}$$

Таким чином, для рівняння Ейлера (6.1) за допомогою методу фазних інтегралів побудовано такий наближений розв'язок, який ураховує два члени розвинення

$$U_{WKB}(x,\varepsilon) = C_1\sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln x\right) + C_2\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln x\right). \tag{6.10}$$

Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок побудуємо з використанням одного члена розвинення. Для цього зобразимо наближений розв'язок рівняння (6.1) у вигляді (3.2), де функція ψ_0 визначена в (6.8). Тоді відхил рівняння, що потребує мінімізації, набуває вигляду

$$R = \varepsilon^2\left(-\delta_0^2\frac{1}{x^2} + \delta_0\frac{\mp i}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2}. \tag{6.11}$$

Застосовуючи критерій ортогональності Гальоркіна, дістанемо квадратне рівняння для визначення невідомого δ_0

$$\delta_0^2 \pm i\delta_0 - \frac{1}{\varepsilon^2} = 0. \tag{6.12}$$

Звідси δ_0 запишеться у вигляді

$$\delta_0 = \mp\frac{i}{2} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{4}}. \tag{6.13}$$

Таким чином, гібридний ВКБ-Гальоркін підхід дасть таке наближення точного розв'язку рівняння (6.1)

$$U_H(x,\varepsilon) = C_1\sqrt{x}\cos(\upsilon\ln x) + C_2\sqrt{x}\sin(\upsilon\ln x), \tag{6.14}$$

Тут через υ позначена величина

$$\upsilon = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{4}}. \tag{6.15}$$

6.2 Зіставлення з точним розв'язком

Як видно, гібридний розв'язок (6.14), побудований з використанням одного члена розвинення, співпадає з точним розв'язком (6.2) рівняння у той час, як розв'язок (3.10), побудований з використанням двочленного ВКБ-розвинення, відрізняється від точного розв'язку. Подивимось, наскільки істотні ці відміни при різних значеннях параметра ε.

Порівняємо також точний розв'язок з чисельними результатами, здобутими з використанням методу пристрілювання в поєднанні з методом Рунге-Кутта четвертого порядку [119]. Особливу увагу приділимо точності чисельного розв'язку при малих значеннях параметра ε.

Нехай шукана функція $U(x,\varepsilon)$ задовольняє такі крайові умови

$$U(1) = U(e) = 1. \tag{6.16}$$

Тоді, як видно на рис. 6.1, при $U(x,\varepsilon)$ розв'язок, здобутий за допомогою чисельного методу, дає помітну похибку. При вельми малих значеннях параметра, що випливає з [119], обчислювальна похибка чисельних методів може швидко зростати. Це часто не дозволяє досягти прийнятної точності для малих значень параметра ε. Гібридне наближення і розв'язок за методом фазних інтегралів співпадають з точним розв'язком.

Примітка. Усі обчислення виконувались в інтегрованому середовищі Mathcad (опис цього програмного продукту можна знайти в [119]).

Простежимо за результатами, здобутими з використанням цих підходів, коли параметр ε стає більшим за одиницю. На рис. 6.2 зображені графіки, здобуті для $\varepsilon = 1{,}5$. Гібридний і чисельний розв'язки збігаються з точним розв'язком, метод ВКБ дає помітну похибку. Це свідчить про те, що з ростом параметра метод фазних інтегралів стає менш точним.

Цікаво простежити за результатами цих методів поблизу точок сингулярності. Так, на рис. 6.3 наведені графіки для $\varepsilon \to 2\left(4\pi^2+1\right)^{-1/2}$ (при $\varepsilon = 0{,}313$), на рис. 6.4 для $\varepsilon \to 2\left(16\pi^2+1\right)^{-1/2}$ (при $\varepsilon = 0{,}159$). Як видно, метод ВКБ дає значну похибку при наближенні до точок сингулярності і стає неприйнятним при таких значеннях параметра ε.

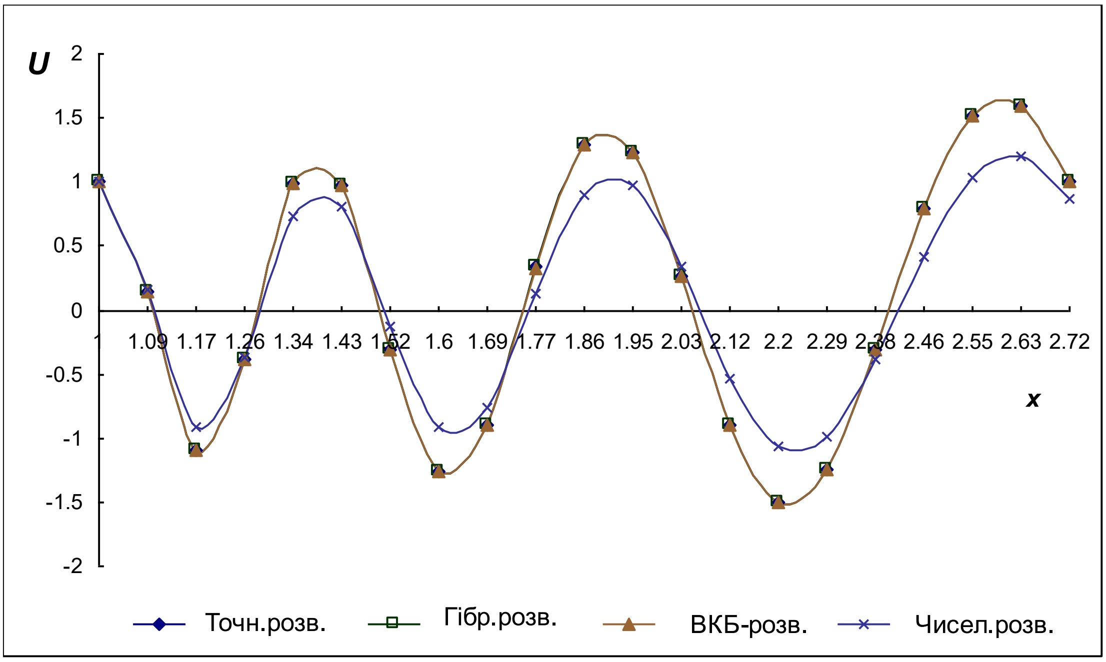

Рисунок 6.1 – Зіставлення наближених результатів з точним розв'язком рівняння (3.1) при $\varepsilon = 0{,}05$

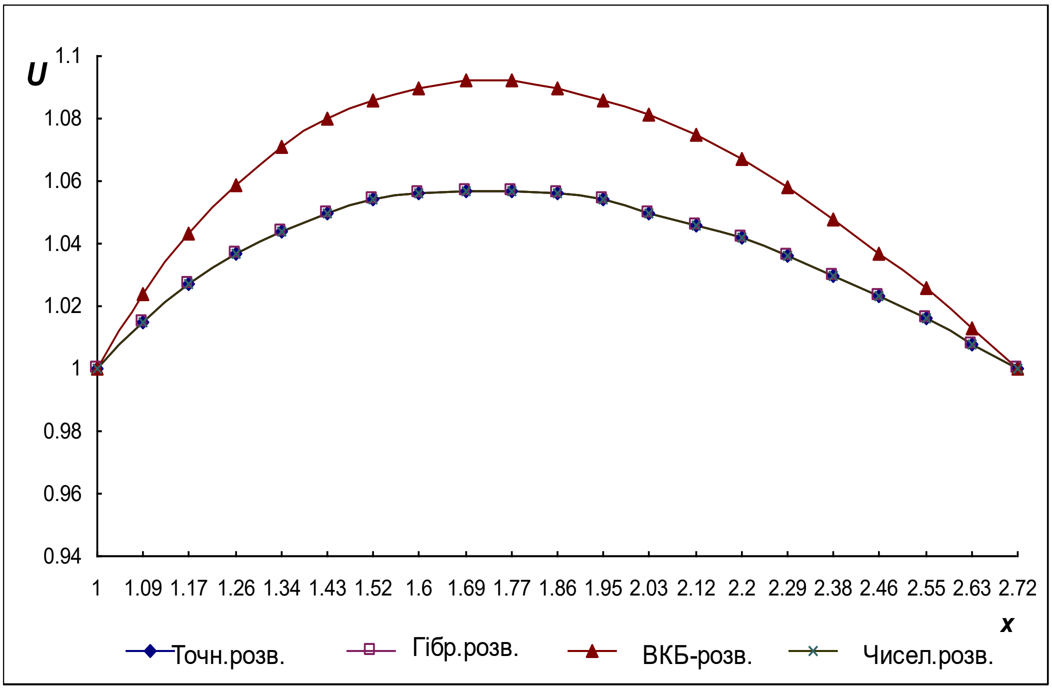

Рисунок 6.2 – Зіставлення наближених результатів з точним розв'язком рівняння (6.1) при $\varepsilon = 1{,}5$

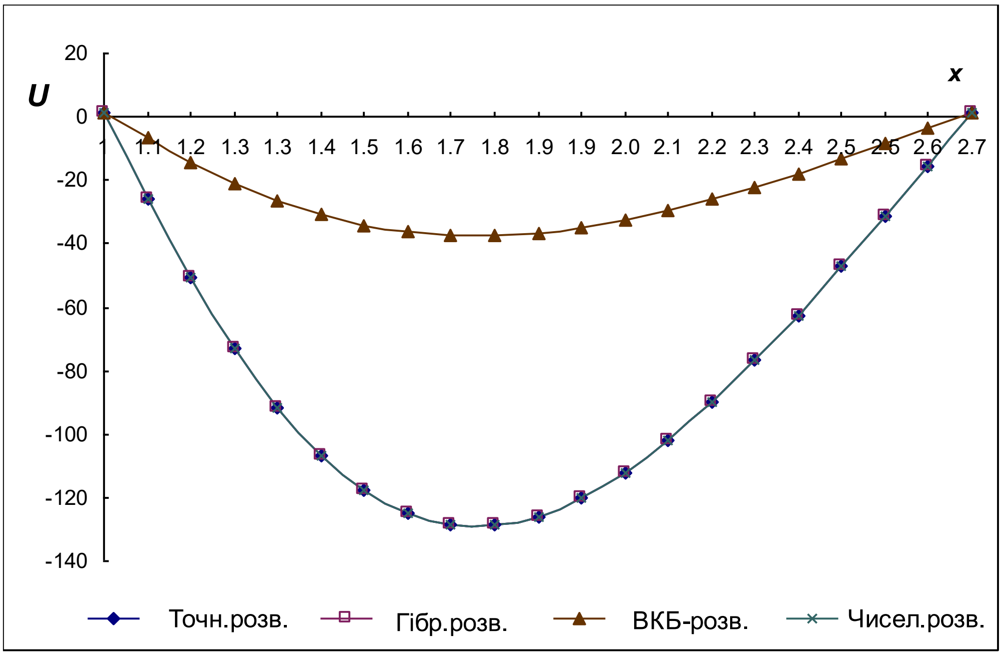

Рисунок 6.3 – Зіставлення наближених результатів з точним розв'язком рівняння (6.1) при $\varepsilon = 0{,}313$

Гібридний метод повністю повторює точний розв'язок. При таких значеннях параметра ε чисельні результати майже не відрізняються від точного розв'язку.

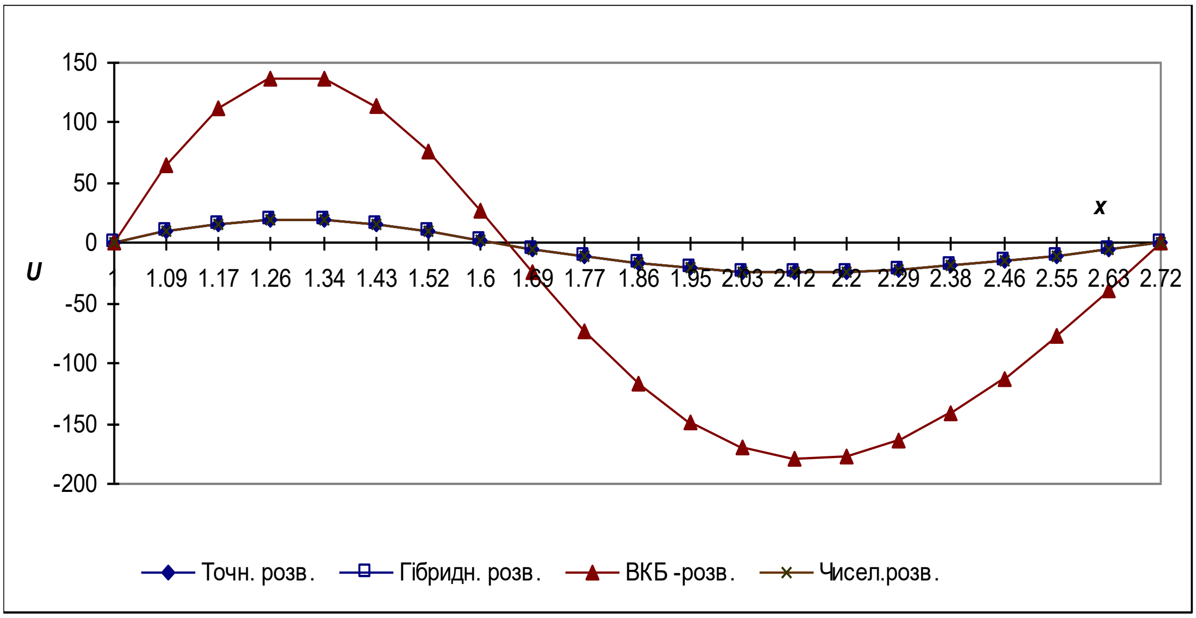

Рисунок 6.1 – Зіставлення наближених результатів з точним розв’язком рівняння (3.1) при $\varepsilon = 0{,}159$

6.3 Висновки

На основі приведеного аналізу використаних наближених методів можемо відмітити таке: застосування методу ВКБ з використанням двох членів розвинення дає прийнятні результати лише для малих значень параметра ε. Зі збільшенням параметра цей підхід стає недостатньо точним. Незадовільні результати метод фазних інтегралів демонструє поблизу точок сингулярності. Чисельний підхід досить добре наближує точний розв’язок всюди за межами області малих значень параметра ε. Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін підходу з використанням одного члена розвинення дозволяє дістати точний аналітичний розв’язок рівняння Ейлера.

Тема 7 ГІБРИДНИЙ ВКБ-ГАЛЬОРКІН РОЗВ'ЯЗОК ДЛЯ РІВНЯННЯ БЕССЕЛЯ

Побудуємо гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок для рівняння Бесселя, яке має точний розв'язок в спеціальних функціях. До цього рівняння або його модифікацій зводяться деякі задачі механіки, наприклад, про напружено-деформований стан анізотропних оболонок обертання**.**

7.1 Формальний розв'язок

В загальновживаному вигляді рівняння Бесселя записується таким чином

$$x^2\frac{d^2V}{dx^2}+x\frac{dV}{dx}+\left(x^2-n^2\right)V=0. \qquad (7.1)$$

Точний розв'язок рівняння (7.1) для цілих значень параметра n можемо записати за допомогою спеціальних функцій [118]

$$V(x)=C_1J_n(x)+C_2Y_n(x), \qquad (7.2)$$

де $J_n\left(x\right)$, $Y_n\left(x\right)$ – бесселеві функції n-го порядку першого і другого роду відповідно.

Для побудови гібридного розв'язку і ВКБ-наближення запишемо рівняння (7.1) в канонічній формі. Для цього введемо заміну

$$V(x)=\frac{U(x)}{\sqrt{x}}, \qquad (7.3)$$

$$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{dU}{dx}-\frac{U}{2\sqrt{x^3}}, \qquad (7.4)$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\frac{dU}{dx}+\frac{3U}{4\sqrt{x^5}}. \qquad (7.5)$$

За допомогою такої заміни рівняння (7.1) набуває вигляду

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\left(1-\frac{4n^2-1}{4x^2}\right)U=0. \qquad (7.6)$$

Введемо параметр

$$\varepsilon=\frac{1}{n} \qquad (7.7)$$

і запишемо рівняння (7.5) в такій формі

$$\varepsilon^2\frac{d^2U}{dx^2}+\left(\frac{4x^2+1}{4x^2n^2}-\frac{1}{x^2}\right)U=0. \qquad (7.8)$$

При підстановці методу фазних інтегралів в рівняння (7.7) дістанемо такий вираз

$$\exp\left(\int\limits_1^x(\varepsilon^{-1}\psi_0+\psi_1)dx\right)\Big(\ \psi_0^2+\varepsilon^2\psi_1^2+2\varepsilon\psi_0\psi_1+\varepsilon\frac{d\psi_0}{dx}+$$

$$+\varepsilon^2 \frac{d\psi_1}{dx} + \left(\frac{4x^2+1}{4x^2n^2} - \frac{1}{x^2} \right) \Bigg) = 0. \tag{7.9}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра ε у виразі (7.9), дістанемо рекурентну систему диференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій ψ_0 і ψ_1

$$\left. \begin{aligned} &\psi_0^2 + \frac{4x^2+1}{4x^2n^2} - \frac{1}{x^2} = 0, \\ &2\psi_0\psi_1 + \frac{d\psi_0}{dx} = 0. \end{aligned} \right\} \tag{7.10}$$

Звідси знайдемо

$$\psi_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{4x^2+1}{4x^2n^2}}, \tag{7.11}$$

$$\psi_1 = \frac{-1}{4}\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1}{x^2} - \frac{4x^2-1}{4x^2n^2} \right). \tag{7.12}$$

Метод фазних інтегралів дає такий наближений розв'язок рівняння Бесселя (7.1)

$$V_{WKB}(x) = D_1\sqrt[4]{\frac{4n^2}{4n^2-4x^2-1}}\exp\left(\int_a^x \left[\sqrt{\frac{4n^2-1}{4x^2}} - 1 \right] dx \right) +$$

$$+D_2\sqrt[4]{\frac{4n^2}{4n^2-4x^2-1}}\exp\left(\int_a^x \left[-\sqrt{\frac{4n^2-1}{4x^2}} - 1 \right] dx \right), \tag{7.13}$$

Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок побудуємо з використанням одного члена розвинення. Для цього зобразимо наближений розв'язок рівняння (7.7), де функція ψ_0 визначена у (7.12). Тоді гібридний розв'язок набуває вигляду

$$V_H = E_1\frac{1}{\sqrt{x}}\exp\int_a^x \left(\left[\Delta + \sqrt{n^2+\Delta^2} \right] \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{4x^2+1}{4x^2n^2}} \right) dx +$$

$$+E_2\frac{1}{\sqrt{x}}\exp\int_a^x \left(\left[\Delta - \sqrt{n^2+\Delta^2} \right] \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{4x^2+1}{4x^2n^2}} \right) dx, \tag{7.14}$$

де

$$\Delta = \frac{g(a)-g(b)}{\int_a^b g^{3/2}(x)dx}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{4x^2+1}{4x^2n^2}. \tag{7.15}$$

На рис. 7.1-7.3 порівнюються результати, здобуті з використанням гібридного підходу, методу ВКБ, чисельної апроксимації, з точним розв'язком для різних значень параметра ε.

Для розрахунку були взяті такі крайові умови

$$V(1)=V(2)=5. \qquad (7.16)$$

Простежимо за точністю здобутих розв'язків, коли параметр ε виходить за межі малості параметра ε. Так, на рис.7.1 порівняння проводиться для $\varepsilon=1$. Потрібно відзначити, що при такому значені параметра $n=1$ розв'язок рівняння (7.1) проходить через особливу точку при $x=1$. Як видно, чисельна апроксимація майже співпадає з точним розв'язком. Гібридний підхід дає незначну похибку (максимальна відносна похибка складає 0,9%). Результати, здобуті з використанням методу фазних інтегралів значно відрізняються від точного розв'язку.

7.2 Аналіз чисельних результатів

Проаналізуємо здобуті результати для малих значень параметра ε. На рис. 7.2 показаний розв'язок рівняння Бесселя, побудований з використанням гібридного підходу, методу ВКБ та чисельної апроксимації для $\varepsilon=0{,}1$. Як видно, в цьому випадку досить добре наближують точний розв'язок гібридне розвинення та наближення за методом фазних інтегралів. Чисельний розв'язок для малого значення параметра дає значну похибку, яка зростає, коли $x \to b$.

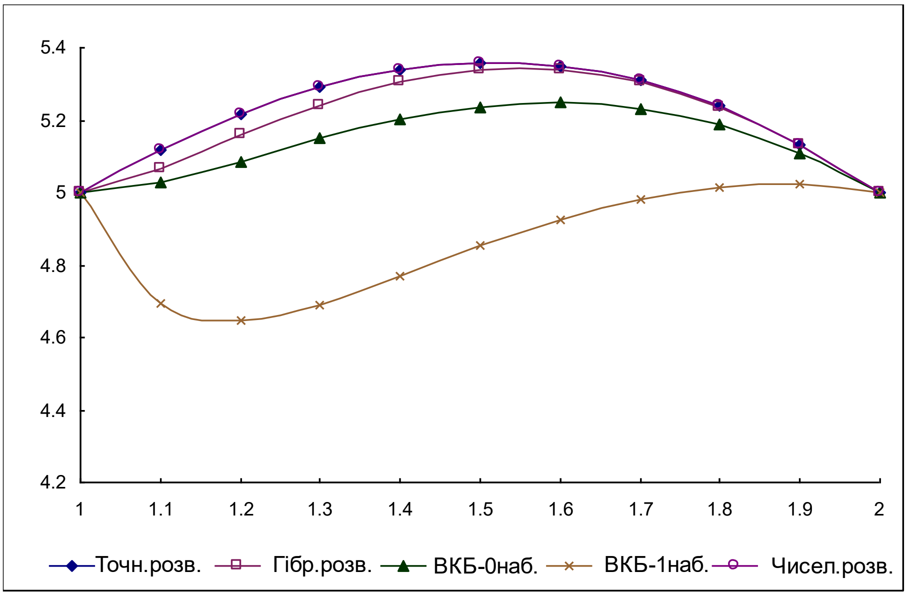

Рисунок 7.1 – Зіставлення наближених результатів з точним розв'язком рівняння (7.1) при $\varepsilon=1$

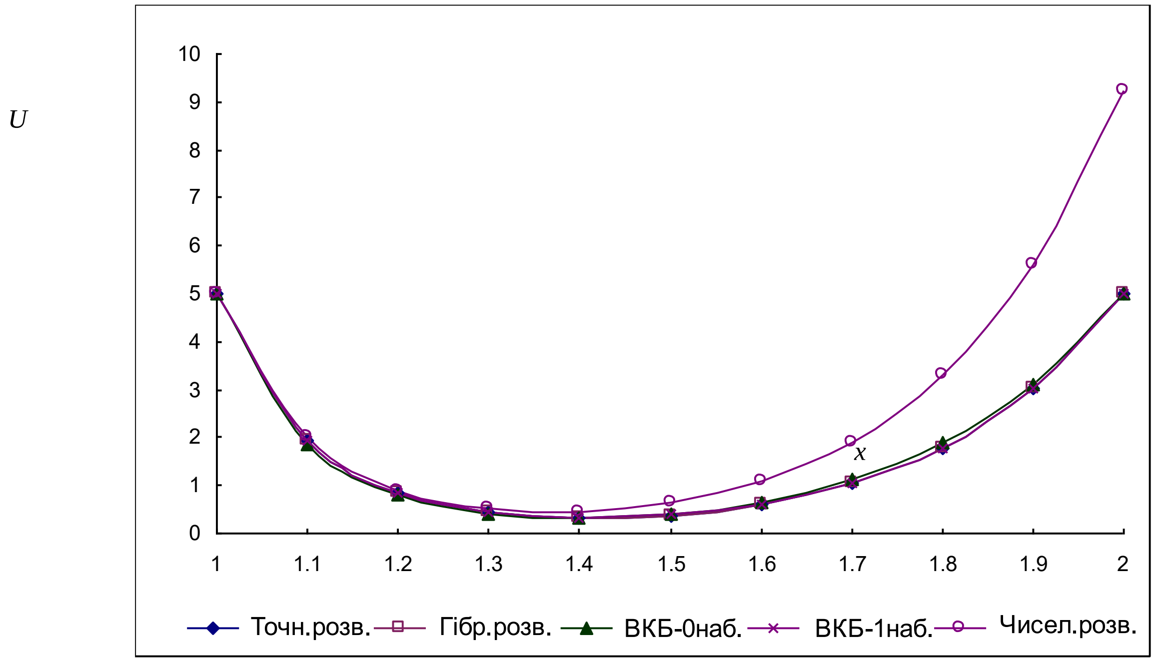

Рисунок 7.2 – Зіставлення наближених результатів з точним розв'язком рівняння (7.1) при $\varepsilon = 0{,}1$

На рис. 7.3 для цього ж значення $\varepsilon = 0{,}1$ наводяться результати, здобуті для перших похідних наближених розв'язків рівняння Бесселя. Гібридний підхід і наближення за методом фазних інтегралів добре апроксимують точний розв'язок. Чисельне наближення при такому значенні параметра ε дає неприйнятний результат. Найбільший відхил чисельного розв'язку від точного спостерігається при $x \to b$.

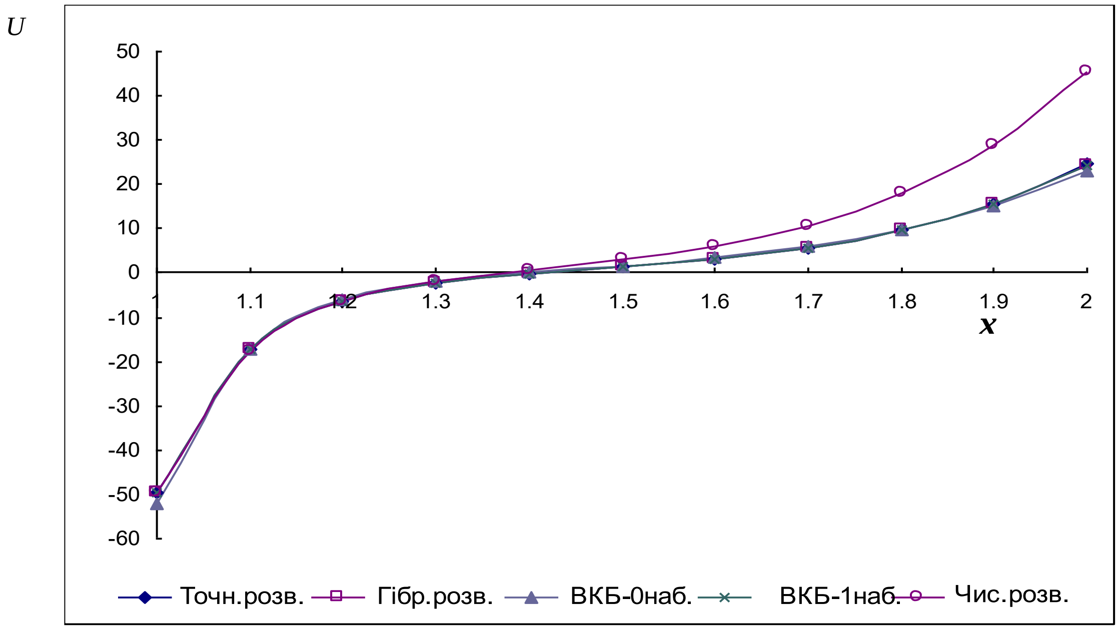

Рисунок 7.3 – Зіставлення перших похідних розв'язку рівняння (7.1) і наближених розв'язків при $\varepsilon = 0{,}1$

Зі зменшенням параметра ε гібридний ВКБ-Гальоркін метод дозволяє дістати досить точні результати. Обчислювальна похибка чисельного розв’язку зі зменшенням ε збільшується. Так, в табл. 3.1 наведені результати, здобуті при $\varepsilon = 0,05$.

7.3 Висновки

Як видно на прикладі рівняння Бесселя, гібридний ВКБ-Гальоркін метод дозволяє діставати досить точні розв’язки, як при малих значеннях параметра ε, так і за межами малості параметра, що дозволяє розширити область застосування асимптотичних методів.

Гібридний ВКБ-Гальоркін підхід дозволяє одержувати досить точні результати при таких значеннях параметра, коли асимптотичні або чисельні методи дають значну похибку.

Тема 8 ГІБРИДНЕ ВКБ-ГАЛЬОРКІН НАБЛИЖЕННЯ У КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Актуальні задачі теорії оболонок і пластин, наприклад, задач напружено-деформованого стану та стійкості, а також задач теплопровідності та тепло-масообміну описуються диференціальними рівняннями четвертого порядку.

8.1 Розв'язок рівняння спеціального типу

Розглянемо рівняння виду:

$$\varepsilon^4 U^{(4)} - Q(x)U = 0, \tag{8.1}$$

де ε – деякий параметр.

Розглянемо окремий випадок рівняння (8.2), коли його можемо записати у вигляді

$$\varepsilon^4 U^{(4)} - \frac{1}{x^5}U = 0. \tag{8.2}$$

Існує точний розв'язок цього рівняння, який має вигляд [118]

$$U(x,\varepsilon) = C_1 x^3 \operatorname{sh}\frac{1}{x\varepsilon} + C_2 x^3 \operatorname{ch}\frac{1}{x\varepsilon} + C_3 x^3 \sin\frac{1}{x\varepsilon} + C_4 x^3 \cos\frac{1}{x\varepsilon}. \tag{8.3}$$

Побудуємо гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок цього рівняння і порівняємо його з точним. Зобразивши розв'язок рівняння (8.2) у вигляді (2.66)-(2.70) і підставивши ці вирази у (8.2), визначимо функцію ψ_0

$$\psi_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{x^5}}. \tag{8.4}$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (8.2) у вигляді

$$U_H(x,\varepsilon) = \exp\left(\int_a^x \delta_0 \psi_0 dx\right). \tag{8.5}$$

Відхил рівняння (8.2) буде мати вигляд

$$R = \varepsilon^4 \left(\delta_0^4 x^{-5} - \frac{15}{2}\delta_0^3 x^{-\frac{19}{4}} + \frac{255}{16}\delta_0^2 x^{-\frac{9}{2}} - \frac{585}{64}\delta_0 x^{-\frac{17}{4}}\right) - x^{-5}. \tag{8.6}$$

Застосовуючи критерій ортогональності Гальоркіна до цього відхилу, дістанемо рівняння для визначення невідомого δ_0

$$k_0\delta_0^4 + k_1\delta_0^3 + k_2\delta_0^2 + k_3\delta_0 + k_4 = 0, \tag{8.7}$$

де

$$k_0 = -\frac{4}{21}\left(b^{-21/4} - a^{-21/4}\right); \qquad k_1 = \frac{3}{2}\left(b^{-5} - a^{-5}\right);$$

$$k_2 = -\frac{255}{76}\left(b^{-19/4} - a^{-19/4}\right); \qquad k_3 = \frac{65}{32}\left(b^{-9/2} - a^{-9/2}\right);$$

$$k_4 = \frac{4}{21\varepsilon^4}\left(b^{-21/4} - a^{-21/4}\right).$$

Розв’язавши алгебраїчне рівняння четвертого порядку (8.7) і підставивши знайдені значення у (8.5), дістанемо гібридний розв’язок рівняння (8.2)

$$U_H = C_1 \exp\left(\int_a^x \delta_{01} x^{-5/4} dx\right) + C_2 \exp\left(\int_a^x \delta_{02} x^{-5/4} dx\right) +$$
$$+C_3 \exp\left(\int_a^x \delta_{03} x^{-5/4} dx\right) + C_4 \exp\left(\int_a^x \delta_{04} x^{-5/4} dx\right). \quad (8.8)$$

8.2 Зіставлення наближених результатів з точним розв’язком

Результати зіставлення наближень, здобутих з використанням гібридного підходу і методу фазних інтегралів, з точним розв’язком для малих і великих значень параметра ε наведені на рис. 8.1 і рис. 8.2.

На рис. 8.1 порівняння проводиться для $\varepsilon = 10$. Для розрахунку були взяті такі крайові умови

$$U(1) = 1, \quad U(2) = 5, \quad U'(1) = 1, \quad U'(2) = 1. \quad (8.9)$$

Як видно, гібридне наближення повністю повторює характер точного розв’язку. Наближення за методом ВКБ дає значу похибку.

На рис. 8.2 результати порівнюються при $\varepsilon = 0,5$. Для цього розрахунку були взяті такі крайові умови

$$U(1) = \varepsilon, \quad U(2) = \varepsilon, \quad U'(1) = 5, \quad U'(2) = -5 \quad (8.10)$$

Гібридний підхід і в цьому випадку дозволяє дістати вельми точний наближений розв’язок рівняння (8.2). Розв’язок за методом фазних інтегралів в цьому випадку є менш точним.

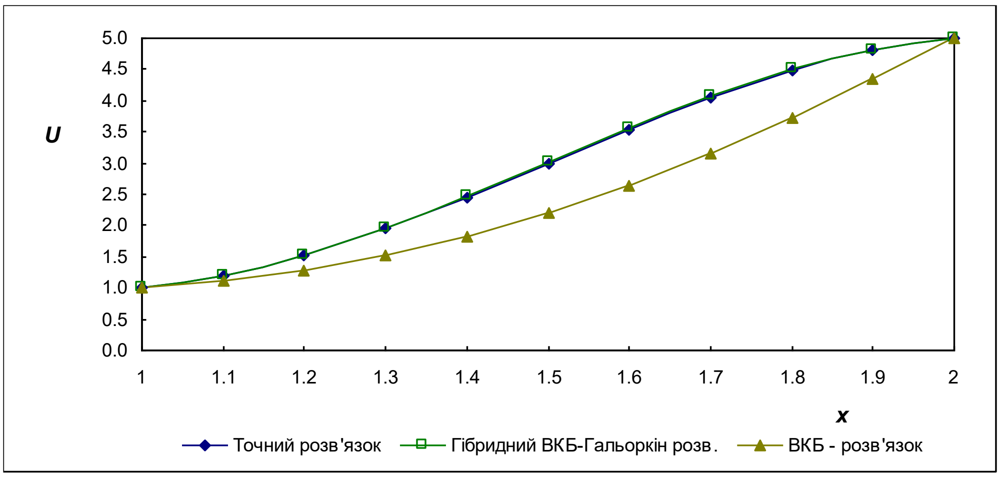

Рисунок 8.1 – Зіставлення наближених результатів з точним розв’язком рівняння при $\varepsilon = 10$

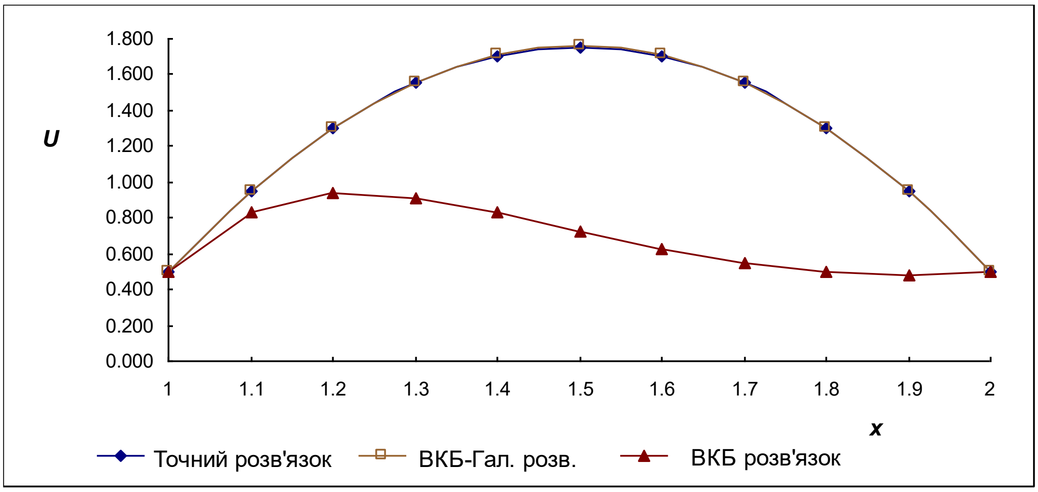

Рисунок 8.2 – Зіставлення наближених результатів з точним розв’язком рівняння при $\varepsilon = 0{,}5$

8.3 Висновки

Таким чином, одержаний гібридний ВКБ-Гальоркін розв’язок диференціального рівняння четвертого порядку (8.2), який має точний розв’язок в елементарних функціях. Зіставлення здобутих результатів показало достатньо високу точність запропонованого методу для одержання наближених аналітичних розв’язків даного класу диференціальних рівнянь сингулярного типу із змінними коефіцієнтами.

Тема 9 ГІБРИДНИЙ ВКБ-ГАЛЬОРКІН РОЗВ’ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СПЕЦІАЛЬНОГО ТИПУ ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Дістанемо гібридний ВКБ-Гальоркін розв’язок диференціального рівняння сингулярного типу, яке має точний розв’язок в спеціальних функціях, коли коефіцієнти рівняння мають певний вигляд.

Розглядається рівняння

$$\varepsilon^4\left(U^{(4)}+\frac{A_0}{x}U'''+\frac{A_1}{x^2}U''+\frac{A_2}{x^3}U'\right)-\left(1-\frac{A_3}{x^4}\right)U=0, \tag{9.1}$$

де

$$A_0=2-4\alpha\,;\qquad A_1=6\alpha^2-2\nu^2-1;$$
$$A_2=\left[2(\nu^2-\alpha^2)-(2\alpha-1)\right](2\alpha+1);$$
$$A_3=(\alpha^2-\nu^2)(\alpha^2+4\alpha+4-\nu^2);$$

α, ν – деякі параметри.

Точний розв’язок цього рівняння з довільними крайовими умовами записується в такому вигляді [118]

$$U=x^{\alpha}C_1J_{\nu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+C_2Y_{\nu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+C_3I_{\nu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+C_4K_{\nu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{9.2}$$

Для побудови гібридного розв’язку рівняння (9.1) зобразимо спочатку розв’язок у методу фазних інтегралів. Підставивши вирази за методом фазних інтегралів в (9.1), визначимо функцію ψ_0

$$\psi_0=\sqrt[4]{1-\frac{A_3}{x^4}}. \tag{9.3}$$

Будемо шукати розв’язок рівняння (9.1) у вигляді запропонованого гібридного підходу

$$U_H(x,\varepsilon)=\exp\left(\int_a^x \delta_0\psi_0 dx\right), \tag{9.4}$$

відхил рівняння (9.1) запишеться таким чином

$$R=\varepsilon^4\left(\delta_0^4\psi_0^4+6\delta_0^3\psi_0^2\psi_0'+4\delta_0^2\psi_0\psi_0''+3\delta_0^2\left(\psi_0'\right)^2+\delta_0\psi_0'''\right)+$$
$$+\varepsilon^4\frac{A_0}{x}\left(\delta_0^3\psi_0^3+3\delta_0^2\psi_0\psi_0'+\delta_0\psi_0''\right)+\varepsilon^4\frac{A_1}{x^2}\left(\delta_0^2\psi_0^2+\delta_0\psi_0'\right)+$$
$$+\varepsilon^4\frac{A_2}{x^3}\delta_0\psi_0-\left(1-\frac{A_3}{x^4}\right). \tag{9.5}$$

Застосовуючи критерій ортогональності Гальоркіна до відхилу (9.5), дістанемо рівняння для визначення невідомого δ_0. Розв’язавши алгебраїчне рівняння четвертого порядку і підставивши здобуті значення в (9.3), дістанемо гібридний розв’язок рівняння (9.1)

$$U_H = C_1 \exp\left(\int_a^x \delta_{01}\psi_0 dx\right) + C_2 \exp\left(\int_a^x \delta_{02}\psi_0 dx\right) + C_3 \exp\left(\int_a^x \delta_{03}\psi_0 dx\right) +$$

$$+C_4 \exp\left(\int_a^x \delta_{04}\psi_0 dx\right). \qquad (9.6)$$

9.1 Порівняння розв'язків для великих і малих значень параметра асимптотичного розвинення ε з точним розв'язком

Результати порівняння розв'язків для великих і малих значень параметра ε, здобутих з використанням гібридного підходу та методу ВКБ, з точним розв'язком наведені на рис. 9.1-9.2. Розрахунки проводились для таких крайових умов

$$U(1)=5, \quad U(2)=5, \quad U'(1)=10, \quad U'(2)=-10. \qquad (9.7)$$

Проведемо зіставлення для великих значень параметра ε. Як видно на рис. 9.1, для $\varepsilon=100$ гібридне наближення досить точно повторює характер розв'язку рівняння (9.1). Результати, здобуті з використанням методу фазних інтегралів є менш точними.

На рис. 9.2 наведене зіставлення результатів, коли $\varepsilon<1$. Як видно на графіку, для $\varepsilon=0,333$ точність гібридного підходу вища, ніж точність методу фазних інтегралів на всьому відрізку зміни x.

Таким чином, на прикладі лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку, які мають точний розв'язок, показана ефективність гібридного ВКБ-Гальоркін методу, який дозволяє наближувати розв'язки рівнянь при різних значеннях параметра ε.

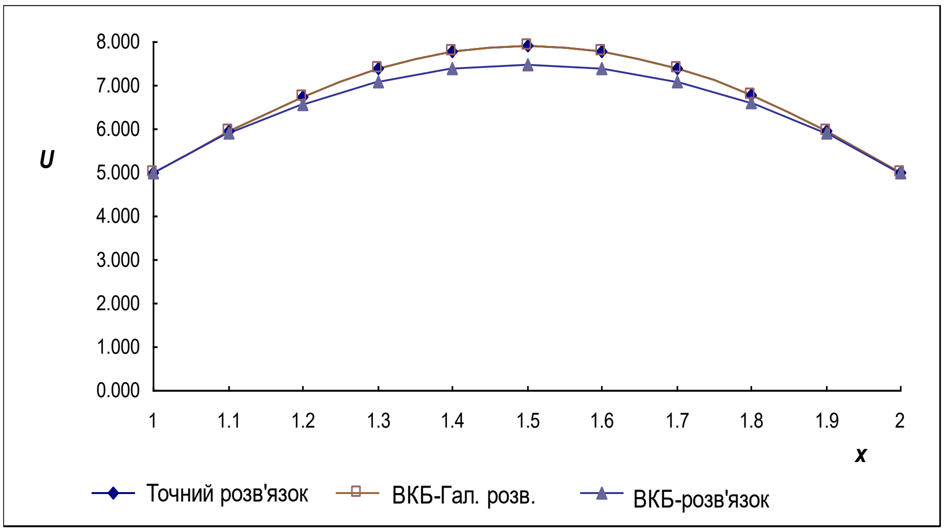

Рисунок 9.1 – Зіставлення наближених результатів з точним розв'язком рівняння при $\varepsilon=100$

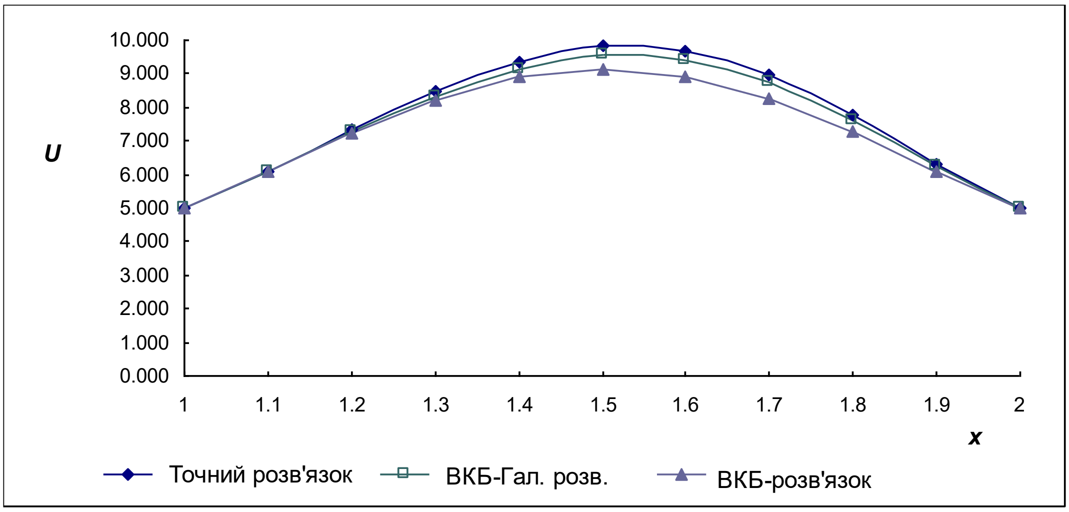

Рисунок 9.2 – Зіставлення наближених результатів з точним розв’язком рівняння при $\varepsilon = 0{,}333$

9.2 Висновки

Підводячи підсумок проведеного зіставлення здобутих результатів для диференціальних рівнянь другого і четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами та параметром при старшій похідній, які мають точний розв’язок, можемо відзначити, що запропонований гібридний ВКБ-Гальоркін метод має високу точність на широкому інтервалі зміни параметра, дозволяючи таким чином діставати єдиний розв’язок при різних значеннях ε.

Крім того, при розв’язанні диференціальних рівнянь четвертого порядку подальше використання гібридного підходу дозволяє значно спростити пошук координатних функцій в методі фазних інтегралів.

Тема 10 АСИМПТОТИЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ ВКБ-ВАРІАЦІЙНОГО МЕТОДУ

Запропонований новий підхід до розв'язку крайових задач механіки, які описуються лінійними диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами й параметром при старших похідних – гібридний ВКБ-варіаційний підхід. Підхід припускає спільне використання методу фазових інтегралів (ВКБ-наближень) і достатньої умови існування екстремуму функціонала, що реалізує рівняння задачі. Застосування підходу дозволяє будувати наближені аналітичні розв'язки задач із високим ступенем на широкому інтервалі зміни параметра.

10.1 Вступ

Диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами крайових задач, зокрема задач механіки, вдається вирішити аналітично лише в окремих випадках. У зв'язку з чим виникає необхідність їх наближеного розв'язання.

Серед наближених підходів, що одержали розвитку у наш час, нарівні з чисельними методами значне місце займають аналітичні підходи: прямі варіаційні методи та неваріаційні (Бубнова-Галеркина, збурювань).

Якщо диференціальне рівняння задачі містить безрозмірний параметр ε *(малий або великий), наближений розв'язок рівняння зручно шукати у вигляді асимптотичного розвинення в околі одного чи більше спеціальних значень параметра. Знайдені в такий спосіб розв'язки локальні по параметру збурювання* ε*, тобто досягають задовільної точності на вузькому інтервалі зміни параметра. Тому перспективна задача асимптотичної математики полягає у відшуканні засобів, а точніше процедур, які дозволяють поліпшувати наближені розв'язки, побудовані за допомогою класичних асимптотичних методів, розширюючи таким чином область їх ефективного застосування.*

Можна назвати ряд підходів (в літературі вони дістали назву гібридних), які базуються на ідеї побудови «уточнюючого» розв'язку, в основі якого лежить послідовність координатних функцій асимптотичного розвинення і невідомі параметри. Якщо спеціальним способом визначити параметри, то «уточнюючий» гібридний розв'язок вихідного рівняння добре узгоджується з «точним» розв'язком на широкому інтервалі зміни параметра збурювання задачі. До гібридних підходів відносяться, наприклад, підходи збурювань-Гальоркіна і ВКБ-Гальоркіна, який досить детально обговорювався на попередніх лекціях. Окреме місце серед процедур, що дозволяє усувати нерівномірність асимптотичних розвинень займає апроксимація Паде [3].

10.2 Основна ідея гібридного ВКБ-варіаційного підходу

Обговорюється ідея поєднання прийомів прямих варіаційних та неваріаційних методів. Запропоновано підхід до розв'язання крайових задач механіки, що описуються лінійними диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами і параметром при старшій похідній (гібридний ВКБ-варіаційний підхід), який дозволяє будувати наближений аналітичний розв'язок задачі високого ступеню точності. Підхід припускає спільне використання методу фазних інтегралів (ВКБ-наближень) [4] і достатньої умови існування екстремуму функціонала, який реалізує рівняння крайової задачі.

Так, на першому етапі наближений аналітичний розв'язок крайової задачі визначається за допомогою методу фазних інтегралів. На основі знайденої асимптотичної послідовності функцій ВКБ-розвинення будується новий «уточнюючий» розв'язок. На другому етапі невідомі параметри «уточнюючого» гібридного розв'язку визначаються при дослідженні на екстремум функції кінцевого числа змінних, у яку перетворюється вихідний функціонал при підстановці в нього гібридного розв'язку.

Розв'язується крайова задача, яка описується лінійним диференціальним рівнянням порядку n зі змінними коефіцієнтами і безрозмірним параметром збурення ε

$$\varepsilon^n\left[y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+p_1(x)y'\right]+q(x,\varepsilon)y=0, \qquad (10.1)$$

де функція $q(x,\varepsilon)\neq 0$ на інтервалі $x\in[a;b]$ та граничними умовами

$$\begin{cases} y(a)=A_0, & y'(a)=A_1, & \dots & y^{n/2-1}(a)=A_{n/2-1}, \\ y(b)=B_0, & y'(b)=B_1, & \dots & y^{n/2-1}(b)=B_{n/2-1}. \end{cases} \qquad (10.2)$$

До рівнянь вигляду (10.1) може бути зведена значна кількість задач статичного і динамічного деформування неоднорідних тонкостінних конструкцій. Безрозмірний параметр ε виникає в рівнянні задачі природно при введенні безрозмірних змінних, представляючи собою, наприклад, власну частоту коливань, відношення найменшого до найбільшого лінійних розмірів конструкції, і т.п. Малими параметрами в теорії оболонок можуть виступати такі величини, як відношення товщини оболонки до радіуса, відношення нормального прогину до радіуса, відношення згінних жорсткостей конструктивно-ортотропної оболонки.

Метод фазних інтегралів (ВКБ-наближень) є ефективним засобом побудови наближених розв'язків рівнянь зазначеного типу. Відповідно до методу розв'язок рівняння (10.1) шукається у вигляді формального розвинення:

$$y=\exp\int\sum_{j=0}\varepsilon^{j-1}\psi_j\ dx, \qquad (10.3)$$

де $\{\psi_j\}$ – послідовність функцій, члени якої можна визначити після підстановки розвинення (10.3) у вихідне рівняння (10.1) та подальшого розв'язання рекурентної системи рівнянь відносно $\{\psi_j\}$.

Треба відзначити, що у випадку рівнянь вищих порядків визначення членів $\{\psi_j\}$, $j>1$ розвинення (10.3) є досить трудомістким. Тому в прикладних задачах звичайно обмежуються визначенням нульового і першого членів ВКБ-розвинення (10.3), що при малих ε забезпечує задовільну точність побудованого на основі розвинення (10.3) ВКБ-розв'язку рівняння (10.1).

Тут виникають, по меншій мірі, два важливих питання, які виникають при розв'язанні задачі методом ВКБ-наближень:

1) область ефективного застосування отриманих ВКБ-роз'язків за параметром ε;

2) як поліпшити ВКБ-розв'язки, якщо ε перестає бути малим.

Згідно з роботою [5]: «Якщо при $\varepsilon \to 0$ має місце змістовна асимптотика, тоді при $\varepsilon \to \infty$ також можна одержати деякий розумний асимптотичний процес». Отже, спроба відповісти на поставлені питання у сукупності із даним принципом саме і наводять на ідею гібридного асимптотичного підходу, який запропоновано у даній роботі.

Наведемо методику поліпшення (або «уточнення») розв'язків крайової задачі (10.1), (10.2), що побудовані на основі використання методу ВКБ-наближень.

Формальне «уточнююче» розвинення розв'язку задачі (10.1), (10.2) (назвемо його гібридним) задамо у вигляді

$$\bar{y} = \exp \int \sum_{j=0}^{N} \delta_j \psi_j \; dx, \tag{10.4}$$

де $\{\psi_j\}$ – знайдені $N+1$ «координатних» функцій розвинення (10.3), а $\{\delta_j\}$ невідомі параметри, що підлягають визначенню. Вони мають бути саме такими, що розв'язок $\bar{y}_H(x,\varepsilon,\delta_0,...,\delta_N)$, побудований на основі розвинення (10.4), «якнайближче відповідав би точному розв'язку вихідної задачі». Сформулюємо принцип визначення параметрів $\{\delta_j\}$, $j = 0,..,N$ гібридного розв'язку.

В основі цього принципу лежить ідея заміни вихідної крайової задачі (10.1), (10.2) варіаційною задачею про екстремум функціонала, для якого рівняння (10.1) є в загальному випадку рівнянням Ейлера-Пуассона.

Отже, якщо функціонал $V[y(x),\varepsilon]$ є функціоналом, дослідження якого на екстремум реалізує рівняння (10.1), а гібридний розв'язок $\bar{y}_H(x,\varepsilon,\delta_0,...,\delta_N)$ є розв'язком крайової задачі (10.1), (10.2), то при будь-яких невідомих значеннях $\delta_0,\delta_1,...,\delta_N$ розв'язок $\bar{y}_H(x,\varepsilon,\delta_0,...,\delta_N)$ потрапляє до N-параметричного сімейства припустимих функцій варіаційної задачі, тобто функцій, на яких функціонал $V[y(x),\varepsilon]$ може досягати екстремуму.

При підстановці $\bar{y}_H(x,\varepsilon,\delta_0,...,\delta_N)$ у функціонал $V[y(x),\varepsilon]$, останній стає функцією N змінних

$$V\left[\bar{y}_H\left(x,\varepsilon,\delta_0,...,\delta_N\right),\, \varepsilon\right] = \phi\left(\delta_0,...,\delta_N\right). \tag{10.5}$$

Дослідження на екстремум функціонала $V[y(x),\varepsilon]$ перетворюється на дослідження екстремуму функції $\phi(\delta_0,...,\delta_N)$ (10.5). Необхідна умова існування екстремуму функціонала $\delta V[y,\varepsilon] = 0$, таким чином, еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial \delta_0} = 0, \quad \dfrac{\partial \phi}{\partial \delta_1} = 0, \quad ... \quad \dfrac{\partial \phi}{\partial \delta_N} = 0. \end{cases} \tag{10.6}$$

Розв'язавши систему (10.6), можна одержати набір $\delta_0^*, \delta_1^*, ..., \delta_N^*$, при якому на функції $\bar{y}_H\left(x, \varepsilon, \delta_0^*, \delta_1^*, ..., \delta_N^*\right)$ досягається екстремум функціонала $V[y(x), \varepsilon]$. Сама функція $\bar{y}_H\left(x, \varepsilon, \delta_0^*, \delta_1^*, ..., \delta_N^*\right)$ при цьому буде шуканим гібридним розв'язком крайової задачі (10.1), (10.2), який збігається із точним розв'язком незалежно від величини параметру ε.

Наведений ВКБ-варіаційний підхід далі буде застосовано до побудови наближених аналітичних розв'язків крайових задач, які описуються рівнянням Ері та рівняннями Беселя другого порядку з метою показати ефективність підходу. Згадані рівняння, являючи собою рівняння із змінними коефіцієнтами, мають точні аналітичні розв'язки. Зіставлення наближених розв'язків згаданих рівнянь, знайдених за допомогою ВКБ-варіаційного підходу, із точними розв'язками дають найбільшу упевненість в правильності здобутих результатів.

10.3 Приклади застосування підходу

Розглянемо рівняння Ері:

$$\varepsilon^2 y'' - xy = 0, \tag{10.7}$$

де ε початково передбачається малим безрозмірним параметром.

Граничні умови для рівняння (7) приймемо такими:

$$y(a) = A \text{ і } y(b) = B, \tag{10.8}$$

де $a < b < 0$. Величини a й b обрані від'ємними, оскільки вигляд точних розв'язків рівняння (10.7) для області $x < 0$ (осциляція) з погляду їхнього порівняння з отриманими надалі наближеними розв'язками здається більш цікавим, ніж розв'язків для області $x > 0$ (експонентний зріст або спад).

На першому етапі побудуємо наближений ВКБ-розв'язок рівняння (10.7). Двочленне ВКБ-розвинення має вигляд

$$y = \exp\int(\varepsilon^{-1}\psi_0 + \psi_1)dx. \tag{10.9}$$

Підставивши (10.9) у вихідне рівняння (10.7) і зібравши коефіцієнти при однакових ступенях ε, одержимо

для порядку ε^0:

$$\psi_0^2 - x = 0, \tag{10.10}$$

для порядку ε^1:

$$2\psi_0\psi_1 + \psi_0' = 0. \tag{10.11}$$

З рівнянь (10.10), (10.11) знайдемо

$$\psi_0 = \begin{cases} \pm i(-x)^{1/2}, & x < 0, \\ \pm x^{1/2}, & x > 0, \end{cases} \tag{10.12}$$

та

$$\psi_1 = -\frac{\psi_0'}{2\psi_0} = \begin{cases} -\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\ln(-x), & x<0, \\ -\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\ln x, & x>0. \end{cases} \tag{10.13}$$

На основі (10.9), (10.12) і (10.13) загальний ВКБ-розв'язок рівняння Ері (10.7) в області $x<0$ має вигляд:

$$y_{WKB}(x,\varepsilon) = (-x)^{-1/4}\left[c_1\cos\frac{2}{3}\varepsilon^{-1}(-x)^{3/2} + c_2\sin\frac{2}{3}\varepsilon^{-1}(-x)^{3/2}\right], \tag{10.14}$$

де c_1, c_2 – довільні постійні, що визначаються з граничних умов (10.8).

Побудуємо гібридний ВКБ-варіаційний розв'язок, заснований на розвиненні вигляду

$$\bar{y} = \exp\int(\delta_0\psi_0 + \delta_1\psi_1)dx, \tag{10.15}$$

де ψ_0 і ψ_1 – функції, визначені формулами (12) і (13), а δ_0 і δ_1 – невідомі параметри.

Згідно з (10.15) і (10.12), (10.13) загальний гібридний розв'язок для області $x<0$ буде мати вигляд

$$\bar{y}_H(x,\varepsilon) = (-x)^{-\delta_1/4}\left[a_1\cos\frac{2}{3}\delta_0(-x)^{3/2} + a_2\sin\frac{2}{3}\delta_0(-x)^{3/2}\right], \tag{10.16}$$

де a_1, a_2 – довільні постійні.

Розв'язок (10.16) необхідно підкорити граничним умовам (10.8), для того, щоб функція $\bar{y}_H$ потрапила до сімейства припустимих функцій варіаційної задачі для функціонала

$$V[y,\varepsilon] = -\frac{1}{2}\int_a^b\left[\varepsilon^2(y')^2 + xy^2\right]dx, \tag{10.17}$$

дослідження якого на екстремум реалізує рівняння (10.7). Підстановка гібридного розв'язку (10.16) при визначених $a_1 = a_1(\delta_0,\delta_1)$ і $a_2 = a_2(\delta_0,\delta_1)$ до функціоналу (10.17) перетворює його на функцію параметрів δ_0,δ_1:

$$V[\bar{y}_H,\varepsilon] = \phi(\delta_0,\delta_1).$$

Дослідження функції $\phi(\delta_0,\delta_1)$ на екстремум приводить до розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases}\frac{\partial\phi}{\partial\delta_0} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\delta_1} = 0.\end{cases} \tag{10.18}$$

10.4 Візуалізація здобутих розв'язків

Так, наприклад, при граничних умовах $y(-1)=2$ і $y(-0.3)=1$ та значенні $\varepsilon = 0.3$ із системи (10.18) можна знайти $(\delta_0,\delta_1) = (\pm 3.532, 1.242)$. На рисунках 10.1, 10.2 для даного випадку показана графічна реалізація функції $\varphi(\delta_0,\delta_1)$, яка досягає свого екстремуму (максимуму) у точці $(\delta_0,\delta_1) = (\pm 3.532, 1.242)$.

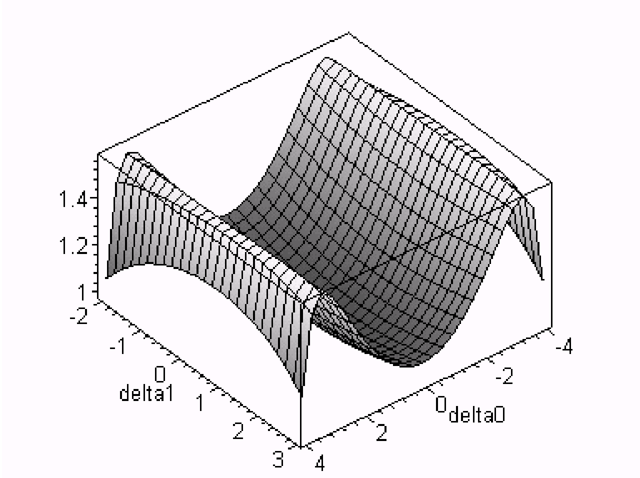

Рис. 10.1

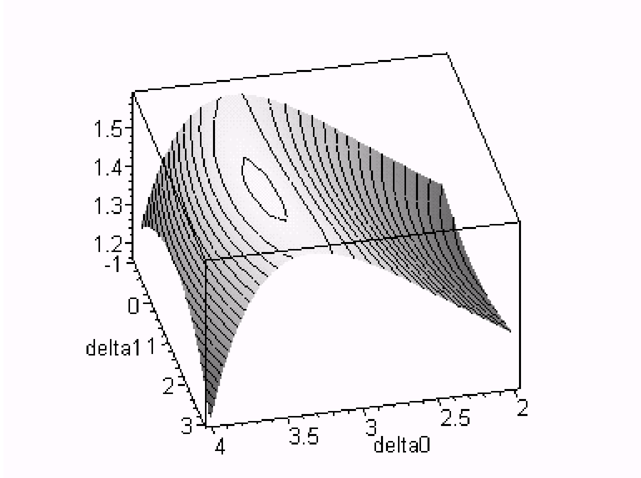

Рис.10.2

Взагалі, поверхня $\phi(\delta_0,\delta_1)$ симетрична відносно початку координат (рис. 10.2) і з умов (10.18) визначається пара значень $\{\delta_0\}$, що симетричні відносно нуля. Як виявляється, знак δ_0 не впливає на остаточний вигляд гібридного розв'язку.

Нижче побудовані графіки розв'язків рівняння Ері: точного (круги), ВКБ-розв'язку (10.14) (пунктир) і гібридного розв'язку (10.16) (неперервна лінія) при значеннях $\varepsilon = 0.1$; 0.2; 0.3 і граничних умовах $y(-1) = 2$, $y(-0.3) = 1$ (рис. 10.3-10.5), значеннях $\varepsilon = 0.5$ і умовах $y(-1) = 2$, $y(-0.2) = 4$ (рис. 10.6), $\varepsilon = 1$ і $y(-1) = y(-0.2) = 2$ (рис. 10.7), $\varepsilon = 3$ і $y(-1) = y(-0.2) = -2$ (рис. 10.8). Гібридний розв'язок збігається із точним розв'язком, метод ВКБ дає помітну похибку, що свідчить про зменшення його точності з ростом параметра.

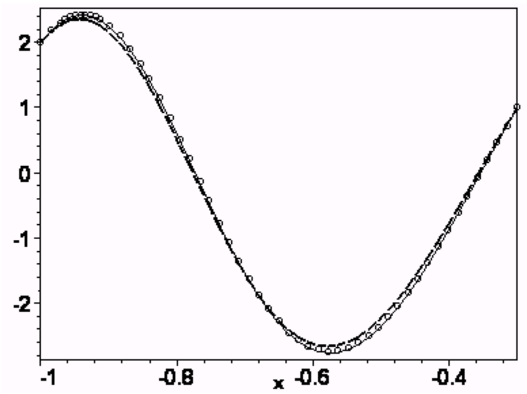

Рис. 10.3

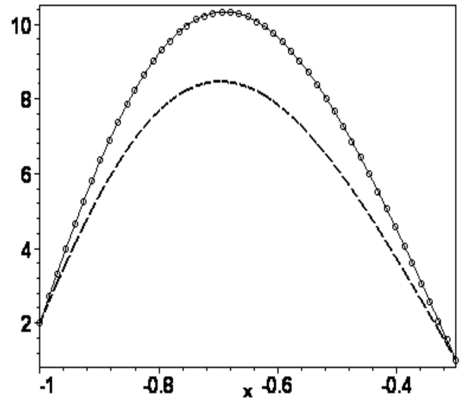

Рис.10.4

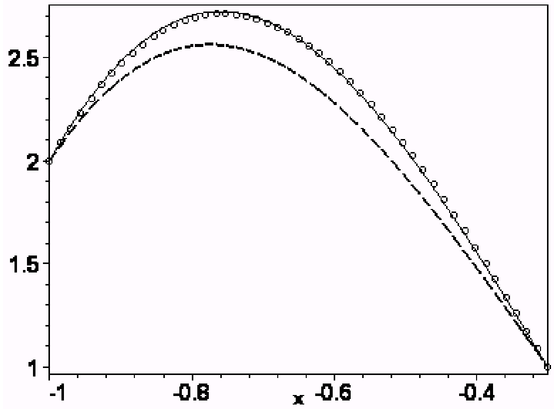

Рис. 10.5

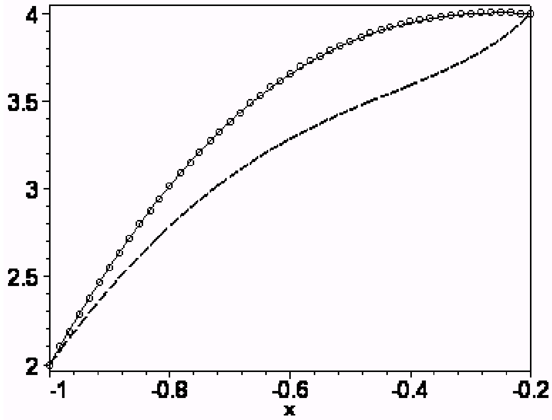

Рис. 10.6

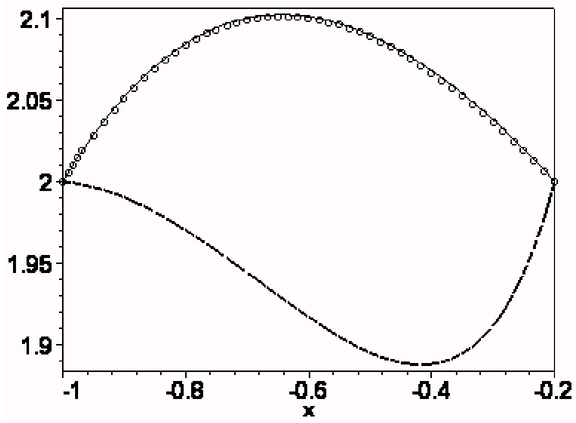

Рис. 10.7

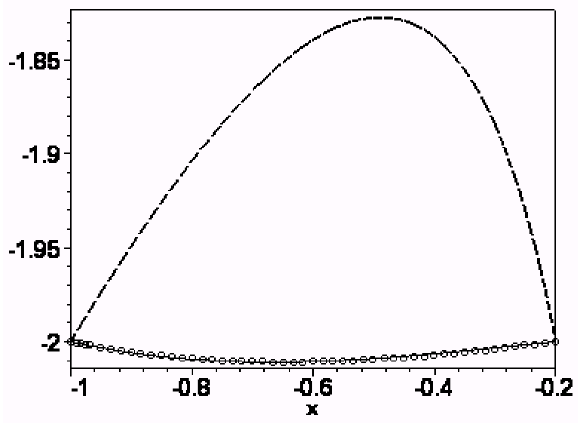

Рис. 10.8

На основі наведеного аналізу результатів можна відзначити, що застосування методу ВКБ до розв'язання рівняння Ері (10.7) з використанням двох членів розвинення дає прийнятні результати лише для малих значень параметра ε. Між тим, гібридний ВКБ-варіаційний підхід дозволяє одержати наближений аналітичний розв'язок рівняння (10.7), який погоджується з точним розв'язком при різних значеннях параметра збурювання ε, як великих, так і малих. Гібридний розв'язок отримано на основі двочленного розвинення.

10.5 Застосування підходу до розв'язку рівняння Беселя

Розглянемо рівняння Беселя у формі:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\lambda^2 - \frac{k^2}{x^2}\right)y = 0\,, \qquad (10.19)$$

де λ – параметр, k – порядок рівняння.

До рівняння (10.19) або його модифікацій зводяться деякі задачі механіки, наприклад, про напружено-деформований стан анізотропних оболонок обертання та власні коливання круглої пластини. Рівняння (10.19) має точний розв'язок в спеціальних функціях.

Зробимо заміну $\lambda^2 = 1/\varepsilon^2$ у рівнянні (10.19) у вигляді, що зручно для побудови ВКБ-розв'язку:

$$\varepsilon^2\left[y''+\frac{1}{x}y'\right]+\left(1-\varepsilon^2\frac{k^2}{x^2}\right)y=0, \tag{10.20}$$

де початково припускаємо $\varepsilon<<1$.

Граничні умови для рівняння (10.20) візьмемо у вигляді

$$y(a)=A \quad \text{і} \quad y(b)=B, \tag{10.21}$$

де $0<a<b$.

Для того, щоб функція $1-\varepsilon^2k^2/x^2$ в рівнянні (10.20) на інтервалі $x\in[a,b]$ не мала нулів (а вихідне рівняння, відповідно, точок повороту), необхідно дотримуватися умови $\varepsilon k\in[0,a)\bigcup(b,+\infty)$. Дана умова не порушує спільності міркувань щодо побудови наближеного розв'язку рівняння (10.19), але, як було відзначено, дозволяє в цьому разі не мати справу із рівнянням, що містить точку повороту.

Отже, підстановка двочленного ВКБ-розвинення (10.9) у рівняння (10.20) дозволяє знайти:

$$\psi_0=\begin{cases}\pm\left(\varepsilon^2k^2/x^2-1\right)^{1/2}, & \varepsilon k>b,\\ \pm i\left(1-\varepsilon^2k^2/x^2\right)^{1/2}, & \varepsilon k<a,\end{cases} \tag{10.22}$$

і, відповідно,

$$\psi_1=\frac{-\psi_0'-\frac{1}{x}\psi_0}{2\psi_0}=\begin{cases}-\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\ln\left(\varepsilon^2k^2/x^2-1\right)-\frac{1}{2x}, & \varepsilon k>b,\\ -\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\ln\left(1-\varepsilon^2k^2/x^2\right)-\frac{1}{2x}, & \varepsilon k<a.\end{cases} \tag{10.23}$$

На основі визначених функцій (10.22), (10.23) можна одержати загальний ВКБ-розв'язок рівняння (10.20).

Виконавши необхідні операції для двочленного гібридного розвинення (10.15), побудовано загальний гібридний розв'язок рівняння (10.20). Його необхідно підкорити граничним умовам (10.21) для визначення $d_j=d_j(\delta_0,\delta_1)$ і $g_j=g_j(\delta_0,\delta_1)$, а далі підставити у функціонал

$$V[\overline{y}_H]=\frac{1}{2}\int_a^b\left[\varepsilon^2y'^2-\left(1-\varepsilon^2\frac{k^2}{x^2}\right)y^2\right]xdx=\phi(\delta_0,\delta_1),$$

який реалізує вихідне рівняння (10.20). Дослідження функції $\phi(\delta_0,\delta_1)$ на екстремум дозволяє визначити шукані параметри δ_0,δ_1.

Нижче на рисунках 10.9-10.12 порівнюються результати розв'язання рівняння Беселя (10.20) здобуті з використанням ВКБ (пунктирна лінія) і гібридного ВКБ-варіаційного підходів (неперервна лінія) із точним розв'язком (круги) для відповідних випадків: $k=1,\ \varepsilon=0.1,\ y(0.2)=1, y(1)=2$; $k=2,\ \varepsilon=0.6,\ y(0.3)=1, y(1)=2$; $k=1/7,\ \varepsilon=1,\ y(0.3)=y(1)=-1$, а також $k=1/10,\ \varepsilon=2,\ y(0.3)=y(1)=1$.

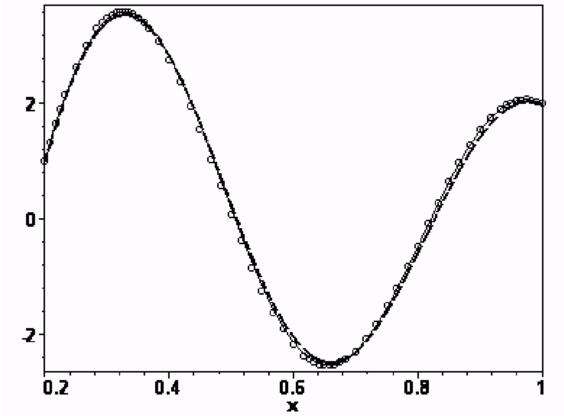

Рис. 10.9

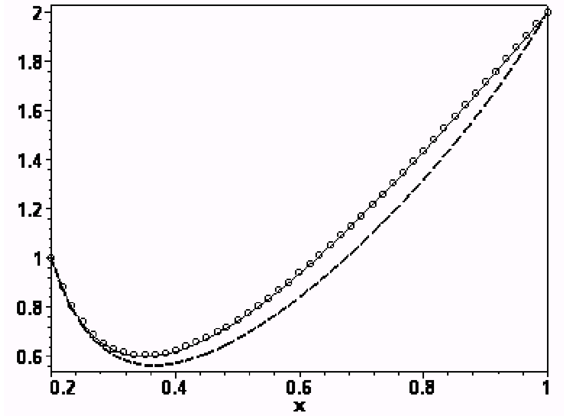

Рис. 10.10

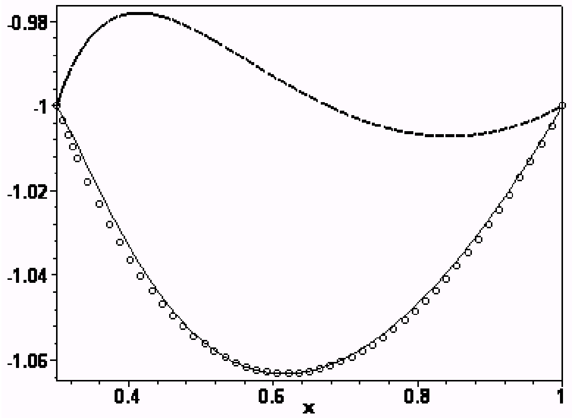

Рис. 10.11

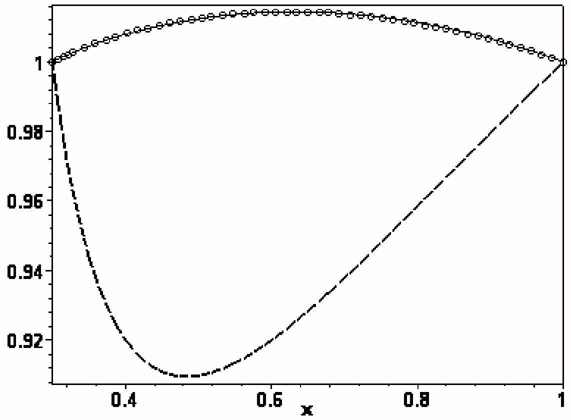

Рис. 10.12

Як можна бачити з графіків, ВКБ-варіаційний підхід дозволяє одержати наближений гібридний розв'язок рівняння Беселя другого порядку, що цілком збігається з точним для тих значень параметра збурювання ε, коли метод ВКБ дає незадовільні результати.

10.6 Висновки

На лекції обговорювалась ідея створення на основі методу фазних інтегралів (ВКБ-наближень) нового асимптотичного підходу до розв'язання крайових задач, зокрема задач механіки неоднорідного середовища, який би був позбавлений основного недоліку метода ВКБ-локальності ВКБ-розв'язків по малому параметру, тобто значної залежності їх точності від величини параметра розвинення. Достатня умова існування екстремуму функціонала, що реалізує рівняння крайової задачі, є процедурою, яка дозволяє поліпшити або «уточнити» наближені ВКБ-розв'зки. Зазначимо, що даний метод може бути для ефективного розв'язання диференціальних рівнянь з точкою повороту відповідних задач механіки.

СПИСОК ПОСИЛАНЬ

1. Gristchak V.Z., Dmitrijeva Ye.M. A Hybrid WKB-Galerkin Method and its Application// Technische Mechanik. 1995. 15, №4. P.281–294.

2. Грищак В.З., Дмитриева Е.М. Гибридный асимптотический метод на основе метода фазовых интегралов и его применение// Математика, физика. Сборник научных трудов, посвященных 10-летию университета. Запорожье: Изд-во Запор. ун-та, 1995. С.28–31.

3. Gristchak V.Z., Dmitrijeva Ye.M. A Hybrid WKB-Galerkin Method and its Using to Applied Mechanics Problems// C. Mehanika deformabilnog tela - C. Mechanics of solid deformable body, Proceedings of the YUCTAM Vrnjacka Banja ‘ 97. Belgrade. 1997. P. 13–16.

4. Грищак В.З., Дмитриева Е.М. Решение некоторых линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с использованием гибридного ВКБ-Галеркин метода // Придніпровський науковий вісник. Машинобудування, природничі та технічні науки. 1997. № 43 (54). С.1-3.

5. Грищак В.З., Дмитриева Е.М. Гибридный асимптотический метод на основе метода фазовых интегралов и его применение// Тези доповідей наукових конференцій викладачів і студентів університету. Запоріжжя. 1995. Частина 1 (Випуск 5). С.70.

6. Gristchak V.Z., Dmitrijeva Ye.M. A Hybrid WKB-Galerkin Method and its Using to Applied Mechanics Problems// Abstracts of the YUCTAM Vrnjacka Banja ‘ 97. Belgrade. 1997. P. 91.

7. Андрианов И. В., Маневич Л.И. Асимптотология: идеи, методы, результаты. М.: АСЛАН, 1994. 160 с.

8. Фещенко С.Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев : Наук. думка, 1966. 252 с.

9. Verhulst F. Perturbation theory from Lagrange to Van der Pol // Nieuw Arch. Wisk. 1984. № 2. P. 428–438.

10. Liouville J. Memoire sur la theorie des differentielles linearies et sur le developpment des fonctions en series. // J. Math. Rure Appl. 1938. Vol. **1**, № 3. P. 561-614.

11. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики / Избранные труды. М.: Наука, 1971. Т. 1. С. 329–744.

12. Schlesinger L. Vorlesungen mber lineare Differential-gleichungen. Leipzig; Berlin: Teubner. 1908. Vol. 12. S. 46.

13. Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. № 9. P. 219–231.

14. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих вопросах теории дифференциальных уравнений и о разложении функций в ряды. Пг., 1917. 308 с.

15. Trjitzinski W. G. Theory of linear differential equations containing a parameter// Acta math. 1936 Vol. 67, № 1. P. 1–50.

16. Пугачев В. С. Об асимптотических представлениях интегралов системы линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр// Мат. сб. Н.С. 1944. Т. 15, №1. С. 13–46.

17. Раппопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев : Изд-во АН УССР, 1954. 286 с.

18. Фещенко С. Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений// Укр. мат. журн. 1955 Т. 7, № 2. С. 167–179.

19. Turritin H. L. Asymptotic expansions of systeme of ordinary lineary differential equations containing a parameter // Mathematika. 1957. Vol. 1, №2 P. 13–81.

20. Hukuhara M. Sur les points singuliers des equations differentielles lineaires // J. Fac. Sci. Univ. Hokkaido Math. 1934. № 2. P. 13–81.

21. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464с.

22. Чезари А. Асимптотическое поведение и устойчивость решений. М.: Мир, 1964. 477 с.

23.Langer R. E. On the asymptotic solutions of ordinary differential equations with an application to the Bessel functions of large ordes // Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 31. P. 23–64.

24.Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1963. 412 с.

25.Крилов М. М., Боголюбов Н. М. Основні проблеми нелінійної механіки. Київ : Вид-во АН УРСР, 1934. 225 с.

26.Крылов Н. М., Боголюбов М. М. Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937. 364 с.

27.Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 432 с.

28.Митропольський Ю. О., Мосеєнков Б. І., Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи). Київ : Вид-во Київ. Ун-ту, 1961. 122 с.

29.Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 287 с.

30.Лыкова О. Б. Об исследовании решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром на двумерном локальном интегральном многообразии в «нерезонансном» случае // Укр. мат. журн. 1958. 10, № 3. С.239 251.

31.Фодчук В. И. Асимптотические методы нелинейной механики в теории дифференциально-разностных уравнений: Автореф. дис. доктора физ.-мат. наук. Киев, 1972. 23 с.

32.Самойленко А. М. Некоторые вопросы теории периодических и квазипериодических систем: Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. Киев, 1967. 24 с.

33.Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. Киев : Вища школа. Головное изд-во, 1979. 247 с.

34.Коломиец В. Г. Асимптотические методы в теории нелинейных стохастических систем с малым параметром. Киев : Наук. думка, 1977. С. 101–107.

35.Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Киев : Изд-во АН УССР, 1945. 137 с.

36.Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев : Наукова думка, 1971. 440 с.

37.Волосов В. М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений// Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, вып. 6. С. 3–126.

38.Гихман И. И. По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова// Укр. мат. журн. 1952. Т. 4, № 2. С. 215–219.

39.Красносельский М. А., Крейн С. Г. О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. науки. 1955. 10, № 3 С. 147–152.

40.Стрыгин В. В. Метод усреднения высокого порядка для условно периодических систем// Устойчивость и колебания нелин. систем упр.: 3 Междунар. семин. Самара. 1994. С. 56.

41.Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Киев : Изд-во АН УССР, 1960. 76 с.

42.Бирюк Г. И. К вопросу о существовании почти периодических решений нелинейных систем с малым параметром в случае вырождения // Доклады АН УССР. 1954. 97, № 4. С. 577–579.

43.Ковтун И. И. К вопросу об асимптотическом решении одного линейного операторного дифференциального уравнения // Укр. мат. журн. 1962. 14, № 2. С. 205–211.

44.Бреус К. А. О решениях линейных дифференциальных уравнений с быстроменяющимися периодическими коэффициентами// Доклады АН УССР. 1956. Т. 108, № 6. С. 997–1001.

45.Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск: Изд-во АН БССР, 1963. 269 с.

46.Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев : Вища школа, 1974. 472 с.

47.Фещенко С. Ф. Питання теорії звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з повільнозмінними коефіцієнтами // Наук. зап. КДПІ. Фіз.-мат. сер. 1948. 6, № 3. С. 74–112.

48.Фещенко С. Ф. Малі коливання системи із скінченим числом ступенів вільності // Наук. зап. КДПІ. Фіз.-мат. сер. 1949. Т. 9, № 4 С. 99–155.

49.Савин Г. Н., Горошко О. А. Динамика нити переменной длины. Киев : Изд-во АН УССР, 1962. 332 с.

50.Савін Г. М., Шевелло В. М., Кужій А. І. Про повздовжні коливання пружно-вязкої нитки змінної довжини з вантажем на кінці (опускання вантажу)// Прикл. Механіка. 1955. Т. 1, № 3. С. 328–334.

51.Далецкий Ю. Л. Об асимптотическом решении одного векторного дифференциального уравнения // Докл. АН СССР. 1963. Т. 92, № 5. С. 881–884.

52.Далецкий Ю. Л. О некоторых уравнениях с замкнутыми операторами // Тр. Киев. политехн. ин-та. 1956. № 19. С. 157–177.

53.Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. О дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. 1950. Т. 2, № 4. С. 71–91.

54.Шкиль Н. И. Асимптотическое поведение линейных систем в случае кратных корней характеристического уравнения // Укр. мат. журн. 1962. 16, № 4. С. 383–392.

55.Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н. Асимптотические методы в дифференциальных интегро-дифференциальных уравнениях. Киев : Вища школа, 1985. 248 с.

56.Старун Н. Н., Шкиль Н. И. Построение асимптотического решения систем линейных дифференциальных уравнений с медленноменяющимися коэффициентами в случае кратных элементарных делителей // Диф. уравнения. 1969. 5, № 6. С. 1002 -1009.

57.Илюхин А. Г. О приведении системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр // Укр. мат. журн. 1961. Т. 13, № 3 С. 46–59.

58.Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сб. Н. С. 1948. 28, № 2. С.193–204.

59.Тихонов А. Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Мат. сб. Н. С. 1950. Т. 27, № 1. С. 147–156.

60.Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры // Мат. сб. Н. С. 1952. Т. 31, № 3. С. 575–586.

61.Градштейн И. С. Линейные уравнения с переменными коэффициентами и малым параметром при части производных // Мат. сб. Н. С. 1950. Т. 27, № 1. С. 47–68.

62.Волосов В. М. К вопросу о дифференциальных уравнениях с малым параметром при части производных // Докл. АН СССР. 1950. 73, № 5. С. 873–876.

63.Задирака К. В. О системе нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при некоторых производных.// Докл. АН СССР. 1956. 113, № 2. С. 256–259.

64.Васильева А. Б. О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры при производных // Мат. сб. Н. С. 1952. С.45-61

65.Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272с.

66.Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. 12, вып. 15. Т. С. 3–122.

67.Щитов И. Н. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных систем // Укр. мат. журн. 1993. Т. 45, № 4. С. 552–560.

68.Нестеров А. В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с кусочно-непрерывным краевым условием // Вестн. МГУ. 1995. Т. 1, № 2. С. 3–7.

69.Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 312 с.

70.Van Dyke M. Nineteenth-century roots of the boundary-layer idea // SIAM Review. 1994. Vol. 36, № 3. P. 415–424.

71.Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.

72.Eckhaus W. Fundamental concepts of matching // SIAM Review. 1994. Vol. 36, № 3. P. 431–439.

73.Олейник О. А., Жижина А. И. О краевой задаче для уравнения $\varepsilon y''=F(x, y, y')$ при малых // Мат. сб. Н. С. 1952. Т. 31, № 3. С. 707–717.

74.Маслов В. П. Асимптотические методы решения псевдо-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987. 408 с.

75.Божко В. А. О периодических решениях системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Изв. вузов. Математика. 1980. №3. С. 80–84.

76.Гребенников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике. М.: Наука, 1971. 432 с.

77.Павлюк І. А. Асимптотичні властивості розв’язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. Київ : Вид-во Київ. ун-ту, 1970. 208 с.

78.Шкиль Н. И. О периодических решениях систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных// Тр. 5 междунар. конф. по нелинейным колебаниям. 1970. №1. С. 623–629.

79.Шкиль Н. И., Мейлиев Т. К. Об асимптотическом представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при произвдной дробного ранга // Докл. АН СССР. 1979. № 3. С. 264–266.

80.Кудин Г. И., Загаецкая Е. А. Метод возмущений в задаче нацеливания лучей в гидроакустическом волноводе со слабо возмущенной нижней границей // Тез. докл. Гродн. гос. ун-та. 1992. С.111–115.

81.Грудцын В. В. К построению алгоритма асимптотической локализации задач рассеяния с некоординатными границами // Асимптот. методы в теории систем. 1992. С. 28–46.

82.Маслов В. П., Мясников В. П., Данилов В. Г. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. М.: Наука, 1987. 85 с.

83.Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 130 с.

84.Andrianov I. V., Kholod E. G. Non-linear free vibration of shallow cylindrical shell by Bolotin’s asymptotic method // J. Sound and Vibr. 1993. Vol. 165, № 1. P. 9–17.

85.Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. М.: Мир, 1965. 238с.

86.Carlini F. Ricerche sulla convergenza della serie che serva alla soluzione del problema di Keplero. Milan, 1817.

87.Olver F. W. The asymptotic solution of linear differential equatuons of the second order for large values of a parameter and the asymptotic expansion of Bessel functions of a large order // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1954. №247. P. 307–327.

88.Wasow W. Method WKB // Communs Pure and Appl. Math. 1962. № 2. P. 173–187.

89.Моисеев Н. Н. О приближенном интегрировании линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Ученые записки Рост. ун-та. 1953. №3. С. 56–97.

90.Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.

91.Steele C. R. Application of the WKB Method in Solid Mechanics// Mechanics today. 1976. №3. P. 243–295.

92.Steel C. R. Asymptotic analysis and computation for shells // Analyt. and comput. models of shells. 1989. № 3. P. 12–35.

93.Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // Усп. матем. наук. 1952. №7. С. 45–52.

94.Langer R. The asymptotic solution of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to turning point // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 67. P. 45–62.

95.Chen G., Zhou J. Vibration and Damping in Distributed System. Texas A & M Univer., 1993. 364 p.

96.Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.

97.Gristchak V.Z. The WKB method for the turning-point problem of the differential equations of the fourth order with variable coefficients // Rep. NTSU, Denton, Texas, USA. 1985. P. 1–28.

98.Gristchak V.Z., Golovan O. A. Asymptotic solution for the nonlinear dinamic problem of mechanical systems with time dependent parameters // Technische Mechanic. 1995. № 3. P. 229–236.

99.Кабак В. Н. Приближенное аналитическое решение задач о вынужденных колебаниях механических систем с параметрами, зависящими от времени // Тези доповідей наукових конференцій викладачів і студентів університету. Запоріжжя. 1995. Частина 1 (Випуск 5). С.71.

100.Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М.: Наука, 1966. 395 с.

101.Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 108 с.

102.Евкин А. Ю., Коровайцев А. В., Петроковский С. А. Неявные процедуры расчета осесимметричного деформирования оболочек вращения при сильном изгибе // Пробл. мат. в зад. физ. и техн. 1992. С. 63–68.

103.Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР, 1963. № 3. С. 501–504.

104.Geer J.F., Andersen C.M. Investigating a hybrid perturbation-Galerkin technique using computer algebra: Rep. NASA, Hempton, Virginia, USA, 1988. 25 p.

105.Geer J.F., Andersen C.M. A hybrid perturbation-Galerkin technique with combines multiple expansions: Rep. NASA, Hempton, Virginia, USA, 1989. 36 p.

106.Geer J.F., Andersen C.M. A hybrid perturbation-Galerkin technique with applications to slender body theory// SIAM J. Appl. Math. 1989. № 2.P. 344–361.

107.Geer J.F., Andersen C.M. A hybrid perturbation-Galerkin method for differential equations containing a parameter: Rep. NASA, Hempton, Virginia, USA, 1989. 28 p.

108.Geer J.F., Andersen C.M. A hybrid perturbation-Galerkin technique for partial differential equations: Rep. NASA, Hempton, Virginia, USA, 1990. 25 p.

109.Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.

110.Parvu P. Galerkin method for integration of the movement equations of an airplane // Politehn., Bucharest. 1993. Vol. 55, № 3–4. C.200–211.

111.Радциг Ю. Ю., Сочилин А. В., Эминов С. И. Решение интегрального уравнения вибратора методом Галеркина. Новгород: Изд-во политехн. ин-та, 1992. 17 с.

112.Закатанов Л. Т. Модифицированный ме–тод Галеркина-Петрова для моделирования полупроводниковых приборов на основе метода конечных элементов // Мат. моделирование. 1992. Т. 4, № 5, С. 85–98.

113.Noor A.K., Andersen C.M., Peters J.M. Global-local approach for nonlinear shell analysis// Proc. 7th ASCE Conf. on Electronic Comp., Washington U., St. Louis, USA, 1979. P. 634–657.

114.Noor A.K., Andersen C.M., Peters J.M. Redused basis technique for collapse analysis of shells // AIAA J. 1981. № 19. P. 393–397.

115.Fink J.P., Rheinbolt W.C. On the error behavior of the redused basis technique for nonlinear finite element approximations // ZAMM. 1983. № 63. P. 21–28.

116.Молчанов И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения. Київ : Наукова думка, 1988. 344с.

117.Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ : Вища школа, 1994. 455 с.

118.Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 401 с.

119.Дьяконов В. Система MathCAD. М.: Радио и связь.,1993. 56 с.

120.Григоренко Я. М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках // Прикл. механика. 1996. 32, № 6. С. 3–39.

121.Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 251 с.

122.Григолюк Э.И. Упругая устойчивость ортотропных слоистых конических и цилиндрических оболочек. М.: Строительство и архитектура, 1955. 20 с.

123.Трапезин И.И. Устойчивость тонкостенной конической оболочки, замкнутой в вершине, нагруженной боковым гидростатическим давлением. М.: Мингиз., 1960. 154 с.

124.Алумяэ Н.А. Об определении состояния равновесия круговой конической оболочки при осесимметричных нагрузках. М.: ПНМ, 1953. 54 с.

125.Грищак В.З. К вопросу об асимптотическом решении некоторых задач устойчивости и колебаний тонкостенных конструкций переменной жесткости // Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск, 1979. С. 84–90.

126.Gristchak V. Z. Biffurcations and postbuckling behavior of vibrating of the nonhomogeneous, nonlinear elastic system with multiple independent bifurcation parametrs: Dep. of Math., Denton, Texas, USA. 1989. P. 821–831.

127. Преображенский И.Н., Грищак В.З. Устойчивость и колебания конических оболочек. М.: Машиностроение, 1986. 240 с.

128.Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.

129.Турчак Л.И. Основы численных методов. М.: Наука, 1987. 318 с.

130.Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ ДО ТЕМИ 10.

1. Geer J., Andersen C. A hybrid perturbation-Galerkin method for differential equations containing a parameter. *Rep. NASA.* Hempton, Virginia, 1989. 28 p.
2. Gristchak V., Dmitrijeva Ye. A hybrid WKB-Galerkin method and its application. *Technische Mechanik*, 1995, № 15, pp. 281-294.
3. Andrianov I.V., Awrejcewicz J. New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation method. *Appl Mech Rev*, 2001, **54**(1). P. 69-92.
4. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. М.: Мир, 1965.
5. Andrianov I. V., Manevitch L. I. Asymptotology: ideas, methods, and applications. Springer Science & Business Media, 2002.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Вербіцький В. В., Реут В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференційних рівнянь : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл., що навч. за спец. "Прикладна математика". Одеса : ОНУ ім. І.І. Мечникова, 2018. 116 с.
2. Лиходєєва Г. В., Пастирєва К. Ю. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно : навчальний посібник. Ч. 2 : Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь. Київ : Центр учбової літератури, 2018. 140 с.
3. Вайсфельд Н. Д., Реут В. В. Рівняння математичної фізики : навч.-метод. посібн. для студ. спец. «Прикладна математика». Одеса : Одеськ. нац.. ун-т ім. І.І. Мечникова, 2018. 194 с. URL: http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/21123/3/Vaisfeld__Mathematiks.pdf
4. Грищак Д. В. Комп’ютерна алгебра у розв’язанні прикладних задач механіки конструкцій зі змінними параметрами: монографія. Херсон: Видавничій дім «Гельветика», 2020. 220с.

5. Gristchak V.Z., Gristchak D.D., Fatieieva Yu.A. Hybrid asymptotic methods. Theory and applications. Zaporizhzhya: Zaporizhzhya National University, 2016. 108 p.

Додаткова:

1. Алексеев Е. Р. Чеснокова О. В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. Москва: НТ Пресс, 2006, 496 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Dyachenko/0030989.djvu
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 208 с. URL: http://math.phys.msu.ru/data/142/ASIMP.PDF
3. Грищак В. З., Гребенюк С. М., Левчук С. А. Методи обчислень: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів освітнього ступеня «бакалавр» напряму підготовки «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 86 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/metodychky/2015/02/0034407.doc
4. Математика и нелинейная механика. Т. 2. Нелинейная механика, 1932—1940. / Н. Н. Боголюбов, Н. М. Крылов. М.: Наука, 2005. 828 с.
5. Математика и нелинейная механика. Т. 3. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. М.: Наука, 2005. 605 с.
6. Математика: методичні вказівки до написання курсових ік валіфікаційних робіт для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра там агістра математичного факультету / Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В., Спиця О. Г., Ткаченко І. Г. Запоріжжя: ЗНУ, 2017. 52 с.
7. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.
8. Преображенский И.Н., Грищак В.З. Устойчивость и колебания конических оболочек. М.: Машиностроение, 1986. 240 с.
9. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
10. Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н. Асимптотические методы в дифференциальных интегро-дифференциальных уравнениях. Киев : Вища школа, 1985. 248 с.
11. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння : навч. посіб. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. реком. МОНУ. Київ : Техніка, 2003. 368 с.
12. Andrianov I. V., Manevitch L. I. Asymptotology: ideas, methods, and applications. Springer Science & Business Media, 2002.

Наукові публікації авторів посібника
за тематикою дисципліни

1. Грищак В.З., Дьяченко Н.Н. Определение областей устойчивости конической оболочки при комбинированном нагружении на базе гибридного асимптотического подхода. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2017, №2. С. 33-46. URL: http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF/Vznu_mat_2017_2_6.pdf
2. Грищак В.З., Грищак Д.Д., Дьяченко Н.Н.Эффективное приближенное аналитическое решение задачи устойчивости трехслойной конической оболочки при комбинированном нагружении. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2018. Т. 61, № 3. С. 63-77 URL: http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/2487
Те саме: Gristchak V. Z., Hryshchak D. D., Dyachenko N. M. Efficient approximate analytic solution for the problem of stability of a three-layer conic shell under combined loading. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. **254**, No. 1. P. 71–88.
3. Дегтяренко П.Г., Грищак В.З., Грищак Д.Д., Дьяченко Н.Н. К проблеме равноустойчивости подкрепленной оболочечной конструкции при комбинированном

нагружении // *Космическая наука и технология.* 2019. Т..25, №6(121). С. 3-14 URL: https://www.mao.kiev.ua/biblio/jscans/knit/2019-25/knit-2019-25-6-01-degtyarenko.pdf
4. Дегтярьов О. В., Грищак В. З., Акімов Д. В., Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Дегтяренко П .Г., Д'яченко Н. М., Клименко Д. В., Клименко М. І., Кудін О. В., Ларіонов І. Ф., Сіренко В. М., Чопоров С. В. Математичні моделі та прогнозування руйнівних навантажень в ракетно-космічних системах : колективна монографія / за ред. О. В. Дегтярьова, В. З. Грищака, В. М. Сіренка. Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2020. 260 с.
5. Gristchak V.Z.,Dimitrijeva E.M. A Hybrid WKB-Galerkin Method and its Using to Applied Mechanics Problems. *The scientific journal FACTA UNIVERSITATIS. Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*. 1998. T. 2 (8). P.709–713 (1998).
6. Gristchak V. Z., Lysenko V. V. A hybrid asymptotic WKB-Galerkin method with application to the correlation analysis of stochastic behaviour of non-linear systems with time-depended parameters. *Proceedings of the 3rd ND-KhPI2010 International Conference on Nonlinear Dynamics*. September 21–24, 2010, Kharkov, Ukraine. P. 290–295.
7. Gristchak V. Z., Pogrebitskaya A.M. On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems. *Technische Mechanik*. 2011. T. 31, № 2. P.112–120.
8. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Керованість крайових задач для рівнянь Ляпунова в просторі Гільберта. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя: ЗНУ, 2015. №3 С.212-220.
9. Панасенко Є.В. Задача оптимізації крайової задачі для рівняння Ляпуновав просторі Гільберта. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя: ЗНУ, 2017. №2 С.216-223.
10. Панасенко Є.В., Анохін А.І., Гужва А.А., Чміль М.М. Збурення крайової задачі для рівняння Ляпунова у просторі Гільберта. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя: ЗНУ, 2019. №2 С.125-134.
11. Bihun D. S., Pokutnyi O. O., Panasenko E. V .Autonomous Nonlinear Boundary-Value Problems for the Lyapunov Equation in the Hilbert Space. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2021. Vol. 73, No. 7. P. 1009–1022.

Інформаційні ресурси:

1. Асимптотичні методи розв'язання крайових та початкових задач: дисципліна в СЕЗН ЗНУ Moodle. URL: https://moodle.znu.edu.ua/course/view.php?id=13378
2. Веб-портал: EqWorld. Мир математических уравнений. Асимптотические методы и разложения. URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/asymptotic.htm
3. Наукова бібліотека Запорізького національного університету. URL: http://library.znu.edu.ua/
4. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського. URL: http://www.nbuv.gov.ua/
5. Maplesoft Media Releases. URL: https://www.maplesoft.com/company/news/releases/2021/2021-03-10-maple-2021-provides-even-more-tools-to-help-students-learn-math.aspx

Додаток
РОЗКЛАД КУРСУ ЗА ТЕМАМИ І КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Тиждень і вид заняття	Тема заняття	Контрольний захід	Кількість балів
Змістовий модуль 1			
Тиждень 1 Лекція 1	*Основні етапи в розвитку асимптотичних методів*		
Тиждень 2 Лекція 2	*Гібридний асимптотичний підхід на базі методу фазних інтегралів.* Метод фазних інтегралів (метод ВКБ) та його застосування	Теоретичне опитування при захисті теоретико-практичного завдання 1	5
Тиждень 3 Лекція 3	Розвиток гібридного асимптотичного підходу	Звіт про виконання і захист теоретико-практичного завдання 1	5
Змістовий модуль 2			
Тиждень 4 Лекція 4	*Гібридний ВКБ-Гальоркін метод і його опис в застосуванні до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами* Формальне зображення гібридного ВКБ-Гальоркін розв’язку лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами, що містить параметр при старшій похідній		
Тиждень 5 Лекція 5	Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін методу до розв’язання диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами	Теоретичне опитування при захисті теоретико-практичного завдання 2	5
Змістовий модуль 3			
Тиждень 6 Лекція 6	*Асимптотичний характер гібридного ВКБ-Гальоркін розв’язку* Теорема про асимптотичність гібридного ВКБ-Гальоркін розв’язку	Звіт про виконання і захист теоретико-практичного завдання 2	5
Тиждень 7 Лекція 7	*Побудова гібридного ВКБ-Гальоркін розв’язку диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами* Формальний розв’язок		
Тиждень 8 Лекція 8	*Побудова гібридного ВКБ-Гальоркін розв’язку диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами* Теорема про незалежність вибору фундаментальних функцій розв’язку	Теоретичне опитування при захисті теоретико-практичного завдання 3	5
Змістовий модуль 4			
Тиждень 9 Лекція 9	*Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін \підходу до розв’язання крайових задач* Гібридний ВКБ-Гальоркін розв’язок деяких рівнянь другого порядку	Звіт про виконання і захист теоретико-практичного завдання 3	5

Тиждень 10 Лекція 10	*Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок для рівняння Бесселя* Формальний розв'язок		
Тиждень 11 Лекція 11	*Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок для рівняння Бесселя* Аналіз чисельних результатів	Теоретичне опитування при захисті теоретико-практичного завдання 4	5
Змістовий модуль 5			
Тиждень 12 Лекція 12	*Гібридне ВКБ-Гальоркін наближення у крайових задачах, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядкузі змінними коефіцієнтами* Розв'язок рівняння спеціального типу	Звіт про виконання і захист теоретико-практичного завдання 4	5
Тиждень 13 Лекція 13	*Гібридне ВКБ-Гальоркін наближення у крайових задачах, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядкузі змінними коефіцієнтами* Зіставлення наближених результатів з точним розв'язком	Теоретичне опитування при захисті теоретико-практичного завдання 5	5
Тиждень 14 Лекція 14	*Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок диференціального рівняння спеціального типу із змінними коефіцієнтами* Порівняння розв'язків для великих і малих значень параметра ε асимптотичного розвинення з точним розв'язком	Звіт про виконання і захист теоретико-практичного завдання 5	5
Змістовий модуль 6			
Тиждень 15 Лекція 15	*Асимптотичний підхід до розв'язання крайових задач на основі ВКБ-варіаційного методу* Основна ідея гібридного ВКБ-варіаційного підходу. Приклади застосування підходу Візуалізація здобутих розв'язків		5
Тиждень 16 Лекція 16	Застосування підходу до розв'язку рівняння Беселя	Теоретичне опитування при захисті теоретико-практичного завдання 6 Звіт про виконання і захист теоретико-практичного завдання 6	5 5

Протягом семестру аспірант виконує 6 теоретико-практичних завдань до кожного з шістьох змістових модулів. Сутність завдання:

провести власноруч подробиці всіх викладок, наведених на лекціях змістового модуля; за потреби застосувати одну з систем комп'ютерної алгебри.

До кожного теоретико-практичного завдання потрібно скласти **звіт про виконання теоретико-практичного завдання**, який пояснює всі етапи виконання роботи. Звіт складається в електронному вигляді за вимогами ДСТУ і розміщуються на платформі СЕЗН ЗНУ Moodle. Реалізація окремих викладок, проведених за допомогою системи комп'ютерної алгебри передбачає доручення до звіту відповідного файлу.

Захист практичних завдань є обов'язковим і потребує пояснення всіх етапів розв'язання завдання.

Розподіл балів за окреме теоретико-практичне завдання:

1) теоретичне опитування при захисті теоретико-практичного завдання – до 5 балів;
2) звіт про виконання і захист теоретико-практичного завдання – до 5 балів.

ЗАЛІК. *Підготовка презентації за обраною темою та її захист.*
Здобувач вищої освіти доктора філософії

1) обирає задачу за тематикою свого дисертаційного дослідження;
2) розв'язує одним із асимптотичних методів, вивчених в курсі;
3) обчислює відхилення між асимптотичним розв'язком і розв'язком, отриманим іншим методом;
4) робить висновки;
5) результати подає у вигляді презентації;
6) захищає отримані результати на заліковому тижні.

Розподіл балів за залікове завдання:

1) виконання завдання оцінюється до 10 балів;
2) презентація результатів – до 10 балів;
3) доповідь за результатами – до 10 балів;
4) відповідь на питання присутніх, у тому числі викладача, – до 10 балів.

Навчальне видання
(українською мовою)

Віктор Захарович Грищак
Наталія Миколаївна Д’яченко
Євгеній Валерійович Панасенко

АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ТА ПОЧАТКОВИХ ЗАДАЧ

Навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти доктора філософії спеціальності «Прикладна математика»

Рецензент *С.І. Гоменюк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Н.М. Д’яченко*