1. ОЗНАЧЕННЯ ТА ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

1.1 Поняття перетворення Лапласа. Оригінал та зображення

Нехай функцію $f(t)$ дійсної змінної t задано на скінченному або нескінченному інтервалі $(a;b)$.

<u>Означення 1.1.</u> *Інтегральним перетворенням* функції дійсної змінної $f(t)$ називають функцію

$$F(p)=\int_a^b K(t,p)f(t)dt,$$

де $K(t,p)$ – фіксована для даного перетворення функція, яку називають ядром перетворення, p – дійсний або комплексний параметр перетворення.

У залежності від вигляду ядра розрізняють різноманітні типи інтегральних перетворень. Ефективним засобом, що використовується при розв'язанні різноманітних задач математичного аналізу та у практичних науково-технічних дослідженнях, є інтегральне перетворення Лапласа.

<u>Означення 1.2.</u> *Перетворенням Лапласа* функції $f(t)$, $t\in R$, називають функцію $F(p)$ комплексної змінної p, що визначається рівністю:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt. \tag{1.1}$$

Функцію $F(p)$ називають *зображенням* функції $f(t)$ при перетворенні Лапласа, а інтеграл у правій частині рівності (1.1) називають *інтегралом Лапласа*.

Розділ математики, що вивчає перетворення Лапласа, його властивості та застосування, називають *операційним численням*, а метод розв'язання рівнянь різноманітних типів за допомогою перетворення Лапласа – *операційним методом*.

З'ясуємо, яким вимогам повинна задовольняти функція $f(t)$, щоб невласний інтеграл (1.1) був збіжним та визначав зображення $F(p)$.

<u>Означення 1.3.</u> *Оригіналом* при перетворенні Лапласа називають довільну функцію $f(t)$, що задовольняє наступним умовам:

1) $f(t)=0$ при $t<0$;

2) на довільному обмеженому інтервалі $f(t)$ може мати лише скінченне число точок розриву першого роду;

3) $|f(t)|$ зростає не швидше показникової функції, тобто існують такі числа $\alpha\geq 0$ та $M>0$, що $|f(t)|<M\cdot e^{\alpha t}$. При цьому точну нижню грань α_0

значень α, для яких виконано останню умову, називають *показником зростання* функції $f(t)$.

Найпростішим прикладом оригінала є функція Хевісайда або одинична функція:

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Можна перевірити, що вона задовольняє всім умовам функції-оригінала. Її показником зростання є число $\alpha_0=0$.

Теорема 1.1. (Теорема про існування зображення). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання α_0, то інтеграл Лапласа $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ є абсолютно збіжним у півплощині $\operatorname{Re} p>\alpha_0$ комплексної площини p і визначає зображення $F(p)$, яке є функцією, аналітичною у цій півплощині.

Доведення. Оскільки $f(t)$ є оригіналом з показником зростання α_0, то виконується умова $|f(t)|<M\cdot e^{\alpha_0 t}$. Нехай $p=\sigma+is$. Тоді $\left|e^{-pt}\right|=e^{-\sigma t}$ і $\left|f(t)e^{-pt}\right|\le Me^{(\alpha_0-\sigma)t}$. Звідси знаходимо:

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|f(t)e^{-pt}\right|dt\le M\int\limits_0^{+\infty}e^{(\alpha_0-\sigma)t}dt=M\left.\frac{e^{(\alpha_0-\sigma)t}}{\alpha_0-\sigma}\right|_0^{+\infty}=\frac{M}{\sigma-\alpha_0}. \tag{1.2}$$

Оскільки за умовою теореми $\alpha_0-\sigma<0$, то $e^{(\alpha_0-\sigma)t}\to 0$ при $t\to+\infty$.

Отже, з нерівності (1.2) випливає, що інтеграл Лапласа є абсолютно збіжним при $\operatorname{Re} p>\alpha_0$.

Доведемо аналітичність $F(p)$. Для довільної точки півплощини $\operatorname{Re} p>\alpha_0$ маємо:

$$\frac{\Delta F}{\Delta p}=\frac{F(p+\Delta p)-F(p)}{\Delta p}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)\frac{1}{\Delta p}\left(e^{-\Delta pt}-1\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)\frac{1}{\Delta p}\left(-\Delta p\cdot t+\frac{(\Delta p\cdot t)^2}{2!}-\frac{(\Delta p\cdot t)^3}{3!}+\ldots\right)dt=-\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}tf(t)dt+\varepsilon,$$

де $\varepsilon=\Delta p\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}t^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{\Delta p\cdot t}{3!}+\frac{(\Delta p\cdot t)^2}{4!}-\ldots\right)dt$.

Знайдемо оцінку для величини ε:

$$|\varepsilon| \le |\Delta p| \cdot \int_0^{+\infty} \left|e^{-pt}\right| \left|f(t)\right| t^2 \left|\left(\frac{1}{2!} - \frac{\Delta p \cdot t}{3!} + \frac{(\Delta p \cdot t)^2}{4!} - \dots\right)\right| dt <$$
$$< |\Delta p| \int_0^{+\infty} M e^{\alpha_0 t} e^{-\sigma t} t^2 \left|\left(\frac{1}{2!} - \frac{\Delta p \cdot t}{3!} + \frac{(\Delta p \cdot t)^2}{4!} - \dots\right)\right| dt.$$

або $|\varepsilon| < |\Delta p| M \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma-\alpha_0-|\Delta p|)t} t^2 dt$. Інтегруючи частинами праву частину цієї нерівності, отримаємо:

$$|\varepsilon| < \frac{2M}{(\sigma - \alpha_0 - |\Delta p|)^3} |\Delta p|.$$

Тому при $\Delta p \to 0$ маємо $|\varepsilon| \to 0$. Вираз для $F'(p)$ набуває вигляду:

$$F'(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-pt} t \cdot f(t) dt.$$

Цей інтеграл є збіжним. Дійсно, $|tf(t)| < Me^{(\alpha_0+\delta)t} e^{-\delta t} \cdot t$, де δ – досить мале число. Функція $Mte^{-\delta t}$ при $t > 0$ має максимум, тому існує таке число $M_1 > 0$, для якого $Mte^{-\delta t} < M_1$. Тоді $|tf(t)| < M_1 e^{(\alpha_0+\delta)t}$. Отже, похідна $F'(p)$ існує і тому $F(p)$ є функцією, аналітичною у області $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Теорему доведено.

Зауважимо, що, хоча теорема 1.1 стверджує збіжність інтеграла лише при $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, найчастіше функція $F(p)$ є визначеною та аналітичною на всій площині, за винятком ізольованих особливих точок.

Теорема 1.2. (Необхідна умова зображення). Якщо функція $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$ з показником зростання α, то $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$.

Доведення. Оскільки $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$ з показником зростання α_0, то при $p = \sigma + is$ $|F(p)| = \left|\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt\right| < \int_0^{+\infty} M e^{(\alpha-\sigma)t} dt = \dfrac{M}{\sigma - \alpha}$. З цієї нерівності випливає, що $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to\infty} F(p) = 0$. Оскільки $F(p)$ є аналітичною при $\operatorname{Re} p > \alpha$, то $F(p) \to 0$ при $p \to \infty$ по довільному напрямку. Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що такі функції, як, наприклад, $F(p) = 1$, $F(p) = p$ не можуть бути зображеннями при перетворенні Лапласа.

За формулою (1.1) кожному оригіналу ставиться у відповідність функція $F(p)$. Цю відповідність між оригіналом $f(t)$ та його зображенням $F(p)$ надалі будемо записувати у вигляді: $f(t) \div F(p)$.

Оскільки оригінал дорівнює нулю при $t<0$, то у подальшому для спрощення записів будь-яку функцію – оригінал, яку можна представити у вигляді $f(t)\cdot\eta(t)$ ($\eta(t)$ – функція Хевісайда), будемо коротко позначати $f(t)$.

Розглянемо приклади знаходження зображення $F(p)$ за заданим оригіналом $f(t)$ при перетворенні Лапласа.

Приклад 1.1. Знайти зображення функції Хевісайда.

Розв'язання. Маємо $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}dt=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-pt}dt=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right)\Bigg|_0^b=\frac{1}{p}$.

Таким чином, отримали, що $1=\eta(t)\div\frac{1}{p}$.

Приклад 1.2. Знайти зображення функції $f(t)=e^{at}$, $a\in C$.

Розв'язання. За формулою (1.1) для $\operatorname{Re}(p-a)>0$ знаходимо:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{at}\cdot e^{-pt}dt=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-(p-a)t}dt=\frac{1}{a-p}\lim_{b\to+\infty}e^{-(p-a)t}\Big|_0^b=$$
$$=\frac{1}{a-p}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-(p-a)b}-1\right)=\frac{1}{p-a}.$$

Отже, $e^{at}\div\frac{1}{p-a}$. При $a=0$ маємо результат, отриманий у прикладі 1.1.

Приклад 1.3. Знайти зображення функції $f(t)=t$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (1.1), згідно з якою отримуємо:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} te^{-pt}dt=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} te^{-pt}dt=\left\|\begin{matrix}u=t;\,dv=e^{-pt}dt;\\ du=dt;\,v=-\dfrac{e^{-pt}}{p}\end{matrix}\right\|=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{te^{-pt}}{p}-\frac{e^{-pt}}{p^2}\right)\Bigg|_0^b=$$
$$=\frac{1}{p^2}.$$

Таким чином, отримали, що $t\div\frac{1}{p^2}$.

Знаходження зображення за допомогою формули (1.1) не завжди є легким та зручним. Ефективно вирішити цю задачу допомагає використання властивостей перетворення Лапласа, які ми розглянемо далі.

1.2 Властивості перетворення Лапласа

Теорема 1.3. (Теорема лінійності). Якщо $f(t)\div F(p)$, $g(t)\div G(p)$, то $A\cdot f(t)+B\cdot g(t)\div A\cdot F(p)+B\cdot G(p)$, де A та B – дійсні або комплексні сталі.

Доведення цієї теореми випливає з властивості лінійності для інтегралів. Використовуючи властивість лінійності та знайдене зображення показникової функції e^{at}, знайдемо зображення тригонометричних та показникових функцій.

$$\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\div\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$\cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\div\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}:$$

$$\mathrm{sh}\omega t=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\div\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2};$$

$$\mathrm{ch}\omega t=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\div\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

Теорема 1.4. (Теорема подібності). Якщо $f(t)\div F(p)$, то для довільної дійсної сталої $\alpha>0$ $f(\alpha t)\div\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

Доведення. $f(\alpha t)\div\int\limits_0^{+\infty}f(\alpha t)e^{-pt}dt$. Виконаємо у цьому інтегралі заміну змінної $\alpha t=t_1$. Тоді $dt=\frac{dt_1}{\alpha}$. Маємо:

$$f(\alpha t)\div\int\limits_0^{+\infty}f(\alpha t)e^{-pt}dt=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty}f(t_1)e^{-\frac{pt_1}{\alpha}}dt_1=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Теорему доведено.

Теорема 1.5. (Теорема зміщення). Якщо $f(t)\div F(p)$, то $e^{at}f(t)\div F(p-a)$, де a – довільна стала.

Доведення. Знайдемо зображення функції $e^{at}f(t)$:

$$e^{at}f(t)\div\int\limits_0^{+\infty}e^{at}f(t)e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-(p-a)t}dt=F(p-a).$$

Теорему доведено.

Використовуючи теорему зміщення, знайдемо зображення функцій $e^{at}\sin bt$, $e^{at}\cos bt$, $e^{at}\mathrm{sh}\,bt$, $e^{at}\mathrm{ch}\,bt$. Отримуємо:

$$e^{at}\sin bt\div\frac{b}{(p-a)^2+b^2};\ e^{at}\cos bt\div\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2};$$

$$e^{at}\mathrm{sh}\,bt\div\frac{b}{(p-a)^2+b^2};\ e^{at}\mathrm{ch}\,bt\div\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}.$$

Приклад 1.4. Знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$, якщо $F(p)=\frac{3p-5}{p^2-4p+13}$.

Розв'язання. Запишемо вираз для $F(p)$ у вигляді:

$$F(p)=\frac{3p-5}{p^2-4p+13}=\frac{3(p-2)+1}{(p-2)^2+9}=3\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+3^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(p-2)^2+3^2}.$$

Отримуємо: $F(p)\div 3e^{2t}\cos 3t+\frac{1}{3}e^{2t}\sin 3t=f(t)$.

Теорема 1.6. (Теорема запізнення). Якщо $f(t)\div F(p)$, то $f(t-\tau)\div e^{-p\tau}\cdot F(p)$, де $\tau>0$ – довільна стала.

Доведення. Оскільки $f(t-\tau)$ є оригіналом, то $f(t-\tau)=0$ при $t<\tau$, тому отримуємо:

$$f(t-\tau)\div\int_0^{+\infty}f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_\tau^{+\infty}f(t-\tau)e^{-pt}dt.$$

Виконаємо заміну $t-\tau=t_1$. Тоді знаходимо, що

$$\int_\tau^{+\infty}f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}f(t_1)\cdot e^{-p(t_1+\tau)}dt_1=e^{-p\tau}\int_0^{+\infty}f(t_1)e^{-pt_1}dt_1.$$

Звідси випливає, що $f(t-\tau)\div e^{-p\tau}\cdot F(p)$. Теорему доведено.

Ця теорема дає можливість знаходити зображення кусково-неперервних функцій, зокрема, функцій, що описують імпульсні процеси.

Приклад 1.5. Знайти зображення одиничного імпульсу $f(t)=\begin{cases}0, t<0;\\1, 0\le t\le\tau;\\0, t>\tau.\end{cases}$

Розв'язання. Запишемо функцію $f(t)$ за допомогою функції Хевісайда: $f(t)=\eta(t)-\eta(t-\tau)$. Тоді $f(t)\div\frac{1}{p}-\frac{e^{-p\tau}}{p}$.

Використовуючи теорему запізнення, знайдемо зображення періодичної функції – оригінала, тобто функції $f(t)\cdot\eta(t)$, де $f(t)$ є періодичною функцією.

Нехай функція $f(t)$ має період T. Розглянемо допоміжну функцію $f_1(t)=\begin{cases}f(t), t\in[0;T],\\0, t\notin[0;T].\end{cases}$ З допомогою цієї функції оригінал $f(t)\cdot\eta(t)$ можна записати у вигляді:

$$f(t)\cdot\eta(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_1(t-nT)\cdot\eta(t-nT).$$

Знайдемо зображення $f(t)\cdot\eta(t)$. Для цього використаємо теорему запізнення. Якщо $f_1(t)\div F_1(p)$, то отримуємо:

$$f(t)\cdot\eta(t)\div F(p)=F_1(p)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-npT}=\frac{F_1(p)}{1-e^{-pT}}.$$

Остання рівність виконується при $\operatorname{Re} p > 0$, коли $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT}$ є сумою членів нескінченно спадної геометричної прогресії. Враховуючи, що $F_1(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt$, отримуємо формулу для зображення періодичного оригіналу з періодом T у вигляді:

$$f(t) \cdot \eta(t) \div F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt.$$

Приклад 1.6. Знайти зображення функції $f(t) = |\cos t|$.

Розв'язання. Для знаходження потрібного зображення використаємо отриману формулу для зображення періодичного оригіналу, де $T = \pi$ – період функції $|\cos t|$. Спочатку знайдемо інтеграл $\int_0^T f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\pi} \cos t \cdot e^{-pt} dt$. Двічі інтегруючи частинами, отримуємо:

$$\int_0^{\pi} \cos t \cdot e^{-pt} dt = \frac{p\left(e^{-\pi p} + 1\right)}{1 + p^2}.$$

Підставивши значення цього інтеграла у формулу для зображення періодичного оригіналу, остаточно знаходимо:

$$|\cos t| \div \frac{p\left(e^{-\pi p} + 1\right)}{\left(1 - e^{-\pi p}\right)\left(1 + p^2\right)}.$$

Теорема 1.7. (Теорема випередження). Якщо $f(t) \div F(p)$, то для довільної сталої величини $\tau > 0$

$$f(t + \tau) \div e^{p\tau} \left(F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right).$$

Доведення. Маємо: $f(t + \tau) \div \int_0^{+\infty} f(t + \tau) e^{-pt} dt$. Виконавши заміну змінної $t + \tau = t_1$, отримуємо:

$$f(t + \tau) \div e^{p\tau} \int_{\tau}^{+\infty} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 = e^{p\tau} \left(\int_0^{+\infty} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 - \int_0^{\tau} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 \right) =$$

$$= e^{p\tau} \left(F(p) - \int_0^{\tau} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 \right).$$

Теорему доведено.

1.3 Теореми про диференціювання та інтегрування оригіналів і зображень

Теорема 1.8. (Теорема диференціювання по параметру). Якщо $f(t,x) \div F(p,x)$ і функція $f(t,x)$ при кожному фіксованому значенні x є оригіналом, а функція $F(p,x)$ має частинну похідну по x, то $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x} \div \dfrac{\partial F(p,x)}{\partial x}$.

Приклад 1.7. Знайти зображення функції $f(t) = te^{at}$, де a – довільна стала.

Розв'язання. $e^{at} \div \dfrac{1}{p-a}$. Диференціюємо по параметру a обидві частини цього співвідношення: $te^{at} \div \dfrac{1}{(p-a)^2}$.

Теорема 1.9. (Теорема про диференціювання оригінала). Якщо $f(t) \div F(p)$ і функції $f'(t)$, $f''(t),\ldots,f^{(n)}(t)$ є оригіналами, то

$$f'(t) \div pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \div p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Доведення. Для першої похідної $f'(t)$ маємо:

$$f'(t) \div \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \left\| \begin{matrix} u = e^{-pt}, dv = f'(t)dt, \\ du = -pe^{-pt}dt, v = f(t) \end{matrix} \right\| = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} +$$

$$+p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = -f(0) + pF(p).$$

Отже, $f'(t) \div pF(p) - f(0)$. Користуючись цією формулою, знайдемо зображення другої похідної $f''(t) = \left(f'(t)\right)'$:

$$f''(t) \div p\left(pF(p) - f(0)\right) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Аналогічно знаходимо зображення $f'''(t)$. Застосовуючи формулу для зображення першої похідної $(n-1)$ разів, отримуємо:

$$f^{(n)}(t) \div p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Теорему доведено.

Якщо для функції $f(t)$ $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то отримуємо: $f^{(n)}(t) \div p^nF(p)$.

Приклад 1.8. Знайти зображення виразу $x''(t)+3x'(t)+2x(t)+5$, якщо $x(0)=1$, $x'(0)=2$.

Розв'язання. Нехай $x(t)\div X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригінала отримуємо:

$$x'(t)\div pX(p)-x(0)=pX(p)-1,$$

$$x''(t)\div p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-p-2.$$

Підставивши ці зображення функції $x(t)$ та її похідних у заданий вираз та враховуючи, що $5\div\frac{5}{p}$, отримуємо:

$$x''(t)+3x'(t)+2x(t)+5\div p^2X(p)-p-2+3\big(pX(p)-1\big)+2X(p)+\frac{5}{p}=$$

$$=\big(p^2+3p+2\big)X(p)-p-5+\frac{5}{p}.$$

З теореми про диференціювання оригінала випливають наступні наслідки.

Наслідок 1. Якщо $f'(t)$ є оригіналом, а функція $F(p)$ аналітична при $p\to\infty$, то $\lim\limits_{p\to\infty}pF(p)=f(0)$.

Наслідок 2. Якщо $f'(t)$ є оригіналом і існує границя функції $f(t)$ при $t\to\infty$, то $\lim\limits_{p\to 0}pF(p)=\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$.

Теорема 1.10. (Теорема про диференціювання зображення). Якщо $f(t)\div F(p)$, то $F'(p)\div -tf(t)$, $F''(p)\div t^2f(t)$, …, $F^{(n)}(p)\div(-1)^n t^n f(t)$.

Доведення. Оскільки функція $F(p)$ є аналітичною у півплощині $\operatorname{Re}p>\alpha_0$, то вона має похідні довільних порядків. Тому, диференціюючи зображення $F(p)=\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$ по p, отримаємо:

$$F'(p)=\int\limits_0^{+\infty}\left(f(t)e^{-pt}\right)'_p dt=\int\limits_0^{+\infty}f(t)(-t)e^{-pt}dt\div -tf(t).$$

Тоді $F''(p)\div(-t)(-t)f(t)=t^2f(t)$. Отже, кожне диференціювання $F(p)$ по p відповідає множенню оригінала попередньої похідної на $(-t)$, тому отримуємо: $F^{(n)}(p)\div(-1)^n t^n f(t)$. Теорему доведено.

Приклад 1.9. Знайти зображення функції $f(t)=t^n$, $n\in N$.

Розв'язання. Раніше ми отримали, що $t\div\frac{1}{p^2}$. Тоді $-t^2\div\left(\frac{1}{p^2}\right)'=-\frac{2}{p^3}$, тому $t^2\div\frac{2}{p^3}$. Продовжуючи диференціювання, знаходимо, що $t^n\div\frac{n!}{p^{n+1}}$.

Теорема 1.11. (Теорема про інтегрування оригінала). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $\int_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p}$.

Доведення. Нехай $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ і $\varphi(t) \div \Phi(p)$. За теоремою про диференціювання оригіналу $\varphi'(t) \div p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p)$, оскільки $\varphi(0) = 0$. З співвідношень $\varphi'(t) = f(t) \div F(p)$ випливає, що $F(p) = p\Phi(p)$, звідки $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$, тобто $\int_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p}$. Теорему доведено.

Приклад 1.10. Знайти зображення функції $\varphi(t) = \int_0^t \tau \cdot \cos 2\tau d\tau$.

Розв'язання. Знайдемо зображення підінтегральної функції $t\cos 2t$. Маємо $\cos 2t \div \frac{p}{p^2+4}$. За теоремою про диференціювання зображення знаходимо

$$t\cos 2t \div -\left(\frac{p}{p^2+4}\right)' = -\frac{4-p^2}{\left(p^2+4\right)^2} = \frac{p^2-4}{\left(p^2+4\right)^2}.$$

Тоді за теоремою про інтегрування оригіналу отримуємо:

$$\int_0^t \tau \cdot \cos 2\tau d\tau \div \frac{p^2-4}{p\left(p^2+4\right)^2}.$$

Теорема 1.12. (Теорема про інтегрування зображення). Якщо $f(t) \div F(p)$ і інтеграл $\int_p^\infty F(q)dq$ збіжний, то $\int_p^\infty F(q)dq \div \frac{f(t)}{t}$.

Доведення. Враховуючи співвідношення $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ і змінюючи порядок інтегрування по t та q, отримуємо:

$$\int_p^\infty F(q)dq = \int_p^\infty \left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-qt}dt\right)dq = \int_0^{+\infty}\left(\int_p^\infty e^{-qt}dq\right)f(t)dt = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{e^{-qt}}{t}\right)\Bigg|_p^\infty f(t)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt \div \frac{f(t)}{t}.$$

Теорему доведено.

Приклад 1.11. Знайти зображення функції $\frac{e^t-1}{t}$.

Розв'язання. Оскільки $e^t - 1 \div \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$, то за теоремою 1.12 отримуємо:

$$\frac{e^t-1}{t} \div \int_p^{\infty}\left(\frac{1}{q-1}-\frac{1}{q}\right)dq = \ln\frac{q-1}{q}\Bigg|_p^{\infty} = -\ln\frac{p-1}{p} = \ln\frac{p}{p-1}.$$

Приклад 1.12. Знайти зображення інтегрального синуса $\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$.

Розв'язання. Знайдемо зображення підінтегральної функції у виразі для інтегрального синуса. Оскільки $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$, то, за теоремою про інтегрування зображення маємо:

$$\frac{\sin t}{t} \div \int_p^{\infty}\frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z\Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

За теоремою про інтегрування зображення маємо: $\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau \div \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}$.

Теорему про інтегрування зображення у деяких випадках можна використати для обчислення невласних інтегралів.

Нехай $\varphi(t) = \frac{f(t)}{t}$ задовольняє умовам оригінала і $f(t) \div F(p)$, $\varphi(t) \div \Phi(p)$. Застосувавши теорему про інтегрування зображення, отримуємо: $\frac{f(t)}{t} \div \int_p^{\infty} F(z)dz$. Тоді $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt = \Phi(0) = \int_0^{\infty}F(z)dz$. Таким чином, отримали формулу:

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt = \int_0^{\infty}F(z)dz,$$

де $f(t) \div F(p)$.

Приклад 1.13. Обчислити $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.

Розв'язання. $\sin t \div \frac{1}{p^2+1} = F(p)$. Тому маємо:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \int_0^{\infty}F(z)dz = \int_0^{\infty}\frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2}.$$

1.4 Зображення згортки функцій. Формула Дюамеля

Означення 1.4. *Згорткою* неперервних функцій $f(t)$ та $g(t)$, $t \ge 0$, називають інтеграл $f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

Зауважимо, що операція згортки є комутативною: $f*g=g*f$. Крім того, згортка неперервних функцій також є неперервною.

Теорема 1.13. Якщо функції $f(t)$ та $g(t)$ є оригіналами, то їх згортка також є оригіналом.

Доведення. Покажемо, що функція $f*g$ задовольняє всім трьом умовам оригінала. З неперервності $f(t)$ та $g(t)$ випливає неперервність згортки цих функцій.

Оскільки $f(t)$ та $g(t)$ є оригіналами, то вони тотожно дорівнюють нулю при $t<0$ і підінтегральний вираз у формулі згортки $f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ тотожно дорівнює нулю при $t<0$, тому $f*g=0$ при $t<0$.

Доведемо, що функція $\varphi(t)=f*g$ задовольняє третій умові оригінала, тобто $|\varphi(t)|\le K\cdot e^{\beta t}$. Оскільки $f(t)$ та $g(t)$ є оригіналами, то існують дійсні константи α_1 та α_2, такі, що $|f(t)|\le M_1e^{\alpha_1 t}$, $|g(t)|\le M_2e^{\alpha_2 t}$. Нехай $\alpha=\max(\alpha_1,\alpha_2)$. Тоді $|f(\tau)\cdot g(t-\tau)|\le M_1M_2e^{\alpha\tau}e^{\alpha(t-\tau)}=M_1M_2e^{\alpha t}=Ke^{\alpha t}$, де $K=M_1M_2$. Звідси випливає, що $|\varphi(t)|\le\int_0^t|f(\tau)\cdot g(t-\tau)|d\tau\le\int_0^t Ke^{\alpha\tau}d\tau=Kte^{\alpha t}$.

Оскільки $\forall t\ge 0$ $t<e^t$, то $|\varphi(t)|\le Ke^{(\alpha+1)t}=Ke^{\beta t}$, де $\beta=\alpha+1$. Таким чином, згортка $\varphi(t)=f*g$ є оригіналом. Теорему доведено.

Теорема 1.14. (Теорема про множення зображень). Якщо $f(t)\div F(p)$, а $g(t)\div G(p)$, то $F(p)\cdot G(p)\div f(t)*g(t)$, де $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$ – згортка функцій $f(t)$ і $g(t)$.

Доведення. Функція $f*g$ є оригіналом. За означенням перетворення Лапласа маємо:

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\div\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Змінимо порядок інтегрування у отриманому повторному інтегралі і виконаємо підстановку $t_1=t-\tau$:

$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^{+\infty}f(\tau)d\tau\int_\tau^{+\infty}e^{-pt}g(t-\tau)dt=$$
$$=\int_0^{+\infty}f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int_0^{+\infty}g(t_1)e^{-pt_1}dt_1=F(p)\cdot G(p).$$

Теорему доведено.

Приклад 1.14. Знайти оригінал, зображенням якого є функція $F(p)=\dfrac{3p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Розв'язання. Запишемо задане зображення $F(p)$ у вигляді:

$$F(p)=\frac{3p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}.$$

Застосуємо теорему про множення зображення, згідно з якою виконується співвідношення:

$$\frac{3p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\div 3\int_0^t\cos\tau\cdot\cos(t-\tau)\,d\tau=\frac{3}{2}\int_0^t\left(\cos(2\tau-t)+\cos t\right)d\tau=$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{\sin t}{2}+\frac{\sin t}{2}+t\cos t\right)=\frac{3}{2}(\sin t+t\cos t).$$

З теореми 1.14 випливає, що, коли $f*g\div F(p)\cdot G(p)$ і $f'(t)$ є оригіналом, то виконується *формула Дюамеля*:

$$pF(p)G(p)\div\int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau+f(0)g(t). \qquad (1.3)$$

Дійсно, вираз $pF(p)G(p)$ можна записати у вигляді:

$$pF(p)G(p)=\left(pF(p)-f(0)\right)G(p)+f(0)G(p)\div f'(t)*g(t)+f(0)g(t).$$

Зауважимо, що формулу Дюамеля (12.3) можна записати також у вигляді:

$$pF(p)G(p)\div\int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau+g(0)f(t).$$

Формулу Дюамеля застосовують при розв'язанні лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

1.5 Зображення степеневої функції з довільним показником степеня

Раніше (приклад 1.9) було знайдено зображення степеневої функції $t^n\div\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ для натуральних показників степеня $n\in\mathbb{N}$. Отримаємо формулу для зображення оригінала t^k, де k – довільне додатне число (при $k<0$ t^k має нескінченний розрив при $t=0$). Для цього спочатку познайомимось з важливою спеціальною функцією – гамма-функцією Ейлера. Вона визначається невласним інтегралом:

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Можна перевірити, що цей невласний інтеграл є збіжним при $x>0$.

До найважливіших властивостей гамма-функції відносять рекурентну формулу $\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$, що виконується при $x>1$. Оскільки виконується рівність $\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}dt=1$, то за рекурентною формулою можна обчислити значення гамма-функції для довільного натурального аргументу. Маємо:

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\ldots=$$
$$=(n-1)(n-2)\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)=(n-1)!$$

Обчисливши відповідний невласний інтеграл, можна знайти значення $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, що часто зустрічається при розв'язанні задач, пов'язаних з гамма-функцією: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Застосуємо гамма-функцію для знаходження зображення степеневої функції t^k:

$$t^k \div \int\limits_0^{+\infty} t^k e^{-pt}dt=\left\|\begin{matrix}pt=t_1,\\ pdt=dt_1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{p^{k+1}}\int\limits_0^{+\infty} t_1^k e^{-t_1}dt_1=\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}.$$

Отже, отримали формулу: $t^k \div \dfrac{\Gamma(k+1)}{(k+1)!}$. Наприклад, при $k=\frac{1}{2}$ отримуємо: $\sqrt{t}\div\dfrac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$, при $k=-\frac{1}{2}$ маємо: $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\div\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$. Можна довести, що інтеграл Лапласа для функції t^k збігається при $k>-1$, хоча для значень $-1<k<0$ t^k має нескінченний розрив при $t=0$.

1.6 Зображення деяких спеціальних функцій

Розглянемо перетворення Лапласа для деяких спеціальних функцій.

Функцію $\operatorname{erf} t=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-u^2}du$ називають *інтегралом ймовірностей*. Запишемо ряд для функції e^{-u^2} $e^{-u^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{u^{2n}}{n!}$. Він є рівномірно збіжним на всій числовій прямій. У результаті його інтегрування на проміжку від 0 до t отримуємо рівномірно збіжний ряд для інтеграла ймовірностей:

$$\operatorname{erf} t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-u^2}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)}.$$

При великих значення аргументу t здебільшого використовують функцію

$$\operatorname{Erf} t=1-\operatorname{erf} t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_t^{+\infty} e^{-u^2}du.$$

Знайдемо зображення інтеграла ймовірностей, для чого спочатку визначимо зображення функції $f(t)=e^{-t^2}$. Згідно з означенням перетворення Лапласа отримуємо:

$$e^{-t^2} \div \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cdot e^{-pt}dt = e^{\frac{p^2}{4}}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-\left(t+\frac{p}{2}\right)^2}dt = \left\| \begin{matrix} t+\dfrac{p}{2}=\tau, \\ dt=d\tau \end{matrix} \right\| = e^{\frac{p^2}{4}}\int_{\frac{p}{2}}^{+\infty} e^{-\tau^2}d\tau =$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{p^2}{4}}\cdot \operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right).$$

Тоді, за теоремою інтегрування оригіналу, для інтеграла ймовірностей $\operatorname{erf} t$ знаходимо:

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du \div \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{\frac{p^2}{4}}\cdot\operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right)=\frac{1}{p}\cdot e^{\frac{p^2}{4}}\cdot\operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right).$$

Знайдемо зображення *функцій Бесселя* при перетворенні Лапласа. Нагадаємо, що функція Бесселя $J_\nu(t)$ першого роду порядку ν визначається як степеневий ряд, що є розв'язком *диференціального рівняння Бесселя*:

$$t^2x''(t)+tx'(t)+\left(t^2-\nu^2\right)x(t)=0.$$

Цей ряд має вигляд: $x(t)=J_\nu(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!\cdot\Gamma(k+\nu+1)}\left(\dfrac{t}{2}\right)^{2k+\nu}$. Функція $J_\nu(t)$ є неперервною функцією, визначеною на всій числовій прямій, якщо $\nu\in Z$. Якщо $\nu\notin Z$, то $J_\nu(t)$ визначена додатних значень аргументу t. При $\nu=n\in N$ отримуємо $J_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!\cdot(n+k)!}\left(\dfrac{t}{2}\right)^{n+2k}$. Для цілих від'ємних значень ν виконується рівність $J_{-n}(t)=(-1)^n J_n(t)$. Для обчислення функцій Бесселя першого роду $J_\nu(t)$ можна використовувати рекурентну формулу: $J_{\nu+1}(t)=J_{\nu-1}(t)-2J'_\nu(t)$.

Використовуючи означення функції $J_n(t)$, можна довести, що вона є оригіналом. Знайдемо її перетворення Лапласа. Спочатку знайдемо зображення функції $J_0(t)$. Ця функція задовольняє рівняння Бесселя при $\nu=0$:

$$tJ''_0(t)+J'_0(t)+tJ_0(t)=0.$$

Нехай $J_0(t)\div L_0(p)$. Оскільки $J_0(0)=1$, $J'_0(0)=0$, то, за теоремою про диференціювання оригінала, маємо: $J'_0(t)\div pL_0(p)-1$, $J''_0(t)\div p^2L_0(p)-p$. За теоремою про диференціювання зображення маємо:

$$tJ_0(t)\div -L'_0(p),\ tJ''_0(t)=-\left(p^2L_0(p)-p\right)'=-2pL_0(p)-p^2L'_0(p)+1.$$

Застосувавши перетворення Лапласа до рівняння Бесселя при $\nu=0$ отримуємо:

$$-2pL_0(p) - p^2 L_0'(p) + 1 + pL_0(p) - 1 - L_0'(p) = 0,$$

Це рівняння можна записати у вигляді: $\dfrac{dL_0}{L_0} = -\dfrac{pdp}{p^2+1}$. Інтегруючи цю рівність, отримуємо: $L_0(p) = \dfrac{C}{\sqrt{p^2+1}}$.

Сталу C у останній рівності знаходимо, використовуючи наслідок з теореми про диференціювання оригіналу: $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = \lim\limits_{t\to 0+0} f(t)$. Маємо:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{Cp}{\sqrt{p^2+1}} = C = \lim_{t\to 0+0} J_0(t) = J_0(0) = 1.$$

Таким чином, отримали зображення $J_0(t) \div \dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

Оскільки $J_0'(t) = -J_1(t)$, то зображення $J_1(t)$ має вигляд:

$$J_1(t) \div -\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} + 1 = \frac{\sqrt{p^2+1} - p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Використовуючи рекурентну формулу для функцій Бесселя $J_n(t)$, за допомогою методу математичної індукції можна довести, що

$$J_n(t) \div \frac{\left(\sqrt{p^2+1} - p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Таким чином, маємо зображення функцій Бесселя $J_n(t)$ при перетворенні Лапласа.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення інтегрального перетворення.
2. Наведіть означення перетворення Лапласа.
3. Яку функцію називають оригіналом?
4. Наведіть приклади функцій-оригіналів.
5. Сформулюйте теорему існування зображення.
6. Сформулюйте необхідну умову зображення.
7. Наведіть приклади функцій, які задовольняють необхідній умові зображення при перетворенні Лапласа.
8. Чи може функція $F(p) = \cos\dfrac{1}{p}$ бути зображенням деякого оригінала?
9. Перевірте, які з вказаних функцій є оригіналами: а) $t^2\eta(t)$; б) $b^t\eta(t)$, $b>0$, $b\neq 1$; в) $e^{4t^2}\eta(t)$; г) $\dfrac{\eta(t)}{t-3}$; д) $t^t\eta(t)$; е) $\dfrac{\eta(t)}{t^2+2}$; ж) $\mathrm{ctg}\,t\,\eta(t)$.

10. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайдіть зображення функції $f(t)=t^n$, $n\in N$.
11. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайдіть зображення функції $f(t)=\begin{cases}1-t, t\in[0;1],\\ 0, t\notin[0;1].\end{cases}$
12. Сформулюйте основні властивості перетворення Лапласа.
13. Сформулюйте теореми про диференціювання оригіналів та зображень.
14. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайдіть зображення наступних функцій: 1) $\sin^2\omega t$; 2) $\frac{1}{2}(\cos t+\operatorname{ch}t)$; 3) $\sin\alpha t\cos\beta t$; 4) $\cos^3\omega t$; 5) $e^{-\alpha t}\cos^2\beta t$; 6) $\sin\alpha t\cdot\operatorname{ch}\beta t$.
15. Знайдіть зображення наступних функцій: а) $e^{t-2}\eta(t-2)$, б) $e^{t-2}\eta(t)$; в) $e^t\eta(t-2)$; г) $t^2\eta(t-1)$; д) $(t-1)^2\eta(t-1)$.
16. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t)=\begin{cases}0,\ t<0,\\ 1,\ 0\le t<1,\\ -1,\ 1\le t<2,\\ 0, t\ge 2.\end{cases}$ б) $f(t)=\begin{cases}0,\ t<0,\\ t,\ 0\le t<1,\\ 1,\ t\ge 1.\end{cases}$
17. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t)=|\sin 2t|$; б) $f(t)=\{2t\}$.
18. Знайдіть зображення розв'язку задачі Коші: $x''+3x'=e^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$.
19. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t)=t^2\cos t$; б) $f(t)=(t+2)\operatorname{sh}4t$.
20. Знайдіть зображення функції $f(t)=\int\limits_0^t \tau^{10}e^{-2\tau}d\tau$.
21. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t)=\frac{\cos t-\cos 2t}{t}$; б) $f(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{t}$.
22. Обчисліть інтеграли ($a>0$, $b>0$): а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$; б) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos at-\cos bt}{t}dt$.
23. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t)=t\sqrt[3]{t}$; б) $f(t)=t^3\sqrt{t}$.
24. Знайдіть згортку функцій $f*g$, якщо: а) $f(t)=t^2$, $g(t)=t^3$; б) $f(t)=\sqrt{1+t}$, $g(t)=1$.
25. Знайдіть зображення згорток функцій із завдання 22.
26. Користуючись теоремою множення зображень, знайдіть оригінали для наступних функцій: а) $F(p)=\frac{p}{(p-1)(p^2+4)}$; б) $F(p)=\frac{p^2}{(p^2+9)(p^2+16)}$.
27. Знайдіть зображення розв'язку інтегрального рівняння:

$$x(t)=\sin t+2\int_0^t \cos(t-\tau)\cdot x(\tau)d\tau .$$

2. ЗНАХОДЖЕННЯ ОРИГІНАЛА ЗА ЗАДАНИМ ЗОБРАЖЕННЯМ

2.1 Елементарний метод знаходження оригінала за заданим зображенням

У багатьох випадках зображення вдається перетворити до такого вигляду, коли відповідний оригінал легко знаходиться за допомогою властивостей перетворення Лапласа і таблиці зображень, наведеної у додатку А. Зокрема, якщо зображення $F(p)$ є раціональною функцією, то для для знаходження оригінала використовують метод розкладу зображення на елементарні дроби. Розглянемо сутність цього методу на прикладах.

Приклад 2.1. Знайти оригінал для функції $F(p)=\dfrac{5(p-9)}{p(p-1)\left(p^2+9\right)}$.

Розв'язання. Представимо задане зображення $F(p)$ у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{5(p-9)}{p(p-1)\left(p^2+9\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+9}.$$

Приводячи суму дробів у правій частині цієї рівності до спільного знаменника та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях p, отримуємо значення невідомих коефіцієнтів A, B, C та D і зображення $F(p)$ у вигляді:

$$\frac{5(p-9)}{p(p-1)\left(p^2+9\right)}=\frac{5}{p}-\frac{4}{p-1}-\frac{p}{p^2+9}+\frac{4}{p^2+9}.$$

Використавши теорему лінійності та таблицю зображень, знаходимо оригінал:

$$F(p)\div f(t)=5-4e^t-\cos 3t+\frac{4}{3}\sin 3t .$$

Приклад 2.2. Знайти оригінал для функції $F(p)=\dfrac{1}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою про множення зображень. Запишемо $F(p)$ у вигляді:

$$F(p)=\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

Згідно з теоремою 1.14 маємо:

$$\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\div\sin t*\sin t=\int_0^t\sin(t-\tau)\sin\tau d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left(\cos(t-2\tau)-\cos t\right)d\tau=-\frac{1}{4}\sin(t-2\tau)\Big|_0^t-\frac{1}{2}t\cos t=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

Отже, оригінал заданого зображення має вигляд: $f(t)=\frac{1}{2}(t\cos t-\sin t)$

2.2 Теорема Рімана-Мелліна

У загальному випадку розв’язання задачі знаходження оригінала за заданим зображенням ґрунтується на теоремі обернення (теоремі Рімана-Мелліна).

Теорема 2.1. (Теорема Рімана-Мелліна). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом, а $F(p)$ – її зображення, то у кожній точці неперервності функції $f(t)$ справедлива *формула обернення Рімана-Мелліна*:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}dp, \tag{2.1}$$

де інтегрування здійснюється по довільній прямій $\operatorname{Re}p=\gamma$, $\gamma>\alpha$ (α – показник зростання функції $f(t)$) і інтеграл розглядається у розумінні головного значення.

Доведення. Як відомо з теорії інтегралів Фур’є, для абсолютно інтегровної кусково-гладкої функції $f(t)$ виконується рівність:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-isu}f(u)du\right)ds, \tag{2.2}$$

де зовнішній інтеграл розглядається як головне значення.

Розглянемо функцію $\varphi(t)=e^{-\sigma t}f(t)$, $\sigma>\alpha$. Для неї виконується формула (2.2), тобто $\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}\Phi(s)ds$, де $\Phi(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ist}\varphi(t)dt$. Оскільки $f(t)=0$ при $t<0$, то $\Phi(s)=\int_0^{+\infty}e^{-ist}\varphi(t)dt$. Тоді отримуємо:

$$\int_0^{+\infty}e^{ist}\varphi(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-ist}e^{-\sigma t}f(t)dt=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(\sigma+is)t}dt.$$

Позначимо $p=\sigma+is$, $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$. Оскільки $\Phi(s)=F(p)$, то

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}F(\sigma+is)ds.$$

Тому $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma+si)t}F(\sigma+is)ds$. Це означає, що виконується рівність $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp$. Теорему доведено.

2.3 Теореми розвинення

Безпосереднє застосування формули (2.1) часто пов'язане з технічними труднощами, тому на практиці для знаходження оригіналу користуються теоремами розвинення, що ґрунтуються на теоремі Рімана – Мелліна.

Теорема 2.2. (Перша теорема розвинення). Якщо функція $F(p)$ є аналітичною у околі нескінченно віддаленої точки $p=\infty$ і її розвинення у ряд Лорана має вигляд $F(p)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}}$, то функція $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\frac{t^n}{n!}$ є оригіналом для зображення $F(p)$.

Приклад 2.3. Знайти оригінал $f(t)$ для функції $F(p)=\frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}$.

Розв'язання. Знайдемо розвинення зображення $F(p)$ у ряд Лорана:

$$F(p)=\frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot p^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot p^{2n+2}}\div\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{((2n+1)!)^2}.$$

Теорема 2.3. (Друга теорема розвинення). Якщо функція $F(p)$ є однозначною та має скінченне число особливих точок p_1, p_2,…, p_n, то функція

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(e^{p_k t}F(p_k)\right) \tag{2.3}$$

є оригіналом, що має зображення $F(p)$.

Доведення. Нехай $F(p)$ – функція, що є аналітичною у всій комплексній площині за винятком скінченного числа особливих точок та задовольняє умові $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$. Виберемо пряму, вздовж якої здійснюється інтегрування у формулі (2.1) (пряма $\operatorname{Re}p=\sigma$) так, щоб всі особливі точки функції $F(p)$ були розташовані ліворуч від цієї прямої. У такому випадку інтеграл (2.1) можна обчислити з допомогою *леми Жордана*, відомої з курсу теорії функцій комплексної змінної: якщо функція $F(p)\to 0$ при $p\to\infty$, то інтеграл $\int\limits_{C_R} F(p)e^{pt}dp$, взятий по дузі C_R кола $|p|=R$, такий, що на цій дузі $\operatorname{Re} p<\sigma$, при $t>0$ прямує до нуля, якщо $R\to+\infty$.

Виберемо контур, що складається з відрізка AB прямої $\operatorname{Re} p=\sigma$ та дуги C_R, радіус якої R візьмемо достатньо великим, щоб всі особливі точки p_1, $p_2,\ldots,$ p_n функції $F(p)$ попали всередину цього контуру. За основною теоремою про лишки, відомою з курсу теорії функції комплексної змінної, отримуємо:

$$\int\limits_{AB} F(p)e^{pt}dp+\int\limits_{C_R} F(p)e^{pt}dp=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(F(p)e^{pt}\right)\Big|_{p=p_k}.$$

При $t>0$ за лемою Жордана $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} F(p)e^{pt}dp=0$, тому з останньої рівності при $R\to+\infty$ отримуємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp=f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(F(p)e^{pt}\right)\Big|_{p=p_k},$$

тобто отримали формулу (2.3).

З першої теореми розвинення випливає, що у випадку, коли $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ – правильний раціональний дріб, то оригіналом для нього буде функція

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\left(\left(p-p_k\right)^{n_k}\frac{Q(p)}{R(p)}e^{pt}\right)^{(n_k-1)}. \qquad (2.4)$$

У формулі (2.4) p_k – полюси порядку n_k функції $F(p)$. Якщо всі ці полюси (нулі знаменника $R(p)$) є простими, то оригіналом для $F(p)$ є функція

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t}. \qquad (2.5)$$

Формулу (2.5) можна записати також у вигляді:

$$\begin{aligned}f(t)=&\frac{Q(p_1)\cdot e^{p_1 t}}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)\ldots(p_1-p_n)}+\frac{Q(p_2)\cdot e^{p_2 t}}{(p_2-p_1)(p_2-p_3)\ldots(p_2-p_n)}+\\&+\ldots+\frac{Q(p_n)\cdot e^{p_n t}}{(p_n-p_1)(p_n-p_2)\ldots(p_n-p_{n-1})}.\end{aligned} \qquad (2.6)$$

Приклад 2.4. Знайти оригінал $f(t)$ для функції $F(p)=\dfrac{3p}{(p+1)^2(p-2)^2}$.

Розв'язання. Функція $F(p)$ має полюси $p_1=-1$ та $p_2=2$ другого порядку, тому застосуємо формулу (2.4):

$$f(t)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to-1}\left(\frac{3pe^{pt}}{(p-2)^2}\right)'+\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to2}\left(\frac{3pe^{pt}}{(p+1)^2}\right)'=$$

$$=3\lim_{p\to-1}\frac{e^{pt}\left((1+pt)(p-2)-2p\right)}{(p-2)^3}+3\lim_{p\to2}\frac{e^{pt}\left((1+pt)(p+1)-2p\right)}{(p+1)^3}=$$

$$=\frac{1}{9}\left((6t-1)e^{2t}-(3t-1)e^{-t}\right).$$

Приклад 2.5. Знайти оригінал $f(t)$ для функції $F(p)=\dfrac{1}{p^4-1}$.

Розв'язання. Знаменник функції $F(p)$ має лише прості корені $p_1=-1$, $p_2=1$, $p_3=-i$, $p_4=i$. Тому за формулою (2.6) маємо:

$$f(t)\div\frac{e^{-t}}{(-1+i)(-1-i)(-1-1)}+\frac{e^{t}}{(1+1)(1+i)(1-i)}+\frac{e^{it}}{(i+1)(i-1)(i+i)}+$$

$$+\frac{e^{-it}}{(-i+1)(-i-1)(-i-i)}=-\frac{e^{-t}}{4}+\frac{e^{t}}{4}+\frac{ie^{it}}{4}-\frac{ie^{-it}}{4}=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t-\sin t).$$

Якщо серед особливих точок раціонального зображення $F(p)$ є прості полюси $p=\alpha\pm\beta i$, то

$$\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)\Big|_{p=\alpha+\beta i}+\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)\Big|_{p=\alpha-\beta i}=2\operatorname{Re}\left[\operatorname{Res}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)\Big|_{p=\alpha+\beta i}\right]. \quad (2.7)$$

Приклад 2.6. Знайти оригінал $f(t)$ для зображення $F(p)=\dfrac{2p+3}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

Розв'язання. Особливими точками зображення $F(p)$ є прості полюси $p_{1,2}=\pm i$ та $p_{3,4}=\pm3i$. За формулами (2.3) та (2.7) маємо:

$$f(t)=2\operatorname{Re}\left[\operatorname{Res}\left(\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p^2+1)(p^2+9)}\right)\Bigg|_{p=i}\right]+2\operatorname{Re}\left[\operatorname{Res}\left(\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p^2+1)(p^2+9)}\right)\Bigg|_{p=3i}\right].$$

Знаходимо лишки у точках $p=i$ та $p=3i$:

$$\operatorname{Res}\left[\left(\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p^2+1)(p^2+9)}\right)\Bigg|_{p=i}\right]=\frac{(2i+3)e^{it}}{16i}=\frac{(2-3i)(\cos t+i\sin t)}{16},$$

$$\operatorname{Res}\left[\left(\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p^2+1)(p^2+9)}\right)\Bigg|_{p=3i}\right]=\frac{(6i+3)e^{3it}}{-48i}=\frac{(-2+i)(\cos3t+i\sin3t)}{16},$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{(2-3i)(\cos t+i\sin t)}{16}\right]=\frac{2\cos t+3\sin t}{16},$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{(-2+i)(\cos 3t+i\sin 3t)}{16}\right]=-\frac{2\cos 3t+\sin 3t}{16}.$$

За формулою (2.7) знаходимо оригінал для заданого зображення:

$$f(t)=\frac{2\cos t+3\sin t-2\cos 3t-\sin 3t}{8}.$$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. У чому полягає елементарний метод знаходження оригінала за заданим зображенням?
2. Як застосовують теорему множення зображень для знаходження оригінала їх добутку?
3. Сформулюйте теорему Рімана-Мелліна.
4. Сформулюйте умови, яким повиненно задовольняти зображення, щоб до нього можна було застосувати першу теорему розвинення.
5. Сформулюйте другу теорему розвинення. Для яких зображень її можна застосовувати?
6. Наведіть формулу для визначення оригінала раціонального зображення, всі особливі точки якого є простими полюсами.
7. Як визначають оригінал раціонального зображення, особливими точками якого є полюси різних порядків?
8. Наведіть формулу для визначення оригінала раціонального зображення, що має прості комплексні полюси.
9. Чи може бути зображенням функція $F(p)=\dfrac{2p^2+p}{p^2+p+1}$?
10. Розклавши задане зображення $F(p)$ на елементарні дроби, знайдіть оригінали, якщо:

 1) $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2-5p+6}$; 2) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$; 3) $F(p)=\dfrac{3p-2}{(p^2+1)(p^2-p+1)}$

 4) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$; 5) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$; 6) $F(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^3-6p^2+5p}$.
11. Знайдіть оригінали для наступних зображень:

 1) $F(p)=\dfrac{p^2+p-1}{(p-2)(p^2-p-20)}$; 2) $F(p)=\dfrac{p^2-p+2}{(p^2+4)(p^2+1)}$;

3) $F(p)=\dfrac{1}{p^3(p+1)^4}$; 4) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^3(p^2+1)(p-2)}$.

12.Знайдіть оригінал для зображення $F(p)$, якщо:

а) $F(p)=\dfrac{1}{p}\cos\dfrac{1}{p}$; б) $F(p)=\dfrac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2}$.

13.Знайдіть оригінал $f(t)$ для зображення $F(p)=\dfrac{n!}{p(p+1)(p+2)...(p+n)}$.

14.Знайдіть оригінал $f(t)$ для зображення $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-2p}}{p^3}+\dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$.

Побудуйте графік $f(t)$.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ

3.1 Розв'язання лінійних диференціальних рівнянь та систем

Застосування до диференціального рівняння перетворення Лапласа приводить до алгебраїчного рівняння відносно зображення. З отриманого рівняння можна знайти зображення шуканого оригінала, а далі за зображенням можна відтворити оригінал.

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку з сталими коефіцієнтами відносно невідомої функції $x(t)$, що задовольняє вимогам оригіналу:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t). \tag{3.1}$$

Будемо шукати розв'язок цього рівняння, що задовольняє початкові умови:

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0',\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \tag{3.2}$$

Нехай $x(t) \div X(p)$, $f(t) \div F(p)$. Застосовуючи до обох частин рівняння (3.1) перетворення Лапласа і використовуючи теорему лінійності та теорему про диференціювання оригінала, від диференціального рівняння (3.1) з початковими умовами (3.2) переходимо до алгебраїчного рівняння виду

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) X(p) + Q(p) = F(p),$$

де $Q(p)$ – деякий многочлен, коефіцієнти якого визначаються початковими умовами (3.2).

Розв'язавши отримане рівняння відносно зображення $X(p)$, отримуємо:

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Знайшовши оригінал $x(t)$ для $X(p)$, ми одержимо шуканий розв'язок диференціального рівняння (3.1) з початковими умовами (3.2), тобто розв'язок задачі Коші.

Аналогічно розв'язують і системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Різниця полягає лише у тому, що замість одного алгебраїчного рівняння отримуємо систему кількох рівнянь відносно зображень.

Приклад 3.1. Розв'язати задачу Коші: $x'(t) + x(t) = e^{-t}$, $x(0) = 1$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригінала $x'(t) \div pX(p) - 1$. Застосувавши перетворення Лапласа до заданої задачі Коші, отримуємо: $pX(p) - 1 + X(p) = \dfrac{1}{p+1}$. Розв'язавши це алгебраїчне рівняння відносно $X(p)$ маємо: $X(p) = \dfrac{1}{(p+1)^2} + \dfrac{1}{p+1}$.

Оскільки $\dfrac{1}{(p+1)^2} \div te^{-t}$, $\dfrac{1}{p+1} \div e^{-t}$, то шуканий розв’язок $x(t)$ має вигляд:

$$x(t) = (t+1)e^{-t}.$$

Приклад 3.2. Розв’язати задачу Коші:

$$x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t,\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$$

Розв’язання. Нехай $x(t) \div X(p)$, тоді, з урахуванням початкових умов, $x''(t) \div p^2 X(p)$, $x^{(4)}(t) \div p^4 X(p)$. Оскільки $\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$, то зображенням заданого диференціального рівняння є алгебраїчне рівняння відносно зображення $X(p)$:

$$p^4 X(p) + 2p^2 X(p) + X(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Звідси знаходимо, що $X(p) = \dfrac{1}{\left(p^2+1\right)^3}$. Знайдемо тепер оригінал, що відповідає даному зображенню. Функція $X(p)$ має два полюси $\pm i$ третього порядку. Тому за формулою (2.4) отримуємо:

$$x(t) = \frac{1}{2!}\lim_{p\to -i}\left(\frac{e^{pt}}{(p-i)^3}\right)'' + \frac{1}{2!}\lim_{p\to -i}\left(\frac{e^{pt}}{(p-i)^3}\right)'' = \frac{3}{8}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{8}t^2 \sin t.$$

Приклад 3.3. Знайти розв’язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y = e^t, \\ x + y' = e^{-t}, \end{cases}$$

при початкових умовах $x(0) = y(0) = 1$.

Розв’язання. Нехай $x(t) \div X(p)$, $y(t) \div Y(p)$. Тоді $x'(t) \div pX(p) - 1$, $y'(t) \div pY(p) - 1$. Оскільки $e^t \div \dfrac{1}{p-1}$, $e^{-t} \div \dfrac{1}{p+1}$, то внаслідок застосування до заданої системи диференціальних рівнянь перетворення Лапласа отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно зображень розв’язків $X(p)$ та $Y(p)$:

$$\begin{cases} pX - 1 + Y = \dfrac{1}{p-1}, \\ pY - 1 + X = \dfrac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, отримаємо:

$$X(p) = \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p^2-1} + \frac{p^2+1}{\left(p^2-1\right)^2},\ Y(p) = \frac{p}{p^2-1} - \frac{2p}{\left(p^2-1\right)^2}.$$

Використовуючи таблицю оригіналів та зображень, знаходимо оригінали для зображень $X(p)$ та $Y(p)$:

$$x(t)=\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t+t\operatorname{ch} t,\ y(t)=\operatorname{ch} t-t\operatorname{sh} t.$$

Розглянемо приклад розв'язання диференціального рівняння (3.1) операційним методом, коли права частина рівняння $f(t)$ має точки розриву першого роду, тобто є кусочно неперервною функцією.

Приклад 3.4. Знайти розв'язок диференціального рівняння $x''+x=f(t)$ при початкових умовах $x(0)=x'(0)=0$, якщо функція $f(t)$ має вигляд:

$$f(t)=\begin{cases}0, t<1;\\ 1, 1\le t<3;\\ 0, t\ge 3.\end{cases}$$

Розв'язання. Праву частину $f(t)$ запишемо у вигляді: $f(t)=\eta(t-1)-\eta(t-3)$, де $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда. Застосуємо до заданого диференціального рівняння перетворення Лапласа. Зображення $f(t)$ згідно з теоремою запізнення, має вигляд: $F(p)=\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-3p}}{p}=\frac{e^{-p}\left(1-e^{-2p}\right)}{p}$

Нехай $x(t)\div X(p)$. Тоді зображення диференціального рівняння з врахуванням початкових умов має вигляд:

$$p^2X(p)+X(p)=\frac{e^{-p}\left(1-e^{-2p}\right)}{p}.$$

Звідси знаходимо зображення $X(p)$: $X(p)=\frac{e^{-p}-e^{-3p}}{p\left(p^2+1\right)}$. Для знаходження оригінала $x(t)$ використаємо теорему запізнення. Знайдемо спочатку оригінал для функції $\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}$. Маємо:

$$\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}=\frac{p^2+1-p^2}{p\left(p^2+1\right)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\div 1-\cos t.$$

Тоді за теоремою запізнення отримуємо:

$$e^{-p}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\right)\div(1-\cos t)\cdot\eta(t-1),\ e^{-3p}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\right)\div(1-\cos t)\cdot\eta(t-3).$$

Таким чином, розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд:

$$x(t)=(1-\cos t)\cdot\eta(t-1)-(1-\cos t)\cdot\eta(t-3).$$

Цей розв'язок можна записати у вигляді:

$$x(t)=\begin{cases}0,\ t<1;\\ 1-\cos(t-1),\ 1\le t<3;\\ -\cos(t-1)+\cos(t-3),\ t\ge 3.\end{cases}$$

Операційне числення можна застосувати також до розв'язання деяких лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, зокрема, якщо ці коефіцієнти є многочленами. При переході від диференціального рівняння відносно оригінала $x(t)$ до рівняння відносно зображення $X(p)$ використовують теорему про диференціювання зображень, згідно з якою похідна $\dfrac{dX}{dp}\div -t\cdot x(t)$. Тому внаслідок застосування перетворення Лапласа отримуємо диференціальне рівняння відносно зображення $X(p)$, порядок якого дорівнює максимальному степеню многочленів, що є коефіцієнтами для оригінала, а степені коефіцієнтів отриманого рівняння не перевищують порядку рівняння відносно оригінала. Операційний метод для розв'язання рівнянь з коефіцієнтами-многочленами доцільно застосовувати, якщо старший степінь його коефіцієнтів менший ніж порядок диференціального рівняння.

Приклад 3.5. Розв'язати рівняння $t\cdot x''+x'-t\cdot x=0$, якщо $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

Розв'язання. Нехай $x(t)\div X(p)$. Застосуємо до заданого рівняння перетворення Лапласа. Тоді отримуємо:

$$-t\cdot x(t)\div\frac{dX}{dp},\ x'(t)\div pX(p)-x(0)=pX(p)-1,$$

$$x''(t)\div p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-p,$$

$$t\cdot x''(t)\div-\left(p^2X(p)-p\right)'=-2pX(p)-p^2\frac{dX}{dp}+1.$$

Отже, рівняння відносно зображення $X(p)$ має вигляд:

$$-2pX-p^2\frac{dX}{dp}+1+pX-1+\frac{dX}{dp}=0,\Rightarrow\left(1-p^2\right)\frac{dX}{dp}-pX=0.$$

Звідси знаходимо:

$$\frac{dX}{X}=\frac{pdp}{1-p^2},\Rightarrow\ln|X|=-\frac{1}{2}\ln\left|1-p^2\right|+\ln|C|=\ln\left|\frac{C}{\sqrt{1-p^2}}\right|.$$

Отже, $X(p)=\dfrac{C}{\sqrt{1-p^2}}$. Для знаходження сталої інтегрування C використаємо наслідок 1 з теореми про диференціювання оригінала, згідно з яким $\lim\limits_{p\to\infty}pX(p)=x(0)$. Маємо:

$$\lim_{p\to\infty}pX(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{Cp}{\sqrt{1-p^2}}=\lim_{p\to\infty}\frac{Cp}{i\sqrt{p^2-1}}=\lim_{p\to\infty}\frac{C_1p}{\sqrt{p^2-1}}=C_1=x(0)=1.$$

Отже, $X(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2-1}}=\frac{1}{p}\cdot\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Для знаходження оригіналу запишемо зображення $X(p)$ у вигляді ряду. Для цього застосуємо формулу біноміального ряду: $(1+z)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)...(m-n+1)z^n}{n!}$. Підставивши сюди $z=-\frac{1}{p^2}$, $m=-\frac{1}{2}$, отримуємо:

$$X(p)=\frac{1}{p}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)...\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(-1)^n}{p^{2n}}=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{p^{2n+1}}\right).$$

Для знаходження оригінала $x(t)$ застосуємо першу теорему розвинення, згідно з якою отримуємо:

$$x(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n)!}t^{2n}.$$

3.2 Розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою формули Дюамеля

Лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами (3.1) можна записати у вигляді: $L(x)=f(t)$, де символ $L(x)$ означає *лінійний диференціальний оператор* n*-го порядку*: $L(x)=x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+...+a_nx$. З означення лінійного диференціального оператора випливає, що $L(c_1x_1+c_2x_2)=c_1L(x_1)+c_2L(x_2)$, де $x_1(t)$ та $x_2(t)$ – довільні n разів диференційовні функції, c_1 та c_2 – довільні константи.

Теорема 3.1. Якщо $x_1(t)$ є розв'язком диференціального рівняння $L(x)=1$ при нульових початкових умовах, то розв'язком рівняння $L(x)=f(t)$ при таких самих початкових умовах є функція

$$x(t)=\int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau. \tag{3.3}$$

Доведення. Застосувавши перетворення Лапласа при нульових початкових умовах до рівняння $L(x)=1$, отримаємо алгебраїчне рівняння $\tilde{L}(p)X_1(p)=\frac{1}{p}$, де $\tilde{L}(p)=p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n$, $X_1(p)\div x_1(t)$. Звідси знаходимо: $\tilde{L}(p)=\frac{1}{pX_1(p)}$.

Зображенням рівняння $L(x)=f(t)$ при нульових початкових умовах є рівняння $\tilde{L}(p)X(p)=F(p)$, де $X(p)\div x(t)$, $F(p)\div f(t)$. Для зображення $X(p)$ отримуємо $X(p)=\dfrac{F(p)}{\tilde{L}(p)}=pX_1(p)F(p)$. Тоді за формулою Дюамеля (1.3) отримаємо:

$$x(t)=x_1(0)f(t)+\int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau=\int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau,$$

оскільки $x_1(0)=0$. Другий вираз у правій частині рівності (3.3) випливає з комутативності згортки. Теорему доведено.

Дана теорема дозволяє знаходити розв’язок диференціального рівняння (3.1) без використання зображення правої частини цього рівняння. Знаючи розв’язок для одиничної правої частини рівняння, ми за допомогою інтегрування знаходимо розв’язок для довільної правої частини. Вимога нульових початкових умов є несуттєвою: заміною шуканої функції задачу з ненульовими початковими умовами можна звести до задачі з нульовими умовами.

Приклад 3.6. Знайти розв’язок задачі Коші: $x_1''+x_1=\dfrac{1}{2+\cos t}$, $x(0)=x'(0)=0$.

Розв’язання. Спочатку розв’яжемо допоміжну задачу відносно невідомої функції $x_1(t)$: $x_1''+x_1=1$, $x_1(0)=x_1'(0)=0$. Застосувавши до цього рівняння перетворення Лапласа, отримуємо рівняння відносно зображення $X_1(p)$ функції $x_1(t)$: $p^2X_1(p)+X_1(p)=\dfrac{1}{p}$, звідки знаходимо:

$$X_1(p)=\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}=\frac{\left(p^2+1\right)-p^2}{p\left(p^2+1\right)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}.$$

Оригінал $x_1(t)$ для отриманого зображення $X_1(p)$ має вигляд: $x_1(t)=1-\cos t$.

Для знаходження розв’язку заданої задачі Коші використаємо формулу Дюамеля (3.3), згідно з якою

$$x(t)=\int_0^t x_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau=\int_0^t\frac{\sin(t-\tau)}{2+\cos\tau}d\tau.$$

Обчислимо інтеграл у правій частині цієї рівності:

$$\int_0^t\frac{\sin(t-\tau)}{2+\cos\tau}d\tau=\int_0^t\frac{\sin t\cos\tau}{2+\cos\tau}d\tau-\int_0^t\frac{\cos t\sin\tau}{2+\cos\tau}d\tau.$$

$$\int_0^t \frac{\cos t \sin\tau}{2+\cos\tau}d\tau = -\cos t\cdot\int_0^t \frac{d\left(2+\cos\tau\right)}{2+\cos\tau} = -\cos t\cdot\ln\left(2+\cos\tau\right)\Big|_0^t =$$

$$= -\cos t\left(\ln\left(2+\cos t\right)-\ln 3\right),$$

$$\int_0^t \frac{\sin t\cos\tau}{2+\cos\tau}d\tau = \left\| \begin{array}{l} z=\mathrm{tg}\dfrac{\tau}{2}, \cos\tau = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}, \\ d\tau = \dfrac{2dz}{1+z^2}. \end{array} \right\| = 2\sin t\int_0^{\mathrm{tg}\frac{t}{2}} \frac{\left(1-z^2\right)dz}{\left(1+z^2\right)\left(3+z^2\right)}.$$

Оскільки $\dfrac{1-z^2}{\left(1+z^2\right)\left(3+z^2\right)} = \dfrac{1}{z^2+1} - \dfrac{2}{z^2+3}$, то

$$2\sin t\int_0^t \frac{\cos\tau d\tau}{2+\cos\tau} = 2\sin t\int_0^{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{z^2+1}-\frac{2}{z^2+3}\right)dz = 2\sin t\left(\mathrm{arctg} z\Big|_0^{\mathrm{tg}\frac{t}{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}\right) =$$

$$= 2\sin t\left(\frac{t}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right) = \sin t\cdot\left(t-\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Таким чином, розв'язок заданої задачі Коші має вигляд:

$$x(t) = \sin t\cdot\left(t-\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \cos t\left(\ln\left(2+\cos t\right)-\ln 3\right).$$

3.3 Розв'язання інтегральних рівнянь типу згортки

Операційний метод можна ефективно застосувати до розв'язання *інтегральних рівнянь Вольтерра типу згортки*:

$$a\cdot f(t) = \varphi(t) + \lambda\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau. \qquad (3.4)$$

Тут інтеграл $\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$ є згорткою $K(t)*f(t)$ ядра інтегрального рівняння $K(t)$ та невідомої функції $f(t)$. Розв'язок цього рівняння можна знайти, застосувавши до нього перетворення Лапласа з подальшим застосуванням теореми множення зображень.

Розглянемо застосування операційного методу до розв'язання *інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду*, тобто при значеннях сталої $a\neq 0$ у рівнянні (3.4).

Якщо інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} K(t) * f(t) dt$ є абсолютно збіжним, то перетворення Лапласа за теоремою множення зображень відображає згортку у добуток зображень, тобто $K(t) * f(t) \div \tilde{K}(p) \cdot F(p)$, де $K(t) \div \tilde{K}(p)$. Тому рівняння (3.4) після переходу до зображень набуває вигляду:

$$a \cdot F(p) = \Phi(p) + \lambda \tilde{K}(p) F(p),$$

де $f(t) \div F(p)$, $\varphi(t) \div \Phi(p)$, $K(t) \div \tilde{K}(p)$.

Звідси отримуємо, що $F(p) = \dfrac{\Phi(p)}{a - \lambda \tilde{K}(p)}$. Цю рівність можна записати у вигляді: $F(p) = \dfrac{1}{a}\Phi(p) + \dfrac{\lambda}{a} \cdot \dfrac{\tilde{K}(p)}{a - \lambda \tilde{K}(p)} \Phi(p)$. Позначимо $\dfrac{\tilde{K}(p)}{a - \lambda \tilde{K}(p)} = \Psi(p)$ і нехай $\Psi(p) \div \psi(t)$. Тоді рівності $F(p) = \dfrac{1}{a}\Phi(p) + \dfrac{\lambda}{a} \cdot \Psi(p)\Phi(p)$ відповідає на множині оригіналів розв'язок $f(t) = \dfrac{1}{a}\varphi(t) + \dfrac{\lambda}{a}\psi(t) * \varphi(t)$.

Зокрема, якщо ядро $K(t)$ є многочленом, тобто $K(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$, то його зображення набуває вигляду: $\tilde{K}(p) = \dfrac{a_0}{p} + \dfrac{a_1}{p^2} + \ldots + \dfrac{a_n \cdot n!}{p^{n+1}}$. Тоді отримуємо:

$$\Psi(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{a - \lambda \tilde{K}(p)} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + n! a_n}{a p^{n+1} - \lambda\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} - a_n n!\right)}.$$

Функція $\Psi(p)$ є дробово-раціональною і її оригінал можна знайти за допомогою другої теореми розвинення (формула (2.4)).

Приклад 3.7. Розв'язати операційним методом інтегральне рівняння:

$$f(t) = \sin t + \frac{1}{2}\int\limits_0^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau.$$

Розв'язання. Застосуємо до даного рівняння перетворення Лапласа. Нехай $f(t) \div F(p)$. Тоді $\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$, $\int\limits_0^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau = t^2 * f(t) \div \dfrac{2}{p^3} F(p)$. Рівняння відносно зображення $F(p)$, що відповідає заданому інтегральному рівнянню, має вигляд:

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^3} F(p).$$

Звідси знаходимо вираз для зображення $F(p)$:

$$F(p)=\frac{p^3}{(p-1)(p^2+1)(p^2+p+1)}.$$

Оригінал $f(t)$ розв'язку заданого інтегрального рівняння Вольтерра другого роду типу згортки знаходимо, записавши вираз для $F(p)$ у вигляді суми елементарних дробів та застосувавши метод невизначених коефіцієнтів (див. підрозділ 2.1):

$$F(p)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p+1}{p^2+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2p+1}{p^2+p+1}.$$

Після елементарних перетворень за таблицею зображень при перетворенні Лапласа знаходимо шуканий розв'язок $f(t)=\frac{e^t}{6}+\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)-\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

Інтегральне рівняння Вольтерра першого роду типу згортки отримуємо з (3.4) при $a=0$. Воно має вигляд:

$$\varphi(t)=\lambda\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{3.5}$$

У результаті застосування до цього рівняння перетворення Лапласа отримуємо операторне рівняння $\Phi(p)=\lambda\tilde{K}(p)F(p)$, розв'язком якого є функція

$$F(p)=\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\tilde{K}(p)}\Phi(p). \tag{3.6}$$

Якщо вираз у правій частині (3.6) є зображенням, то розв'язком рівняння є оригінал функції $F(p)$. Слід зазначити, що у загальному випадку $\frac{1}{\tilde{K}}$ не є зображенням, для неї не виконується необхідна умова існування зображення – рівність $\lim\limits_{p\to\infty}\frac{1}{\tilde{K}(p)}=0$.

Приклад 3.8. Розв'язати інтегральне рівняння $\sin t=\int_0^t\cos(t-\tau)f(\tau)d\tau$.

Розв'язання. Тут $K(t)=\cos t$, $K(0)\neq 0$. Застосуємо перетворення Лапласа:

$$f(t)\div F(p),\ \int_0^t\cos(t-\tau)f(\tau)d\tau\div\frac{pF(p)}{p^2+1},\ \sin t\div\frac{1}{p^2+1}.$$

Рівняння відносно зображення $F(p)$ шуканої функції $f(t)$ набуває вигляду: $\frac{1}{p^2+1}=\frac{pF(p)}{p^2+1}$. Звідси знаходимо, що $F(p)=\frac{1}{p}$. Отже, $f(t)=1$.

Інтегральне рівняння (3.4) називають *особливим*, якщо його ядро $K(t)$ у одній або декількох точках проміжку інтегрування має нескінченний розрив, або ж одна чи обидві межі інтегрування є нескінченними. Прикладом такого рівняння є окремий випадок рівняння Вольтерра першого роду – *інтегральне рівняння Абеля.* Це рівняння має вигляд:

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} = \varphi(t), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{3.7}$$

Ядро цього рівняння $K(t) = t^{-\alpha}$, $\lim_{t \to 0+} K(t) = +\infty$. Зображення ядра $K(t)$ має вигляд: $t^{-\alpha} \div \dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}} = \tilde{K}(p)$.

Нехай ядро $K(t)$ інтегрального рівняння (3.4) при $t = 0$ має нескінченний розрив і не є диференційовним у цій точці. Розглянемо згортку функцій

$$f(t) * 1 = \int_0^t f(\tau)\,d\tau = g(t).$$

За теоремою про інтегрування оригіналу $g(t) \div G(p) = \dfrac{F(p)}{p}$ і за формулою (3.6) для зображення розв'язку рівняння (3.5) маємо:

$$G(p) = \frac{1}{\lambda p \tilde{K}(p)} \Phi(p).$$

Для рівняння Абеля отримуємо:

$$G(p) = \frac{1}{p^\alpha \Gamma(1-\alpha)} \Phi(p).$$

Оригінал зображення $G(p)$ має вигляд:

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} t^{\alpha-1} * \varphi(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^t \tau^{\alpha-1} \varphi(t-\tau)\,d\tau.$$

Тут ми використали відому формулу: $\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Вважаючи функцію $g(t)$ диференційовною, знаходимо розв'язок інтегрального рівняння Абеля у вигляді:

$$f(t) = g'(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \cdot \left(\int_0^t \tau^{\alpha-1} \varphi'(t-\tau)\,d\tau + \varphi(0) t^{\alpha-1} \right).$$

3.4 Розв'язання диференціально-різницевих рівнянь

У різноманітних науково-технічних задачах доводиться мати справу з диференціальними рівняннями, у які невідома функція входить при різних значеннях аргументу. Прикладом таких рівнянь є диференціальне рівняння n-го порядку:

$$f\Big(t,x(t),x\big(t-\tau_1(t)\big),x'(t),x'\big(t-\tau_2(t)\big),...,x\big(t-\tau_n(t)\big),x^{(n)}\big(t-\tau_n(t)\big)\Big)=0.$$

Означення 3.1. Диференціальні рівняння, до яких невідома функція входить при різних значеннях аргументу, називають *диференціальними рівняннями з відхиленням.* Якщо у диференціальному рівнянні з відхиленням всі відхилення $\tau_i(t)$, $i=1,2,...,n$, є сталими величинами, то таке рівняння називають *диференціально-різницевим рівнянням*. Якщо у диференціально-різницевому рівнянні всі відхилення $\tau_i(t)$, $i=1,2,...,n$, є додатними константами, а старша похідна невідомої функції входить у рівняння лише при одному значенні аргументу, не меншому, ніж всі інші аргументи функції та її похідних у даному рівнянні, то таке диференціально-різницеве рівняння називають *диференціальним рівнянням з запізненням*.

Прикладом диференціального рівняння з запізненням є рівняння

$$x''(t)=\varphi\big(t,x(t),x'(t),x(t-\tau_1),x'(t-\tau_2)\big),$$

де $\tau_1>0$, $\tau_2>0$.

Розглянемо диференціальне рівняння з запізненням зі сталими коефіцієнтами:

$$x^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k x^{(k)}(t-\tau_k)+f(t), \tag{3.8}$$

де коефіцієнти a_k та відхилення τ_k є сталими величинами, $\tau_k\ge 0$, $k=1,2,...,n$, $t\ge 0$. Шукана функція $x(t)$ повинна задовольняти заданим початковим умовам:

$$x(0)=x'(0)=...=x^{(n-1)}(0)=0. \tag{3.9}$$

Застосуємо до обох частин рівняння (3.8) перетворення Лапласа, використавши при цьому теорему 1.6 (теорему запізнення). Отримаємо алгебраїчне рівняння відносно зображення $X(p)$ шуканої функції $x(t)$:

$$p^n X(p)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k p^k X(p)e^{-\tau_k p}+F(p), \tag{3.10}$$

де $f(t)\div F(p)$.

З рівності (3.10) визначаємо зображення $X(p)$:

$$X(p)=\frac{F(p)}{p^n-\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k p^k e^{-\tau_k p}}.$$

Знайшовши функцію $x(t)$, що є оригіналом для $X(p)$, отримуємо розв'язок задачі (3.8), (3.9).

Приклад 3.8. Розв'язати рівняння $x''(t)-x(t-1)=t$, якщо $x(0)=x'(0)=0$.

Розв'язання. Застосувавши до заданого рівняння перетворення Лапласа, отримаємо: $p^2X(p)-X(p)e^{-p}=\dfrac{1}{p^2}$. Звідси знаходимо зображення розв'язку рівняння: $X(p)=\dfrac{1}{\left(p^2-e^{-p}\right)p^2}$. Використовуючи формулу для суми нескінченно спадної геометричної прогресії, запишемо отриманий вираз для $X(p)$ у наступному вигляді:

$$X(p)=\frac{1}{p^4}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{e^{-p}}{p^2}}=\frac{1}{p^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-np}}{p^{2n}}.$$

З урахуванням теореми запізнення, знаходимо оригінал $x(t)$ у вигляді ряду:

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-k)^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\eta(t-k),$$

де $\eta(t)$ – функція Хевісайда.

Для диференціальних рівнянь з запізненням, що описують процеси з післядією, часто зустрічаються задачі у наступній постановці. Потрібно знайти розв'язок $x(t)$ рівняння (3.8) для $t\ge t_0$, причому для всіх $t<t_0$, значення $x(t)$ у яких впливають на значення розв'язку при $t\ge t_0$, функція $x(t)$ є відомою. Наприклад, потрібно знайти неперервний розв'язок $x(t)$ при $t\ge t_0$ рівняння

$$x'(t)=f\bigl(t,x(t),x(t-\tau)\bigr),$$

де τ – задана додатня константа, якщо відомо, що $x(t)=\varphi(t)$, $t_0-\tau\le t\le t_0$. Розглянемо приклад розв'язання такої задачі.

Приклад 3.9. Розв'язати рівняння $x'(t)=x(t-1)$, якщо $x(t)=t$ при $-1\le t\le 0$.

Розв'язання. Нехай $x(t)\div X(p)$. Тоді $x'(t)\div pX(p)-x(0)=pX(p)$. З заданого рівняння випливає, що $pX(p)=\int\limits_0^{+\infty}x(t-1)e^{-pt}dt$. Виконаємо у останньому інтегралі заміну змінної $\tau=t-1$. Тоді $d\tau=dt$, при $t=0$ $\tau=-1$, при $t\to+\infty$ $\tau\to+\infty$. Отримуємо:

$$\int\limits_0^{+\infty}x(t-1)e^{-pt}dt=\int\limits_{-1}^{+\infty}x(\tau)e^{-p(\tau+1)}d\tau=e^{-p}\int\limits_{-1}^{0}x(\tau)e^{-p\tau}d\tau+e^{-p}\int\limits_{0}^{+\infty}x(\tau)e^{-p\tau}d\tau=$$
$$=e^{-p}\int\limits_{-1}^{0}\tau e^{-p\tau}d\tau+e^{-p}X(p).$$

Застосувавши до останнього інтеграла формулу інтегрування частинами, знаходимо:

$$\int_{-1}^{0}\tau e^{-p\tau}d\tau=\left\|\begin{matrix}u=\tau,\, dv=e^{-p\tau}d\tau,\\ du=d\tau,\, v=\int dv=-\dfrac{e^{-p\tau}}{p}\end{matrix}\right\|=-\frac{\tau e^{-p\tau}}{p}\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{1}{p}\int_{-1}^{0}e^{-p\tau}d\tau=-\frac{e^{p}}{p}-$$

$$-\frac{e^{-p\tau}}{p^2}\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{e^{p}}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{e^{p}}{p^2}.$$

Отже, $pX(p)=\dfrac{1-e^{-p}}{p^2}-\dfrac{1}{p}+e^{-p}X(p)$. З отриманого рівняння відносно зображення $X(p)$ знаходимо:

$$X(p)=\frac{1}{p^2\left(p-e^{-p}\right)}-\frac{1}{p\left(p-e^{-p}\right)}-\frac{e^{-p}}{p^2\left(p-e^{-p}\right)}=\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p^3}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{1-\dfrac{e^{-p}}{p}}=\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p^3}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-np}}{p^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-np}}{p^{n+3}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-np}}{p^{n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-(n+1)p}}{p^{n+3}}\div$$

$$\div\left\|\frac{1}{p^k}\div\frac{t^{k-1}}{(k-1)!},\, f(t-\tau)\cdot\eta(t-\tau)\div e^{-p\tau}F(p)\right\|\div\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-n)^{n+2}\cdot\eta(t-n)}{(n+2)!}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-n)^{n+1}\cdot\eta(t-n)}{(n+1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-n-1)^{n+2}\cdot\eta(t-n-1)}{(n+2)!}.$$

Таким чином, отримали розв'язок даної задачі:

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-n)^{n+2}\cdot\eta(t-n)}{(n+2)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-n)^{n+1}\cdot\eta(t-n)}{(n+1)!}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-n-1)^{n+2}\cdot\eta(t-n-1)}{(n+2)!}.$$

3.5 Розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь

Розглянемо застосування операційного методу до розв'язання рівнянь, що містять невідому функцію $x(t)$ та її похідні $x'(t)$, $x''(t)$, …, $x^{(n)}(t)$ і при цьому містять інтеграли, до яких входять $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$, …, $x^{(n)}(t)$.

Рівняння виду

$$a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...+a_nx(t)+\sum_{m=0}^{n}\int_{0}^{t}k_m(t-\tau)x^{(m)}(\tau)d\tau=f(t),\qquad(3.11)$$

де a_0, a_1,…, a_n – задані числа, ядра $k_m(t)$ та $f(t)$ – задані функції, $x(t)$ – шукана функція, є *інтегро-диференціальним рівнянням*.

Інтегро-диференціальне рівняння (3.11) можна розв'язати, застосувавши до нього перетворення Лапласа. Нехай $x(t)\div X(p)$, $k_m(t)\div K_m(p)$. Оскільки за теоремою про диференціювання оригіналу

$$x^{(m)}(t) \div p^m X(p) - p^{m-1}x(0) - p^{m-2}x'(0) - \ldots - x^{(m-1)}(0) = \Phi(p),$$

то за теоремою множення зображень маємо:

$$\int_0^t k_m(t-\tau)x^{(m)}(\tau)d\tau \div K_m(p)\Phi(p).$$

Таким чином, застосування перетворення Лапласа дозволяє звести розв'язання інтегро-диференціального рівняння (3.11) відносно оригіналу $x(t)$ до розв'язання алгебраїчного рівняння відносно зображення $X(p)$.

Приклад 3.10. Розв'язати інтегро-диференціальне рівняння:

$$x''(t) + \int_0^t \sin(t-\tau)\cdot\left(x''(\tau) + x(\tau)\right)d\tau = 2\cos t,$$

якщо $x(0) = x'(0) = 0$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$, тоді $x''(t) \div p^2 X(p)$, $\cos t \div \frac{p}{p^2+1}$, $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$. За теоремою множення зображень отримуємо:

$$\int_0^t \sin(t-\tau)\cdot\left(x''(\tau) + x(\tau)\right)d\tau \div \frac{1}{p^2+1}\left(p^2 X(p) + X(p)\right).$$

Після застосування перетворення Лапласа отримуємо рівняння відносно зображення $X(p)$:

$$p^2 X + \frac{1}{p^2+1}\cdot\left(p^2+1\right)X = \frac{2p}{p^2+1}.$$

Розв'язавши його, знаходимо:

$$X(p) = \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

За таблицею перетворення Лапласа знаходимо оригінал $X(p) \div x(t) = t\sin t$.

3.6 Розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку відносно невідомої функції $u(x,t)$:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad (3.12)$$

де a, b, c, a_1, b_1 є неперервними функціями, що залежать лише від змінної x, $x \in [0; l]$. Будемо вважати, що $a > 0$. Розглянемо два випадки: 1) $a_1 < 0$ – гіперболічний випадок; 2) $a_1 \equiv 0$, $b_1 < 0$ – параболічний випадок.

Потрібно знайти розв’язок $u(x,t)$ диференціального рівняння (3.12) для $t \geq 0$ та $0 \leq x \leq l$, що задовольняє початкові умови $u(x,0) = \varphi(x)$ для параболічного випадку або $u(x,0) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$ для гіперболічного випадку, а також крайовим умовам $u(0,t) = f(t)$, $\alpha \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial t} = \gamma u(l,t)$, де α, β, γ – задані сталі величини.

Будемо вважати, що u, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ є функціями-оригіналами змінної t. Застосуємо до рівняння (3.12) перетворення Лапласа за цією змінною. Нехай $U(p,x) = \int\limits_0^{+\infty} u(x,t) e^{-pt} dt$. Тоді отримуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \div \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \div \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{d^2 U}{dx^2}.$$

За теоремою про диференціювання оригіналу з урахуванням початкових умов маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \div pU - u(x,0) = pU - \varphi(x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \div p^2 U - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = p^2 U - p\varphi(x) - \psi(x).$$

Будемо вважати також, що $f(t)$ є оригіналом і при цьому $f(t) \div F(p)$. Тоді з крайових умов маємо:

$$U\big|_{x=0} = F(p), \left. \left(\alpha \frac{dU}{dx} + \beta(pU - \varphi) \right) \right|_{x=l} = \gamma U\big|_{x=l}. \tag{3.13}$$

Застосування операційного методу дозволяє звести розв’язання нестаціонарної задачі для рівняння (3.12) з частинними похідними до розв’язання звичайного диференціального рівняння

$$a \frac{d^2 U}{dx^2} + b \frac{dU}{dx} + AU + B = 0, \tag{3.14}$$

де $A = c + a_1 p^2 + b_1 p$, $B = -a_1 p\varphi - a_1 \psi - b_1 \varphi$, при крайових умовах (3.13).

Приклад 3.11. Температура $u(x,t)$ у тонкому стержні задовольняє рівняння $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a^2 = \text{const}$. Знайти розподіл температур у півпросторі $x > 0$, якщо є відомим закон зміни температури його лівого кінця, а початкова температура стержня дорівнює нулю: $u\big|_{t=0} = 0$, $u\big|_{x=0} = f(t)$.

Розв’язання. Застосуємо до заданого рівняння перетворення Лапласа за змінною t. Отримаємо звичайне диференціальне рівняння відносно зображення

$U(x,p)$: $pU = a^2 \dfrac{d^2U}{dx^2}$. Знайдемо його розв'язок з урахуванням умови $U\big|_{x=0} = F(p)$. Загальний розв'язок отриманого лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$U = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}x}{a}}.$$

Згідно з умовою задачі функції u та U повинні бути обмеженими при $x \to +\infty$, тому $C_2 = 0$, а загальний розв'язок U отриманого рівняння набуває вигляду: $U(x,p) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}$. Для знаходження сталої C_1 використаємо умову $U\big|_{x=0} = F(p)$. Звідси знаходимо, що $C_1 = F(p)$. Отже, зображення розв'язку вихідного рівняння має вигляд: $U(x,p) = F(p) e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}$.

Для знаходження оригіналу розв'язку розглянемо спочатку окремий випадок $f(t) = 1$. Тоді $F(p) = \dfrac{1}{p}$, $U_1(x,p) = \dfrac{e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}}{p}$. Оригіналом цієї функції є

$$u_1(x,t) = \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Для довільної $f(t) \div F(p)$ використаємо формулу (3.3). Оскільки для нашого випадку у цій формулі

$$x_1 = \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),\ x_1'(t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}},\ x_1(0) = 0,$$

то, підставивши ці вирази у (3.3), отримуємо розв'язок задачі у вигляді:

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Приклад 3.12. Один кінець стержня, довжина якого дорівнює l, закріплений, на інший кінець діє сила $f(t) = A\sin\omega t$, спрямована вздовж осі стержня. Знайти переміщення $u(x,t)$ при повздовжніх коливаннях цього стержня.

Розв'язання. Математична модель даної задачі – це гіперболічне рівняння відносно шуканої функції $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де a – коефіцієнт, що залежить від матеріалу стержня. Для цього рівняння маємо початкові умови: $u(x,0)=\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$. Крайові умови для функції $u(x,t)$ мають вигляд: $u(0,t)=0$, $\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\dfrac{A}{E}\sin\omega t$, E – модуль пружності стержня.

Застосуємо до диференціального рівняння, що описує коливання стержня, перетворення Лапласа. Нехай $u(x,t)\div U(x,p)$. Тоді

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\div p^2U(x,p)-pu(x,0)-\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=p^2U(x,p),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\div\frac{d^2U(x,p)}{dx^2}.$$

Отримуємо звичайне диференціальне рівняння відносно зображення $U(x,p)$:

$$\frac{d^2U(x,p)}{dx^2}=\frac{p^2}{a^2}U(x,p),$$

крайові умови для якого мають вигляд: $U(0,p)=0$, $\dfrac{dU(l,p)}{dx}=\dfrac{A}{E}\cdot\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Інтегруючи це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, отримуємо:

$$U(x,p)=C_1\operatorname{ch}\frac{px}{a}+C_2\operatorname{sh}\frac{px}{a}.$$

Використовуючи крайові умови, знаходимо значення сталих інтегрування C_1 та C_2:

$$U(0,p)=C_1=0,\ \frac{dU(l,p)}{dx}=\frac{p}{a}C_2\operatorname{ch}\frac{pl}{a}=\frac{A}{E}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$C_2=\frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{1}{p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\dfrac{pl}{a}}.$$

Таким чином, отримали зображення шуканого розв’язку $u(x,t)$ у вигляді:

$$U(x,p)=\frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{\operatorname{sh}\dfrac{px}{a}}{p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\dfrac{pl}{a}}.$$

Позначимо $A_1(p)=\operatorname{sh}\dfrac{p}{a}x$, $A_2(p)=p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\dfrac{p}{a}l$. Тоді зображення $U(x,p)$ набуває вигляду:

$$U(x,p)=\frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{A_1(p)}{A_2(p)}.$$

Знайдемо особливі точки для $U(x,p)$. Для цього розв'яжемо рівняння $A_2(p)=0$ або $p\left(p^2+\omega^2\right)\mathrm{ch}\frac{p}{a}l=0$. Звідси $p=0$, $p=\pm i\omega$, $\mathrm{ch}\frac{pl}{a}=0$. Враховуючи, що $\mathrm{ch}\frac{pl}{a}=\cos\frac{ipl}{a}$, маємо:

$$\cos i\frac{pl}{a}=0\Rightarrow i\frac{pl}{a}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z,\Rightarrow p_k=i\omega_k,$$

де $\omega_k=\frac{\pi a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)$.

Функція $U(x,p)$ має прості полюси $p=0$, $p=\pm i\omega$, $p_k=i\omega_k$ (далі вважатимемо, що $\omega\neq\omega_k$. Оригінал $u(x,t)$ для знайденого зображення $U(x,p)$ знаходимо за другою теоремою розвинення (теорема 2.3) :

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}\left[\left.\left(\frac{A_1(p)}{A_2'(p)}e^{pt}\right)\right|_{p=0}+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{A_1(i\omega)}{A_2'(i\omega)}e^{i\omega}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_1(i\omega_k)}{A_2'(i\omega_k)}e^{i\omega_k t}\right)\right].$$

Оскільки

$$A_2'(p)=\left(p^2+\omega^2\right)\mathrm{ch}\frac{lp}{a}+2p^2\mathrm{ch}\frac{lp}{a}+\frac{l}{a}p\left(p^2+\omega^2\right)\mathrm{sh}\frac{lp}{a},$$

то, підставляючи у вираз для $u(x,t)$ значення функцій $A_1(p)$ та $A_2'(p)$, отримуємо:

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}\cdot 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{i\sin\frac{\omega x}{a}}{-2\omega^2\cos\frac{\omega l}{a}}e^{i\omega t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i\sin\frac{\omega_k}{a}xe^{i\omega_k t}}{\frac{l}{a}i\omega_k\left(\omega^2-\omega_k{}^2\right)i\sin\frac{l}{a}\omega_k}\right].$$

Знайшовши дійсну частину виразу у дужках, остаточно отримуємо шуканий розв'язок даної задачі у вигляді:

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}\left[\frac{\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t}{\omega^2\cos\frac{\omega l}{a}}^{i\omega t}+\frac{2a}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\frac{\omega_k}{a}x\sin\omega_k t}{\omega_k\left(\omega^2-\omega_k{}^2\right)}\right].$$

3.7 Підсумовування рядів

Знайдемо суму S числового ряду $\sum\limits_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n F(n)$. Нехай існує така функція $f(t)$, що $f(t)\to F(p)$. Тоді $F(n)=\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-nt}dt$. Шукану суму ряду можна записати у вигляді: $S=\sum\limits_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-nt}dt=\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sum\limits_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n e^{-nt}dt$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n e^{-nt}$ при $t>0$ є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює $(\pm 1)^n e^{-t}$, то отримуємо:

$$s=(\pm 1)^m \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(t)e^{-mt}}{1-e^{-t}}dt. \tag{3.15}$$

Приклад 3.13. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $F(p)=\frac{p^2+3p+3}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$. Її особливими точками є прості полюси $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=-2$, $p_4=-3$. За другою теоремою розвинення знаходимо:

$$f(t)=\sum_k \operatorname{Res}\left(F(p_k)e^{p_k t}\right)=\sum_k \frac{\left(p_k^{\,3}+3p_k+3\right)e^{p_k t}}{\left(p(p+1)(p+2)(p+3)\right)'\Big|_{p=p_k}}.$$

Після відповідних обчислень у правій частині останньої рівності отримуємо:

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t}\right).$$

Для знаходження суми заданого ряду застосуємо формулу (3.17), згідно з якою знаходимо:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\left(1-e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t}\right)e^{-t}}{1-e^{-t}}dt=\frac{1}{2}\left(-e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-3t}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}=\frac{2}{3}.$$

Розглянемо збіжний функціональний ряд $s(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$, $a\le t\le b$. Нехай функції $f_n(t)$ є оригіналами і при цьому $f_n(t)\div F_n(p)$. Будемо вважати, що ряд $S(p)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(p)$ є збіжним і при $p\to\infty$ $S\to 0$, а $S(p)$ є аналітичною функцією в околі нескінченно віддаленої точки $p=\infty$. Тоді $s(t)\div S(p)$. Якщо знаходження суми $S(p)$ є простішою задачею у порівнянні з обчисленням $s(t)$, то $s(t)$ можна знайти за допомогою першої теореми розвинення як оригінал для зображення $S(p)$.

Приклад 3.14. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}J_{2n}(t)$.

Розв'язання. У підпункті 1.6 було отримано зображення функцій Бесселя n-го порядку $J_n(t)\div\dfrac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}$. Отже, $J_{2n}(t)\div\dfrac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{2n}}{\sqrt{p^2+1}}$. Знайдемо суму ряду, що є зображенням заданого ряду.

$$S(p)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{2n}}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{2n}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\cdot\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^2}{1+\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}-\frac{p}{p^2+1}\right).$$

Враховуючи, що $J_0(t)\div\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$, $\cos t\div\dfrac{p}{p^2+1}$, отримуємо:

$$s(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}J_{2n}(t)=\frac{1}{2}\left(J_0(t)-\cos t\right).$$

Розглянемо збіжний у деякому інтервалі $t\in(a;b)$ функціональний ряд $s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F(n)\varphi_n(t)$. Якщо члени послідовності $\varphi_n(t)$ є коефіцієнтами розвинення функції $\Phi(x,t)$ у збіжний при $|x|<1$ степеневий ряд $\Phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t)x^n$, то функцію $\Phi(x,t)$ називають *твірною функцією* послідовності $\varphi_n(t)$.

Нехай $f(t)\div F(p)$, тоді при $p=n$ маємо:

$$F(n)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-nt}dt.$$

Підставляючи цей вираз для $F(n)$ у заданий функціональний ряд $\sum_{n=0}^{\infty}F(n)\varphi_n(t)$, отримуємо формулу для суми цього ряду:

$$s(t)=\int_0^{+\infty} f(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t)e^{-nx}\right)dx.$$

З урахуванням розвинення у степеневий ряд для твірної функції $\Phi(x,t)$ цю рівність можна записати у вигляді:

$$s(t)=\int_0^{+\infty} f(x)\Phi\left(e^{-x},t\right)dx. \tag{3.16}$$

Цю формулу можна використати для знаходження сум тригонометричних рядів. Для цього потрібно визначити твірну функцію для послідовностей виду

$$(\pm 1)^n \sin(nk+m)t,\ (\pm 1)^n \cos(nk+m)t.$$

Використаємо розвинення у степеневий ряд $\dfrac{\pm z}{1\mp z}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\pm 1)^n z^n$, де $z=xe^{ikt}$, $0<x<1$. Отримуємо:

$$\frac{xe^{i(k+m)t}}{1\mp xe^{ikt}}=\frac{x\cos(k+m)t\mp x^2\cos mt+i\left(x\sin(k+m)t\mp x^2\sin mt\right)}{1\mp 2x\cos kt+x^2}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^{n+1}x^n e^{i(nk+m)t}.$$

Звідси знаходимо шукані твірні функції:

$$\Phi_{k,m}(x,t)=\frac{x\cos(k+m)t\mp x^2\cos mt}{1\mp 2x\cos kt+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n\cos(nk+m)t\cdot x^n, \tag{3.17}$$

$$\Phi_{k,m}(x,t)=\frac{x\sin(k+m)t\mp x^2\sin mt}{1\mp 2x\cos kt+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n\sin(nk+m)t\cdot x^n. \tag{3.18}$$

Приклад 3.15. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nt}{(2n-1)(2n+1)}$.

Розв'язання. Маємо $F(p)=\dfrac{1}{(2p-1)(2p+1)}\div\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}=f(x)$. Використаємо твірну функцію (3.18). Для заданого ряду вона має вигляд:

$$\Phi_{2,0}(x,t)=\frac{x\sin 2t}{1-2x\cos 2t+x^2}.$$

За формулою (3.16) знаходимо:

$$s(t)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\operatorname{sh}\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{-x}\sin 2t}{1-2e^{-x}\cos 2t+e^{-2x}}dx.$$

Виконаємо заміну змінної $e^{-\frac{x}{2}}=u$. Тоді $-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx=du$. Отримуємо інтеграл:

$$s(t)=-\frac{\sin 2t}{2}\int_0^1\frac{u^2-1}{u^4-2u^2\cos 2t+1}du=-\frac{\sin 2t}{2}\int_0^1\frac{d\left(u+\frac{1}{u}\right)}{\left(u+\frac{1}{u}\right)^2-4\cos^2 t}=$$

$$=-\frac{\sin t}{4}\ln\frac{u+\frac{1}{u}-2\cos t}{u+\frac{1}{u}+2\cos t}\Bigg|_0^1=\frac{\sin t}{2}\ln\left|ctg\frac{t}{2}\right|.$$

Таким чином, сумою заданого ряду є функція $s(t)=\frac{\sin t}{2}\cdot\ln\left|\mathrm{ctg}\frac{t}{2}\right|$.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Для розв'язання яких диференціальних рівнянь доцільно застосовувати операційний метод?
2. Як можна розв'язати диференціальне рівняння за допомогою формули Дюамеля?
3. Надайте означення диференціального рівняння з запізненням.
4. Які інтегральні рівняння доцільно розв'язувати операційним методом?
5. Які властивості перетворення Лапласа застосовуються при розв'язанні диференціально-різницевих рівнянь?
6. Розв'яжіть наступні задачі Коші:
   а) $x^{(4)}-x''=1$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$;
   б) $x'''+x=e^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=2$, $x''(0)=0$;
   в) $x''+x=\eta(t)-2\eta(t-1)+\eta(t-2)$.
7. Знайдіть розв'язок диференціального рівняння з періодичною правою частиною: $x''+2x'+x=f(t)$, $f(t)=f(t+4)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 2,\\ 2-t, & 2<t\le 4\end{cases}$.
8. За допомогою формули Дюамеля розв'яжіть задачу Коші: $x''+x=\frac{1}{2+\cos t}$, $x(0)=x'(0)=0$.
9. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $tx''+(2t-1)x'+(t-1)x=0$.
10. Розв'яжіть систему, застосовуючи операційний метод: $\begin{cases}x'+y'-y=e^t,\\ 2x'+y'+2y=\cos t.\end{cases}$
11. Розв'яжіть інтегральні рівняння:
    а) $x(t)=\sin t+\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)^2x(\tau)d\tau$; б) $1-\cos t=\int_0^t \mathrm{sh}(t-\tau)x(\tau)d\tau$.
12. Розв'яжіть інтегро-диференціальні рівняння:

а) $x'(t)-\int\limits_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau=\cos t$, $x(0)=1$,

б) $x''(t)-4\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}\left(x'(\tau)+x(\tau)\right)d\tau$, $x(0)=0$, $x'(0)=12$.

13.Розв'яжіть диференціальні рівняння з запізненням:

а) $x''(t)-2x'(t-1)+x(t-2)=1$, $x(0)=x'(0)=0$;

б) $x''(t)-2x'(t-1)=t$, $x(0)=x'(0)=0$.

14.Розв'яжіть диференціальне рівняння з запізненням $x'(t)+x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=0$, якщо на початковій множині $t\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ задана початкова функція $\varphi(t)=\cos t$.