Змістовий модуль 4. Дискретне перетворення Лапласа

4.1 Поняття дискретного перетворення Лапласа

Означення 4.1. Функцію $f(n)=f_n$, де $n\in Z$, називають *решітчастою функцією*. Функції f_n можуть відповідати різні функції $f(t)$, такі, що $f_n=f(t)$ при $t=n$. Таку функцію $f(t)$ називають *огинаючою* для відповідної решітчастої функції f_n. До решітчастих функцій можна застосовувати *дискретне перетворення Лапласа або D-перетворення.*

Означення 4.2. Решітчасту функцію f_n, огинаючою якої є оригінал $f(t)$ перетворення Лапласа, називають *оригіналом D-перетворення.*

Означення 4.3. Функцію $F^*(p)$ комплексної змінної $p=s+i\sigma$, що визначається рядом

$$F^*(p)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn}, \qquad (4.1)$$

називають *зображенням оригінала f_n D-перетворення, а ряд у правій частині (4.1) – дискретним перетворенням (D-перетворенням) решітчастої функції f_n.*

Відповідність між оригіналом та зображенням при D-перетворенні позначатимемо: $f_n \div F^*(p)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.1. Якщо ряд (4.1) є збіжним при $\operatorname{Re} p=s_1$, то він збігається абсолютно та рівномірно при $\operatorname{Re} p>s_1$.

Доведення. З необхідної умови збіжності ряду випливає, що для всіх p, таких, що $\operatorname{Re} p=s_1$, $f_n e^{-pn}\to 0$ при $n\to\infty$.Тоді існує таке $M>0$, що при достатньо великих n $\left|f_n e^{-pn}\right|<M$. Тоді при $\operatorname{Re} p>s_1$ $\left|f_n e^{-pn}\right|<Me^{-(s-s_1)n}$. Права частина цієї нерівності при $s-s_1>0$ є загальним членом збіжного ряду для нескінченно спадної геометричної прогресії. Отже, за відомою з курсу математичного аналізу ознакою Вейєрштрасса ряд (4.1) є абсолютно та рівномірно збіжним при $\operatorname{Re} p>s_1$. Теорему доведено.

Аналогічним чином можна довести, що із розбіжності ряду (4.1) при $\operatorname{Re} p=s_1$ випливає його розбіжність при $\operatorname{Re} p<s_1$.

Означення 4.4. Число s_c, для якого при $\operatorname{Re} p>s_c$ ряд (4.1) збіжний, а при $\operatorname{Re} p<s_c$ є розбіжним, називають *абсцисою збіжності* цього ряду.

Наведемо теорему, яка визначає умови існування зображення при дискретному перетворенні Лапласа.

Теорема 4.2. Якщо функція f_n є оригіналом з показником зростання s_0, то її зображення $F^*(p)$ існує у області $\operatorname{Re} p>s_0$ і є у цій області аналітичною функцією.

Доведення. Маємо $\left|f_n\right| < Me^{s_0 n}$. Абсциса збіжності s_c є нижньою межею значень s_0, тобто $s_c < s_0$, тому ряд (4.1) є збіжним при $\operatorname{Re} p > s_0$.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn}\left(-nf_n\right)$, що отриманий шляхом диференціювання ряду (4.1), є рівномірно збіжним при $\operatorname{Re} p > s_0$, оскільки $\left|-nf_n e^{-pn}\right| < nMe^{-(s-s_0)n}$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} nMe^{-(s-s_0)n}$ є збіжним при $s - s_0 > 0$. Тому, за властивістю рівномірно збіжного ряду, ряд $F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn}$ можна почленно диференціювати і функція $F^*(p)$ є аналітичною у області $\operatorname{Re} p > s_0$. Теорему доведено.

Зауважимо, що функція $F^*(p)$залежить від періодичної показникової функції комплексної змінної e^p, тому $F^*(p) = F^*(p + 2\pi i)$, тобто $F^*(p)$ є періодичною з періодом $2\pi i$. Тому далі будемо розглядати $F^*(p)$ лише у смузі $-\pi \le \operatorname{Im} p \le \pi$.

У формулі (4.1) позначимо $e^p = z$. Тоді $F^*(p) = F\left(e^p\right) = F(z)$. Кожному оригіналу f_n можна поставити у відповідність зображення $F(z)$, що визначається рядом:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \tag{4.2}$$

<u>Означення 4.5.</u> Відповідність $f_n \div F(z)$, де $F(z)$ визначається як ряд (4.2), називають *перетворенням Лорана* або z*-перетворенням* решітчастої функції f_n.

Функція $z = e^p$ взаємно однозначно відображає смугу $-\pi \le \operatorname{Im} p \le \pi$ на всю комплексну площину z з розрізом вздовж від’ємної частини дійсної осі. При цьому область $\operatorname{Re} p > s_0$, $-\pi \le \operatorname{Im} p \le \pi$ існування функції $F(z)$ взаємно однозначно відображається в область $|z| > e^{s_0}$.

Знайдемо зображення деяких решітчастих функцій.

Приклад 4.1. Знайти зображення при дискретному перетворенні Лапласа (D-перетворенні) одиничної функції $\eta_n = \begin{cases} 1, n \ge 0, \\ 0, n < 0. \end{cases}$

Розв’язання. За формулою (4.1) маємо: $\eta_n \div \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} = \dfrac{1}{1 - e^{-p}} = \dfrac{e^p}{e^p - 1}$, $\operatorname{Re} p > 0$. Тут для підсумовування ряду ми використали формулу нескінченно спадної геометричної прогресії.

Приклад 4.2. Знайти D-перетворення решітчастої функції $f_n = (-1)^n$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (4.1) та формулу суми нескінченно спадної геометричної прогресії, отримуємо:

$$(-1)^n \div \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-pn} = \frac{1}{1+e^{-p}} = \frac{e^p}{e^p+1},\ \operatorname{Re} p > 0.$$

Приклад 4.3. Знайти D-перетворення решітчастої функції $f_n = e^{\alpha n}$.

Розв'язання. За означенням D-перетворення маємо:

$$f_n \div \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} e^{-pn} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(p-\alpha)n} = \frac{1}{1-e^{-(p-\alpha)}} = \frac{e^p}{e^p - e^{\alpha}},\ \operatorname{Re}(p-\alpha) > 0.$$

Відомо, що коли нескінченно віддалена точка $p=\infty$ є правильною особливою точкою функції $F(p)$, то у околі нескінченно віддаленої точки розвинення $F(p)$ у ряд Лорана містить лише правильну частину: $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} p^{-n}$, коефіцієнти цього ряду обчислюються за формулою:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} F(p)\, p^{n-1} dp,$$

де γ – коло достатньо великого радіусу з центром у початку координат.

Якщо у останній формулі прийняти $c_{-n} = f_n$, то отримаємо *формулу обернення z-перетворення*:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} F(z)\cdot z^{n-1} dz, \tag{4.3}$$

де γ – контур інтегрування у напрямку проти годинникової стрілки, що являє собою довільне коло з центром у початку координат, що розташоване у області збіжності функції $F(z)$.

Підставимо у (4.3) $z=e^p$. Тоді коло γ з формули (4.3) відобразиться на відрізок $[s-i\pi; s+i\pi]$, $s > s_0$, площини p. Отримуємо *формулу обернення D – перетворення*:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\pi}^{s+i\pi} F^*(p)\cdot e^{pn} dp. \tag{4.4}$$

Обернення z-перетворення та D-перетворення здійснюється за формулами (4.3) та (4.4) однозначно.

4.2 Властивості дискретного перетворення Лапласа

Властивості D-перетворення аналогічні властивостям перетворення Лапласа функцій-оригіналів неперервного аргументу. Їх доведення ґрунтується на означенні дискретного перетворення Лапласа та властивостях збіжних рядів. Наведемо тут ці властивості.

Теорема 4.3. (Теорема лінійності). Якщо $f_{1n} \div F_1^*(p)$, $f_{2n} \div F_2^*(p), \ldots$, $f_{kn} \div F_k^*(p)$, α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – задані комплексні числа, то

$$\sum_{m=1}^{k} \alpha_m f_{mn} \div \sum_{m=1}^{k} \alpha_m F_k^*(p).$$

Розглянемо приклад застосування цієї теореми.

Приклад 4.4. Знайти зображення функції $f_n = \sin \omega n$.

Розв'язання. Запишемо $f_n = \sin \omega n$ у вигляді лінійної комбінації експоненціальних функцій: $\sin \omega n = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}\right)$. Оскільки $e^{i\omega n} \div \frac{e^p}{e^p - e^{i\omega}}$, $e^{-i\omega n} \div \frac{e^p}{e^p - e^{-i\omega}}$, то $\sin \omega n \div \frac{1}{2i}\left(\frac{e^p}{e^p - e^{i\omega}} - \frac{e^p}{e^p - e^{-i\omega}}\right) = \frac{e^p \sin \omega}{e^{2p} - 2e^p \cos \omega + 1}$.

Аналогічно можна знайти наступні зображення: $\operatorname{sh} \omega n \div \frac{e^p \operatorname{sh} \omega}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} \omega + 1}$, $\cos \omega n \div \frac{e^p\left(e^p - \cos \omega\right)}{e^{2p} - 2e^p \cos \omega + 1}$, $\operatorname{ch} \omega n \div \frac{e^p\left(e^p - \operatorname{ch} \omega\right)}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} \omega + 1}$.

Теорема 4.4. (Теорема запізнення). Якщо $f_n \div F^*(p)$ і $k > 0$ – ціле число, причому $k < n$, то $f_{n-k} \div e^{-pk} F^*(p)$.

Приклад 4.5. Знайти зображення функції $f_n = e^{\alpha(n-1)}$.

Розв'язання. Оскільки $e^{\alpha n} \div \frac{e^p}{e^p - e^\alpha}$, то за теоремою 4.4 при $k = 1$ отримуємо: $e^{\alpha(n-1)} \div e^{-p} \cdot \frac{e^p}{e^p - e^\alpha} = \frac{1}{e^p - e^\alpha}$.

Теорема 4.5. (Теорема випередження). Якщо $f_n \div F^*(p)$ і $k > 0$ – ціле число, то $f_{n+k} \div e^{pk}\left(F^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} e^{-pm} f_m\right)$.

Приклад 4.6. Знайти зображення функції $f_n = \sin \alpha(n+1)$.

Розв'язання. Оскільки $\sin \alpha n \div \frac{e^p \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}$ (приклад 4.4), то згідно з теоремою випередження при $k = 1$ отримуємо:

$$\sin \alpha(n+1) \div e^p \cdot \left(\frac{e^p \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1} - e^{-p \cdot 0} \sin(0 \cdot \alpha)\right) = \frac{e^{2p} \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}.$$

Теорема 4.6. (Теорема зміщення). Якщо $f_n \div F^*\left(p\right)$ і p_0 – задане комплексне число, то $e^{\pm p_0 n} f_n \div F^*\left(p \mp p_0\right)$.

Приклад 4.7. Знайти зображення функції $f_n = e^{in} \sin \alpha n$.

Розв'язання. Використаємо зображення функції $\sin \alpha n$:

$$\sin \alpha n \div \frac{e^p \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}.$$

Застосувавши теорему 4.6 при $p_0 = i$, отримаємо:

$$e^{in} \sin \alpha n \div \frac{e^{p-i} \sin \alpha}{e^{2(p-i)} - 2e^{p-i} \cos \alpha + 1} =$$

$$= \frac{e^p \sin \alpha \left(\cos 1 - i \sin 1\right)}{e^{2p}\left(\cos 2 - i \sin 2\right) - 2e^p \left(\cos 1 - i \sin 1\right) \cos \alpha + 1}.$$

Означення 4.6. Вираз $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ називають *різницею (скінченною різницею) першого порядку функції* f_n. *Різниця* k*-го порядку* визначається за формулою:

$$\Delta^k f_n = \Delta\left(\Delta^{k-1} f_n\right) = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n.$$

Різниці $\Delta^k f_n$ можна виразити через значення f_{n+m}, де $m = 0, 1, ..., \mathrm{k}$. Маємо:

$$\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = \left(f_{n+2} - f_{n+1}\right) - \left(f_{n+1} - f_n\right) = f_{n+2} - 2 f_{n+1} + f_n.$$

Аналогічним способом знаходимо:

$$\Delta^3 f_n = f_{n+3} - 3 f_{n+2} + 3 f_{n+1} - f_n.$$

Для різниці k-го порядку виконується рівність:

$$\Delta^k f_n = \sum_{m=0}^{k} \left(-1\right)^m C_k^m f_{n+k-m}, \tag{4.5}$$

де $C_k^m = \dfrac{k!}{m!\left(k-m\right)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

У свою чергу, f_{n+k} можна виразити через скінченні різниці за допомогою формули:

$$f_{n+k} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m \Delta^m f_n. \tag{4.6}$$

Теорема 4.7. (Теорема про різницю оригінала). Якщо $f_n \div F^*\left(p\right)$, то

$$\Delta^k f_n \div \left(e^p - 1\right)^k F^*\left(p\right) - e^p \sum_{m=0}^{k-1} \left(e^p - 1\right)^{k-1-m} \Delta^m f_0. \tag{4.7}$$

Ця теорема застосовується при розв'язанні різницевих рівнянь.

Наведемо ще деякі властивості дискретного перетворення Лапласа, що використовуються при знаходженні зображень решітчастих функцій, а також знаходженні оригіналів за відомими зображеннями.

Теорема 4.8. (Теорема про диференціювання зображення). Якщо $f_n \div F^*(p)$, то $\dfrac{dF^*}{dp} \div -n \cdot f_n$, $\dfrac{d^2F^*}{dp^2} \div n^2 \cdot f_n$, …, $\dfrac{d^kF^*}{dp^k} \div (-1)^k n^k \cdot f_n$.

Приклад 4.8. Знайти зображення функції $f_n = n^3$.

Розв'язання. Оскільки $1 \div \dfrac{e^p}{e^p - 1}$, то за теоремою про диференціювання зображення послідовно отримуємо:

$$n \div -\left(\frac{e^p}{e^p-1}\right)' = -\frac{e^p\left(e^p-1\right)-e^{2p}}{\left(e^p-1\right)^2} = \frac{e^p}{\left(e^p-1\right)^2},$$

$$n^2 \div \left(\frac{e^p}{e^p-1}\right)'' = \left(-\frac{e^p}{\left(e^p-1\right)^2}\right)' = \frac{e^p\left(e^p+1\right)}{\left(e^p-1\right)^3},$$

$$n^3 \div -\left(\frac{e^p}{e^p-1}\right)''' = -\left(\frac{e^p\left(e^p+1\right)}{\left(e^p-1\right)^3}\right)' = \frac{e^p\left(e^{2p}+4e^p+1\right)}{\left(e^p-1\right)^4}.$$

Приклад 4.9. Знайти зображення узагальненої степеневої функції $n^{(m)} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$.

Розв'язання. Оскільки $n \div \dfrac{e^p}{\left(e^p-1\right)^2}$, то за теоремою запізнення отримуємо: $n-1 \div \dfrac{1}{\left(e^p-1\right)^2}$. Послідовно застосовуючи цю теорему, а також теорему про диференціювання зображення, відповідно знаходимо, що $n(n-1) \div 2! \cdot \dfrac{e^p}{\left(e^p-1\right)^3}$, $(n-1)(n-2) \div 2! \cdot \dfrac{1}{\left(e^p-1\right)^2}$. Далі знаходимо:

$$n(n-1)(n-2) \div 3! \cdot \frac{e^p}{\left(e^p-1\right)^4},\ (n-1)(n-2)(n-3) \div 3! \cdot \frac{1}{\left(e^p-1\right)^4}.$$

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести, що виконується співвідношення:

$$n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = n^{(m)} \div \frac{m!e^p}{\left(e^p-1\right)^{m+1}}.$$

Теорема 4.9. (Теорема про суму оригінала). Якщо $f_n \div F^*(p)$, то $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k \div \dfrac{F^*(p)}{e^p-1}$.

Приклад 4.10. Знайти суму $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Розв'язання. Застосуємо результат прикладу 4.8 та теорему про суму оригінала. Оскільки $n^3 \div \dfrac{e^p\left(e^{2p}+4e^p+1\right)}{\left(e^p-1\right)^4}$, то за теоремою 4.9 отримуємо:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 \div \frac{e^p\left(e^{2p}+4e^p+1\right)}{\left(e^p-1\right)^5}.$$

Запишемо вираз у правій частині даного співвідношення у вигляді:

$$\frac{e^p\left(e^{2p}+4e^p+1\right)}{\left(e^p-1\right)^5} = e^{2p}\frac{e^p}{\left(e^p-1\right)^5} + 4e^p\frac{e^p}{\left(e^p-1\right)^5} + \frac{e^p}{\left(e^p-1\right)^5} \div \frac{\left(n+2\right)^{(4)}}{4!} +$$

$$+4\frac{\left(n+1\right)^{(4)}}{4!} + \frac{n^{(4)}}{4!} = \frac{n^2\left(n-1\right)^2}{4}.$$

Таким чином, ми отримали, що $\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \dfrac{n^2\left(n-1\right)^2}{4}$. Замінивши n на $n+1$, знаходимо, що $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}$.

Теорема 4.10. (Теорема про інтегрування зображення). Якщо $f_n \div F^*\left(p\right)$, $f_0 = 0$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{f_\alpha}{\alpha} = 0$, то $\int_p^{\infty} F^*\left(q\right)dq \div \dfrac{f_n}{n}$. Якщо $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{f_\alpha}{\alpha} = a$, то $a + \int_p^{\infty} F^*\left(q\right)dq \div \dfrac{f_n}{n}$.

Приклад 4.11. Знайти зображення для функції $f_n = \dfrac{\sin\beta n}{n}$.

Розв'язання. Використаємо теорему про інтегрування зображення. Оскільки $\sin\beta n \div \dfrac{e^p\sin\beta}{e^{2p}-2e^p\cos\beta+1}$ і $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{f_\alpha}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin(\beta\alpha)}{\alpha} = \beta$, то за теоремою 4.10 маємо:

$$\frac{\sin\beta n}{n} \div \beta + \int_p^{\infty}\frac{e^q\sin\beta}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}dq = \beta + \operatorname{arctg}\frac{e^q-\cos\beta}{\sin\beta}\Bigg|_p^{\infty} =$$

$$= \beta + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{e^p-\cos\beta}{\sin\beta}.$$

4.3 Застосування формули обернення для дискретного перетворення Лапласа

Решітчасту функцію, що є оригіналом f_n для зображення $F^*(p)$, знаходять за формулами обернення (4.3) або (4.4). Контурні інтеграли у цих формулах можна обчислити за допомогою теорії лишків. Аналогічно до формули Рімана-Мелліна для перетворення Лапласа неперервних функцій, для оберненого z-перетворення або D-перетворення маємо:

$$f_n = \sum_k \operatorname{Res}\left[F(z) z^{n-1}\right]\Big|_{z=z_k},\ f_n = \sum_k \operatorname{Res}\left[F^*(p) e^{np}\right]\Big|_{p=p_k},\ z_k = e^{p_k}.$$

Нехай $F(z) = \dfrac{F_1(z)}{F_2(z)}$ – правильний раціональний дробовий вираз і при цьому $F(\infty) = f_0 = 0$. Розглянемо наступі випадки.

1. Зображення $F(z)$ має прості полюси z_k, тоді формула обернення набуває вигляду:

$$f_n = \sum_k \frac{F_1(z_k)}{F_2'(z_k)} z_k^{n-1}. \tag{4.8}$$

2. Функція $F(z)$ має полюси z_k кратності m_k. Тоді маємо:

$$f_n = \sum_k \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{z \to z_k} \left[F(z)(z - z_k)^{m_k} z^{n-1}\right]^{(m_k - 1)}\Bigg|_{z=z_k}. \tag{4.9}$$

Оригінал f_n можна знайти також безпосередньо, використовуючи розвинення дробу $F(z)$ на елементарні дроби, властивості z-перетворення та зображення основних елементарних функцій, наведені у додатку Б. Для оберненого D-перетворення слід враховувати, що при розвиненні зображення $F^*(p)$ можна отримати наступні елементарні дроби (наведемо також їх оригінали).

1. $\dfrac{A}{e^p - e^{p_k}} \div A e^{p_k(n-1)}$.

2. $\dfrac{A}{\left(e^p - e^{p_k}\right)^m} \div A e^{p_k(n-m)} \dfrac{(n-1)^{(m-1)}}{(m-1)!}$

Розглянемо приклади знаходження оригіналів при дискретному перетворенні Лапласа за їх заданими зображеннями.

Приклад 4.12. Знайти оригінал функції $F^*(p) = \dfrac{e^p}{e^{4p} - 16}$.

Розв'язання. Нехай $e^p = z$. Отримуємо функцію комплексної змінної $F(z) = \dfrac{z}{z^4 - 16}$, особливими точками якої є прості полюси $z_1 = -2$, $z_2 = 2$, $z_{3,4} = \pm 2i$. За формулою (4.8) маємо:

$$f_n = \sum_{k=1}^{4} \frac{z_k}{4 z_k^3} \cdot z_k^{n-1} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{4} z_k^{n-3}.$$

Підставляючи особливі точки функції $F(z)$ у останню суму, знаходимо:

$$f_n = \frac{1}{4}\left(2^{n-3} + (-2)^{n-3} + (2i)^{n-3} + (-2i)^{n-3}\right) = 2^{n-5}\left(1 + (-1)^{n-1} + i\left(i^n - (-i)^n\right)\right).$$

Оскільки $i\left(i^n - (-i)^n\right) = 2 \cdot \frac{i^n - (-i)^n}{2i} = 2\sin\frac{n\pi}{2}$, то вираз для f_n можна записати у наступному вигляді:

$$f_n = 2^{n-5}\left(1 + (-1)^{n-1} - 2\sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

Приклад 4.13. Знайти оригінал функції $F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 2)(e^p - 1)^2}$.

Розв'язання. Позначимо $e^p = z$. Функція $F(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)^2}$ має простий полюс $z = 2$ та полюс другого порядку $z = 1$. Використовуючи формулу (4.9), отримуємо:

$$f_n = 2^n + \left.\left(\frac{z^n}{z-2}\right)'\right|_{z=1} = 2^n - 1 - n.$$

Приклад 4.14. Знайти оригінал функції $F^*(p) = \frac{e^p}{3e^{2p} - 6ae^p + 4a^2}$.

Розв'язання. Для знаходження оригіналу f_n використаємо зображення функції $\sin\omega n$ та теорему зміщення (теорема 4.6). Запишемо задане зображення у наступному вигляді:

$$F^*(p) = \frac{1}{a\sqrt{3}} \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}} e^p \cdot \frac{1}{2}}{e^{2p} - 2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} e^p \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\omega = \cos\frac{\pi}{6}$, то, вибравши $\omega = \frac{\pi}{6}$, отримуємо:

$$F^*(p) \div \frac{1}{a\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^n \sin\frac{\pi n}{6}.$$

4.4 Розв'язання різницевих рівнянь

Означення 4.7. *Різницевим рівнянням* k *-го порядку* називають рівняння

$$F\left(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}\right) = 0, \tag{4.10}$$

де $x_n = x(n)$ – шукана решітчаста функція.

Різницеве рівняння (4.10) можна записати також у вигляді:

$$F_1\left(n, x_n, \Delta x_n, \ldots, \Delta^k x_n\right) = 0. \tag{4.11}$$

Тут $\Delta x_n, \ldots, \Delta^k x_n$ – скінченні різниці від першого до k-го порядків функції x_n.

Рівняння (4.10) можна звести до вигляду (4.11) за допомогою формули (4.6), що виражає значення функції через її скінченні різниці. У свою чергу, рівняння (4.11) можна звести до (4.10), використавши формулу (4.5).

Означення 4.8. Різницеве рівняння (4.10) називають *лінійним*, якщо воно є лінійним відносно значень x_n, x_{n+1}, …, x_{n+k} решітчастої функції.

Лінійне різницеве рівняння k-го порядку має вигляд:

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \ldots + a_k x_n = f_n, \tag{4.12}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_k$, f_n – відомі решітчасті функції. Якщо у цьому рівнянні $f_n = 0$, то його називають *однорідним*.

Рівняння (4.11) є лінійним різницевим рівнянням, якщо воно є лінійним відносно решітчастої функції x_n та всіх її скінченних різниць. Задачі розв'язання лінійних різницевих рівнянь виникають при дослідженні імпульсних систем автоматичного регулювання.

Різницеве рівняння (4.10) є різницевим рівнянням k-го порядку, якщо воно містить x_n та x_{n+k}. Порядок різницевого рівняння (4.11) може не дорівнювати максимальному порядку скінченної різниці, що входить до цього рівняння, якщо це рівняння, записане у вигляді (4.10), містить лише значення решітчастої функції від x_n до x_{n+s}, $s < k$.

Аналогом різницевого рівняння є диференціальне рівняння відносно невідомої функції неперервного аргументу. Властивості розв'язків лінійних різницевих рівнянь є аналогічними до властивостей розв'язків лінійних диференціальних рівнянь.

Якщо коефіцієнти лінійного різницевого рівняння (4.12) є сталими, для його розв'язання можна застосувати дискретне перетворення Лапласа. Для знаходження єдиного розв'язку даного рівняння, для нього повинні бути задані початкові значення: x_0, x_1, x_{k-1}. Тоді, застосувавши D-перетворення та теорему випередження для нього (теорема 4.5), переходимо до рівняння відносно зображення $X^*(p)$. При цьому, згідно з теоремою випередження, отримуємо:

$$x_{n+k} \div e^{pk}\left(X^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} x_m e^{-pm} \right). \tag{4.13}$$

Нехай лінійне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами $a_1, a_2, \ldots, a_k$ задане у вигляді:

$$\Delta^k x_n + a_1 \Delta^{k-1} x_n + \ldots + a_k x_n = f_n.$$

Для цього рівняння задаються початкові значення x_0, Δx_0, $\Delta^2 x_0, \ldots, \Delta^{k-1} x_0$. При переході до рівняння відносно зображення $X^*(p)$ для знаходження зображення різниць використовують теорему про різницю оригінала (теорема 4.7), згідно з якою отримуємо:

$$\Delta^k x_n \div \left(e^p-1\right)^k X^*(p) - e^p \sum_{m=0}^{k-1} \left(e^p-1\right)^{k-1-m} \Delta^m x_0 \,. \qquad (4.14)$$

У результаті застосування D-перетворення отримуємо лінійне алгебраїчне рівняння відносно зображення $X^*(p)$

Якщо початкові значення розв'язку різницевого рівняння не задані, то їх можна вважати довільними сталими і у цьому випадку отримуємо загальний розв'язок різницевого рівняння. D-перетворення можна застосовувати і до розв'язання лінійних систем різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо приклади використання дискретного перетворення Лапласа до розв'язання лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 4.15. Знайти розв'язок різницевого рівняння $\Delta^2 x_n - 3\Delta x_n + 2x_n = 0$, якщо $x_0 = 1$, $\Delta x_0 = -1$.

Розв'язання. Нехай $x_n \div X^*(p)$. Тоді за формулою (4.14) маємо:

$$\Delta x_n \div \left(e^p-1\right) X^*(p) - e^p, \ \Delta^2 x_n \div \left(e^p-1\right)^2 X^*(p) - e^p\left(e^p-1\right) + e^p.$$

Підставивши ці значення у задане різницеве рівняння та звівши подібні доданки, отримуємо лінійне алгебраїчне рівняння відносно зображення $X^*(p)$:

$$\left(e^{2p} - 5e^p + 6\right) X^*(p) = e^{2p} - 5e^p.$$

Звідси знаходимо зображення розв'язку:

$$X^*(p) = \frac{e^{2p} - 5e^p}{e^{2p} - 5e^p + 6}.$$

Перейшовши до z-перетворення, отримуємо:

$$X(z) = \frac{z^2 - 5z}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z^2 - 5z}{(z-2)(z-3)}.$$

Ця функція має дві особливі точки – прості полюси $z_1 = 2$ та $z_2 = 3$. Тому за формулою (4.8) знаходимо оригінал, тобто розв'язок заданого різницевого рівняння:

$$x_n = \left.\frac{\left(z^2-5z\right) z^{n-1}}{2z-5}\right|_{z=2} + \left.\frac{\left(z^2-5z\right) z^{n-1}}{2z-5}\right|_{z=3} = 6\cdot 2^{n-1} - 6\cdot 3^{n-1} = 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n.$$

Цей вираз є частинним розв'язком заданого рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам.

Приклад 4.16. Знайти розв'язок рівняння $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = n^2$, якщо $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

Розв'язання. Нехай $x_n \div X^*(p)$. Тоді за формулою (4.13) з врахуванням початкових умов отримуємо: $x_{n+1} \div e^p X^*(p)$, $x_{n+2} \div e^{2p} X^*(p)$, $x_{n+3} \div e^{3p} X^*(p)$. За формулою 15 Додатку Б, маємо: $n^2 \div \dfrac{e^p\left(e^p+1\right)}{\left(e^p-1\right)^3}$. Отже, після застосування дискретного перетворення Лапласа, рівняння відносно зображення $X^*(p)$ набуває вигляду:

$$e^{3p}X^*(p)-3e^{2p}X^*(p)+3e^{p}X^*(p)-X^*(p)=\frac{e^p\left(e^p+1\right)}{\left(e^p-1\right)^3}.$$

З цього рівняння знаходимо:

$$X^*(p)=\frac{e^p\left(e^p+1\right)}{\left(e^p-1\right)^6}.$$

Перейшовши до z-перетворення ($e^p=z$), отримуємо зображення у вигляді: $X(z)=\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^6}$. $X(z)$ має одну особливу точку – полюс шостого порядку $z_1=1$. За формулою (4.9) знаходимо:

$$x_n=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 1}\left(\frac{\left(z^2+z\right)(z-1)^6}{(z-1)^6}\cdot z^{n-1}\right)^{(5)}=\frac{1}{5!}\left(z^{n+1}+z^n\right)^{(5)}\Big|_{z=1}=$$

$$=\frac{1}{120}\left((n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)z^{n-4}+n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)z^{n-5}\right)\Big|_{z=1}=$$

$$=\frac{1}{120}\left(2n^5-15n^4+40n^3-45n^2+18n\right).$$

Таким чином, розв’язком даного різницевого рівняння при заданих початкових умовах є решітчаста функція

$$x_n=\frac{1}{120}\left(2n^5-15n^4+40n^3-45n^2+18n\right).$$

Приклад 4.17. Розв’язати систему лінійних різницевих рівнянь

$$\begin{cases} x_{n+2}+2y_n=0,\\ 2x_n-y_{n+2}=0,\end{cases}$$

якщо $x_0=y_0=y_1=0$, $x_1=1$.

Розв’язання. Нехай $x_n \div X^*(p)$, $y_n \div Y^*(p)$. З урахуванням початкових умов знаходимо зображення x_{n+2}, y_{n+2}: $x_{n+2}\div e^{2p}X^*(p)-e^p$, $y_{n+2}\div e^{2p}Y^*(p)$. Отримуємо рівняння відносно зображень $X^*(p)$, $Y^*(p)$:

$$\begin{cases} e^{2p}X^*(p)+2Y^*(p)=e^p,\\ 2X^*(p)-e^{2p}Y^*(p)=0.\end{cases}$$

Перейшовши до z-перетворення, останню систему запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} z^2X(z)+2Y(z)=z,\\ 2X(z)-z^2Y(z)=0.\end{cases}$$

Звідси знаходимо зображення розв’язку системи:

$$X(z)=\frac{z^3}{z^4+4},\ Y(z)=\frac{2z}{z^4+4}.$$

Обидві функції мають чотири прості полюси: $z_{1,2}=\sqrt{2}e^{\pm\frac{\pi i}{4}}$ та $z_{3,4}=\sqrt{2}e^{\pm\frac{3\pi i}{4}}$. Оригінали x_n та y_n знаходимо за формулою (4.8): $x_n=\sum_{k=1}^{4}\frac{z_k^3}{4z_k^3}z_k^{n-1}$, $y_n=\sum_{k=1}^{4}\frac{2z_k}{4z_k^3}z_k^{n-1}$. Підставляючи сюди значення z_k, після перетворень знаходимо наступні вирази для оригіналів:

$$x_n=2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{\pi(n-1)}{4},\ y_n=2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{\pi(n+1)}{4}.$$

Таким чином, знайдено розв’язок заданої системи лінійних рівнянь.