Лекція 5. Основи розрахунку коливних процесів в машинах

1. Класифікація коливань

За способом збудження коливань розрізняють коливання: вільні, вимушені, параметричні та автоколивання.

1. **Вільні (власні) коливання** обумовлені початковими відхиленнями елементів коливної системи від положення рівноваги. Один з багатьох прикладів (рис. 1, а) - маятник, який характеризується тим, що кут відхилення φ або/і кутова швидкість $\dot{\varphi}$ у початковий момент часу t=0 не рівні нулю.
2. **Вимушені коливання** обумовлені дією зовнішньої (наприклад, періодичної) сили (рис. 1, б).
3. **Параметричні коливання** обумовлені зміною яких-небудь параметрів системи. Приклад наведено на рис. 1, в. Зміна довжини гнучкого підвісу, призводить до зміни частоти власних коливань системи (маятника). Параметричні коливання, як і вимушені, пов'язані з дією на систему зовнішньої сили. Однак параметричні коливання виникають тоді, коли дія зовнішньої сили веде до зміни параметрів системи, а не до безпосередніх відхилень від положення рівноваги.
4. **Автоколивання** відбуваються в нелінійних неконсервативних автономних системах. Їхнє існування, амплітуда, період і форма визначаються конструкцією установки, її параметрами, але не початковими умовами. На рис. 2.1, г представлений приклад автоколивань, коли енергія до коливної системи (вантаж на пружині) підводиться через гнучку стрічку. Коливання виникають внаслідок тертя між поверхнями стрічки та вантажу.

5. У практичних задачах динаміки становлять інтерес комбінації різних типів коливань. Приведемо деякі з таких комбінацій:

6. **4 + 2** - на автоколивну систему діє періодична зовнішня сила;

7. **4 + 4** - відбуваються коливання у взаємозалежних автоколивних системах;

8. **3 + 4** - в автоколивній системі за періодичним законом змінюються один або кілька параметрів;

9. **3 + 2** - на систему зі змінними параметрами діють періодичні зовнішні сили;

10. **2 + 3 + 4** - на автоколивну систему діють безпосередньо періодичні зовнішні сили й одночасно відбувається періодична зміна її параметрів.

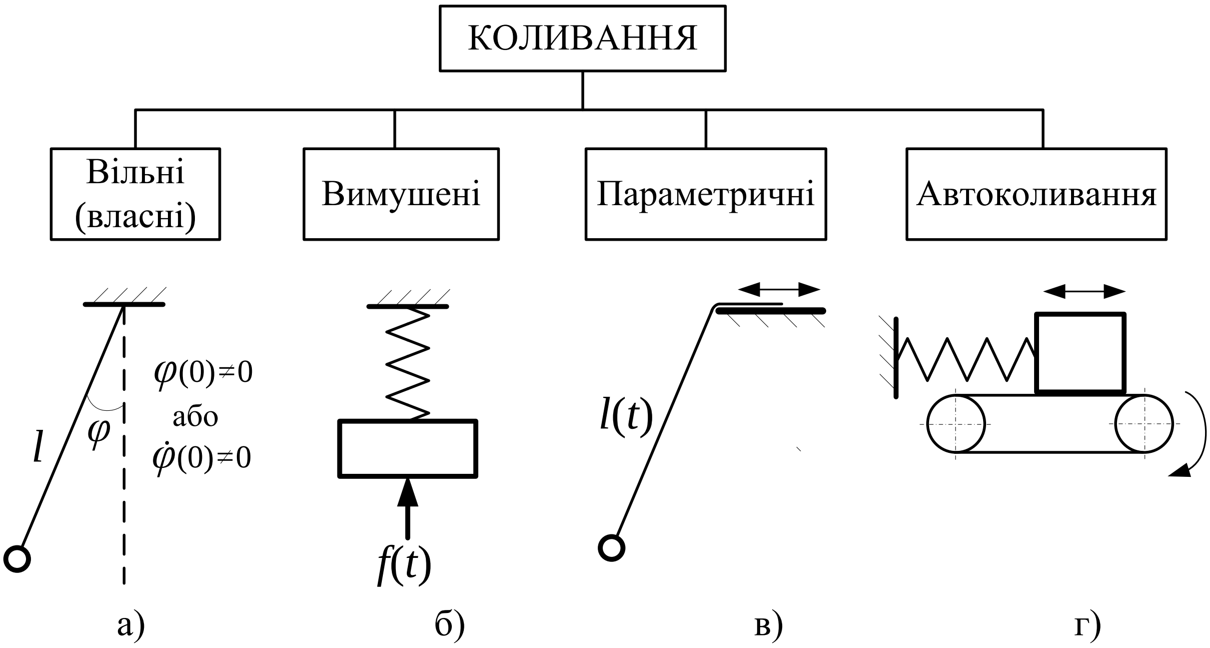


Рис. 1. Класифікація коливань

Класифікацію коливань проводять також за видом деформації, що виникає в елементах коливної системи. Зокрема, стосовно до стержневих систем розрізняють **поздовжні**, **поперечні** (**згинні**) і **крутильні** коливання.

Відповідно до закону, за яким величина, що характеризує коливальний процес, змінюється в часі, розрізняють **періодичні** й **неперіодичні** коливання. Періодичні коливання підкоряються закону:

$$f(t+T) = f(t), \tag{1}$$

де T – період коливань. Крім того, є широкий проміжний клас **майже періодичних коливань**, для яких

$$\left|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\right| \leq \varepsilon, \tag{2}$$

де τ – майже період; ε – мала величина.

Найпростішими та найпоширенішими є **гармонічні коливання**, які описуються рівнянням:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi), \tag{3}$$

де A – амплітуда коливань; ω – кругова (циклічна або кутова) частота ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) коливань; $\omega t+\varphi$ – фаза коливань; φ – зміщення фази.

Часто зустрічаються періодичні, але негармонічні коливання (рис. 2). Їх завжди можна розглядати як суму простих гармонічних коливань. Процес розкладання періодичних негармонічних коливань на прості гармонічні складові (гармоніки) називається **гармонічним аналізом** і виконується за допомогою рядів Фур'є.

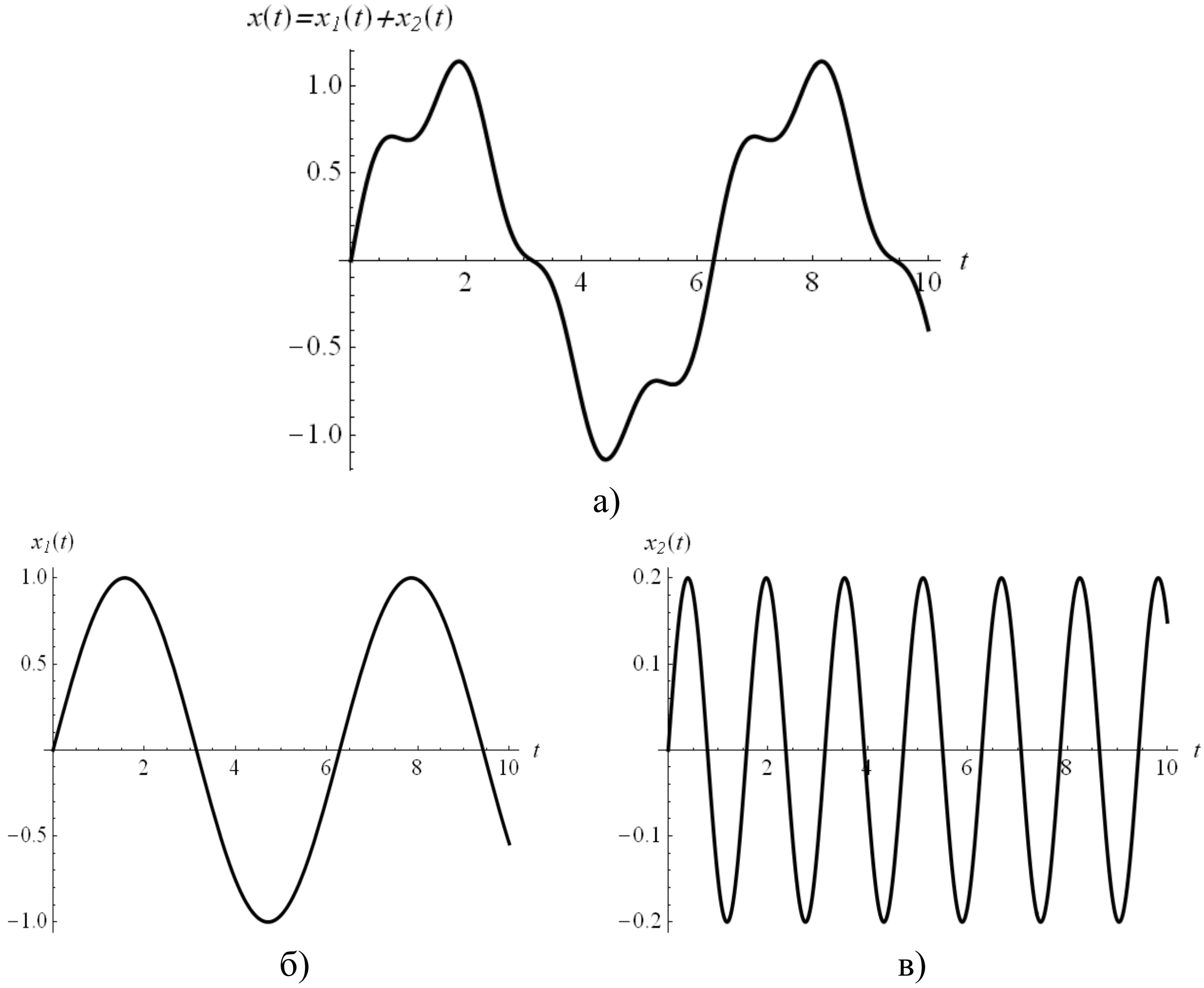


Рис. 2. Представлення періодичного негармонічного коливання у вигляді суми двох гармонік: а) періодичне негармонічне коливання; б) перша гармоніка; в) друга гармоніка

Крім того, часто зустрічаються наступні види коливань: **загасаючі** (їх амплітуда поступово зменшується), **наростаючі** (амплітуда цих коливань поступово збільшується). Можливі також коливання зі змінною частотою й постійною амплітудою або змінними частотою й амплітудою.

2. Фазові траєкторії та фазовий портрет коливань

Одним із методів дослідження коливань (і взагалі руху динамічної системи) є аналіз її фазового портрету. Фазовий портрет коливання будують таким чином: швидкість руху $\dot{x}$ відкладається по осі ординат, а відхилення x – по осі абсцис фазової площини. Кожному руху в момент часу t відповідає зображуючи точка на вказаній площині координат $\dot{x}$ - x, що однозначно відповідає миттєвим значенням координати x та швидкості $\dot{x}$. Зображуюча точка з плином часу переміщується, описуючи фазову траєкторію. Час відіграє роль параметра оскільки рівняння фазової траєкторії задане залежністю між координатою й швидкістю $\dot{x} = f(x)$.

Недоліком фазового портрета є неможливість безпосереднього представлення процесу в часі, але цей недолік компенсується великою перевагою: тут із чисто геометричного представлення фазової траєкторії або сімейства фазових траєкторій можна зробити важливі висновки про властивості коливань. Це насамперед відноситься до коливань, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Для таких коливань може виявитися, що єдино можливим методом їх дослідження є метод фазової площини.

Розглянемо насамперед простий приклад: визначимо фазову траєкторію гармонічного коливання, яке описується рівнянням (3). Виконаємо певні математичні перетворення цього виразу. Спочатку знайдемо його першу похідну за часом:

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t - \varphi). \tag{4}$$

Вирази (3) та (4) піднесемо до квадрату та поділимо на певні коефіцієнти (вираз (3) на коефіцієнт A^2, а вираз (4) на коефіцієнт $A^2\omega^2$):

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{A^2} = \sin(\omega t - \varphi)^2, \\ \dfrac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = \cos(\omega t - \varphi)^2. \end{cases} \tag{5}$$

Додамо обидва рівняння із системи рівнянь (2.5) в результаті чого отримаємо:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = \sin(\omega t - \varphi)^2 + \cos(\omega t - \varphi)^2 \tag{6}$$

або

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = 1. \tag{7}$$

На фазовій площині таке рівняння описує еліпс із півосями A та $A\omega$ (рис. 3). У випадку ω=1 цей еліпс перетворюється в коло. Однак коло можна одержати й для будь-якої частоти ω, змінивши масштаб по осі ординат і відкладаючи по ній не $\dot{x}$, а $\dot{x}/\omega$.

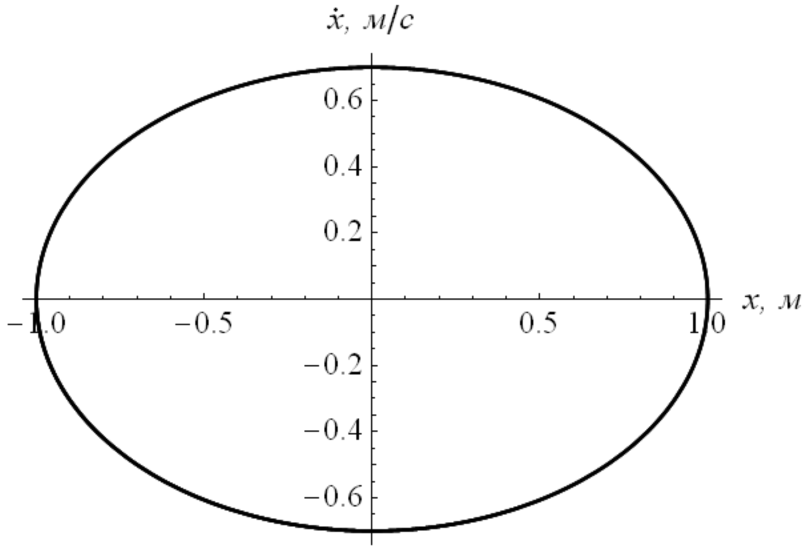


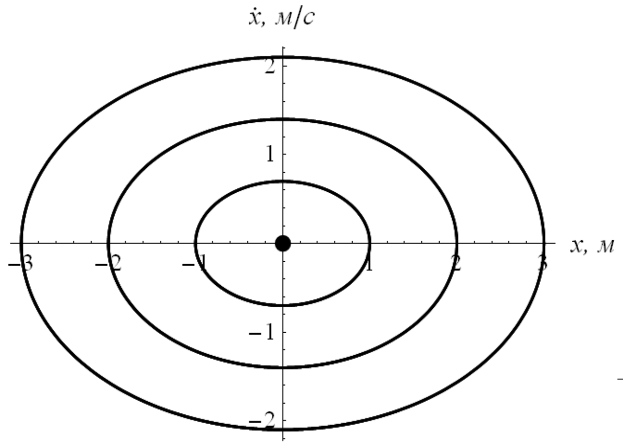
Рис. 3. Фазова траєкторія гармонічного коливання

Розглянемо тепер деякі загальні властивості фазових траєкторій. Безпосередньо видно, що кожна зображуюча точка рухається за годинниковою стрілкою. У точках, в яких фазова траєкторія перетинає вісь абсцис усі фазові траєкторії мають вертикальні дотичні. Це випливає з того, що точка перетину з віссю абсцис характеризується значенням швидкості, рівним нулю. Крім того, у цих же точках значення положення приймають амплітудні значення. У точці перетину із віссю ординат навпаки: положення є нульовим, а швидкість приймає амплітудне значення. Звідси випливає, що в жодній точці верхньої або нижньої півплощини фазова траєкторія не може мати вертикальну дотичну, оскільки в кожній точці, де дотична є вертикальною, швидкість повинна бути рівною нулю. Можливі виключення, коли певні вироджені фазові траєкторії перетинають абсцису не вертикально, але тоді точка перетину завжди є так званою особливою точкою. Докладніше про це буде сказано нижче.

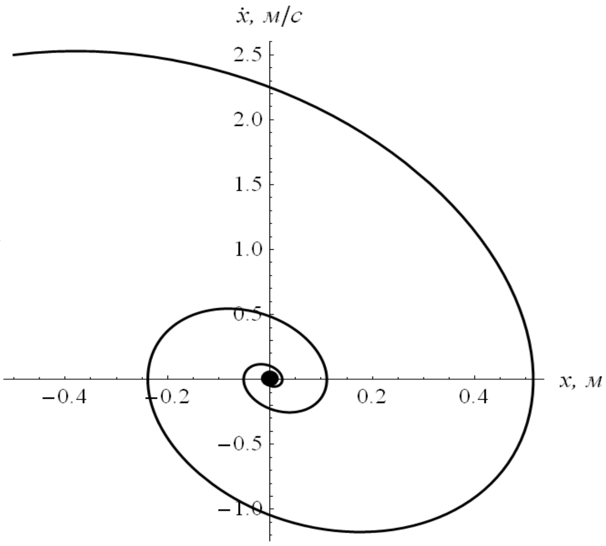
Окрема фазова траєкторія представляє окремі визначені коливання. Якщо потрібне загальне представлення про всі можливі рухи коливної системи, то зображується сімейство фазових траєкторій. Таке сімейство траєкторій називається фазовим портретом системи. Подібно тому як портрет людини дозволяє скласти певне уявлення про неї, фазовий портрет показує фахівцеві важливі властивості динамічної системи.

Положення рівноваги коливної системи завжди представляється особливою точкою фазової площини. Легко бачити, що така точка може лежати тільки на осі x, оскільки лише в цьому випадку можливий стан спокою. По виду фазових траєкторій, що оточують особливі точки, розрізняють наступні типи цих точок: **центр**, **фокус**, **вузол** і **сідло**. Ці поняття, запозичені з теорії диференціальних рівнянь, виявилися дуже корисними для опису поведінки коливної системи.

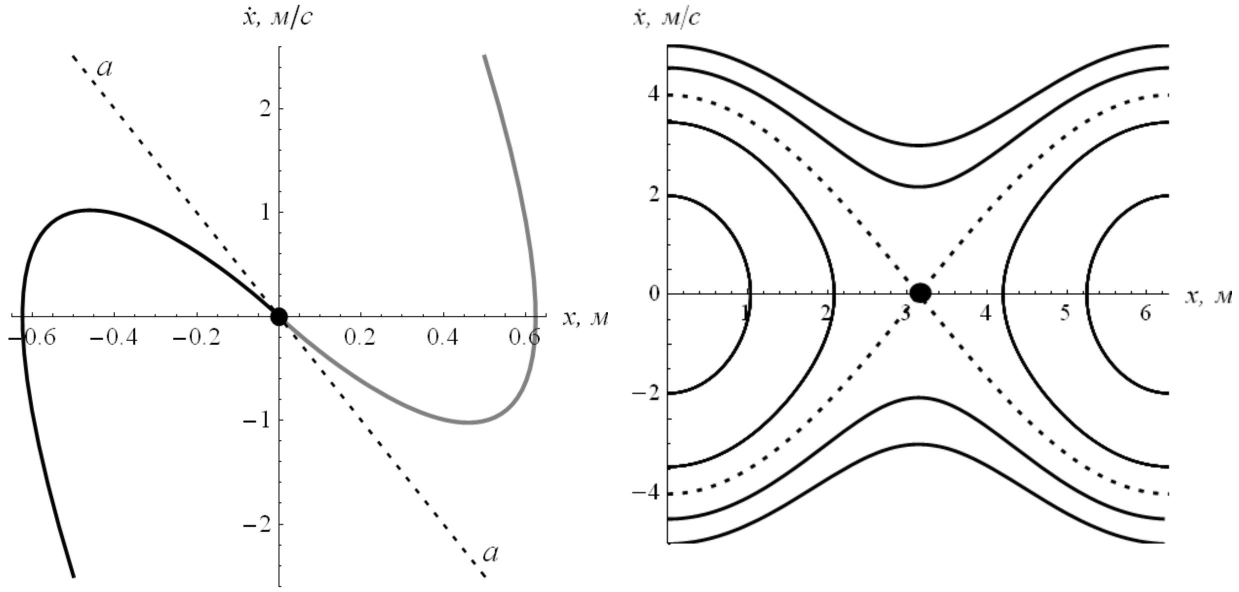
На рис. 4, а показана особлива точка типу центр. Вона характерна для незатухаючих коливань, які проходять поблизу положення рівноваги (на рис. 4, а чи більший еліпс, тим більшою є енергія коливань). При наявності демпфування кожний еліпс переходить у спіраль (рис. 2.4, б), а особлива точка на початку координат стає фокусом. Якщо демпфування слабке, то спіраль складається з великого числа близько розташованих витків. Чим сильніше демпфування, тем далі витки знаходяться один від одного. При дуже сильному демпфуванні фазовий портрет якісно змінюється, приймаючи вид, показаний на рис. 2.4, в. Тут початок координат є вузлом. В особливій точці всі фазові траєкторії дотикаються до прямої *а-а* (штрихова лінія), яка проходить через початок координат. Вздовж цієї прямої фазові траєкторії стягуються в особливу точку (на рис. 2.4, в показані лише дві фазові траєкторії чорного та сірого кольору).



а)



б)



в) г)

Рис. 4. Фазові траєкторії різних коливних систем: а) гармонічна коливна система; б) гармонічна коливна система із демпфуванням; в) гармонічна коливна система із сильним демпфуванням; г) фазовий портрет з особливою точкою типу сідло

На рис. 4, г представлений фазовий портрет системи з особливою точкою типу сідло. Він характеризується тим, що через особливу точку проходять дві вироджені фазові траєкторії – сепаратриси (показані штриховими лініями), а інші траєкторії схожі на гіперболи. Особлива точка такого типу відповідає нестійкому положенню рівноваги коливної системи (наприклад, для математичного маятника це верхнє положення).

Наведені тут фазові портрети є „стандартними блоками”, з яких будуються фазові портрети реальних коливних систем, якими є механізми та машини. Слід також відмітити, що можна застосовувати модифіковані фазові площини. Щоб одержати фазові траєкторії більш простого виду, іноді доцільно відкладати по осі ординат замість швидкості її деяку функцію, а по осі абсцис – деяку функцію від x відповідно. Крім того, використовуються тривимірні (некласичні) фазові портрети, які мають більшу загальність у порівнянні із розглянутими та дають змогу оцінювати зміну одночасно трьох фазових координат протягом руху системи. На рис. 5 показана некласична фазова траєкторія руху фазової точки у тривимірному просторі, яка побудована для коливної системи, що описується диференціальним рівнянням $\ddot{x} - 0{,}01\dot{x} + \sin(x) = -0{,}5\cos(t)$ (сіра точка на рис. 5 показує початок координат).

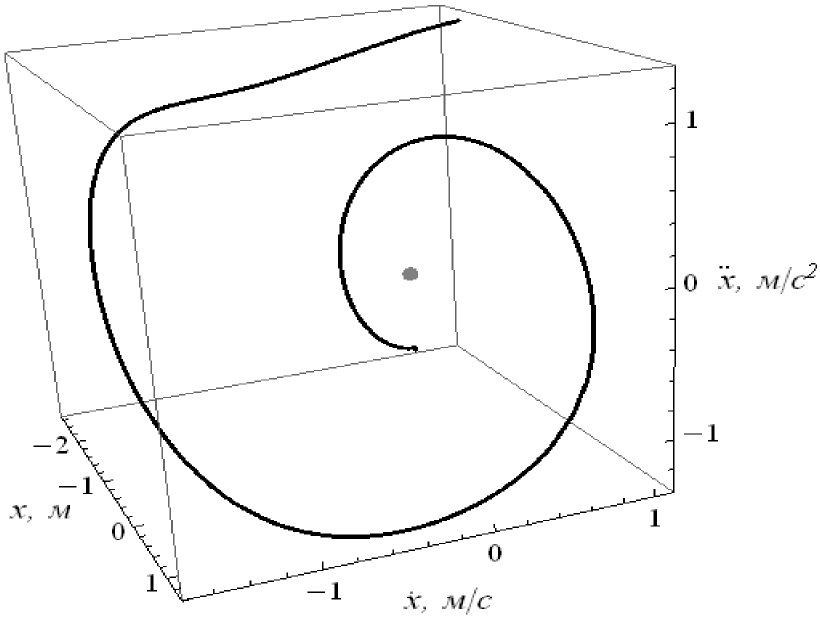


Рис. 5. Некласична фазова траєкторія у тривимірному просторі