Лекція 3. Математичне моделювання динаміки машин

3.1. Методи синтезу математичних моделей динамічних систем

На основі отриманої динамічної моделі формальними методами може бути побудована математична модель будь-якої механічної системи. Математичні моделі механічних систем становлять, як правило, диференціальні рівняння руху або взаємодії окремих елементів.

Для отримання диференціальних рівнянь руху механічних систем при відомих їх динамічних моделях використовуються три основних методи:

1) метод рівноваги з використанням принципу д'Аламбера;
2) принцип можливих переміщень;
3) принцип Гамільтона-Остроградського (рівняння Лагранжа другого роду).

Розглянемо більш детально кожний із цих методів.

Метод рівноваги. Рівняння руху будь-якої механічної системи при наявності її динамічної моделі – це вираз другого закону Ньютона, який встановлює, що швидкість зміни імпульсу будь-якої маси дорівнює діючій на неї силі. В математичній формі це записується у вигляді наступного диференціального рівняння:

$$\overline{F}(t) = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\overline{r}}{dt}\right), \tag{1}$$

де $F(t)$ – вектор прикладеної сили; r – радіус-вектор координат центра мас маси $m;$ t – координата часу.

Для більшості задач динаміки машин і механізмів масу можна розглядати незмінною в часі. Тоді рівняння (1) приймає вигляд:

$$\overline{F}(t) = m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = m\ddot{\overline{r}}. \tag{2}$$

Отримане рівняння виражає умову рівності сили добутку маси на прискорення:

$$\overline{F}(t) - m\ddot{\bar{r}} = 0. \tag{3}$$

У рівнянні (3) другий доданок називають силою інерції, яка здійснює опір прискоренню маси.

Принцип д’Аламбера *(маса викликає силу інерції, пропорційну її прискоренню і протилежно йому спрямовану)* широко застосовується в задачах динаміки машин, оскільки дає змогу вивести рівняння руху на основі умов динамічної рівноваги. Сила $F(t)$ може включати в себе різні види сил, що прикладені до маси: силу пружного опору, яка направлена в напрямку протилежному переміщенню; силу затухання, яка здійснює опір швидкості переміщення, і незалежні зовнішні сили. Якщо ввести силу інерції, що здійснює опір прискоренню маси, то рівняння руху виражають умову рівноваги всіх сил, які прикладені до маси. Принцип д’Аламбера розглядає рівновагу окремо взятої маси з прикладенням до неї всіх діючих сил, сили інерції та реакцій зв’язку з іншими масами. Для більшості простих динамічних моделей механічних систем указаний метод виводу рівнянь руху найбільш зручний. Складемо за допомогою цього методу диференціальні рівняння руху динамічної моделі, показаної на рис. 1.

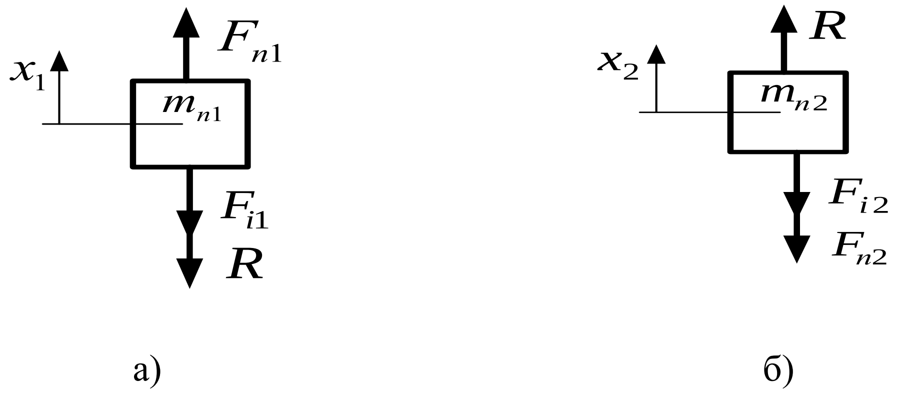

Рис. 1. Схеми динамічної рівноваги мас: а) m_{n1}; б) m_{n2}

На рис. 1 $R=c_n$ (x_1-x_2) – реакція пружного зв’язку між масами m_{n1} і m_{n2}; $F_{i1}=m_{n1}\ddot{x}_1$ – сила інерції, що діє на масу m_{n1}; $F_{i2}=m_{n2}\ddot{x}_2$ – сила інерції, що діє на масу m_{n2}.

Приклад. Розглянемо динамічну рівновагу маси m_{n1} (до неї прикладені сили R та F_{i1} (рис. 1.6, а)) та маси m_{n2} (до неї прикладені сили R та F_{i2} (рис.1.6, б)).

Використовуючи умови рівноваги (3) для мас m_{n1} та m_{n2}, отримаємо систему диференціальних рівнянь, які описують рух динамічної моделі, показаної на рис. 2:

$$\begin{cases} F_{n1}-c_n(x_1-x_2)-m_{n1}\ddot{x}_1=0; \\ c_n(x_1-x_2)-F_{n2}-m_{n2}\ddot{x}_2=0. \end{cases} \tag{4}$$

Запишемо цю систему в іншому вигляді:

$$\begin{cases} m_{n1}\ddot{x}_1=F_{n1}-c_n(x_1-x_2); \\ m_{n2}\ddot{x}_2=c_n(x_1-x_2)-F_{n2}. \end{cases} \tag{5}$$

Отримана система диференціальних рівнянь являє собою математичну модель для визначення динамічних навантажень R (реакції пружного зв’язку) у канаті.

Принцип можливих переміщень. Коли конструктивна схема машини чи механізму достатньо складна і містить ряд взаємодіючих тіл кінцевих розмірів, безпосереднє виведення умов рівноваги всіх діючих на систему сил ускладнюється. Змінні сили часто виражаються через переміщення по узагальнюючих координатах, але записати умови їх рівноваги досить складно. В цьому випадку для виведення рівнянь руху замість умов рівноваги використовують принцип можливих (віртуальних) переміщень.

Цей принцип формулюється наступним чином: *якщо система, котра знаходиться в рівновазі під дією декількох сил, отримує можливе переміщення, тобто будь-яке переміщення, яке задовольняє крайовим умовам, то повна робота всіх сил на цьому переміщенні дорівнює нулю.*

Згідно з цим принципом рівність нулю роботи сил на можливому переміщенні системи еквівалентна умові рівноваги. Суттєва перевага цього принципу полягає в тому, що складові робіт сил на можливих переміщеннях – скалярні величини і можуть додаватись алгебраїчно, а сили, які діють на елементи динамічної моделі, є векторами і можуть додаватися тільки за правилами векторного аналізу.

При застосуванні принципу можливих переміщень у випадку руху механічної системи до заданих зовнішніх сил приєднуються сили тертя і сили інерції для кожного тіла. У цьому випадку принцип можливих переміщень можна записати так:

$$\sum_{i=1}^{N}(\overline{F}_i - m_i\ddot{\overline{r}}_i)\delta\overline{r}_i = 0, \qquad (5)$$

де N - кількість матеріальних точок системи; $\overline{F}_i$ - вектор рівнодійної зовнішніх сил і сил тертя, що діють на матеріальну точку; m_i, $\overline{r}_i$ - маса та вектор координати i-ої точки системи.

Для динамічної моделі, показаної на рис. 1, складемо диференціальні рівняння руху за допомогою принципу можливих переміщень. З цією метою визначимо всі діючі на маси m_{n1} та m_{n2} сили, включаючи й сили пружності. Використавши рівняння (5), отримаємо:

$$\left(F_{n1} - c_n(x_1 - x_2) - m_{n1}\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(c_n(x_1 - x_2) - F_{n2} - m_{n2}\ddot{x}_2\right)\delta x_2 = 0. \qquad (6)$$

Оскільки рівняння (1.25) має місце при будь-яких незалежних одне від одного значеннях варіацій δx_1 і δx_2, то це можливо лише при умові, що коефіцієнти при кожній із цих варіацій дорівнюють нулю. Тоді будемо мати:

$$\begin{cases} m_{n1}\ddot{x}_1 = F_{n1} - c_n(x_1 - x_2); \\ m_{n2}\ddot{x}_2 = c_n(x_1 - x_2) - F_{n2}. \end{cases} \qquad (7)$$

Отримана система являє собою диференціальні рівняння руху динамічної моделі, показаної на рис. 1, яка збігається з системою (5), одержаною за допомогою методу рівноваги.

Принцип Гамільтона-Остроградського (рівняння Лагранжа II роду). Цей метод не вимагає векторних рівнянь рівноваги, бо він використовує скалярні величини енергії у варіаційній постановці. *Суть цього методу полягає в тому, що для неконсервативних механічних систем справедливе варіаційне рівняння:*

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta A)dt=0, \tag{8}$$

де t_0, t_1 – початковий і кінцевий моменти часу руху системи; δT – варіація кінетичної енергії; δA – елементарна робота сил, прикладених до системи, при переході від прямого до обхідного шляху, який має з прямим шляхом спільні початкові й кінцеві умови.

Якщо система консервативна, то $\delta A=-\delta \Pi$ (де Π - потенціальна енергія системи) і $\delta T+\delta A=\delta(T-\Pi)=\delta L$. У випадку консервативної системи принцип Гамільтона-Остроградського полягає в тому, що

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=0. \tag{9}$$

Інтеграл

$$I_L=\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt \tag{10}$$

називається дією за Гамільтоном-Остроградським.

Застосування цього принципу можна здійснювати і в іншій формі

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta(T-\Pi)+\delta A_1\right]dt=0. \tag{11}$$

У цьому випадку консервативні сили (гравітаційні й пружні) входять у вираз потенціальної енергії, а δA_1 становить елементарну роботу неконсервативних сил (рушійних і сил опору при переміщенні системи).

Застосування принципу Гамільтона-Остроградського у формі (1.30) дає можливість спростити врахування консервативних сил, таким чином надати принципу більший формалізм.

Принцип Гамільтона-Остроградського можна покласти в основу наближених методів розв’язування задач динаміки машин, які широко застосовуються в теорії пружності й при розв’язуванні складних задач теорії коливань.

За допомогою принципу Гамільтона-Остроградського складемо диференціальні рівняння руху динамічної моделі, показаної на рис. 1.

Кінетична і потенціальна енергія цієї моделі мають вигляд:

$$T = \frac{1}{2} m_{n1} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_{n2} \dot{x}_2^2; \tag{12}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_n (x_1 - x_2)^2. \tag{13}$$

Елементарну роботу неконсервативних сил представимо виразом

$$\delta A_1 = F_{n1} \delta x_1 - F_{n2} \delta x_2. \tag{14}$$

Варіація $\delta(T - \Pi)$ для розглядуваної моделі має вигляд

$$\delta(T - \Pi) = m_{n1} \dot{x}_1 \delta\dot{x}_1 + m_{n2} \dot{x}_2 \delta\dot{x}_2 - c_n (x_1 - x_2) \delta x_1 + c_n (x_1 - x_2) \delta x_2. \tag{15}$$

Пісня підстановки виразів (15) та (14) у рівняння (11) отримаємо

$$\int_{t_0}^{t_1} \{ m_{n1} \dot{x}_1 \delta\dot{x}_1 + m_{n2} \dot{x}_2 \delta\dot{x}_2 + [F_{n1} - c_n (x_1 - x_2)] \delta x_1 + [c_n (x_1 - x_2) - F_{n2} \delta x_2 \} dt = 0. \tag{16}$$

Перших два члени рівняння (16) проінтегруємо по частинах, у результаті чого будемо мати:

$$\int_{t_0}^{t_1}(m_{n1}\dot{x}_1\delta\dot{x}_1 + m_{n2}\dot{x}_2\delta\dot{x}_2)dt = m_{n1}\dot{x}_1\delta\dot{x}_1\Big|_{t_0}^{t_1} +$$

$$+ m_{n2}\dot{x}_2\delta\dot{x}_2\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}(m_{n1}\ddot{x}_1\delta x_1 + m_{n2}\ddot{x}_2\delta x_2)dt. \qquad (17)$$

У зв’язку з тим, що на границях інтегрування варіації δx_1 і δx_2 дорівнюють нулю, перших два члени правої частини співвідношення (17) дорівнюють нулю. Тому після підстановки виразу (17) в рівняння (16) отримаємо:

$$\int_{t_0}^{t_1}\{[F_{n1} - c_n(x_1 - x_2) - m_{n1}\ddot{x}_1]\delta x_1 + [c_n(x_1 - x_2) - F_{n2} - m_{n2}\ddot{x}_2]\delta x_2\}dt = 0. \qquad (18)$$

Оскільки варіації δx_1 і δx_2 в середині інтервалу [*t₀*, *t₁*] довільні й незалежні між собою, то рівняння (17) можливе в загальному випадку лише при умові, що коефіцієнти при варіаціях δx_1 і δx_2 дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} F_{n1} - c_n(x_1 - x_2) - m_{n1}\ddot{x}_1 = 0; \\ c_n(x_1 - x_2) - F_{n2} - m_{n2}\ddot{x}_2 = 0. \end{cases} \qquad (19)$$

Отримана система рівнянь є системою диференціальних рівнянь руху динамічної моделі (рис. 1).

Із принципу Гамільтона-Остроградського можна отримати відоме рівняння Лагранжа другого роду. Згідно із принципом Гамільнота-Остроградського, серед можливих траєкторій руху системи дійсною є та, на якій варіація дії (11) дорівнює нулю, тобто повинно виконуватись рівняння:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))dt = 0. \qquad (20)$$

Інакше кажучи, дійсна траєкторія динамічної системи повинна задовольняти рівнянню (20). Для того, щоб знайти екстремум дії (11) необхідно скласти рівняння Ейлера:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0. \qquad (21)$$

Розв'язок рівняння (21) буде мати дві постійні інтегрування, які знаходяться відповідно до крайових умов $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$.

Зазначимо, що рівняння (21) справедливе лише для потенціальних сил (сили, робота яких не залежить від форми траєкторії руху системи, а залежить тільки від початкової й кінцевої точки прикладання сили; отже, потенціальні сили – такі сили, робота яких по будь-якій замкненій траєкторії рівна нулю, що означає збереження механічної енергії в системі при дії на неї потенціальних сил; приклади потенціальних сил: сила ваги, сила пружності тощо). Для непотенціальних сил рівняння Лагранжа II роду записується у такому вигляді:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x, \qquad (22)$$

де Q_x - узагальнена сила, яка визначається таким чином:

$$Q=-\frac{\partial \Pi}{\partial x}+Q_{неп}, \qquad (23)$$

де $Q_{неп}$ - непотенціальна сила, що діє на систему. Кількість рівнянь, які необхідно скласти для побудови математичної моделі руху машини чи механізму рівна кількості її узагальнених координат.

Для прикладу складемо математичну модель руху динамічної системи (рис. 1) за допомогою рівняння Лагранжа II роду. На систему представлену на рис. 1.5 діють як потенціальні так і непотенціальні сили. Тому будемо використовувати рівняння (22), (23).

Крім того, кількість узагальнених координат рівна двом, тому необхідно скласти два рівняння (22). Раніше були знайдені кінетична (12) та потенціальна (13) енергії системи. Надалі запишемо вирази для узагальнених сил:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + Q_{неп1} = -\frac{1}{2}c_n \frac{\partial (x_1 - x_2)^2}{\partial x_1} + F_{n1} = F_{n1} - \frac{1}{2}c_n \frac{\partial (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)}{\partial x_1} =$$
$$= F_{n1} - \frac{1}{2}c_n\left(\frac{\partial x_1^2}{\partial x_1} - 2\frac{\partial x_1x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2^2}{\partial x_1}\right) = F_{n1} - \frac{1}{2}c_n (2x_1 - 2x_2) = F_{n1} - c_n(x_1 - x_2), \quad (24)$$

$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} + Q_{неп2} = -\frac{1}{2}c_n \frac{\partial (x_1 - x_2)^2}{\partial x_2} + F_{n2} = F_{n2} - \frac{1}{2}c_n \frac{\partial (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)}{\partial x_2} =$$
$$= F_{n2} - \frac{1}{2}c_n\left(\frac{\partial x_1^2}{\partial x_2} - 2\frac{\partial x_1x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_2^2}{\partial x_2}\right) = F_{n2} - \frac{1}{2}c_n (-2x_1 + 2x_2) = F_{n2} - c_n(x_2 - x_1). \quad (25)$$

Надалі знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_{n1}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_{n2}\dot{x}_2^2\right)}{\partial x_1} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_{n1}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_{n2}\dot{x}_2^2\right)}{\partial x_2} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_{n1}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_{n2}\dot{x}_2^2\right)}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_{n1}2\dot{x}_1\right) = \frac{d}{dt}(m_{n1}\dot{x}_1) = m_{n1}\ddot{x}_1, \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_{n1}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_{n2}\dot{x}_2^2\right)}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_{n2}2\dot{x}_2\right) = \frac{d}{dt}(m_{n2}\dot{x}_2) = m_{n2}\ddot{x}_2. \quad (29)$$

Підставимо вирази (24)-(29) у формулу (21) та отримаємо:

$$\begin{cases} m_{n1}\ddot{x}_1 = F_{n1} - c_n(x_1 - x_2); \\ m_{n2}\ddot{x}_2 = F_{n2} - c_n(x_2 - x_1). \end{cases} \quad (30)$$

Усі три методи отримання диференціальних рівнянь руху машин та їх механізмів рівнозначні, і, як показує аналіз отриманих рівнянь, ці методи для однієї й тієї ж динамічної моделі приводять до одного і того ж результату. Звичайно вибір методу для будь-якої конкретної механічної системи залежить від типу динамічної моделі та визначається самим дослідником.

Для отримання необхідних результатів диференціальні рівняння руху механічної системи підлягають інтегруванню з метою визначення характеристик стану (переміщень, швидкостей і прискорень) окремих елементів у функції часу.