Лекція 9. Загальні положення оптимального керування машинами

1. Історичний розвиток екстремальних задач

Задачі оптимального керування відносяться до теорії екстремальних задач, тобто задач визначення максимальних і мінімальних значень. Уже та обставина, що в цьому реченні зустрічається кілька латинських слів (maximum - найбільше, minimum - найменше, extremum - крайнє, optimus - оптимальне), вказує, що теорія екстремальних задач була предметом дослідження із прадавніх часів. Про деякі з таких задач писали ще Аристотель (384-322 роки до н.е.), Евклид (III в. до н.е.) і Архімед (287-212 роки до н.е.). Заснування міста Карфаген (825 рік до н.е.) легенда асоціює з найдавнішою задачею визначення замкненої плоскої кривої, що охоплює фігуру максимально можливої площі. Подібні задачі іменуються ізопериметричними. Характерною рисою екстремальних задач є те, що їх постановка була породжена актуальними запитами розвитку суспільства. Більше того, починаючи з XVII століття домінуючим твердженням стає те, що закони навколишнього світу є наслідком деяких варіаційних принципів. Першим з них був принцип П. Ферма (1660 рік), відповідно до якого траєкторія світла, що поширюється від однієї точки до іншої, повинна бути така, щоб час проходження світла уздовж цієї траєкторії був мінімально можливим. Згодом були запропоновані різні широко використовувані в природознавстві варіаційні принципи, наприклад: принцип стаціонарної дії Гамільтона (1834 рік), принцип віртуальних переміщень, принцип найменшого примусу тощо. Паралельно розвивалися й методи розв’язування екстремальних задач. Близько 1630 року Ферма сформулював метод дослідження на екстремум поліномів, який полягає в тому, що в точці екстремуму похідна функції дорівнює нулю. Для загального випадку цей метод був отриманий Ньютоном (1671) і Лейбніцем (1684), роботи яких знаменують зародження математичного аналізу.

Початок розвитку класичного варіаційного числення датується появою в 1696 році статті І. Бернуллі (учня Лейбніця), у якій сформульована постановка задачі про криву, що з’єднує дві точки А і В, рухаючись по якій із точки А в В під дією сили ваги матеріальна точка досягне В за мінімально можливий час. У рамках класичного варіаційного числення в XVIII-XIX століттях установлені необхідні умови екстремуму першого порядку (Ейлер, Лагранж), пізніше досліджені необхідні й достатні умови другого порядку (Вейерштрасс, Лежандр, Якобі), побудовані теорія Гамільтона-Якобі й теорія поля (Д. Гільберт, А. Кнезер).

Подальший розвиток теорії екстремальних задач привів в XX столітті до створення лінійного програмування, випуклого аналізу, математичного програмування, теорії мінімаксу й деяких інших розділів, одним з яких є теорія оптимального керування. Ця теорія подібно іншим напрямкам теорії екстремальних задач, виникла у зв'язку з актуальними задачами автоматичного регулювання наприкінці 40-х років (керування ліфтом у шахті з метою найшвидшої його зупинки, керування рухом ракет, стабілізація потужності гідроелектростанцій тощо).

Відмітимо, що постановки окремих задач, які можуть бути інтерпретовані як задачі оптимального керування, зустрічалися й раніше, наприклад в „Математичних початках натуральної філософії" І. Ньютона (1687). Сюди ж відносяться й задачі Р. Годдарда (1919) про підйом ракети на задану висоту з мінімальними витратами палива й обернена їй задача про підйом ракети на максимальну висоту при заданій кількості палива.

За минулий час були встановлені фундаментальні принципи теорії оптимального керування: принцип максимуму й метод динамічного програмування. Зазначені принципи являють собою розвиток класичного варіаційного числення для дослідження задач, що містять складні обмеження на керування. Зараз теорія оптимального керування переживає період бурхливого розвитку як у зв'язку з наявністю цікавих математичних проблем, так і у зв'язку з наявністю сфер її застосування, у тому числі й у таких областях як економіка, біологія, медицина, ядерна енергетика тощо.

2. Постановка задач оптимального керування та їх класифікація

Оптимальним називають найкраще в деякому сенсі керування. У більшості випадків перевести об'єкт керування з одного стану в інший (з вихідного в заданий) можна безліччю способів. Ці способи реалізуються за допомогою різних законів керування. Часто серед них можна вибрати такий закон, щоб перехідний процес був оптимальним за певним критерієм (критерієм оптимальності). У якості критерію може виступати, наприклад, мінімум енергії, що витрачається на процес переходу або мінімум часу переходу. Критерій оптимальності формалізується у вигляді деякого функціонала, екстремум якого (мінімум або максимум) свідчить, що перехідний процес і керування оптимальні.

Загальний вид функціонала такий:

$$J = g_0\left(X(t_0), X(t_к), t_0, t_к\right) + \int_{t_0}^{t_к} f_0\left(X(t), U(t), t\right) dt, \tag{1}$$

де X – вектор змінних стану об'єкта керування; U – вектор керуючих впливів; t_0, $t_к$ – початковий і кінцевий моменти часу перехідного процесу.

Функція g_0 визначає „якість” крайових станів, у тому числі, пов’язаних з величинами t_0 та $t_к$. Функція f_0 визначає „якість” траєкторій $X(t)$ і керування $U(t)$ на інтервалі $[t_0; t_к]$.

Задача, у якій відшукується екстремум функціонала (1), називається *задачею Больца*. В окремих випадках функціонал (1) може приймати такі види:

$$J = g_0 \left(X(t_0), X(t_к), t_0, t_к \right). \tag{2}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_к} f_0 \left(X(t), U(t), t \right) dt. \tag{3}$$

У першому випадку задача пошуку екстремуму називається *задачею Майера*, у другому – *задачею Лагранжа*.

Прикладами задачі Майера є: задача максимальної швидкодії

$$J = t_к - t_0 \to \min, \tag{4}$$

задача на максимальну відстань переміщення

$$J = x(t_к) - x(t_0) \to \max. \tag{5}$$

Приклад задачі Лагранжа - задача на мінімальне енергоспоживання:

$$J = \int_{t_0}^{t_к} u^2(t) dt \to \min. \tag{6}$$

Вид підінтегральної функції критерію (6) пояснюється тим, що потужність керуючого сигналу, як правило, пропорційна квадрату його амплітуди. Крім того, використання квадрату, а не першого ступеня керування $u(t)$ дозволяє врахувати ту обставину, що в перехідному процесі керування може бути від’ємним. В окремих випадках, коли відомо, що керування завжди додатне, функціонал може бути й більш простим:

$$J = \int_{t_0}^{t_к} u(t) dt \to \min. \tag{7}$$

Можна показати, що задачі Майера й Лагранжа мають однаковий ступінь загальності, тобто шляхом певних перетворень можна задачу Лагранжа представити у вигляді задачі Майера і навпаки.

Важливою обставиною при розв’язуванні задач оптимального керування є те, що компоненти векторів X і U не можуть розглядатися як незалежні функції часу, здатні приймати будь-які значення. На вектори *X* і *U* обов'язково накладаються деякі обмеження у вигляді рівнянь зв'язку, гранично припустимих значень тощо. Як мінімум, варто вказати на диференціальні рівняння самого об'єкта керування, що зв'язують компоненти векторів *X*, $\dot{X}$ *і* *U*. Наприклад, розглянемо прямолінійний рух тіла масою *m* під дією керуючого впливу *u*, що створюється встановленим на тілі двигуном. Позначимо через *x* координату центру мас тіла й припустимо, що ніякі інші сили на тіло не діють. Тоді у відповідності із другим законом Ньютона рівняння руху тіла має вигляд $\ddot{x}(t)m = u$. Останнє рівняння еквівалентне системі двох рівнянь першого порядку: $\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 m = u$.

Розділяють „*класичні*" (у вигляді рівностей) і „*некласичні*" (у вигляді нерівностей) обмеження. „Класичні", у свою чергу, діляться на *голономні*, *неголономні* й *ізопериметричні*.

Голономні обмеження являють собою алгебраїчні рівняння зв'язку шуканих функцій *X(t)* і *U(t)*, записані, для зручності, у вигляді однорідних рівнянь із нульовою правою частиною:

$$\varphi_i(X, U, t) = 0, \quad i = 1...r, \tag{8}$$

де r - кількість алгебраїчних рівнянь.

Для задач оптимізації динамічних режимів роботи об'єктів керування голономні обмеження нетипові. Крім того, як правило, цих обмежень можна позбутися ще на етапі формулювання задачі шляхом відповідних перетворень. Тому надалі вони не розглядаються.

Неголономні обмеження являють собою диференціальні рівняння:

$$\varphi_i(X, \dot{X}, U, t) = 0, \ i = 1...n, \tag{9}$$

де n - кількість диференціальних рівнянь.

Це диференціальні рівняння об'єкта керування, а також інші рівняння, що дозволяють врахувати додаткові обмеження.

Ізопериметричні обмеження мають вигляд:

$$\int_{t_0}^{t_к} \varphi_i(X, U, t) dt = c_i = const, \ i = 1...k, \tag{10}$$

де k - кількість інтегральних рівнянь.

Як приклад такого обмеження можна привести обмеження на витрату енергії в перехідному процесі:

$$\int_{t_0}^{t_\kappa} u^2(t)dt = c = const. \qquad (11)$$

За допомогою певних перетворень ізопериметричні обмеження перетворюються в неголономні. Це перетворення полягає у введенні додаткових змінних, похідні яких за часом рівні підінтегральним виразам (2.22):

$$\dot{x}_{n+i} = \varphi_i(X, U, t), \; i = 1...z, \qquad (12)$$

де z - кількість „нових” додаткових умов.

Умовно говорячи, нові змінні „розширюють” вихідну систему рівнянь об’єкта. Підставляючи (2.24) в (2.22), одержимо:

$$\int_{t_0}^{t_\kappa} \varphi_i(X, U, t)dt = \int_{t_0}^{t_\kappa} \dot{x}_{n+i}dt = x_{n+i}(t_\kappa) - x_{n+i}(t_0) = c_i. \qquad (13)$$

Для спрощення вважають $x_{n+i}(t_0)=0$, тоді $x_{n+i}(t_\kappa)=c_i$.

Типовим прикладом некласичних обмежень є обмеження на максимальні значення керуючих величин (обмеження на керування по модулю):

$$|u_i| \le u_{i,\max}, \; i = 1...m, \qquad (14)$$

де m - кількість обмежень на керування.

Інший вид додаткових умов, що накладаються на задачу − це *крайові умови*, що визначають значення змінних об’єкта в початковий і кінцевий моменти часу перехідного процесу. За видом крайових умов розрізняють *задачі із закріпленими кінцями*, коли $X(t_0)$ і $X(t_\kappa)$ відомі (задані), і *задачі з рухомими кінцями*, коли частина або всі компоненти цих векторів невідомі (можуть приймати довільні значення). Серед останніх задач часто зустрічаються *задачі з вільним правим кінцем*, у якій вектор $X(t_\kappa)$ невідомий.

Залежно від визначеності моменту часу t_κ задачі розділяють на *задачі з фіксованим і нефіксованим часом*. До останнього типу задачі відноситься задачі на максимальну швидкодію.

Отже, задача оптимізації керування полягає в тому, щоб знайти такі вектори $U(t)$ і $X(t)$, які доставляють екстремум функціоналу критерію оптимальності з урахуванням усіх обмежень і крайових умов. Ці вектори називаються відповідно оптимальним керуванням і оптимальною траєкторією. У результаті розв’язку задачі оптимальне керування може бути знайдене або як *оптимальна програма*

$$U = U(t), \tag{15}$$

або як *оптимальна стратегія*

$$U = U(X). \tag{16}$$

Для побудови системи керування другий розв’язок, мабуть, більш бажаний, тому що дозволяє побудувати замкнену систему, здатну оптимальним чином функціонувати при будь-яких початкових умовах. Однак визначити оптимальну стратегію, як правило, набагато складніше, чим оптимальну програму.

Розв’язування задач оптимізації динамічних режимів здійснюється різними методами, основними з яких є: класичне варіаційне числення; метод максимуму Понтрягіна; динамічне програмування Беллмана.