Лекція 11. Принцип максимуму Понтрягіна

1. Проблеми розв'язування варіаційних задач

При знаходженні оптимального керування варіаційними методами доводиться мати справу з труднощами, які мають принциповий характер:

1. варіаційні методи дають можливість знаходити тільки відносні максимуми функціонала, тоді як інтерес викликає знаходження абсолютного максимуму або мінімуму.
2. рівняння Ейлера для багатьох технічних систем виявляються нелінійними, що часто не дає можливості отримати розв'язок варіаційної задачі в явному вигляді.
3. часто оптимальне керування технічними системами має розриви. Метод множників Лагранжа не в змозі визначити кількість і місце розташування точок розриву, і тому в цих випадках він не дає можливості знайти оптимальне керування.
4. на значення керуючих впливів і фазових координат технічних систем досить часто вводяться обмеження у вигляді нерівностей, що не дає змоги знаходити оптимальне керування варіаційними методами.

Оскільки остання обставина мала вирішальне значення для розвитку нових ідей в області оптимального керування, то зупинимось на ній більш детально.

Звичайними обмеженнями, що накладаються на сигнали керування, є обмеження виду

$$|u_i(t)| \le M_i \tag{1}$$

які означають необхідність обмеження по величині сигналів керування. Так, обмеженими можуть бути: напруга, яка підводиться до якоря електродвигуна, граничний кут повороту руля автомобіля, гранична температура в камері згоряння двигуна внутрішнього згоряння тощо. При цьому отримання оптимальних процесів вимагає, як правило, підтримання сигналів керування на граничних значеннях, що відповідає найбільш швидкому і ефективному проходженню процесів в технічній системі. Типовий для цих випадків характер зміни керування $u(t)$ при оптимальному процесі приведено на рис. 1.

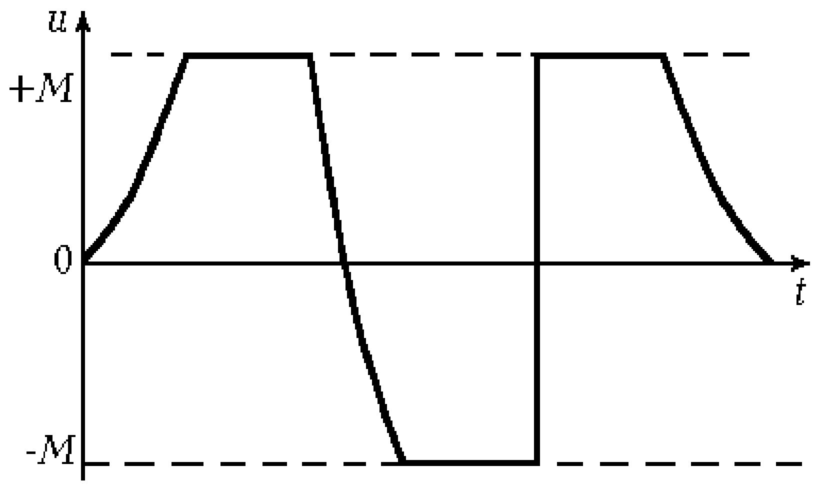

Рис. 1. Характерний вигляд оптимального сигналу керування технічною системою

Однак граничні значення керування $u(t)$ лежать на межах області допустимих керувань U і, природно, не є внутрішніми точками цієї області, для яких тільки справедливі варіаційні методи. Правда, від обмежень виду (1) можна позбутись шляхом введення нових змінних ν_i, які зв‘язані зі змінними u_i співвідношенням $u_i = M_i \sin \nu_i$. При цьому значення $|u_i| = M_i$ будуть відповідати змінним $\nu_i = \pm\pi/2$, які є внутрішніми точками області нових допустимих керувань. Однак така заміна змінних, як правило, приводить до значного ускладнення отриманих рівнянь.

Наведені труднощі сприяли інтенсивному вивченню проблеми оптимальності керування технічними системами. Л.С.Понтрягін і його учні, В.Г.Болтянський, Р.В.Гамкрелідзе і Є.Ф.Міщенко, створили теорію оптимального керування, в основі якої лежить сформульваний Л.С.Понтрягіним принцип максимуму як необхідна умова екстремуму функціонала при різних обмеженнях і умовах. Цей принцип дозволив побудувати теорію оптимального керування на строгій математичній основі і відкрив широкі можливості для її практичного застосування при керуванні технічними системами.

2. Формулювання принципу максимуму

Мета керування в задачі оптимального керування полягає в мінімізації деякого функціоналу. Розглянемо задачу з функціоналом

$$\mathbf{I} = \int_0^{t_1} f_0\left(x(t),\ u(t),\ t\right)dt + \Phi\left(x(t_1),\ t_1\right) \tag{2}$$

який являє собою суму інтегрального функціоналу $\int_0^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)\,dt$ і термінального функціоналу $\Phi(x(t_1), t_1)$. Задача з інтегральним функціоналом при $f_0 = 1$ називається задачею **оптимальної швидкодії**.

Відзначимо, що при фіксованих t_1, x_0 і допустимому керуванні $u(t)$ стан технічної системи $x(t)$ і значення функціоналу (2) визначаються однозначно. Задача оптимального керування полягає в мінімізації цього функціоналу на множині наборів (t_1, x_0, u, x).

Набір (t_1, x_0, u, x), який мінімізує функціонал (2), називається розв‘язком задачі оптимального керування, керування u – оптимальним керуванням, а x – оптимальним станом. Часто розв’язком задачі оптимального керування називають пару (u, x).

Розглянемо наступну задачу оптимального керування з функціоналом (2):

$$\begin{gathered} \mathbf{I}(u) = \int_0^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)\,dt \to \min, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),\ x(0) \in X_0,\ x(t_1) \in X_1 \\ u(t) \in U, 0 \le t \le t_1. \end{gathered} \tag{3}$$

При цьому вважається, що момент t_1 не фіксований, тобто розглядається задача з незакріпленим часом; множина U не залежить від часу, а фазові обмеження відсутні. Введемо функцію:

$$H(x, u, t, \psi_0, \psi) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(x, u, t), \tag{4}$$

де ψ_0 - константа, $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$. Функція H називається **функцією Гамільтона**, яка відіграє тут роль, аналогічну функції Лагранжа у варіаційному численні. Функцію H називають також **функцією Понтрягіна**. Функції Лагранжа і Гамільтона (Понтрягіна) мають такий самий вигляд, що і відповідні функції у варіаційних задачах класичного типу, тільки в ці функції не входять обмеження на керування, які в цьому випадку мають вигляд включення $u \in U$. Відзначимо, що область керування при цьому може мати будь-яку довільну природу. Вона може бути замкненою множиною або складатись зі скінченного числа ізольованих точок. Саме в цьому полягає принципова різниця між теорією оптимального керування і теорією класичного варіаційного числення, де завжди вважалось, що область зміни функцій керування відкрита і вони є неперервними, а функції $f(x, u, t)$ і

$f_0(x,u,t)$ неперервно-диференційовані. Для розглянутої задачі справедлива теорема [2]: *нехай вектор-функція* $u^*(t)$ *є оптимальним керуванням, а вектор-функція* $x^*(t)$ *– відповідним оптимальним станом у сформульованій задачі оптимального керування. Тоді існує неперервна вектор-функція* $\psi^*(t) = (\psi_1^*(t),\ldots,\psi_n^*(t))$ *і число* $\psi_0^* \le 0$ *таке, що:*

1) *вектор-функція виду* $\psi^* = (\psi_0^*(t),\psi^*(t))$, $0 \le t \le t_1$ *є нульовий;*

2) *вектор-функція* $\psi^*(t)$ *є розв'язком системи диференціальних рівнянь*

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} H(x(t),u(t),t,\psi_0,\psi(t))\Big|_{\substack{u=u^*(t)\\ x=x^*(t)}} = \tag{5}$$
$$= -\psi_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x(t),u(t),t) - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x^*(t),u^*(t),t), \quad i = 1,2,\ldots,n$$

3) *при кожному* $t \in [t_0, t_1]$ *функція* $H(x^*(t),\psi^*(t),u)$ *векторної змінної* $u = (u_1,\ldots,u_m)$ *досягає максимуму на множині* $u = u^*(t)$, *тобто*

$$H(x^*(t),\psi^*(t),u^*(t)) = \max_{u \in U} H(x^*(t),\psi^*(t),u) \tag{6}$$
$$0 \le t \le t_1;$$

4) *при кожному* $t \in [0, t_1]$ *виконується рівність*

$$H(x^*(t),\psi^*(t),u^*(t)) = 0. \tag{7}$$

В формулюванні цієї теореми головною є умова максимуму (6). Саме тому теорему і назвали принципом максимуму. Умова 1 теореми виключає випадок $H \equiv 0$ і робить рівність (6) змістовною.

За допомогою функції Гамільтона праву частину рівнянь стану з (3) можна записати у вигляді

$$f_i(x,u,t) = \frac{\partial H(x,\psi,u,t)}{\partial \psi}, i = 1,\ldots,n \tag{8}$$

Тоді початкову систему рівнянь стану з (3) разом з лінійною системою (5), яку називають **спряженою системою**, часто записують в симетричному вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \partial H(x,\psi,u,t)/\partial \psi_i; \\ \dot{\psi}_i &= -\partial H(x,\psi,u,t)/\partial x_i, i = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{9}$$

Якщо в конкретній задачі вдається показати, що $\psi_0^* \ne 0$, то завжди можна прийняти $\psi_0^* = -1$, оскільки рівності (5) - (7) не змінюються при множенні їх на довільне число. Можливий випадок також, коли $\psi_0^* = 0$. Тоді функція Гамільтона не включає f_0, а це означає, що необхідні умови теореми 1 не включають інформації про функціонал $\mathbf{I}(u)$. Замінюючи початковий функціонал іншим, отримаємо для нової задачі ті ж самі умови оптимальності в формі принципу максимуму, що і для початкової. Задачі оптимального керування подібного типу називають **особливими** (або виродженими).

Рівність (7) використовується, в основному, для визначення кінцевого моменту часу t_1 і включена в число необхідних умов оптимальності тому, що тут розглядається задача з нефіксованим часом керування. Якщо функції $u^*(t)$ і $\psi^*(t)$ задовольняють рівностям (5), (3), то $H\left(x^*(t),\psi^*(t),u^*(t),t\right) = const$ і тому при розв'язуванні конкретної задачі рівність (3.7) достатньо перевірити тільки для одного довільного фіксованого моменту $t \in (0,t_1)$.

Теорема про принцип максимуму не дає повної відповіді на питання, як знайти оптимальне керування, оскільки про вектор $\psi(t)$ нам відомо тільки те, що це певний розв'язок системи (6), але невідомо, який саме. Однак принцип максимуму дає інформацію про структуру оптимального керування, що полегшує розв'язок задачі.

Принцип максимуму дає тільки необхідні умови оптимальності. Тому, якщо певне допустиме керування задовольняє цьому принципу, то воно не обов'язково є оптимальним. Функцію $u^*(t)$, яка задовольняє всім умовам теореми, називають екстремаллю Понтрягіна. Лише для деяких класів задач (наприклад, лінійних задач оптимальної швидкодії) принцип максимуму є як необхідною, так і достатньою умовою оптимальності.

В прикладних задачах принцип максимуму нерідко дозволяє однозначно визначити оптимальне керування. Так, якщо завчасно відомо, що оптимальне керування існує і, крім того, знайдено єдине допустиме керування, то це єдине керування є оптимальним.

Наведемо також формулювання принципу максимуму для задачі з **фіксованим часом керування**. Для цього звернемось до задачі оптимального керування, яка відрізняться від попередньої тільки тим, що тут час керування t_1 будемо вважати фіксованим, тобто заданим з самого початку. Для цієї задачі справедлива наступна теорема: *нехай вектор-функція $u^*(t)$ являє собою оптимальне керування, а $x^*(t)$ – відповідний йому оптимальний стан системи в задачі оптимального керування з фіксованим часом керування t_1. Тоді існує неперервна вектор-*

функція $\psi^*(t) = (\psi_1^*(t),\ldots,\psi_n^*(t))$ *і число* $\psi_0^* \le 0$ *такі, що виконуються умови* 1), ...,3) *попередньої теореми.*

Єдине, чим відрізняються умови оптимальності даної теореми від умов оптимальності першої теореми полягає у відсутності рівності (3.7). В розглянутій задачі час t_1 задано, тому стає зайвою умова для його визначення.

3. Методика використання принципу максимуму

Зупинимось на схемі застосування принципу максимуму. Розглянемо задачу оптимального керування з фіксованим часом керування. Знаходження екстремалі Понтрягіна починається з центральної умови принципу максимуму

$$H(x,\psi,u) \to \max, \quad u \in U \tag{10}$$

з якої при кожному фіксованому наборі x, ψ визначають керування *u*, яке є функцією параметрів x і ψ, тобто

$$u = u(x,\psi). \tag{11}$$

В загальному випадку це зробити досить складно, однак для деяких класів задач керування функцією (11) вдається записати в явному вигляді. Нехай, наприклад,

$$\begin{gathered} f_i(x,u) = f_i(x) + \sum_{k=1}^{m} f_{ik}(x) u_k, i = 0,1,\ldots,n, \\ U = \{u \in R^m, a_k \le u_k \le b_k, k = 1,2,\ldots,m\}, \end{gathered} \tag{12}$$

де a_k, b_k - задані числа. В цьому випадку функція Гамільтона має вид

$$H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(x) + \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \psi_i f_{ik}(x) \right] u_k \tag{13}$$

і досягає максимуму (завдяки лінійності по *u*) тільки в граничних точках множини *U*, а саме при

$$u_k = \begin{cases} b_k, \text{ при } \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_{ik}(x) > 0; \\ a_k, \text{ при } \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_{ik}(x) < 0. \end{cases} \tag{14}$$

Припустимо, що функція (3.14) знайдена. Підставимо її в початкову і спряжену їй системи. В результаті цього будемо мати

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u(x,\psi)), \\ &\dot{\psi} = -\partial H(x,\psi,u(x,\psi))/\partial x, \quad 0 \le t \le t_1, \end{aligned} \tag{15}$$

де $\dot{\psi} = (\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \ldots, \dot{\psi}_n)$, $\partial H/\partial x = (\partial H/\partial x_1, \partial H/\partial x_2, \ldots, \partial H/\partial x_n)$.

Отримано систему $2n$ диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, загальний розв'язок якої містить $2n$ довільних постійних. Після знаходження загального розв'язку ці довільні постійні визначають з $2n$ крайових умов:

$$x(0) = x^{(0)}, x(t_1) = x^{(1)}. \tag{16}$$

В результаті використання умов (16) отримують деякі функції $\bar{x}(t)$ і $\bar{\psi}(t)$. Для визначення ψ_0 достатньо, як відмічалось раніше, розглянути два випадки, $\psi_0 = 0$ і $\psi_0 = -1$, і встановити, який з них має місце в дійсності. При цьому необхідно враховувати, що вектор-функція $(\psi_0, \bar{\psi}(t))$ повинна бути ненульовою.

Нехай функції $\bar{x}(t)$ і $\bar{\psi}(t)$ знайдені. Тоді, підставивши їх в (11), отримаємо

$$u = u(\bar{x}(t), \bar{\psi}(t)), \quad 0 \le t \le t_1 \tag{17}$$

Припустимо, що функція $\bar{u}$ виявилась кусково-неперервною, причому $\bar{u} = u(\bar{x}(t), \bar{\psi}(t)) \in U$ при кожному $t \in [0, t_1]$. Тоді ця функція є екстремаллю Понтрягіна, а це значить, що вона входить в число керувань, які можуть бути оптимальними. Якщо відомо, що розв‘язок задачі оптимального керування існує і доведено, що екстремаль Понтрягіна $\bar{u}$ єдина, то вона є оптимальним керуванням.

Таким чином, застосування принципе максимуму зводиться до задачі використання умов максимуму (3.10) і розв‘язування системи диференціальних рівнянь (3.15) з крайовими умовами (3.16). Це крайова задача принципе максимуму. В тих випадках, коли її аналітично розв’язати не вдається, то використовують різні чисельні методи.

4. Використання принципу максимуму для розв'язання задачі оптимальної швидкодії

Розглянемо горизонтальне переміщення кранового візка з жорстким підвісом вантажу (рис. 2).

Нехай в початковий момент часу $t = 0$ візок, який ми ототожнюємо з матеріальною точкою знаходиться в положенні $x = 0$ і має швидкість $v = 0$. Задача полягає в тому, щоб вибрати такий режим роботи приводного механізму, при якому візок перемістився б в положення $x = \Delta x$ і при цьому його швидкість була рівною нулю.

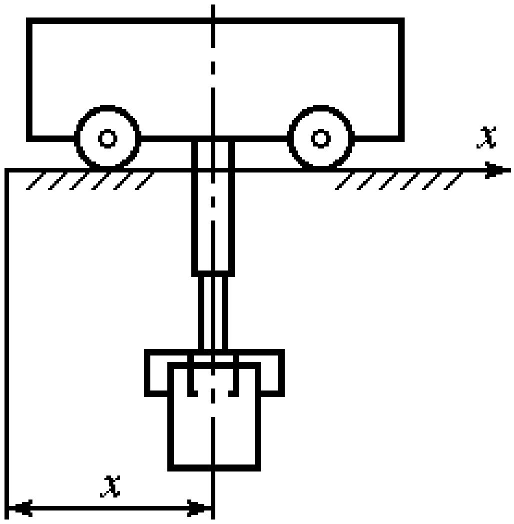

Рис. 2. Схема горизонтального руху кранового візка з жорстким підвісом вантажу

В системі координат, яка пов'язана з поверхнею рейок візка (ось x направлена вздовж руху візка), рівняння руху візка з приводним механізмом має такий вигляд:

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - F_0, \tag{18}$$

де $x(t)$ - координата центра мас візка; m - приведена до центра мас візка маса елементів приводу і візка; $F(t)$ - приведена до ободу приводних коліс візка рушійна (гальмівна) сила приводу; F_0 - сила опору переміщенню візка, яку приймаємо постійною ($F_0 = const$).

Очевидно, значення сили $F(t)$ не може бути скільки завгодно великим. Воно обмежене технічними можливостями приводного механізму, тобто

$$-F_г \le F(t) \le F_р, \quad t \in [0,\ t_1] \tag{19}$$

де F_p, $F_г$ - максимально допустимі рушійне і гальмівне зусилля приводу, які є величинами постійними ($F_г$=const, F_p=const); t_1 - тривалість руху візка.

При цих умовах можливі декілька різних режимів роботи приводного механізму, які забезпечать необхідне переміщення візка. Необхідно вибрати такий режим руху візка, який з певної точки зору є найбільш вигідним. Виберемо за критерій такої вигоди мінімум тривалості руху візка, яка забезпечує максимальну продуктивність кранового механізму. Інтегральний функціонал такого критерію має вигляд:

$$\mathbf{I} = \int_0^{t_1} dt \to \min . \tag{20}$$

Тепер можна математично сформулювати задачу оптимального керування переміщенням кранового візка: знайти кусково-неперервну функцію $F(t)$, підпорядковану нерівностям (3.19), при якій розв’язок $x(t)$ рівняння (18) задовольняє при $t=0$ заданим початковим умовам:

$$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0, \tag{21}$$

а при деякому $t = t_1$ – умовам

$$x(t_1) = \Delta x,\ \dot{x}(t_1) = 0 \tag{22}$$

причому такий, що функціонал (3.20) приймає мінімально можливе значення на множині таких функцій *F*. При цьому вважаємо, що клас кусково-неперервних функцій є найбільш широким класом технічно реалізуємих функцій $F(t)$.

Сформульована задача є простою задачею оптимального керування. Керуванням в цій задачі служить функція $F(t)$. Введемо такі позначення: $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, $F(t) = u(t)$, $F_p = a$, $F_г = b$, $F_0 = c$.

Після цього задачу оптимального керування рухом візка запишемо в такому вигляді: знайти кусково-неперервну функцію $u(t)$, що задовольняє нерівностям $-b \le u(t) \le a,\ 0 \le t \le t_1$, для якої розв’язок $x\left(x_1(t),\ x_2(t)\right)$ системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \left(u(t) - c\right)/m \end{cases} \tag{23}$$

задовольняє крайовим умовам

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0; \\ x_1(t_1) = \Delta x, \; x_2(t_1) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

причому функціонал (3.20) досягає свого найменшого значення.

Складемо функцію Гамільтона (Понтрягіна) для цієї задачі

$$H = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 \left(u(t) - c\right)/m. \tag{24}$$

Використавши для цієї функції спряжену систему (5), отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1. \end{cases} \tag{25}$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$$\begin{cases} \psi_1(t) = c_1; \\ \psi_2(t) = -c_1 t + c_2. \end{cases} \tag{26}$$

де c_1, c_2 - постійні інтегрування.

Функція H (24) лінійна по відношенню до u, тому умова максимуму (6) для неї виконується тільки при

$$u^*(t) = \begin{cases} a, \psi_2^*(t) > 0, \\ b, \; \psi_2^*(t) < 0. \end{cases} \tag{27}$$

Таким чином, оптимальне керування $u^*(t)$ може приймати лише два значення a і $-b$ і має, виходячи з лінійності функції ψ_2^*, не більше одного перемикання, тобто такої точки, в якій функція $u^*(t)$ змінює свій знак. Тоді оптимальне керування має вигляд:

$$u^*(t) = \begin{cases} a, \; 0 \le t < t_2, \\ -b, \; t_2 \le t \le t_1, \end{cases} \tag{28}$$

де t_2 - момент перемикання керування.

За допомогою системи рівнянь (23) при керуванні (28) знайдемо оптимальний за швидкодією режим руху кранового візка:

$$x_1(t) = \begin{cases} \left(a - c\right)/m \; t^2/2 + c_1 t + c_3, 0 \le t < t_2, \\ -\left(b + c\right)/m \; t^2/2 + c_2 t + c_4, \; t_2 \le t \le t_1, \end{cases} \tag{29}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \left(a - c\right)/m \; t + c_1, 0 \le t < t_2, \\ -\left(b + c\right)/m \; t + c_2, \; t_2 \le t \le t_1, \end{cases}$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 - постійні інтегрування. З крайових умов руху візка знаходимо постійні інтегрування:

$$\begin{cases} c_1 = c_3 = 0; \\ c_2 = (b+c)m\,t_1; \\ c_4 = \Delta x - (b+c)m\,t_1^2/2. \end{cases} \tag{30}$$

З умов неперервності швидкості $\dot{x}$ та переміщення x кранового візка знайдемо моменти часу перемикання рушійної сили t_2 і мінімальної тривалості руху t_1:

$$t_1 = \sqrt{2\frac{(a+b)\Delta x}{(a+c)(b+c)}}; \quad t_2 = \frac{b+c}{a+b}t_1. \tag{31}$$

Оптимальним за швидкодією при обмеженнях рушійної і гальмівної сили приводу є режим руху кранового візка, який складається з ділянок рівноприскореного руху і рівносповільненого гальмування (рис. 3).

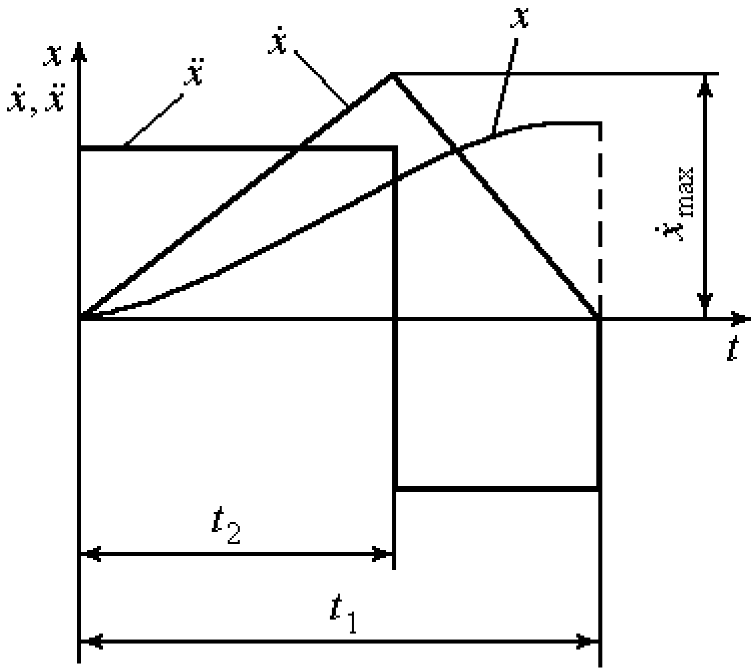

Рис. 3. Графіки зміни переміщення x, швидкості $\dot{x}$ і прискорення $\ddot{x}$ візка при оптимальному за швидкодією режимі руху при обмеженнях на діючі сили