ТЕМА 2. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ.

2.13 Порівняння нескінченно малих функцій

У п. 2.9 надано означення та розглянуті властивості нескінченно малих функцій. Розглянемо їх порівняння. Дві нескінченно малі функції порівнюють між собою за допомогою дослідження їх відношення. Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x \to x_0$, тобто виконуються рівності:

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0.$$

Означення 2.15. Функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *нескінченно малими одного порядку* при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0,\quad C\in\mathbb{R}$.

Означення 2.16. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою вищого порядку*, ніж $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

Означення 2.17. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою нижчого порядку*, ніж $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$.

Означення 2.18. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою k-го порядку* відносно $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C\neq 0,\quad C\in\mathbb{R}$.

Означення 2.19. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *непорівняними* при $x \to x_0$, якщо у точці x_0 не існує границі їх відношення.

У означеннях 2.15 – 2.19 замість $x \to x_0$ може розглядатися $x\to\pm\infty$.

Розглянемо приклади порівняння нескінченно малих функцій.

Прикладом нескінченно малих функцій одного порядку при $x\to 0$ є функції $\alpha(x)=\sin 2x$ та $\beta(x)=4x$, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{4x}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Функція $\operatorname{tg} x-\sin x$ є нескінченно малою третього порядку відносно x, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}=const\neq 0$ (приклад 2.37). Функція $\alpha(x)=x$ та $\beta(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ є непорівняними між собою при $x\to 0$, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не існує (п. 2.5).

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малими при $x \to x_0$. Якщо у околі точки x_0 виконується нерівність $|\alpha(x)| \le c \cdot |\beta(x)|$, де додатна стала величина, то пишуть: $\underline{\alpha(x) = O(\beta(x))}$ (читається: $\alpha(x)$ є « O велике» від $\beta(x)$). $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малими одного порядку, якщо при $x \to x_0$ $\alpha(x) = O(\beta(x))$ і $\beta(x) = O(\alpha(x))$.

Якщо при $x \to x_0$ $\alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то використовують запис $\underline{\alpha(x) = o(\beta(x))}$ (читається: $\alpha(x)$ є «о мале» від $\beta(x)$).

Символи «O» та «o» називають <u>символами Ландау</u>.

Серед нескінченно малих функцій одного порядку важливе значення для практичних застосувань мають еквівалентні нескінченно малі.

<u>Означення 2.20.</u> Функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, що є нескінченно малими при $x \to x_0$, називають *еквівалентними нескінченно малими*, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Використовують позначення $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Розглянемо основні властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

Теорема 2.19. Нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні при $x \to x_0$ тоді і лише тоді, коли їх різниця $\alpha(x) - \beta(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha(x)$ та $\beta(x)$.

Доведення. Нехай $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \left(1 - \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 - \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$. Отже, за означенням 2.16, $\alpha(x) - \beta(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha(x)$. Аналогічно доводиться те, що $\alpha(x) - \beta(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$.

Нехай тепер, навпаки, відомо, що різниця $\alpha(x) - \beta(x)$ при $x \to x_0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, тобто виконуються рівності:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \left(1 - \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 0$, звідки $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$. Остання рівність означає, що $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\right)=0$. З цього випливає, що $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, тобто $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$. Теорему доведено.

Теорема 2.20. Нехай $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$ при $x\to x_0$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$, причому ці границі рівні між собою.

Доведення. Нехай при $x\to x_0$ $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$. Тоді маємо:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}\cdot\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}\cdot\frac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}\cdot 1=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

Теорему доведено.

Доведена теорема дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій замінювати нескінченно малу функцію на еквівалентну їй нескінченно малу. При цьому часто використовуються наступні еквівалентні нескінченно малі величини.

1. $\sin\alpha\sim\alpha$, $\alpha\to 0$	6. $e^{\alpha}-1\sim\alpha$, $\alpha\to 0$
2. $tg\alpha\sim\alpha$, $\alpha\to 0$	7. $a^{\alpha}-1\sim\alpha\ln a$, $\alpha\to 0$
3. $\arcsin\alpha\sim\alpha$, $\alpha\to 0$	8. $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$, $\alpha\to 0$
4. $arctg\alpha\sim\alpha$, $\alpha\to 0$	9. $\log_a(1+\alpha)\sim\dfrac{\alpha}{\ln a}$, $\alpha\to 0$
5. $1-\cos\alpha\sim\dfrac{\alpha^2}{2}$, $\alpha\to 0$	10. $(1+\alpha)^k-1\sim k\alpha$, $\alpha\to 0$

Ці формули досить легко отримати, використовуючи правило Лопіталя, яке буде розглянуте при вивченні диференціального числення функцій однієї змінної.

Теорема 2.21. Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

Доведення. Доведемо теорему для суми двох функцій. Нехай при $x\to x_0$ функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малими величинами, причому $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією вищого порядку, ніж $\beta(x)$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

Тоді отримуємо:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}+1=0+1=1.$$

З останньої рівності випливає, що $\alpha(x)+\beta(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$. Теорему доведено.

Розглянемо приклади використання еквівалентних нескінченно малих для обчислення границь.

Приклад 2.46. Обчислити наступні границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+3x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\arcsin 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x-2x^5}{tg4x+3\sin^3 x}$.

Розв'язання. 1) При $x\to 0$ $\sin 2x\sim 2x$, $\ln(1+3x)\sim 3x$, тому, за теоремою 2.20, отримуємо: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$.

2) При $x\to 0$ $\ln\cos x\to 0$, $\sqrt[4]{1+x^2}-1\to 0$. Замінимо ці функції еквівалентними нескінченно малими: $\ln\cos x=\ln\left(1+(\cos x-1)\right)\sim\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}$, $\sqrt[4]{1+x^2}-1\sim\frac{x^2}{4}$. Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2/4}=-\frac{1}{2}\cdot 4=-2$.

3) При $x\to 0$ функції $\sqrt{1+x+x^2}-1$ та $\arcsin 2x$ є нескінченно малими. Для знаходження границі замінимо їх на еквівалентні нескінченно малі. $\arcsin 2x\sim 2x$, $\sqrt{1+x+x^2}-1\sim\frac{1}{2}\left(x+x^2\right)\sim\frac{x}{2}$. Підставивши еквівалентні нескінченно малі у задану границю, знаходимо: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\arcsin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x/2}{2x}=\frac{1}{4}$.

4) При $x\to 0$ $3\sin x-2x^5\sim 3x-2x^5\sim 3x$, $tg4x+3\sin^3 x\sim 4x+3x^3\sim 4x$. Тому $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x-2x^5}{tg4x+3\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}$.

2.14 Неперервність функції у точці. Точки розриву

Нехай функція $y=f(x)$ визначена у точці x_0 і у деякому околі цієї точки.

Означення 2.21. Функцію $y=f(x)$ називають *неперервною у точці* x_0, якщо границя функції $f(x)$ у цій точці дорівнює значенню функції у ній:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \qquad (2.24)$$

З означення 2.21 випливає, що для неперервності функції у точці x_0 необхідним та достатнім є виконання наступних умов:

1) $f(x)$ визначена у точці x_0, тобто $\exists f(x_0)$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$;

3) $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Запишемо рівність (2.24) у вигляді: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$. Позначимо $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Величину Δx називають *приростом аргументу* у точці x_0, Δy – *приростом функції* у цій точці. Умова $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ є рівносильною умові $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$. З цієї рівності випливає інше означення неперервності функції у точці.

Означення 2.22. Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною у точці* x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$ у цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, тобто

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0. \tag{2.25}$$

Приклад 2.47. Дослідити на неперервність функцію $y = \sin x$.

Розв'язання. Функція $y = \sin x$ визначена $\forall x \in \mathbb{R}$. Нехай x_0 – довільна точка числової прямої. Покажемо, що у цій точці нескінченно малому приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$ відповідає нескінченно малий приріст функції Δy. Оскільки $x = x_0 + \Delta x$, то цей приріст

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$$
$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Тут для перетворення виразу для приросту функції застосовано відому формулу різниці синусів: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Знайдемо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = 2\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) =$$
$$= 2\cdot 0\cdot\cos x_0 = 0.$$

Отже, нескінченно малому приросту функції $y = \sin x$ у довільній точці числової прямої $x = x_0$ відповідає нескінченно малий приріст аргументу Δy, тобто, за означенням 2.22, дана функція є неперервною на всій числовій прямій.

Можна довести, що всі основні елементарні функції є неперервними у своїх областях визначення.

Для функції $y=f(x)$, неперервної у точці x_0, виконується рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Запишемо цю рівність у вигляді:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) \qquad (2.26)$$

З рівності (2.26) випливає, що при знаходженні границі неперервної функції $f(x)$ можна перейти до границі під знаком функції, тобто у функції $f(x)$ замість аргументу x можна підставити його граничне значення x_0. Це пояснює істинність формули (2.20) з п.2.11.

Приклад 2.48. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}\right)$.

Розв'язання. Оскільки функція $y=\sin x$ є неперервною у кожній точці числової прямої, то $\lim\limits_{x\to x_0}\sin(g(x))=\sin\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$, тому отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)=\sin\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

У математичному аналізі розглядається поняття односторонньої неперервності функції у точці (неперервності зліва або справа).

<u>**Означення 2.23**</u>. Функцію $f(x)$ називають *неперервною у точці* x_0 *зліва*, якщо вона визначена на проміжку $(x_0-\varepsilon;x_0]$, де $\varepsilon>0$, і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$. Якщо ця функція визначена на проміжку $[x_0;x_0+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$, то функцію $f(x)$ називають *неперервною у цій точці справа*.

Якщо функція є непевною у деякій точці, то вона неперервна у цій точці і зліва, і справа.

<u>**Означення 2.24**</u>. Точки, у яких порушується неперервність функції, називають *точками розриву* цієї функції.

Якщо $x=x_0$ – точка розриву функції $y=f(x)$, то у ній не виконується хоча б одна з умов 1) – 4), що випливають з означення 2.21 неперервності функції у точці. У залежності від того, яка з цих умов не виконується, розрізняють наступні типи точок розриву.

1. Якщо $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A=const$, проте $A\neq f(x_0)$, або функція $f(x)$ не визначена у точці x_0, то точку x_0 називають *точкою усувного розриву*. У цьому випадку досить довизначити функцію у цій точці, поклавши $f(x_0)=f(x_0\pm 0)$, щоб отримати функцію, неперервну у точці x_0.

2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 = const$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2 = const$, проте $A_1 \neq A_2$. У цьому випадку точку x_0 називають *точкою розриву першого роду* або *точкою розриву типу стрибка*. При цьому величину $\delta = A_2 - A_1$ називають *стрибком функції* $f(x)$ *у точці* x_0.
3. Хоча б одна з границь: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ не існує, або дорівнює ∞. Точка x_0 у цьому випадку називається *точкою розриву другого роду*.

Приклад 2.49. Знайти точки розриву вказаних функцій та визначити їх тип: 1) $f(x) = \begin{cases} x-1, x<2; \\ x^2, x \geq 2. \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0; \\ 2, x = 0. \end{cases}$ 3) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Розв'язання. 1) Знайдемо ліву та праву границі функції $f(x)$ у точці $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} (x-1) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

Односторонні границі функції $f(x)$ у точці $x = 2$ існують, вони скінченні, але не співпадають, тому $x = 2$ – точка розриву першого роду (типу стрибка). При цьому стрибок функції у цій точці $\delta = 4 - 1 = 3$.

2) Тут у точці $x = 0$ існує $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, проте він не дорівнює значенню функції у цій точці $f(0) = 2$. Точка $x = 0$ є точкою усувного розриву функції $f(x)$.

3) При $x = 2$ функція $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ не визначена. При цьому односторонні границі функції у цій точці є нескінченними: $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$. Точка $x = 2$ є точкою розриву другого роду.

2.15 Основні теореми про неперервні функції

Теореми про властивості функцій, неперервних у точці, безпосередньо випливають з відповідних теорем про границі функцій.

Теорема 2.22. Сума, різниця, частка та добуток неперервних функцій є неперервними функціями (для частки за виключенням значень аргументу, для яких дільник дорівнює нулю).

Доведення. Оскільки неперервні у точці x_0 функції $f(x)$ та $g(x)$ мають у цій точці границі, що відповідно дорівнюють $f(x_0)$ та $g(x_0)$, то за теоремами 2.13 – 2.15 границі функцій $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ існують і відповідно дорівнюють $f(x_0) \pm g(x_0)$, $f(x_0) \cdot g(x_0)$ та $\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$. Але ці величини відповідно дорівнюють значенням суми, різниці, добутку та частки у точці x_0. Отже, за означенням 2.21, функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ є неперервними у цій точці.

Теорема 2.23. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна у точці x_0, а функція $y = f(u)$ є неперервною у точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ є неперервною у точці x_0.

Доведення. Для доведення теореми потрібно показати, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0))$. Оскільки функція $u = \varphi(x)$ за умовою неперервна у точці x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, тобто при $x \to x_0$ $u \to u_0$. Тому внаслідок неперервності функції $f(u)$ маємо:

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)).$$

Теорему доведено.

<u>Означення 2.25</u>. Якщо функція неперервна у кожній точці інтервалу $(a; b)$, то її називають *неперервною на цьому інтервалі*.

<u>Означення 2.26</u>. Функцію називають *неперервною на відрізку* $[a; b]$, якщо вона є неперервною на інтервалі $(a; b)$, неперервною справа у точці $x = a$ та неперервною зліва у точці $x = b$.

Неперервні на відрізку функції мають ряд важливих властивостей. Сформулюємо деякі з них без доведення.

Теорема 2.24. (Перша теорема Больцано – Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набирає значень різних знаків, то всередині цього відрізка знайдеться хоча б одна точка $x = c$, у якій $f(x)$ дорівнює нулю.

Геометричний зміст цієї теореми полягає у тому, що неперервна крива при переході з однієї півплощини в другу, межею між якими є вісь Ox, перетинає цю вісь.

Теорема 2.25. (Друга теорема Больцано – Коші). Нехай функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набуває різних значень $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$. Тоді для довільного числа $C \in (A; B)$ знайдеться точка $x = c \in (a; b)$, що $f(c) = C$.

Дана теорема стверджує, що при переході від одного значення до іншого неперервна функція набуває всіх проміжних значень. Ця теорема є узагальненням теореми 2.24.

Теорема 2.26. (Теорема Вейєрштрасса). Якщо функція $f\left(x\right)$ є неперервною на відрізку $\left[a;b\right]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найбільше і найменше значення.

Теорема стверджує, що неперервна на $\left[a;b\right]$ функція досягає на цьому відрізку найбільшого значення $M=\max\limits_{[a;b]} f\left(x\right)$ та найменшого значення $m=\min\limits_{[a;b]} f\left(x\right)$.