ТЕМА 3. ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1 Поняття похідної. Фізичний та геометричний зміст похідної

Диференціальне числення – це розділ математичного аналізу, у якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів. Загальні методи диференціального числення розроблено І.Ньютоном та Г.Лейбніцем наприкінці сімнадцятого століття, але лише у дев'ятнадцятому столітті О.Коші обґрунтував ці методи на основі теорії границь. Центральне поняття диференціального числення – похідна – широко використовується при розв'язуванні багатьох задач математики, фізики та інших наук. Якщо перебіг деякого процесу описується певною функцією, то його дослідження зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

Нехай на деякому проміжку $(a;b)$ задано функцію $y=f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x\in(a;b)$ і надамо x довільного приросту Δx так, щоб точка $x+\Delta x$ також належала проміжку $(a;b)$. Приріст функції при переході від точки x до точки $x+\Delta x$ має вигляд: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

<u>Означення 3.1.</u> *Похідною* функції $y=f(x)$ у точці x називають границю відношення приросту функції Δy у цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідна функції $y=f(x)$ у точці x позначається одним з символів: y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$, y'_x, $f'(x)$.

Таким чином, за означенням похідної 3.1 маємо:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{3.1}$$

Якщо у деякій точці x границя (3.1) дорівнює ∞, то похідну у цій точці називають *нескінченною*. Якщо границя (3.1) у деякій точці x не існує, то у цій точці не існує і похідної $f'(x)$. Далі під похідною будемо розуміти скінченну похідну.

Значення похідної функції $y=f(x)$ у точці $x=x_0$ позначається одним з символів: $f'(x_0)$, $f'(x)\big|_{x=x_0}$, $y'\big|_{x=x_0}$, $y'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

З означення похідної випливає наступний спосіб її знаходження. Щоб знайти похідну функції $y=f(x)$ у деякій точці x, треба:

1) надати значенню x довільного приросту Δx і знайти відповідний приріст функції $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

2) знайти відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;

3) знайти границю цього відношення

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує, то вона дорівнює шуканій похідній $f'(x)$.

Означення 3.2. Операцію знаходження похідної від функції $f(x)$ називають *диференціюванням* цієї функції.

Приклад 3.1. Знайти похідну функції $y=x^3$ у довільній точці $x\in\mathbb{R}$ та у точці $x=2$.

Розв'язання. Надамо значенню x приріст Δx і знайдемо відповідний приріст функції $y=x^3$:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3=$$
$$=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

Знайдемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Знаходимо похідну $y'=\left(x^3\right)'$:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)=3x^2.$$

Підставивши у отриманий загальний вираз для похідної $y'(x)=3x^2$ значення $x=2$, отримаємо $y'(2)=3\cdot 2^2=12$.

Розглянемо поняття односторонньої похідної. Односторонні похідні визначаються за допомогою односторонніх границь.

Означення 3.3. Нехай функція $f(x)$ визначена у околі точки x. Границю відношення приросту функції $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ до приросту аргументу Δx, якщо $\Delta x\to 0$ і при цьому $\Delta x>0$, називають *правою похідною* від функції $f(x)$ у точці x і позначають $f'_+(x)$:

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (3.2)$$

Означення 3.4. Нехай функція $f(x)$ визначена у околі точки x. Границю відношення приросту функції $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ до приросту аргументу Δx, якщо $\Delta x\to 0$ і при цьому $\Delta x<0$, називають *лівою похідною* від функції $f(x)$ у точці x і позначають $f'_-(x)$:

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (3.3)$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$, то під похідною у точці $x=a$ розуміють праву похідну, а у точці $x=b$ – ліву.

З означення похідної випливає, що похідна $f'(x)$ у точці $x=x_0$ існує тоді і тільки тоді, коли у цій точці існують ліва та права похідні і вони рівні між собою: $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$. Якщо ж $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$, то похідна у цій точці не існує. Не існує похідної і у точках розриву функції $f(x)$.

Приклад 3.2. Довести, що функція $y=|x|$ не має похідної у точці $x=0$.

Розв'язання. Приріст функції $y=|x|$ у точці $x=0$, що відповідає приросту аргументу Δx, $\Delta y=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|$. Складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$. Це відношення дорівнює -1 при $\Delta x<0$ і дорівнює 1 при $\Delta x>0$. Тому границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ залежить від знаку Δx: вона дорівнює 1 при $\Delta x>0$ і -1 при $\Delta x<0$. Таким чином, у точці $x=0$ існують односторонні похідні $f'_-(0)=-1$ та $f'_+(0)=1$, але $f'_-(0)\neq f'_+(0)$. Це означає, що у точці $x=0$ похідна функції $y=|x|$ не існує.

З означення похідної 3.1 випливає фізичний зміст похідної. Він визначається тим, що похідна $f'(x)$ виражає миттєву швидкість зміни функції $f(x)$. Зокрема, похідна від шляху $s(t)$, пройденого тілом, що рухається прямолінійно, за час t, дорівнює його миттєвій швидкості у момент часу t, тобто швидкість $v(t)=s'(t)$. У цьому полягає <u>механічний зміст</u> похідної.

Таким чином, <u>фізичний зміст похідної</u> полягає у тому, що, коли функція $y=f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y'=f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу. Яку б залежність не відображала функція $y=f(x)$, відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ можна розглядати як середню швидкість зміни цієї функції відносно аргументу x, а похідну $y'=f'(x)$ – як миттєву швидкість зміни функції. Так, лінійна густина неоднорідного стержня – це похідна від його маси $m(x)$ за довжиною x: $\gamma(x)=m'(x)$; сила струму – це похідна від кількості електрики $Q(t)$ за часом t: $J(t)=Q'(t)$; теплоємність – це похідна від кількості теплоти $\omega(\tau)$ за температурою τ: $c=\omega'(\tau)$.

Розглянемо задачу про побудову дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0. Спочатку визначимо поняття дотичної.

Нехай P_0 – точка графіка з координатами $(x_0; f(x_0))$, а P – точка цього ж графіка з координатами $(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$. Пряму, проведену через точки P_0 та P, називають *січною* графіка функції $y=f(x)$.

<u>Означення 3.5</u>. Якщо при довільному наближенні точки P за графіком функції $y = f(x)$ до точки P_0 січна P_0P наближається до певного граничного положення, то це граничне положення січної називають *дотичною* до графіка функції $y = f(x)$ у точці P_0.

Нехай дотична до графіка $y = f(x)$ у точці P_0 існує. Позначимо $\alpha(P)$ кут, який утворює січна з додатним напрямом осі Ox, α_0 – кут, що утворений дотичною до графіка у точці P_0 з додатним напрямом Ox. Тоді

$$\text{tg}\,(\alpha(P)) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо $\alpha(P) \neq \pm\frac{\pi}{2}$, то з неперервності функції $\text{tg}\,x$ і припущення про існування дотичної у точці P_0 випливає, що $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \text{tg}\,(\alpha(P)) = \text{tg}\,\alpha_0$, тобто тангенс нахилу кута дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці P_0 визначається за формулою:

$$\text{tg}\,\alpha_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Таким чином, <u>геометричний зміст похідної</u> функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ полягає у тому, що значення $f'(x_0)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка цієї функції, проведеної у точці з абсцисою $x = x_0$, до додатного напряму осі Ox, тобто кутовому коефіцієнту цієї дотичної. При цьому рівняння дотичної до графіка $y = f(x)$ у точці $P_0(x_0; f(x_0))$ має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (3.4)$$

Якщо похідна $f'(x_0)$ додатна, то дотична до графіка функції утворює гострий кут з додатним напрямом осі Ox, якщо ж $f'(x_0) < 0$, то цей кут – тупий. Якщо у точці x_0 похідна $f'(x_0)$ є нескінченною, то дотична до графіка $y = f(x)$ у цій точці паралельна осі Oy. У цьому випадку рівняння дотичної має вигляд: $x = x_0$.

<u>Означення 3.6</u>. *Нормаллю* до кривої називають пряму, що проходить перпендикулярно дотичній через точку дотику.

Оскільки добуток кутових коефіцієнтів двох перпендикулярних прямих дорівнює –1, то кутовий коефіцієнт нормалі до графіка функції $y = f(x)$, проведеної у точці $P_0(x_0; f(x_0))$ дорівнює $\frac{-1}{f'(x_0)}$, а відповідно рівняння цієї нормалі має вигляд:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (3.5)$$

Приклад 3.3. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Розв'язання. Значення $f'(x_0)$ при $x_0 = 2$ знайдено у прикладі 3.1: $f'(2) = 12$, $f(2) = 2^3 = 8$. Підставивши ці значення у рівняння дотичної (3.4), отримаємо: $y - 8 = 12(x-2)$, або $y = 12x - 16$. Використовуючи (3.5), отримуємо рівняння нормалі: $y - 8 = -\frac{1}{12}(x-2)$, або $y = -\frac{1}{12}x + \frac{49}{6}$.

3.2 Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції

__**Означення 3.7**__. Функцію $y = f(x)$ називають *диференційовною* у точці x_0, якщо у цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

__**Означення 3.8.**__ Функцію $y = f(x)$ називають *диференційовною* на проміжку , якщо вона диференційовна у кожній точці цього проміжку.

Зв'язок між неперервністю функції у точці та її диференційовністю у цій точці встановлює наступна теорема.

Теорема 3.1. Якщо функція $y = f(x)$ є диференційовною у точці x_0, то вона є неперервною у цій точці.

Доведення. Якщо функція $y = f(x)$ є диференційовною у точці x_0, то у цій точці існує похідна $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, тому відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можна представити у вигляді суми сталої та нескінченно малої функції:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

де α – нескінченно мала при $\Delta x \to 0$. Тоді $\Delta y = \left(f'(x_0) + \alpha\right) \cdot \Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отримали, що у точці x_0 нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто функція $y = f(x)$ є неперервною у точці x_0. Теорему доведено.

Твердження, обернене теоремі 3.1, невірне: з неперервності функції у точці не випливає її диференційовність у цій точці. Неперервність функції у точці є лише необхідною умовою її диференційовності у цій точці. Так, функція $y = |x|$, розглянута у прикладі 3.2, є неперервною у точці $x = 0$, але не є диференційовною у цій точці.

3.3 Правила диференціювання. Похідні від основних елементарних функцій

Теорема 3.2. Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційовні у точці x, то їх сума, різниця, добуток та частка (частка за умови, що дільник $v(x) \neq 0$) також диференційовні у цій точці, причому виконуються рівності:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{3.6}$$

$$(uv)' = u'v + uv', \tag{3.7}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{3.8}$$

Доведення. Для доведення формул (3.6) – (3.8) використаємо означення похідної (3.1). Згідно з цим означенням маємо:

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)\right] - \left[u(x) \pm v(x)\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm$$

$$\pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

Для похідної добутку (3.7) отримуємо:

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u \cdot \Delta v}{\Delta x} + \frac{v \cdot \Delta u}{\Delta x} + \Delta v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right] = u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= uv' + u'v.$$

Отримаємо формулу (3.8) для похідної частки:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \dfrac{u}{v}}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{\Delta x \cdot v \cdot (v + \Delta v)}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{\Delta x}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{v(v + \Delta v)} = \left(v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \cdot \frac{1}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

При доведенні цих формул ми використали теорему 3.1 про зв'язок диференційовності та неперервності функції у точці: оскільки функції $u(x)$ та $v(x)$ є диференційовними у точці x, то вони у цій точці неперервні, тому при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ і $\Delta v \to 0$.

Теорема 3.3. Якщо $y = f(x) = C$, де C – стале число, то

$$f'(x) = (C)' = 0. \tag{3.9}$$

Доведення. Доведемо, що похідна від константи дорівнює нулю. Дійсно, для довільних x та $\Delta x \neq 0$ отримуємо: $f(x) = C = f(x+\Delta x)$, тому $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \equiv 0$. Звідси $f'(x) = (C)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Теорема 3.4. Сталий множник можна виносити за знак похідної, тобто

$$\left(C \cdot u(x)\right)' = C \cdot u'(x). \qquad (3.10)$$

Доведення. Для доведення використаємо формулу (3.7) похідної добутку та теорему 3.4. Маємо:

$$\left(C \cdot u(x)\right)' = (C)' \cdot u(x) + C \cdot u'(x) = 0 \cdot u(x) + C \cdot u'(x) = C \cdot u'(x).$$

Отримаємо формулу для похідної степеневої функції $y = x^k$, $k \in \mathbb{R}$. Для цього використаємо означення похідної (3.1):

$$y' = \left(x^k\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^k - x^k}{\Delta x} = x^k \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^k - 1}{\Delta x} = x^k \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k \cdot \dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= k \cdot \frac{x^k}{x} = k \cdot x^{k-1}.$$

Тут ми використали еквівалентність нескінченно малих: при $\alpha \to 0$ $(1+\alpha)^k - 1 \sim k \cdot \alpha$. Таким чином, маємо формулу:

$$\left(x^k\right)' = k \cdot x^{k-1}. \qquad (3.11)$$

Аналогічним чином отримаємо формули для похідних тригонометричних функцій.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos x = \cos x.$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= -2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin x = -\sin x.$$

Отже, ми отримали формули:

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (3.12)$$

$$(\cos x)' = -\sin x. \qquad (3.13)$$

При знаходженні цих похідних ми використали формулу, що є наслідком з першої важливої границі: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin k\alpha}{\alpha}=k$.

Знайдемо похідні від функцій $y=\operatorname{tg}x$ та $y=\operatorname{ctg}x$. Для цього використаємо формулу (3.8) похідної частки функцій.

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot\sin x-\cos x\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Таким чином, справедливими є формули:

$$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \tag{3.14}$$

$$(\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{3.15}$$

Знайдемо похідну показникової функції $y=e^x$:

$$\left(e^x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x\cdot 1=e^x.$$

Маємо формулу:

$$\left(e^x\right)'=e^x. \tag{3.16}$$

Для отримання формули (3.16), ми використали отриману при вивченні другої важливої границі формули $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1$. Отриманий результат свідчить, що функція $y=e^x$ при диференціюванні не змінюється.

Похідну показникової функції загального вигляду $y=a^x$ знайдемо аналогічно формулі (3.16), для чого використаємо рівність $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\ln a$.

$$\left(a^x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\cdot\ln a.$$

Таким чином, вірною є рівність:

$$\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a. \tag{3.17}$$

Знайдемо похідну логарифмічних функцій $y=\ln x$ та $y=\log_a x$.

$$(\ln x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x/x}{\Delta x}=\frac{1}{x}.$$

Тут ми використали еквівалентність нескінченно малих: при $\alpha\to 0$ $\ln(1+k\alpha)\sim k\alpha$.

Для отримання похідної від функції $y=\log_a x$ перейдемо у ній до натуральних логарифмів: $y=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$. Тоді за теоремою (3.4), виносячи сталий множник $\dfrac{1}{\ln a}$ за знак похідної, отримуємо:

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a} \tag{3.18}$$

Знайдемо похідну від складеної функції $y=f\left(\varphi(x)\right)$.

Теорема 3.5. (Теорема про похідну складеної функції). Якщо функція $u=\varphi(x)$ має похідну u_x' у точці x, а функція $y=f(u)$ має похідну y_u' у відповідній точці u, то складена функція $y=f\left(\varphi(x)\right)$ має похідну y_x' у точці x і при цьому виконується рівність

$$y_x'=y_u'\cdot u_x'. \tag{3.19}$$

Доведення. Оскільки функція $y=f(u)$ є диференційовною у точці u, то $\exists\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=y_u'$, тому відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ можна записати у вигляді $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=y_u'+\alpha$, де $\alpha\to 0$ при $\Delta u\to 0$. Звідси $\Delta y=y_u'\cdot\Delta u+\alpha\cdot\Delta u$.

Функція $u=\varphi(x)$ має похідну u_x' у точці x, тому приріст Δu можна представити у вигляді: $\Delta u=u_x'\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta x$, де $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Підставивши вираз для Δu у вираз для Δy, отримаємо:

$$\Delta y=y_u'\cdot u_x'\cdot\Delta x+y_u'\cdot\beta\cdot\Delta x+u_x'\cdot\alpha\cdot\Delta x+\alpha\cdot\beta\cdot\Delta x.$$

Якщо цю рівність розділити на Δx і перейти до границі при $\Delta x\to 0$, то отримаємо формулу (3.19).

Згідно з формулою (3.19) маємо таке правило диференціювання складеної функції: <u>похідна складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на похідну від проміжного аргументу по кінцевому аргументу.</u> Це правило залишається справедливим, коли складена функція має кілька проміжних аргументів. Наприклад, якщо $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$, то $y_x'=y_u'\cdot u_v'\cdot v_x'$.

При диференціюванні складених функцій потрібно чітко уявляти собі, яка з дій, що призводить до значення складеної функції є останньою. Та величина, над якою виконується остання дія, приймається за проміжний аргумент.

Приклад 3.4. Знайти похідні функцій: 1) $y=\ln^5 x$; 2) $y=\sin(3x+2)^3$; 3) $y=5^{\sqrt{tg2x}}$.

Розв'язання. 1) Для функції $y=\ln^5 x$ останньою є дія піднесення до п'ятого степеня, тому проміжним аргументом є $u=\ln x$ і $y=u^5$. За формулою (3.19) маємо:

$$y'=y_u'\cdot u_x'=5u^4\cdot\left(\ln x\right)'=5\ln^4 x\cdot\frac{1}{x}=\frac{5\ln^4 x}{x}.$$

2) Для функції $y=\sin(3x+2)^3$ останньою операцією є знаходження синуса, тому проміжний аргумент $u=(3x+2)^3$. Функція u теж є складеною, тому виділимо її проміжний аргумент $v=3x+2$. Функція $y(x)$ має вигляд:

$y=\sin u$, $u=v^3$, $v=3x+2$.

Для похідної y'_x маємо:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=(\sin u)'_u\cdot\left(v^3\right)'_v\cdot(3x+2)'_x=\cos u\cdot 3v^2\cdot 3=$$

$$=9\cos\left(v^3\right)\cdot(3x+2)^2=9\cos(3x+2)^3\cdot(3x+2)^2.$$

На практиці проміжні аргументи не записують, але похідні від них позначають штрихом.

3) Знайдемо похідну складеної функції $y=5^{\sqrt{\operatorname{tg}2x}}$.

$$\left(5^{\sqrt{\operatorname{tg}2x}}\right)'=5^{\sqrt{\operatorname{tg}2x}}\cdot\left(\sqrt{\operatorname{tg}2x}\right)'=5^{\sqrt{\operatorname{tg}2x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}2x}}\cdot(\operatorname{tg}2x)'=\frac{5^{\sqrt{\operatorname{tg}2x}}}{2\sqrt{\operatorname{tg}2x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)'=$$

$$=\frac{5^{\sqrt{\operatorname{tg}2x}}\cdot 2}{2\sqrt{\operatorname{tg}2x}\cdot\cos^2 2x}=\frac{5^{\sqrt{\operatorname{tg}2x}}}{\sqrt{\operatorname{tg}2x}\cdot\cos^2 2x}.$$

Тут ми використали похідну від $\sqrt{v}$: $\left(\sqrt{v}\right)'_v=\left(v^{\frac{1}{2}}\right)'_v=\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{v}}$.

При достатній підготовці похідну знаходять зразу, не вводячи допоміжних позначень для похідних від проміжних аргументів.

У різноманітних науково-технічних дослідженнях часто використовують так звані *гіперболічні функції*. Гіперболічним синусом $\operatorname{sh}x$, гіперболічним косинусом $\operatorname{ch}x$, гіперболічним тангенсом $\operatorname{th}x$ та гіперболічним котангенсом $cthx$ називають функції, що визначаються за такими формулами:

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\ \operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Функції $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$, $\operatorname{th}x$ визначені на всій числовій прямій, а функція $\operatorname{cth}x$ визначена для всіх дійсних $x\neq 0$.

Похідні гіперболічних функцій можна визначити, використовуючи їх означення, а також основні формули диференціювання:

$$(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x,\ (\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x,\ (\operatorname{th}x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x},\ (\operatorname{cth}x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}.\qquad(3.20)$$

3.4 Похідна оберненої функції. Диференціювання обернених тригонометричних функцій

Нехай $y = f(x)$ та $x = \varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій. Сформулюємо теорему про зв'язок між похідними цих функцій.

Теорема 3.6. (Теорема про похідну оберненої функції). Якщо функція $y = f(x)$ є строго монотонною на проміжку $(a;b)$ і має у довільній точці x цього проміжку відмінну від нуля похідну $f'(x)$, то обернена їй функція $x = \varphi(y)$ також має похідну у відповідній точці ті при цьому похідна оберненої функції

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \qquad (3.21)$$

Доведення. Розглянемо обернену функцію $x = \varphi(y)$. Відношення $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}$, причому у силу строгої монотонності функції $y = f(x)$ величина $\Delta x \neq 0$, якщо $\Delta y \neq 0$. Функція $y = f(x)$ є диференційовною у точці x, тому вона є неперервною у цій точці, а обернена функція $x = \varphi(y)$ є неперервною у відповідній точці y. Тому при $\Delta y \to 0$ $\Delta x \to 0$ у околі цієї точки. Звідси випливає, що $\varphi'(y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$. Теорему доведено.

Теорема 3.6 дає можливість отримати похідні обернених тригонометричних функцій.

Отримаємо формулу для похідної функції $y = \arcsin x$. Ця функція, визначена на відрізку $[-1;1]$, є оберненою до функції $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Оскільки на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $x = \sin y$ монотонно зростає і її похідна $x'_y = (\sin y)'_y = \cos y > 0$ $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то всі умови теореми 3.6 виконуються і можна скористатися формулою (3.21) :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Для отримання похідної функції $y = \arccos x$ використаємо тотожність:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Диференціюючи цю тотожність, маємо: $(\arcsin x + \arccos x)' = 0$. Звідси випливає, що $(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Функція $y = \operatorname{arctg} x$ є оберненою для функції $x = \operatorname{tg} y$, де $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На цьому проміжку $x = \operatorname{tg} y$ монотонно зростає і $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, тобто умови теореми 3.6 виконані. Застосуємо цю теорему:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Похідну функції $y = \operatorname{arcctg} x$ знайдемо, використовуючи тотожність

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Знайдемо похідні від її обох частин. Маємо $(\operatorname{arctg} x)' + (\operatorname{arcctg} x)' = 0$. Звідси знаходимо, що $(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Таким чином, ми отримали формули для похідних обернених тригонометричних функцій:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{3.22}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{3.23}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \tag{3.24}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}. \tag{3.25}$$

3.5 Таблиця похідних. Приклади застосування основних формул диференціювання

У попередніх пунктах ми отримали формули, які дають змогу обчислювати похідні, не користуючись означенням похідної, тобто диференціювати довільні елементарні функції без застосування теорії границь. Для цього досить використання отриманих у п. 3.3 та 3.4 формул для похідних суми, різниці, добутку та частки функцій, формул диференціювання складеної та оберненої функцій, а також похідних основних елементарних функцій. Наведемо таблицю цих похідних. Тут вважатимемо, що функції, які диференціюються, є складеними, тобто їх аргумент u є проміжним: $u = u(x)$.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1. $C' = 0,\ C = \mathrm{const}$.

2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

3. $\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u', \quad k \in \mathbb{R}$.

4. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, $a > 0, a \neq 1$.

5. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

6. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{a\ln u} \cdot u'$, $a > 0, a \neq 1$.

7. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.

8. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.

9. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.

10. $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

11. $\left(\operatorname{ctg} u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

12. $\left(\operatorname{sh} u\right)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$.

13. $\left(\operatorname{ch} u\right)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.

14. $\left(\operatorname{th} u\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$.

15. $\left(\operatorname{cth} u\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

16. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

17. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

18. $\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

19. $\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Розглянемо приклади застосування основних правил диференціювання, а також наведеної таблиці похідних основних елементарних функцій.

Приклад 3.5. Знайти похідні наступних функцій:

1) $y=\sqrt{2\cos x-1}$; 2) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$; 3) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x+2}-\arcsin 2x$; 4) $y=2^{\sin 3x+\cos 2x}$; 5) $y=\left(3x-1\right)^3\operatorname{sh} 5x$.

Розв'язання. 1) Знайдемо похідну складеної функції $y=\sqrt{2\cos x-1}$.

$$\left(\sqrt{2\cos x-1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{2\cos x-1}}\cdot\left(2\cos x-1\right)'=-\frac{2\sin x}{2\sqrt{2\cos x-1}}=-\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x-1}}.$$

2) Похідну функції $y=\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$ знаходимо за формулою похідної частки:

$$\left(\frac{\ln^2 x}{x^3}\right)'=\frac{\left(\ln^2 x\right)'\cdot x^3-\ln^2 x\cdot\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x^3-3x^2\ln^2 x}{x^6}=$$

$$=\frac{x^2\ln x\left(2-3\ln x\right)}{x^6}=\frac{\ln x\cdot\left(2-3\ln x\right)}{x^4}.$$

3) Для обчислення похідної функції $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x+2}-\arcsin 2x$ застосуємо формули похідної різниці функцій та похідної складеної функції:

$$\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x+2}-\arcsin 2x\right)'=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x+2}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x+2}\right)'-\frac{1}{\sqrt{1-\left(2x\right)^2}}\cdot\left(2x\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+2}\cdot\left(x+3\right)}-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

4) Обчислимо похідну складеної функції $y=2^{\sin 3x+\cos 2x}$:

$$\left(2^{\sin 3x+\cos 2x}\right)'=\ln 2\cdot 2^{\sin 3x+\cos 2x}\cdot\left(\sin 3x+\cos 2x\right)'=$$
$$=\ln 2\cdot 2^{\sin 3x+\cos 2x}\cdot\left(3\cos 3x-2\sin 2x\right).$$

5) Знайдемо похідну функції $y=\left(3x-1\right)^3\operatorname{sh} 5x$ як похідну добутку функцій:

$$\left(\left(3x-1\right)^3\operatorname{sh} 5x\right)'=\left(\left(3x-1\right)^3\right)'\cdot\operatorname{sh}5x+\left(3x-1\right)^3\cdot\left(\operatorname{sh} 5x\right)'=3\cdot\left(3x-1\right)^2\cdot 3\cdot\operatorname{sh} 5x+$$
$$+\left(3x-1\right)^3\cdot 5\operatorname{ch} 5x=9\left(3x-1\right)^2\cdot\operatorname{sh} 5x+5\left(3x-1\right)^3\operatorname{ch} 5x=\left(3x-1\right)^2\times$$
$$\times\left(9\operatorname{sh} 5x+5\left(3x-1\right)\operatorname{ch}5x\right).$$

3.6 Диференціювання функцій, заданих у параметричній та неявній формах

Отримаємо формулу для знаходження похідної функції $y=y\left(x\right)$, заданої у параметричній формі, тобто у вигляді рівнянь $x=x\left(t\right)$, $y=y\left(t\right)$ при заданому проміжку зміни допоміжної змінної (параметра) t: $\alpha \le t \le \beta$. Будемо вважати, що функції $x(t)$ та $y(t)$ мають похідні x'_t та y'_t, причому функція $x(t)$ має обернену функцію $t = \varphi(x)$. За правилом диференціювання оберненої функції $t'_x = \frac{1}{x'_t}$.

Функцію $y = y(x)$, задану параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, розглянемо як складену функцію $y = y(t)$, де $t = \varphi(x)$. Тоді, за правилом диференціювання складеної функції, отримаємо: $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$.

Таким чином, ми отримали формулу диференціювання функції, заданої у параметричній формі:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3.26}$$

Формула (3.26) дозволяє знаходити похідну y'_x, функції, заданої у параметричній формі, без безпосереднього знаходження залежності $y = y(x)$.

Приклад 3.6. Знайти похідну y'_x функції $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ у точці, що відповідає значенню параметра $t = \pi/4$.

Розв'язання. Для застосування формули (3.26) знайдемо похідні x'_t та y'_t: $x'_t = -\sin t$, $y'_t = \cos t$. Тоді, за формулою (3.26), $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\text{ctg}\, t$. При значенні параметра $t = \pi/4$ $y'_x = -\,\text{ctg}\,\frac{\pi}{4} = -1$.

Альтернативний шлях знаходження похідної y'_x полягає у знаходженні залежності $y = y(x)$ у явному вигляді та подальшому диференціюванні y за змінною x. Щоб знайти залежність $y = y(x)$, з параметричних рівнянь функції $x = \cos t$, $y = \sin t$ виключимо параметр t:

$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Отже, задані параметричні рівняння визначають на площині коло з центром у початку координат одиничного радіуса. У околі значення $t = \pi/4$ $y > 0$, тому параметричні рівняння тут визначають функцію $y = \sqrt{1 - x^2}$. При

$t = \pi/4$ $\quad x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\quad y'_x = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. При значенні $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

отримуємо $y'_x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{2}/2}{1/\sqrt{2}} = -1$.

На цьому прикладі ми бачимо, що використання формули (3.26) для диференціювання функцій, заданих у параметричній формі, приводить до швидшого отримання результату.

Нехай функція $y = y(x)$ задана у неявній формі, тобто у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$. Для знаходження похідної y'_x немає необхідності виражати з цього рівняння змінну y через x у явному вигляді $y = f(x)$. Достатньо про диференціювати рівняння $F(x, y) = 0$ за змінною x, вважаючи при цьому змінну y функцією x, і з отриманого рівняння знайти y'_x. При цьому похідна y'_x виражатиметься через змінні x та y.

Приклад 3.7. Знайти похідну функції $y(x)$, заданої у неявному вигляді рівнянням $x^5 + y^4 - 3x^2y^3 + 1 = 0$.

Розв'язання. Продиференціюємо задане рівняння за змінною x, вважаючи при цьому y функцією змінної x:

$$5x^4 + 4y^3 \cdot y' - 6xy^3 - 9x^2y^2 \cdot y' = 0$$

З цього рівняння знаходимо y': $\quad y' = \frac{6xy^3 - 5x^4}{4y^3 - 9x^2y^2}$.

3.7 Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневої функції

У багатьох випадках для знаходження похідної задану функцію доцільно спочатку про логарифмувати, а потім про диференціювати отриманий результат. Таку операцію називають логарифмічним диференціюванням.

Якщо $y = f(x)$, то $\ln y = \ln(f(x))$. Тоді $(\ln y)' = (\ln(f(x)))'$, тобто маємо: $\frac{y'}{y} = (\ln(f(x)))'$. Звідси $y' = (\ln(f(x)))' \cdot y = (\ln(f(x)))' \cdot f(x)$. Вираз $\frac{y'}{y}$ називають логарифмічною похідною функції $y(x)$.

Приклад 3.8. Знайти похідну функції $y = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}$.

Розв'язання. Знаходити похідну y' за формулою похідної частки тут недоцільно з-за складності аналітичного виразу для $y(x)$. Знайдемо спочатку логарифмічну похідну функції $y(x)$. Для цього прологарифмуємо задану функцію:

$$\ln y = \ln\left(x^2+2\right) + \frac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5).$$

Диференціюючи по x обидві частини цієї рівності, маємо:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}.$$

Звідси знаходимо похідну y':

$$y' = \left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right)\cdot y = \left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\left(x^2+2\right)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\right).$$

<u>Означення 3.9</u>. Функцію $y = \left(u(x)\right)^{v(x)}$ називають *показниково-степеневою функцією.*

Для знаходження похідної цієї функції використовують логарифмічне диференціювання. Маємо: $\ln y = v(x)\cdot\ln\left(u(x)\right), (\ln y)' = \left(v(x)\cdot\ln\left(u(x)\right)\right)'$, $\frac{y'}{y} = v'\ln u + \frac{v\cdot u'}{u}$. Звідси $y' = \left(v'\ln u + \frac{v\cdot u'}{u}\right)\cdot y = \left(v'\ln u + \frac{v\cdot u'}{u}\right)\cdot u^v$. Останню формулу запишемо у вигляді:

$$y' = v'\cdot\ln u\cdot u^v + v\cdot u^{v-1}\cdot u'. \tag{3.27}$$

З формули (3.27) випливає, що похідна показниково-степеневої функції дорівнює сумі її похідної як показникової та степеневої функцій.

Приклад 3.9. Знайти похідну функції $y = (\sin x)^{x^3-2}$.

Розв'язання. Для знаходження похідної y' використаємо логарифмічне диференціювання. $\ln y = \left(x^3-2\right)\ln\sin x$. Диференціюючи цю рівність, отримуємо:

$$\frac{y'}{y} = 3x^2\cdot\ln\sin x + \left(x^3-2\right)\cdot\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = \left(3x^2\cdot\ln\sin x + \left(x^3-2\right)\cdot\operatorname{ctg} x\right)\cdot y =$$
$$= \left(3x^2\cdot\ln\sin x + \left(x^3-2\right)\cdot\operatorname{ctg} x\right)\cdot(\sin x)^{x^3-2}.$$

3.8 Похідні вищих порядків

Похідна функції $y = f(x)$ $y' = f'(x)$ теж є функцією змінної x, тому можна розглядати задачу знаходження похідної цієї функції. Якщо функція $y' = f'(x)$

є диференційовною, то її похідну називають *похідною другого порядку* функції $y=f(x)$ і позначають $y''(x)$ або $\frac{d^2y}{dx^2}$. Отже, $y''(x)=\left(y'(x)\right)'$. Похідну від похідної другого порядку функції $y=f(x)$ називають її третьою похідною або *похідною третього порядку* та позначають $y'''(x)$. Таким чином, $y'''(x)=\left(y''(x)\right)'$. Аналогічно можна визначити похідну довільного n-го порядку як похідну від похідної $(n-1)$-го порядку. Для похідної n-го порядку використовують позначення $y^{(n)}(x)$ або $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Означення 3.10. *Похідною n–го порядку* або n–ою похідною функції $y=f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку цієї функції, тобто

$$y^{(n)}(x)=\left(y^{(n-1)}(x)\right)'. \tag{3.28}$$

Похідні порядків, вищих, ніж перший, називають *похідними вищих порядків.*

Приклад 3.10. Знайти похідну третього порядку від функції $y=3x^5+2x^2+7$.

Розв’язання.

$y'=\left(3x^5+2x^2+7\right)'=15x^4+4x$, $y''=\left(y'\right)'=\left(15x^4+4x\right)'=60x^3+4$,

$y'''=\left(y''\right)'=\left(60x^3+4\right)'=180x^2$.

Приклад 3.11. Довести, що похідна n-го порядку функції $y=\sin x$ має вигляд $y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

Розв’язання. Скористаємось методом математичної індукції. Перевіримо істинність формули при $n=1$. $y'=(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Нехай формула є істинною при $n=k$: $y^{(k)}=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$. Доведемо, що звідси випливає її істинність при $n=k+1$, тобто $y^{(k+1)}=\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$. Дійсно,

$$y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'=\left(\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right).$$

Отже, згідно з методом математичної індукції, $\left(\sin x\right)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

Наведемо формули для похідних n-го порядку деяких елементарних функцій.

1. $\left(x^m\right)^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)x^{m-n}$. (3.29)

2. $\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a$. (3.30)

3. $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$. (3.31)

4. $\left(\sin x\right)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. (3.32)

5. $\left(\cos x\right)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. (3.33)

6. $\left(\ln x\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$. (3.34)

Для знаходження похідної n-го порядку добутку функцій $u(x)$ та $v(x)$ використовують формулу Лейбніца:

$$\begin{aligned}(u\cdot v)^{(n)}&=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots\\&+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)}.\end{aligned}\qquad(3.35)$$

Приклад 3.12. Знайти похідну $y^{(25)}$ функції $y=x^2\sin x$.

Розв'язання. Застосуємо формулу Лейбніца (3.35). Для цього виберемо $u=\sin x$, $v=x^2$. $v'=2x$, $v''=2$. При $k>2$ $v^{(k)}=0$. Тому маємо: $(uv)^{(25)}=u^{(25)}v+25u^{(24)}v'+\frac{25\cdot 24}{2!}u^{(23)}v''$.

Враховуючи, що похідні $\left(\sin x\right)^{(23)}=\sin\left(x+\frac{23\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos x$ (за формулою (3.32)), $\left(\sin x\right)^{(24)}=\left(-\cos x\right)'=\sin x$, $\left(\sin x\right)^{(25)}=\left(\sin x\right)'=\cos x$, отримаємо:

$$y^{(25)}=\cos x\cdot x^2+50\sin x\cdot x-600\cos x.$$

Нехай функція $y=y(x)$ задана у неявній формі у вигляді рівняння $F(x,y)=0$. Диференціюючи це рівняння по x, знаходимо з отриманої рівності першу похідну $y'(x)$. Щоб знайти другу похідну, потрібно про диференціювати по x першу похідну і у отримане співвідношення підставити знайдене перед цим значення $y'(x)$. Продовжуючи диференціювання, можна послідовно знайти похідні будь-якого порядку. Всі вони будуть виражені через незалежну змінну x і функцію y.

Приклад 3.13. Знайти $y''(x)$, якщо $x^3 + y^4 - y = 0$.

Розв'язання. Продиференціюємо рівняння $x^3 + y^4 - y = 0$ по x. Отримаємо:

$$3x^2 + 4y^3 \cdot y' - y' = 0.$$

Звідси знаходимо $y' = -\dfrac{3x^2}{4y^3 - 1} = \dfrac{3x^2}{1 - 4y^3}$. Диференціюючи отриманий вираз для y' по x, маємо:

$$y'' = \frac{6x\left(1-4y^3\right) - 3x^2\left(-12y^2\right)\cdot y'}{\left(1-4y^3\right)^2} = \frac{6x\left(1-4y^3\right)^2 + 108x^4y^2}{\left(1-4y^3\right)^3}.$$

Нехай функція $y(x)$ задана у параметричній формі рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де параметр $t \in [\alpha; \beta]$. Якщо функції $x(t)$ та $y(t)$ мають перші похідні, причому $x'(t) \neq 0, t \in [\alpha; \beta]$, а $x(t)$ – строго монотонна функція, то першу похідну y'_x знаходять за формулою $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Якщо функції $x(t)$ та $y(t)$ мають похідні другого порядку, то можна знайти другу похідну від y по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt}\cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Аналогічно можна знайти похідну будь-якого порядку n, $n > 2$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}. \tag{3.36}$$

Приклад 3.14. Знайти $y'''(x)$, якщо $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання. У прикладі 3.6 знайдено, що $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = -\dfrac{\cos t}{\sin t} = -ctgt$. Другу похідну y''_{xx} знайдемо за формулою (3.36):

$$y''_{xx} = y''(x) = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{1}{(-\sin t)} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

За цією ж формулою знайдемо і третю похідну:

$$y'''(x) = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t} = (-3)\cdot(-1)\cdot(\sin t)^{-4}\cdot\cos t\cdot\frac{1}{(-\sin t)} = -\frac{3\cos t}{\sin^5 t}.$$

3.9 Диференціал функції та його властивості

Нехай функція $y = f(x)$ у точці x має відмінну від нуля похідну $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тоді у деякому околі точки x відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тому приріст функції $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. При цьому величина $\alpha \cdot \Delta x$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж $f'(x) \cdot \Delta x$ і нескінченно мала $\Delta y \sim f'(x) \cdot \Delta x$, тому величину $f'(x) \cdot \Delta x$ називають *головною частиною* приросту функції Δy.

Означення 3.11. *Диференціалом* dy функції $y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx, частину її приросту Δy, що дорівнює добутку похідної функції у цій точці на приріст аргументу:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{3.37}$$

Диференціал dy називають також *диференціалом першого порядку*.

Знайдемо диференціал незалежної змінної x, тобто диференціал функції $y = x$. Оскільки $y' = 1$, то $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, тобто диференціал незалежної змінної дорівнює її приросту: $dx = \Delta x$, тобто формулу (3.37) можна записати у вигляді:

$$dy = f'(x)dx. \tag{3.38}$$

Таким чином, диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної.

З формули (3.38) випливає, що $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, тобто позначення похідної $\dfrac{dy}{dx}$ можна розглядати як відношення диференціалів dy та dx.

Приклад 3.15. Знайти диференціал функції $y = x^3 - \sin 3x$.

Розв'язання. Оскільки $y'(x) = 3x^2 - 3\cos 3x = 3\left(x^2 - \cos 3x\right)$, то диференціал $dy = 3\left(x^2 - \cos 3x\right)dx$.

З геометричної точки зору диференціал функції $y = f(x)$ у точці x дорівнює приросту ординати дотичної до графіка функції у цій точці, коли змінна x отримує приріст Δx.

З'ясуємо механічний зміст диференціала. Нехай матеріальна точка рухається за відомим законом $s = s(t)$. Диференціал функції $s(t)$ $ds = s'(t)\Delta t$ при фіксованих значеннях t і Δt – це той шлях, який пройшла б матеріальна точка за час Δt, якби вона рухалася рівномірно і прямолінійно із сталою швидкістю $v = s'(t)$. Зрозуміло, що фактичний шлях Δs у випадку нерівномірного руху матеріальної точки, на відміну від диференціала ds не є лінійною функцією часу Δt і тому відрізняється від шляху ds. Проте, якщо час Δt є достатньо малим, то швидкість руху не встигає суттєво змінитись і тому рух точки на проміжку часу від t до $t + \Delta t$ є майже рівномірним.

Основні формули, пов'язані з диференціалами, можна отримати, використовуючи зв'язок між диференціалом функції та її похідною ($dy = y'(x)dx$) та відповідні формули для похідних.

Нехай $u(x)$ та $v(x)$ – диференційовні функції. Тоді виконуються наступні рівності:

1. $d(u+v) = du + dv$.
2. $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$.
3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Теорема 3.7. Диференціал складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на диференціал цього проміжного аргументу.

Доведення. Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – диференційовні функції, що утворюють складену функцію $y = f(\varphi(x))$. Тоді $y'(x) = f'_u \cdot u'_x$, диференціал $dy = f'(x)dx = f'_u \cdot u'_x dx = f'_u \cdot du$.

Таким чином, $dy = f'_x dx = f'_u du$, тобто перший диференціал функції $y(x)$ визначається однією й тією ж формулою незалежно від того, чи є її аргумент незалежною змінною, чи функцією іншого аргументу. Цю властивість диференціала першого порядку називають *інваріантністю (незмінністю) форми першого диференціала*.

3.10 Застосування диференціала до наближених обчислень

Як вже зазначалося, приріст Δy функції $y = f(x)$ у точці x можна наближено замінити диференціалом dy у цій точці: $\Delta y \approx dy$. Підставивши сюди значення Δy і dy, отримаємо наближену формулу:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (3.39)$$

Абсолютна похибка величини $\Delta y - dy$ при $\Delta x \to 0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж Δx, тому, що при $f'(x) \neq 0$ величини Δy і dy є еквівалентними нескінченно малими:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1.$$

Тут $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Можна довести, що абсолютна похибка формули (3.39) не перевищує величини $M \cdot (\Delta x)^2$, де M – максимальне значення $|f''(x)|$ при $x \in [x; x+\Delta x]$.

Приклад 3.16. Обчислити наближено $arctg1{,}01$.

Розв'язання. Маємо: $f(x) = arctgx$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. При $x = 1$ і $\Delta x = 0{,}01$ за формулою (3.39) отримаємо:

$$arctg(1+0{,}01) \approx arctg1 + \frac{1}{1+1^2} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{4} + 0{,}005 \approx 0{,}79.$$

3.11 Диференціали вищих порядків

Нехай $y = f(x)$ – диференційовна функція незалежної змінної x. Тоді її диференціал $dy = f'(x)dx$ теж є функцією аргументу x і можна знайти диференціал цієї функції. Диференціал диференціала функції $y = f(x)$ називають її *другим диференціалом*, або *диференціалом другого порядку*. Його позначають d^2y або $d^2 f(x)$.

Знайдемо вираз для d^2y.

$$d^2y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = \left(f'(x)dx\right)' dx = f''(x)dx^2.$$

Таким чином, отримали формулу:

$$d^2y = f''(x)dx^2. \tag{3.40}$$

Аналогічно можна визначити диференціал третього поряду як диференціал диференціала другого порядку:

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(f''(x)dx^2\right) = \left(f''(x)dx^2\right)' dx = f'''(x)dx^3.$$

Означення 3.12. *Диференціалом n-го порядку* називають диференціал диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^ny = d\left(d^{n-1}y\right) = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{3.41}$$

З формули (3.41) випливає, що n-у похідну функції $y = f(x)$ можна записати у вигляді відношення її диференціала n-го порядку до n-го степеня диференціала незалежної змінної: $y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$.

Наведені вище формули для диференціалів вищих порядків є вірними, якщо x є незалежною змінною. Якщо ж змінна x є функцією незалежної змінної t, тобто $x = x(t)$, то

$$d^2y = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Таким чином, якщо у функції $y = f(x)$ змінна x є залежною змінною ($x = x(t)$), то $d^2y \neq f''(x)dx^2$. Ми бачимо, що диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності форми.

Приклад 3.17. Знайти диференціал третього порядку функції $y = e^{5x}$, де x – незалежна змінна.

Розв'язання. Оскільки потрібно знайти диференціал третього порядку функції незалежної змінної, то можна використати формулу (3.41) при $n=3$, тобто маємо: $d^3y = f'''(x)dx^3$. $f'''(x) = \left(e^{5x}\right)''' = 125e^{5x}$. Звідси випливає, що $d^3y = 125e^{5x}dx^3$.

Приклад 3.18. Знайти d^2y, якщо $y = x^3$ і $x = t^4 + 2t$, t – незалежна змінна.

Розв'язання. Оскільки $y(x)$ є складеною функцією (x – залежна змінна, $x = x(t)$), тому використовувати формулу (3.41) не можна. Тут $d^2y = d\left(f'(x)dx\right) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$. $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $dx = x_t'dt = \left(4t^3 + 2\right)dt$, $d^2x = x_{tt}''dt^2 = 12t^2dt^2$. Підставивши ці вирази у вираз для другого диференціалу d^2y, отримаємо:

$$d^2y = 6x \cdot dx^2 + 3x^2 \cdot 12d^2x = 6\left(t^4 + 2t\right)\left(4t^3 + 2\right)^2 dt^2 + 36\left(t^4 + 2t\right)^2 t^2dt^2 =$$

$$= 12\left(t^4 + 2t\right)\left(11t^6 + 14t^3 + 2\right)dt^2.$$

Зауважимо, що аналогічний результат ми б отримали, записавши спочатку y як функцію незалежної змінної t, тобто підставивши у вираз для $y(x)$ функцію $x = t^4 + 2t$ і далі використавши формулу (3.41) для отриманої функції незалежної змінної t.