Змістовий модуль 4.
ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.6 Диференціювання функцій, заданих у параметричній та неявній формах

Отримаємо формулу для знаходження похідної функції $y = y(x)$, заданої у параметричній формі, тобто у вигляді рівнянь $x = x(t)$, $y = y(t)$ при заданому проміжку зміни допоміжної змінної (параметра) t: $\alpha \le t \le \beta$. Будемо вважати, що функції $x(t)$ та $y(t)$ мають похідні x'_t та y'_t, причому функція $x(t)$ має обернену функцію $t = \varphi(x)$. За правилом диференціювання оберненої функції $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$.

Функцію $y = y(x)$, задану параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, розглянемо як складену функцію $y = y(t)$, де $t = \varphi(x)$. Тоді, за правилом диференціювання складеної функції, отримаємо: $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t}$.

Таким чином, ми отримали формулу диференціювання функції, заданої у параметричній формі:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3.26}$$

Формула (3.26) дозволяє знаходити похідну y'_x, функції, заданої у параметричній формі, без безпосереднього знаходження залежності $y = y(x)$.

Приклад 3.6. Знайти похідну y'_x функції $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ у точці, що відповідає значенню параметра $t = \pi/4$.

Розв’язання. Для застосування формули (3.26) знайдемо похідні x'_t та y'_t: $x'_t = -\sin t$, $y'_t = \cos t$. Тоді, за формулою (3.26), $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = -\dfrac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t$. При значенні параметра $t = \pi/4$ $y'_x = -\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = -1$.

Альтернативний шлях знаходження похідної y'_x полягає у знаходженні залежності $y = y(x)$ у явному вигляді та подальшому диференціюванні y за змінною x. Щоб знайти залежність $y = y(x)$, з параметричних рівнянь функції $x = \cos t$, $y = \sin t$ виключимо параметр t:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Отже, задані параметричні рівняння визначають на площині коло з центром у початку координат одиничного радіуса. У околі значення $t = \pi/4$ $y > 0$, тому параметричні рівняння тут визначають функцію $y = \sqrt{1 - x^2}$. При $t = \pi/4$ $x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $y'_x = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. При значенні $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ отримуємо $y'_x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{2}/2}{1/\sqrt{2}} = -1$.

На цьому прикладі ми бачимо, що використання формули (3.26) для диференціювання функцій, заданих у параметричній формі, приводить до швидшого отримання результату.

Нехай функція $y = y(x)$ задана у неявній формі, тобто у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$. Для знаходження похідної y'_x немає необхідності виражати з цього рівняння змінну y через x у явному вигляді $y = f(x)$. Достатньо про диференціювати рівняння $F(x, y) = 0$ за змінною x, вважаючи при цьому змінну y функцією x, і з отриманого рівняння знайти y'_x. При цьому похідна y'_x виражатиметься через змінні x та y.

Приклад 3.7. Знайти похідну функції $y(x)$, заданої у неявному вигляді рівнянням $x^5 + y^4 - 3x^2y^3 + 1 = 0$.

Розв'язання. Продиференціюємо задане рівняння за змінною x, вважаючи при цьому y функцією змінної x:

$$5x^4 + 4y^3 \cdot y' - 6xy^3 - 9x^2y^2 \cdot y' = 0$$

З цього рівняння знаходимо y': $y' = \frac{6xy^3 - 5x^4}{4y^3 - 9x^2y^2}$.

3.7 Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневої функції

У багатьох випадках для знаходження похідної задану функцію доцільно спочатку про логарифмувати, а потім про диференціювати отриманий результат. Таку операцію називають логарифмічним диференціюванням.

Якщо $y = f(x)$, то $\ln y = \ln(f(x))$. Тоді $(\ln y)' = (\ln(f(x)))'$, тобто маємо: $\frac{y'}{y} = (\ln(f(x)))'$. Звідси $y' = (\ln(f(x)))' \cdot y = (\ln(f(x)))' \cdot f(x)$. Вираз $\frac{y'}{y}$ називають логарифмічною похідною функції $y(x)$.

Приклад 3.8. Знайти похідну функції $y=\dfrac{\left(x^2+2\right)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}$.

Розв'язання. Знаходити похідну y' за формулою похідної частки тут недоцільно з-за складності аналітичного виразу для $y(x)$. Знайдемо спочатку логарифмічну похідну функції $y(x)$. Для цього прологарифмуємо задану функцію:

$$\ln y=\ln\left(x^2+2\right)+\frac{3}{4}\ln(x-1)+x-3\ln(x+5).$$

Диференціюючи по x обидві частини цієї рівності, маємо:

$$\frac{y'}{y}=\frac{2x}{x^2+2}+\frac{3}{4(x-1)}+1-\frac{3}{x+5}.$$

Звідси знаходимо похідну y':

$$y'=\left(\frac{2x}{x^2+2}+\frac{3}{4(x-1)}+1-\frac{3}{x+5}\right)\cdot y=\left(\frac{2x}{x^2+2}+\frac{3}{4(x-1)}+1-\frac{3}{x+5}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\left(x^2+2\right)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\right).$$

<u>**Означення 3.9**</u>. Функцію $y=\left(u(x)\right)^{v(x)}$ називають *показниково-степеневою функцією.*

Для знаходження похідної цієї функції використовують логарифмічне диференціювання. Маємо: $\ln y=v(x)\cdot\ln\left(u(x)\right), (\ln y)'=\left(v(x)\cdot\ln\left(u(x)\right)\right)'$, $\dfrac{y'}{y}=v'\ln u+\dfrac{v\cdot u'}{u}$. Звідси $y'=\left(v'\ln u+\dfrac{v\cdot u'}{u}\right)\cdot y=\left(v'\ln u+\dfrac{v\cdot u'}{u}\right)\cdot u^v$. Останню формулу запишемо у вигляді:

$$y'=v'\cdot\ln u\cdot u^v+v\cdot u^{v-1}\cdot u'. \qquad (3.27)$$

З формули (3.27) випливає, що похідна показниково-степеневої функції дорівнює сумі її похідної як показникової та степеневої функцій.

Приклад 3.9. Знайти похідну функції $y=(\sin x)^{x^3-2}$.

Розв'язання. Для знаходження похідної y' використаємо логарифмічне диференціювання. $\ln y=\left(x^3-2\right)\ln\sin x$. Диференціюючи цю рівність, отримуємо:

$$\frac{y'}{y}=3x^2\cdot\ln\sin x+\left(x^3-2\right)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow y'=\left(3x^2\cdot\ln\sin x+\left(x^3-2\right)\cdot\operatorname{ctg}x\right)\cdot y=$$

$$=\left(3x^2\cdot\ln\sin x+\left(x^3-2\right)\cdot\operatorname{ctg}x\right)\cdot(\sin x)^{x^3-2}.$$

3.8 Похідні вищих порядків

Похідна функції $y = f(x)$ $y' = f'(x)$теж є функцією змінної x, тому можна розглядати задачу знаходження похідної цієї функції. Якщо функція $y' = f'(x)$ є диференційовною, то її похідну називають *похідною другого порядку* функції $y = f(x)$ і позначають $y''(x)$ або $\frac{d^2y}{dx^2}$. Отже, $y''(x) = \left(y'(x)\right)'$. Похідну від похідної другого порядку функції $y = f(x)$ називають її третьою похідною або *похідною третього порядку* та позначають $y'''(x)$. Таким чином, $y'''(x) = \left(y''(x)\right)'$. Аналогічно можна визначити похідну довільного n-го порядку як похідну від похідної $(n-1)$-го порядку. Для похідної n-го порядку використовують позначення $y^{(n)}(x)$ або $\frac{d^ny}{dx^n}$.

<u>Означення 3.10.</u> *Похідною n–го порядку* або n–ою похідною функції $y = f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку цієї функції, тобто

$$y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'. \qquad (3.28)$$

Похідні порядків, вищих, ніж перший, називають *похідними вищих порядків.*

Приклад 3.10. Знайти похідну третього порядку від функції $y = 3x^5 + 2x^2 + 7$.

Розв'язання.

$y' = \left(3x^5 + 2x^2 + 7\right)' = 15x^4 + 4x$, $y'' = (y')' = \left(15x^4 + 4x\right)' = 60x^3 + 4$,

$y''' = (y'')' = \left(60x^3 + 4\right)' = 180x^2$.

Приклад 3.11. Довести, що похідна n-го порядку функції $y = \sin x$ має вигляд $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Скористаємось методом математичної індукції. Перевіримо істинність формули при $n = 1$. $y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Нехай формула є істинною при $n = k$: $y^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$. Доведемо, що звідси випливає її істинність при $n=k+1$, тобто $y^{(k+1)}=\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$. Дійсно,

$$y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'=\left(\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right).$$

Отже, згідно з методом математичної індукції, $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

Наведемо формули для похідних n-го порядку деяких елементарних функцій.

1. $\left(x^m\right)^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)x^{m-n}$. (3.29)

2. $\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a$. (3.30)

3. $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$. (3.31)

4. $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. (3.32)

5. $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. (3.33)

6. $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$. (3.34)

Для знаходження похідної n-го порядку добутку функцій $u(x)$ та $v(x)$ використовують формулу Лейбніца:

$$\begin{aligned}(u\cdot v)^{(n)}&=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots\\&+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Приклад 3.12. Знайти похідну $y^{(25)}$ функції $y=x^2\sin x$.

Розв'язання. Застосуємо формулу Лейбніца (3.35). Для цього виберемо $u=\sin x$, $v=x^2$. $v'=2x$, $v''=2$. При $k>2$ $v^{(k)}=0$. Тому маємо: $(uv)^{(25)}=u^{(25)}v+25u^{(24)}v'+\frac{25\cdot 24}{2!}u^{(23)}v''$.

Враховуючи, що похідні $(\sin x)^{(23)}=\sin\left(x+\frac{23\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos x$ (за формулою (3.32)), $(\sin x)^{(24)}=(-\cos x)'=\sin x$, $(\sin x)^{(25)}=(\sin x)'=\cos x$, отримаємо:

$$y^{(25)}=\cos x\cdot x^2+50\sin x\cdot x-600\cos x.$$

Нехай функція $y = y(x)$ задана у неявній формі у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$. Диференціюючи це рівняння по x, знаходимо з отриманої рівності першу похідну $y'(x)$. Щоб знайти другу похідну, потрібно про диференціювати по x першу похідну і у отримане співвідношення підставити знайдене перед цим значення $y'(x)$. Продовжуючи диференціювання, можна послідовно знайти похідні будь-якого порядку. Всі вони будуть виражені через незалежну змінну x і функцію y.

Приклад 3.13. Знайти $y''(x)$, якщо $x^3 + y^4 - y = 0$.

Розв'язання. Продиференціюємо рівняння $x^3 + y^4 - y = 0$ по x. Отримаємо:

$$3x^2 + 4y^3 \cdot y' - y' = 0.$$

Звідси знаходимо $y' = -\frac{3x^2}{4y^3 - 1} = \frac{3x^2}{1 - 4y^3}$. Диференціюючи отриманий вираз для y' по x, маємо:

$$y'' = \frac{6x\left(1 - 4y^3\right) - 3x^2\left(-12y^2\right) \cdot y'}{\left(1 - 4y^3\right)^2} = \frac{6x\left(1 - 4y^3\right)^2 + 108x^4y^2}{\left(1 - 4y^3\right)^3}.$$

Нехай функція $y(x)$ задана у параметричній формі рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де параметр $t \in [\alpha; \beta]$. Якщо функції $x(t)$ та $y(t)$ мають перші похідні, причому $x'(t) \neq 0, t \in [\alpha; \beta]$, а $x(t)$ – строго монотонна функція, то першу похідну y'_x знаходять за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Якщо функції $x(t)$ та $y(t)$ мають похідні другого порядку, то можна знайти другу похідну від y по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Аналогічно можна знайти похідну будь-якого порядку n, $n > 2$:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}. \tag{3.36}$$

Приклад 3.14. Знайти $y'''(x)$, якщо $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання. У прикладі 3.6 знайдено, що $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -ctgt$. Другу похідну y''_{xx} знайдемо за формулою (3.36):

$$y''_{xx} = y''(x) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{(-\sin t)} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

За цією ж формулою знайдемо і третю похідну:

$$y'''(x) = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = (-3)\cdot(-1)\cdot(\sin t)^{-4} \cdot \cos t \cdot \frac{1}{(-\sin t)} = -\frac{3\cos t}{\sin^5 t}.$$

3.11 Диференціали вищих порядків

Нехай $y = f(x)$ – диференційовна функція незалежної змінної x. Тоді її диференціал $dy = f'(x)dx$ теж є функцією аргументу x і можна знайти диференціал цієї функції. Диференціал диференціала функції $y = f(x)$ називають її *другим диференціалом*, або *диференціалом другого порядку*. Його позначають $d^2 y$ або $d^2 f(x)$.

Знайдемо вираз для $d^2 y$.

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)dx^2.$$

Таким чином, отримали формулу:

$$d^2 y = f''(x)dx^2. \tag{3.40}$$

Аналогічно можна визначити диференціал третього поряду як диференціал диференціала другого порядку:

$$d^3 y = d(d^2 y) = d(f''(x)dx^2) = (f''(x)dx^2)' dx = f'''(x)dx^3.$$

<u>Означення 3.12.</u> *Диференціалом n-го порядку* називають диференціал диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{3.41}$$

З формули (3.41) випливає, що n-у похідну функції $y = f(x)$ можна записати у вигляді відношення її диференціала n-го порядку до n-го степеня диференціала незалежної змінної: $y^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Наведені вище формули для диференціалів вищих порядків є вірними, якщо x є незалежною змінною. Якщо ж змінна x є функцією незалежної змінної t, тобто $x = x(t)$, то

$$d^2 y = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x.$$

Таким чином, якщо у функції $y = f(x)$ змінна x є залежною змінною ($x = x(t)$), то $d^2 y \neq f''(x)dx^2$. Ми бачимо, що диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності форми.

Приклад 3.17. Знайти диференціал третього порядку функції $y = e^{5x}$, де x – незалежна змінна.

Розв'язання. Оскільки потрібно знайти диференціал третього порядку функції незалежної змінної, то можна використати формулу (3.41) при $n=3$, тобто маємо: $d^3y = f'''(x)dx^3$. $f'''(x) = \left(e^{5x}\right)''' = 125e^{5x}$. Звідси випливає, що $d^3y = 125e^{5x}dx^3$.

Приклад 3.18. Знайти d^2y, якщо $y = x^3$ і $x = t^4 + 2t$, t – незалежна змінна.

Розв'язання. Оскільки $y(x)$ є складеною функцією (x – залежна змінна, $x = x(t)$), тому використовувати формулу (3.41) не можна. Тут $d^2y = d\left(f'(x)dx\right) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$. $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $dx = x'_t dt = \left(4t^3 + 2\right)dt$, $d^2x = x''_{tt}dt^2 = 12t^2dt^2$. Підставивши ці вирази у вираз для другого диференціалу d^2y, отримаємо:

$$d^2y = 6x \cdot dx^2 + 3x^2 \cdot 12d^2x = 6\left(t^4 + 2t\right)\left(4t^3 + 2\right)^2 dt^2 + 36\left(t^4 + 2t\right)^2 t^2dt^2 =$$

$$= 12\left(t^4 + 2t\right)\left(11t^6 + 14t^3 + 2\right)dt^2.$$

Зауважимо, що аналогічний результат ми б отримали, записавши спочатку y як функцію незалежної змінної t, тобто підставивши у вираз для $y(x)$ функцію $x = t^4 + 2t$ і далі використавши формулу (3.41) для отриманої функції незалежної змінної t.