Тема 4. Основні теореми диференціального числення. Застосування диференціального числення до дослідження функцій

4.1 Диференціальні теореми про середні значення

Теорема 4.1. (теорема Ферма). Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на інтервалі $(a;b)$ і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці $x = c \in (a;b)$. Тоді якщо у цій точці існує похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Доведення. Для визначеності будемо вважати, що у точці $x = c$ функція $f(x)$ набуває свого найбільшого значення, тобто $f(x) \le f(c) \quad \forall x \in (a;b)$. Оскільки точка c є внутрішньою точкою інтервалу $(a;b)$, то приріст аргументу Δx може бути як від'ємним, так і додатним, а відповідний приріст функції у цій точці $\Delta y = f(c+\Delta x) - f(c)$ не може бути додатним. Оскільки $f(c+\Delta x) \le f(c)$, то $\Delta y \le 0$. При $\Delta x > 0$ отримуємо: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$, тому $f'_+(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$.

Аналогічно, якщо $\Delta x < 0$, то $f'_-(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$. За умовою, у точці c існує похідна $f'(c)$, тобто $f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$.

Маємо: $f'(c) \le 0 \wedge f'(c) \ge 0 \Rightarrow f'(c) = 0$. Теорему доведено.

Геометричний зміст теореми Ферма полягає у тому, що у точці $x = c \in (a;b)$, де функція $y = f(x)$ набуває найбільшого чи найменшого значення на $(a;b)$, дотична до графіка цієї функції паралельна осі абсцис.

Теорема 4.2. (Теорема Ролля). Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, диференційовною на проміжку $(a;b)$ і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(a) = f(b)$, то знайдеться хоча б одна точка $c \in (a;b)$, у якій $f'(c) = 0$.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ є неперервною на $[a;b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найменшого значення m та найбільшого значення M. Якщо $m = M$, то на $[a;b]$ $f(x) = const$ і $f'(x) = 0$ у довільній точці цього проміжку.

Нехай $m \ne M$. Тоді хоча б одне із значень m чи M досягається функцією у внутрішній точці відкритого інтервалу $(a;b)$, тому що $f(a) = f(b)$. За теоремою Ферма похідна у цій точці дорівнюватиме нулю. Теорему доведено.

Отже, теорема Ролля стверджує, що на графіку функції, яка задовольняє умовам цієї теореми, знайдеться хоча б одна точка, дотична у якій паралельна осі Ox.

Якщо $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можна сформулювати наступним чином: між двома коренями функції знаходиться хоча б один корінь її похідної.

Приклад 4.1. Довести, що рівняння $3x^3+15x-8=0$ має лише один дійсний корінь.

Розв'язання. Оскільки задане рівняння – це рівняння третього степеня (непарного), то воно має хоча б один дійсний корінь. Доведемо, що дійсний корінь цього рівняння лише один. Допустимо, що існують два таких корені – x_1 та x_2, де $x_1<x_2$. Тоді на відрізку $[x_1;x_2]$ функція $f(x)=3x^3+15x-8$ задовольняє всім умовам теореми Ролля: вона неперервна на цьому відрізку, диференційовна у кожній його внутрішній точці та приймає на кінцях цього відрізка однакові значення (дорівнює нулю). Отже, у деякій точці $x_1<c<x_2$ $f'(c)=0$. Проте $f'(c)=9x^2+15>0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Отримане протиріччя доводить, що задане рівняння має єдиний дійсний корінь.

Теорема 4.3. (Теорема Коші). Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на $[a;b]$, диференційовні у інтервалі $(a;b)$, причому $\varphi'(x)\neq 0\ \forall x\in[a;b]$, то існує така точка $c\in(a;b)$, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \qquad (4.1)$$

Доведення. Введемо допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\left[\varphi(x)-\varphi(a)\right].$$

Введена таким чином функція визначена у всіх точках $[a;b]$, оскільки $\varphi(b)\neq\varphi(a)$. У противному разі за теоремою Ролля знайшлася б така точка $c\in(a;b)$, у якій $\varphi'(c)=0$, що суперечить умові теореми.

Функція $F(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля: вона неперервна на $[a;b]$, диференційовна у $(a;b)$ і $F(a)=F(b)$. Тому знайдеться така точка $c\in(a;b)$, що $F'(c)=0$ або

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c)=0.$$

Звідси випливає рівність (4.1). Теорему доведено.

Теорема 4.4. (Теорема Лагранжа). Якщо функція $f(x)$ є неперервною на $[a;b]$, диференційовною у $(a;b)$, то всередині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка $c\in(a;b)$, у якій виконується рівність:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \qquad (4.2)$$

Доведення. Теорему Лагранжа можна розглядати як окремий випадок теореми Коші. Дійсно, формулу (4.2) отримаємо, поклавши у формулі (4.1) $\varphi(x)=x$. Теорему доведено.

Формулу (4.2) називають формулою Лагранжа, або формулою скінченних приростів, оскільки вона виражає точне значення приросту функції

$\Delta y = f(b) - f(a)$ через похідну у деякій проміжній точці $c \in (a;b)$ та скінченне значення приросту аргументу $\Delta x = b - a$. Відповідно, формулу (4.2) можна записати у вигляді: $\Delta y = f'(c) \cdot \Delta x$.

Розглянемо геометричний зміст теореми Лагранжа. Запишемо формулу (4.2) у вигляді:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Ця рівність свідчить, що на графіку функції, яка задовольняє умовам теореми Лагранжа, знайдеться хоча б одна точка з абсцисою c, у якій дотична до графіка паралельна хорді, що сполучає точки $(a; f(a))$ та $(b; f(b))$.

Теорема Лагранжа має також механічну інтерпретацію. Якщо $s = s(t)$, $t \in [t_1; t_2]$ – закон руху матеріальної точки, то відношення $\dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ – це середня швидкість руху за проміжок часу $[t_1; t_2]$. Теорема Лагранжа стверджує, що в деякий момент часу $c \in (t_1; t_2)$ миттєва швидкість матеріальної точки неодмінно співпаде з її середньою швидкістю: $\dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = s'(c)$.

З теореми Лагранжа випливають наступні наслідки.

Наслідок 1. Якщо похідна функції дорівнює нулю на деякому проміжку, то ця функція є сталою на даному проміжку.

Наслідок 2. Якщо похідні двох функцій співпадають на деякому проміжку, то ці функції відрізняються між собою на сталу величину.

Теорему Лагранжа та її наслідки можна застосовувати при доведенні тотожностей та нерівностей.

Приклад 4.2. Довести, що $\arccos\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} = 2\operatorname{arctg} x$, $x \ge 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \arccos\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} - 2\operatorname{arctg} x$. Ця функція визначена на всій числовій прямій, оскільки $\left|\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right| \le 1$. Вона є також диференційовною у кожній точці своєї області визначення. Знайдемо похідну $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-4x}{\left(1 + x^2\right)^2} - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{4x}{2x\left(1 + x^2\right)} - \frac{2}{1 + x^2} = 0.$$

Отже, $f'(x) = 0 \;\; \forall x \ge 0$. Тому, за наслідком 1 з теореми Лагранжа, функція $f(x)$ є сталою при $x \ge 0$.

Знайдемо $f(1)$. $f(1)=\arccos 0-2\operatorname{arctg} 1=\pi-2\cdot\frac{\pi}{2}=0$.

Таким чином, $f(x)=0$, тому $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\operatorname{arctg} x$.

Приклад 4.3. Довести нерівність $\operatorname{arctg}\beta-\operatorname{arctg}\alpha<\beta-\alpha$, $\beta>\alpha$.

Розв'язання. Функція $f(x)=\operatorname{arctg} x$ є визначеною та диференційовною на всій числовій прямій, у тому числі на довільному проміжку $(\alpha;\beta)$, $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Застосуємо до неї теорему Лагранжа. Згідно з цією теоремою, існує така точка $c\in(\alpha;\beta)$, що

$$\operatorname{arctg}\beta-\operatorname{arctg}\alpha=\frac{1}{1+c^2}(\beta-\alpha).$$

Оскільки $0<\frac{1}{1+c^2}<1$ і $\beta-\alpha>0$, то $\frac{1}{1+c^2}(\beta-\alpha)<\beta-\alpha$, тому виконується нерівність:

$$\operatorname{arctg}\beta-\operatorname{arctg}\alpha<\beta-\alpha.$$

4.2 Правило Лопіталя

Розглянемо спосіб обчислення границь, які потребують розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, пов'язаний з застосуванням похідних.

Теорема 4.5. (Правило Лопіталя розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$). Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними та диференційованими у околі точки $x=x_0$ і при цьому $f(x_0)=g(x_0)=0$, а $g'(x)\neq 0$ у околі цієї точки. Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$, то існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l. \tag{4.3}$$

Доведення. Застосуємо до функцій $f(x)$ та $g(x)$ теорему Коші для відрізка $[x_0;x]$, що належить околу точки x_0. Тоді $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, де точка $c\in(x_0;x)$. Оскільки $f(x_0)=g(x_0)=0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$. При $x\to x_0$ $c\to c_0$, тому

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to x_0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

Отже, отримали формулу (4.3). Теорему доведено.

Таким чином, ми довели, що границя відношення двох нескінченно малих дорівнює границі відношення їх похідних, якщо ця границя існує.

Зауважимо, що теорема 4.5 виконується і у тому випадку, коли функції $f(x)$ та $g(x)$ невизначені при $x=x_0$, але $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. Ця теорема виконується також при $x\to\infty$.

Приклад 4.4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x}$.

Розв'язання. При підстановці у чисельник та знаменник дробу під знаком границі значення $x=1$ отримуємо невизначеність виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Застосуємо до розкриття даної невизначеності правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1}=\frac{1}{1}=1.$$

Приклад 4.5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(6\sin 6x)'}{(4x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{36\cos 6x}{4}=\frac{36}{4}=9.$$

Наведемо без доведення формулювання правила Лопіталя знаходження границь, що зводяться до розкриття невизначеності виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Теорема 4.6. (Правило Лопіталя розкриття невизначеностей виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними та диференційовними у околі точки x_0 (можливо, окрім самої цієї точки), і у цьому околі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, причому $g'(x)\neq 0$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$.

Приклад 4.5. Обчислити $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0} \operatorname{tg} 3x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0} \operatorname{tg} 5x = \mp\infty$, то дана границя зводиться до невизначеності виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, тому застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} 3x)'}{(\operatorname{tg} 5x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3/\cos^2 3x}{5/\cos^2 5x} = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 10x}{1+\cos 6x} = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos 10x)'}{(1+\cos 6x)'} = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-10\sin 10x}{-6\sin 6x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{10\cos 10x}{6\cos 6x} = \frac{5}{3}.$$

До невизначеностей виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ або $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, для розкриття яких можна застосувати правило Лопіталя, зводяться невизначеності видів $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^{∞}), (∞^{0}), (0^{0}). Для цього застосовують тотожні перетворення та логарифмування.

Приклад 4.6. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $(0\cdot\infty)$**.** Зведемо її до невизначеності $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, після чого застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{-1}{-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{4}}} = \frac{4}{\pi}\ .$$

Приклад 4.7. Обчислити $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x - \sec x)$.

Розв'язання. Оскільки $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, то при підстановці у вираз під знаком границі замість x значення $\dfrac{\pi}{2}$, маємо невизначеність виду $(\infty-\infty)$. Зведемо її до невизначеності $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, після чого застосуємо правило Лопіталя. Отримуємо:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x - \sec x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - 1}{\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0\ .$$

Приклад 4.8. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x$, $n>0$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $(0\cdot\infty)$. Для застосування правила Лопіталя перетворимо її до виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Маємо:

$$\lim_{x\to 0} x^n \ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-n}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-n/x^{n-1}} = -\frac{1}{n}\lim_{x\to 0} x^n = 0 .$$

Приклад 4.9. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Розв'язання. Обчислення границі приводить до необхідності розкриття невизначеності виду $\left(\infty^0\right)$. Позначимо $\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = y$. Тоді $\ln y = \sin x \cdot \ln\frac{1}{x}$. Знаходимо границю цього виразу при $x \to 0+0$:

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y = \lim_{x\to 0+0}\left(\sin x\cdot \ln\frac{1}{x}\right) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{-\ln x}{1/\sin x}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{-1/x}{-\cos x/\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 0\cdot 1 = 0.$$

Оскільки логарифмічна функція є неперервною, то $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln y = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0+0} y\right)$, тому $\lim\limits_{x\to 0+0} y = e^0 = 1$.

Приклад 4.10. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left(1^\infty\right)$. Нехай $y = (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$, тоді $\ln y = \dfrac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{2x\cdot\cos 2x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x} =$$

$$= -2\cdot 1\cdot 1 = -2.$$

Тоді $\lim\limits_{x\to 0} y = e^{-2}$.

Приклад 4.11. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}3x}$.

Розв'язання. Тут маємо невизначеність виду $\left(0^0\right)$. Запишемо вираз під знаком границі у вигляді: $(\sin 2x)^{\operatorname{tg}3x} = e^{\ln(\sin 2x)^{\operatorname{tg}3x}} = e^{\operatorname{tg}3x\cdot\ln(\sin 2x)}$. Шукана границя набуває вигляду:

$$\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}3x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{tg}3x\cdot\ln(\sin 2x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}3x\cdot\ln(\sin 2x)} .$$

Знайдемо границю у показнику експоненти.

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} 3x\cdot\ln(\sin 2x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin 2x)}{\operatorname{ctg}3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{-3}{\sin^2 3x}}=$$

$$-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot\sin^2 3x}{\sin 2x}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\cos 2x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin 2x}=-\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 0=0.$$

Тоді шукана границя $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}3x}=e^0=1$.

4.3. Знаходження асимптот графіка функції

Означення 4.1. *Асимптотою* кривої називають пряму, відстань від якої від точки, що лежить на кривій, прямує до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки по кривій від початку координат.

Асимптоти можуть бути вертикальними, горизонтальними та похилими.

Пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\infty$. Для відшукання вертикальних асимптот потрібно знайти такі значення x, поблизу яких $|f(x)|$ необмежено зростає. Звичайно це точки розриву другого роду функції $y=f(x)$. Наприклад, крива $y=\dfrac{4}{x-3}$ має вертикальну асимптоту – пряму $x=3$, оскільки $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{4}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{4}{x-3}=+\infty$.

Рівняння похилої асимптоти будемо шукати у вигляді $y=kx+b$. Нехай $M(x,y)$ – довільна точка кривої $y=f(x)$. За формулою відстані від точки до прямої отримаємо відстань точки M до прямої $kx+b-y=0$:

$$d=\frac{|kx+b-y|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

При $x\to\infty$ точка M необмежено віддаляється від початку координат, при цьому $d\to 0$, якщо $\lim\limits_{x\to\infty}(kx+b-y)=0$. Тоді $y=kx+b+\alpha(x)$, де $\alpha(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Тоді границя відношення $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(k+\dfrac{b}{x}+\dfrac{\alpha(x)}{x}\right)=k$. Оскільки для точки M $y=f(x)$, то отримали формулу для знаходження кутового коефіцієнта k похилої асимптоти у вигляді:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{4.4}$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}(kx+b-y)=0$, то $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)$, або

$$b=\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-kx\big). \tag{4.5}$$

Таким чином, якщо графік функції $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$, то її коефіцієнти k та b знаходять за формулами (4.4) та (4.5).

Приклад 4.12. Знайти похилі асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1}$.

Розв'язання. За формулами(4.4) та (4.5) знаходимо коефіцієнти k та b. Маємо: $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1}$, $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 2x + 3}{x(x^2 + 1)} = 1$.

Знайдемо коефіцієнт b:

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 3}{x^2 + 1} = 0.$$

Таким чином, похила асимптота графіка функції $y = \dfrac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1}$ – це пряма $y = x$.

Якщо хоча б одна з границь (4.4) або (4.5) не існує або є нескінченною, то крива $y = f(x)$ похилих асимптот не має. Якщо у рівнянні похилої асимптоти $k = 0$, то воно набуває вигляду $y = b$, У цьому випадку графік функції $y = f(x)$ може мати <u>горизонтальну асимптоту</u> $y = b$.

Таким чином, рівняння горизонтальної асимптоти має вигляд $y = b$, де сталу b знаходять за формулою

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x). \tag{4.6}$$

Наприклад, графік функції $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{2x^2 + 4}$ має горизонтальну асимптоту $y = 2$, оскільки $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + x - 1}{2x^2 + 4} = \dfrac{1}{2}$.

Якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ або не існує, то горизонтальні асимптоти відсутні.

Асимптоти графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$ можуть бути різними, тому при використанні формул (4.4) – (4.6) потрібно окремо розглядати випадки, коли $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$.

Приклад 4.13. Знайти асимптоти графіка функції $y = xe^x$.

Розв'язання. Оскільки задана функція є неперервною на своїй області визначення – всій числовій прямій, то її графік вертикальних асимптот не має. Для виявлення похилих асимптот використаємо формули (4.4) та (4.5):

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^x.$$

Остання границя дорівнює $+\infty$ при $x \to +\infty$ та нулю при $x \to -\infty$. Отже, при $x \to +\infty$ похилі асимптоти графіка даної функції відсутні, при $x \to -\infty$ можлива наявність горизонтальної асимптоти. Для визначення рівняння цієї асимптоти використаємо формулу (4.6), тобто знайдемо границю $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} xe^x.$$

При $x\to+\infty$ маємо нескінченну границю, при $x\to-\infty$ маємо:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \|x=-t\| = -\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0.$$

Отже, за формулою (4.6) отримуємо значення $b=0$, тобто при $x\to-\infty$ графік функції $y=xe^x$ має горизонтальну асимптоту – вісь Ox ($y=0$).

4.4 Формула Тейлора

Нехай функція $y=f(x)$ у деякому околі точки $x=a$ має всі похідні до $(n+1)$-го порядку включно. Знайдемо многочлен $P_n(x)$, степінь якого не перевищує n, значення якого у точці $x=a$ дорівнює значенню функції $f(x)$ у цій точці, а значення його похідних до n-го порядку у точці $x=a$ дорівнюють відповідним значенням похідних у цій точці:

$$P_n(a)=f(a),\ P_n'(a)=f'(a),\ P_n''(a)=f''(a),\ldots,\ P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a). \qquad (4.7)$$

Будемо шукати цей многочлен у вигляді многочлена за степенями $(x-a)$ з невизначеними коефіцієнтами:

$$P_n(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-a)^k. \qquad (4.8)$$

Невизначені коефіцієнти c_0, c_1, c_2, …, c_n знайдемо так, щоб виконувались умови (4.7). Для цього, диференціюючи (4.8), знайдемо похідні від $P_n(x)$. Отримуємо:

$$P_n'(x)=c_1+2\cdot c_2\cdot(x-a)+3\cdot c_3\cdot(x-a)^2\ldots+n\cdot c_n\cdot(x-a)^{n-1};$$

$$P_n''(x)=2\cdot c_2+3\cdot 2\cdot c_3\cdot(x-a)\ldots+n\cdot(n-1)\cdot c_n\cdot(x-a)^{n-2};$$

……………………………………………………………

$$P_n^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot c_n.$$

Підставивши у ліві та праві частини останніх рівностей та рівності (4.8) замість x значення a та прирівнявши їх згідно з (4.7) до значень $f(a)$, $f'(a)$, …, $f^{(n)}(a)$, отримаємо рівності: $f(a)=c_0$, $f'(a)=c_1$, $f''(a)=2\cdot 1\cdot c_2$, $f'''(a)=3\cdot 2\cdot 1\cdot c_3$, …., $f^{(n)}(a)=n!\cdot c_n$. Звідси знаходимо коефіцієнти шуканого многочлена:

$$c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots,n. \qquad (4.9)$$

Тут похідною нульового порядку вважають саму функцію.

Таким чином, шуканий многочлен (4.8) має вигляд:

$$P_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^k. \qquad (4.10)$$

Нехай $R_n\left(x\right)=f\left(x\right)-P_n\left(x\right)$. Звідси маємо

$$f\left(x\right)=P_n\left(x\right)+R_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^k+R_n\left(x\right). \qquad (4.11)$$

Формулу (4.11) називають *формулою Тейлора* для функції $f\left(x\right)$ у околі точки $x=a$, а многочлен $P_n\left(x\right)$, коефіцієнти якого визначаються за формулою (4.9) – *многочленом Тейлора*. Вираз $R_n\left(x\right)=f\left(x\right)-P_n\left(x\right)$ називають *залишковим членом формули Тейлора.* Для значень x, при яких залишковий член є достатньо малим, многочлен $P_n\left(x\right)$ є наближенням функції $f\left(x\right)$. Таким чином, формула (4.11) дає можливість замінити функцію $f\left(x\right)$ многочленом Тейлора $P_n\left(x\right)$ з точністю, що дорівнює значенню залишкового члена $R_n\left(x\right)$.

Доведемо, що залишковий член формули Тейлора $R_n\left(x\right)$ можна представити у вигляді:

$$R_n\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)\left(x-a\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!}, \qquad (4.12)$$

де точка ξ знаходиться між точками x та a. Зафіксуємо довільне значення $x>a$ з околу точки a, де функція $f\left(x\right)$ диференційовна $n+1$ разів. Позначимо через t величину, що змінюється на відрізку $\left[x_0;x\right]$, тобто $x_0\le t\le x$. Розглянемо функцію

$$F\left(t\right)=f\left(x\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(t\right)}{k!}\left(x-t\right)^k-\frac{\left(x-t\right)^{n+1}R_n\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n+1}}. \qquad (4.13)$$

Ця функція задовольняє всі умови теореми Ролля, тому знайдеться точка $\xi\in\left(a;x\right)$, для якої $F'\left(\xi\right)=0$.

Диференціюючи (4.13) по t, отримаємо:

$$F'\left(t\right)=-\frac{f^{(n+1)}\left(t\right)}{n!}\left(x-t\right)^n+\frac{\left(n+1\right)\left(x-t\right)^n R_n\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n+1}}. \qquad (4.14)$$

Прийнявши у рівності (4.14) $t=\xi$, з рівності $F'\left(\xi\right)=0$ отримуємо:

$$-\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{n!}\left(x-\xi\right)^n+\frac{\left(n+1\right)\left(x-\xi\right)^n R_n\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n+1}}=0.$$

Розв’язавши це рівняння відносно $R_n\left(x\right)$, отримаємо формулу (4.12). Формулу (4.12) для залишкового члена формули Тейлора називають *залишковим членом у формі Лагранжа*.

При $x \to a$ $R_n(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $(x-a)^n$, тому, використовуючи символи Ландау, ми можемо записати, що $R_n(x) = o\left((x-a)^n\right)$. Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають *залишковим членом у формі Пеано*.

Величина $R_n(x)$ дорівнює величині похибки при заміні функції $f(x)$ її многочленом Тейлора. Формулу (4.12) можна використати для того, щоб оцінити величину такої похибки при фіксованих значеннях x, а також при $n \to \infty$. Многочлени Тейлора дають найкраще наближення функції $f(x)$ по відношенню до всіх многочленів заданого степеня у околі точки a, тобто використання для наближення функції многочлена Тейлора дає найменшу абсолютну похибку $|R_n(x)|$.

Формулу Тейлора (4.11) при $a = 0$ називають *формулою Маклорена*. Таким чином, формула Маклорена для функції $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \tag{4.15}$$

де $R_n(x)$ визначається за формулою:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \;. \tag{4.16}$$

У формулі (4.16) точка ξ знаходиться між точками 0 та x, тобто $\xi = \theta x$, де $0 < \theta < 1$.

Формула (4.16) визначає залишковий член формули Маклорена у формі Лагранжа, цей залишковий член можна записати у формі Пеано:

$$R_n(x) = o\left(x^n\right). \tag{4.17}$$

Формула (4.17) означає, що при заміні функції $f(x)$ многочленом Тейлора у околі точки $x = 0$ похибка є нескінченно малою величиною більш високого порядку, ніж $|x^n|$.

Наведемо формулу Маклорена для наближення деяких основних елементарних функцій.

1. $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right). \tag{4.18}$$

2. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o\left(x^{2n}\right). \tag{4.19}$$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right). \tag{4.20}$$

4. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$

$$+o\left(x^n\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o\left(x^n\right). \tag{4.21}$$

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o\left(x^n\right). \tag{4.22}$$

Приклад 4.14. Записати наближення функції $f(x) = \sqrt{1+x^2}\cos x$ за формулою Маклорена, обмежившись членами до x^4.

Розв'язання. Використаємо формули (4.21) та (4.20). Запишемо функцію $\sqrt{1+x^2}$ за формулою (4.21), поклавши $\alpha = \frac{1}{2}$ та замінивши у формулі x на x^2:

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Замінивши $\cos x$ за формулою (4.20), отримуємо:

$$\sqrt{1+x^2} \cdot \cos x = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^4 + o\left(x^4\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + o\left(x^4\right) = 1 - \frac{1}{3}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Формулу Тейлора можна застосовувати для обчислення границь.

Приклад 4.15. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$.

Розв'язання. Замінимо у виразі під знаком границі e^x та e^{-x} за формулою (4.18) (вираз для e^{-x} отримуємо, замінивши у (4.18) x на $-x$). Маємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) + 1 - x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

При обчисленні цієї границі ми використали те, що сума нескінченно малих вищого порядку, ніж нескінченно мала $\alpha(x)$ теж є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha(x)$ ($o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$. Крім того, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0$ за означенням $o(x^2)$.

Розглянемо приклад оцінки похибки при наближенні функції за допомогою многочлена Тейлора.

Приклад 4.16. Скільки потрібно взяти членів у формулі Маклорена для функції $f(x)=e^x$, щоб отримати многочлен, який наближує цю функцію на $[-1;1]$ з точністю до 0,001?

Розв'язання. Запишемо для даної функції залишковий член формули Маклорена у формі Лагранжа за формулою (4.16), де $\xi=\theta x$, $0<\theta<1$:

$$R_n(x)=f^{(n+1)}(\theta x)\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=e^{\theta x}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Оскільки на $[-1;1]$ $e^{\theta x}\le e^1$, $|x|\le 1$, то отримуємо нерівність

$$|R_n(x)|=e^{\theta x}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\le\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Виберемо n так, щоб $\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001$. Звідси $(n+1)!>3000$, і $n>6$. Отже, достатньо взяти 7 доданків у формулі Маклорена, щоб досягти заданої точності наближення.