Застосування диференціального числення до дослідження функцій

4.5. Застосування похідної до дослідження функцій на монотонність

Установимо необхідні та достатні умови зростання та спадання функції.

Теорема 4.7. **(Необхідні умови монотонності функції)**. Якщо диференційовна на $(a;b)$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на цьому проміжку, то $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) $\forall x\in(a;b)$.

Доведення. Нехай $f(x)$ зростає на $(a;b)$. Виберемо на цьому інтервалі довільним чином точки x та $x+\Delta x$. Тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. При $\Delta x>0$ маємо, що $x+\Delta x>x$, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)>0$. Тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$. При $\Delta x<0$ для зростаючої функції $f(x+\Delta x)<f(x)$, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)<0$. І у цьому випадку відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$. Оскільки функція $f(x)$ має похідну у кожній точці $x\in(a;b)$, то $\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\geq 0$, оскільки це границя додатної величини.

Аналогічно розглядається випадок, коли $f(x)$ спадає на $(a;b)$. У цьому випадку отримуємо, що $f'(x)\leq 0$. Теорему доведено.

З геометричної точки зору теорема 4.7 означає, що дотичні до графіка зростаючої диференційовної функції утворюють гострий кут з додатним напрямом осі Ox або ж у деяких точках вони паралельні цій осі. Для спадної функції цей кут є тупим, або дотична паралельна Ox.

Теорема 4.8. (Достатні умови монотонності функції). Якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку $(a;b)$ і $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) $\forall x\in(a;b)$, то ця функція зростає (спадає) на $(a;b)$.

Доведення. Нехай $f'(x)>0$ на $(a;b)$. Виберемо точки x_1 та x_2 з $(a;b)$ так, що $x_1<x_2$. Застосуємо до відрізка $[x_1;x_2]$ теорему Лагранжа:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1).$$

За умовою, $f'(c)>0$, $x_2-x_1>0$, тому $f(x_2)-f(x_1)>0$ і $f(x)$ зростає. Теорему доведено.

Аналогічно можна довести, що у випадку, коли $f'(x)<0$ $\forall x\in(a;b)$, то функція $f(x)$ спадає на цьому проміжку.

<u>**Означення 4.2**</u>. Точки, у яких похідна функції дорівнює нулю, називають її *стаціонарними точками*. Точки, у яких похідна функції дорівнює нулю, або не існує, називають її *критичними точками*.

Розглянуті теореми дозволяють досліджувати функції на монотонність. З них випливає, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного критичними точками.

Щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти похідну даної функції;
3) з рівняння $f'(x)=0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує, знайти критичні точки функції;
4) розділити критичними точками область визначення на інтервали, і у кожному з них визначити знак похідної, на інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

Приклад 4.17. Дослідити на монотонність функцію $f(x)=x^3-3x-4$.

Розв'язання. Задана функція є визначеною та диференційовною на всій числовій прямій. Для визначення проміжків її зростання та спадання знайдемо $f'(x)$: $f'(x)=3x^2-3$. Ми бачимо, що похідна існує в усіх точках числової прямої. Критичні точки функції, якщо вони існують – це її стаціонарні точки. Для їх визначення знайдемо корені рівняння $f'(x)=0$, тобто $3x^2-3=0$. Це значення ± 1, вони є критичними точками даної функції. Позначимо їх на числовій осі. Отримуємо інтервали $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ та $(1;+\infty)$. Визначимо знак $f'(x)$ на цих інтервалах. Безпосередньою підстановкою чисел, взятих з цих інтервалів впевнюємося, що на $(-\infty;-1)$ та $(1;+\infty)$ $f'(x)>0$, тому тут функція зростає. На $(-1;1)$ $f'(x)<0$, на цьому проміжку $f(x)$ є спадною.

Приклад 4.18. Знайти інтервали монотонності функції $y=x\ln x+3x$.

Розв'язання. Задана функція визначена на проміжку $(0;+\infty)$. Знаходимо її похідну: $y'=\ln x+4$. Знаходимо критичні точки даної функції: $\ln x+4=0 \Rightarrow \ln x=-4 \Rightarrow x=e^{-4}$. Інших критичних точок функція не має, оскільки її похідна існує на всій області її визначення. Розбиваємо область визначення функції – промінь $(0;+\infty)$ точкою $x=e^{-4}$ на інтервали $(0;e^{-4})$ та $(e^{-4};+\infty)$. Встановлюємо знак похідної на кожному з цих інтервалів, для чого визначаємо знак похідної у довільній внутрішній точці кожного інтервалу. Отримуємо, що $\forall x\in(0;e^{-4})$ $f'(x)<0$, отже, тут функція спадає. На проміжку $(e^{-4};+\infty)$ $f'(x)>0$, тобто $(e^{-4};+\infty)$ – проміжок зростання функції.

Приклад 4.19. Знайти інтервали монотонності функції $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$.

Розв'язання. Задана функція визначена та неперервна на всій числовій осі. Знайдемо її похідну: $f'(x)=2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-x\right)$. Стаціонарні точки функції знаходимо з рівняння $f'(x)=0$. Отримуємо корені цього рівняння $x_{1,2}=\pm 1$. Крім того, у точці $x=0$ похідна є нескінченною (знаменник дробу дорівнює нулю). Отже, маємо три критичні точки: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. Наносимо їх на числову пряму та отримуємо 4 інтервали: $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$. Похідна $f'(x)>0$ на $(-\infty;-1)$ та $(0;1)$, тут функція монотонно зростає. На інтервалах $(-1;0)$ та $(1;+\infty)$ $f'(x)<0$ і, відповідно, функція $f(x)$ спадає на цих проміжках.

4.6. Знаходження екстремумів функцій

Означення 4.3. Точку x_0 називають *точкою локального максимуму (мінімуму)* функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0<|x-x_0|<\delta$ точки x_0, який належить області визначення функції $f(x)$, що для всіх значень x з цього околу виконана нерівність $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$).

Означення 4.4. Точки локального максимуму та локального мінімуму називають *точками локального екстремуму*. Значення функції $f(x)$ у цих точках називають *локальними екстремумами* цієї функції (локальними мінімумами чи локальними максимумами).

Означення 4.5. Найбільше значення функції у її області визначення називають *абсолютним або глобальним максимумом*, найменше значення – відповідно *абсолютним або глобальним мінімумом*.

Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку, то локальних екстремумів вона може досягати лише у внутрішніх точках цього відрізка, а абсолютний мінімум чи максимум може досягатися також на кінцях цього відрізка.

Розглянемо умови існування локального мінімуму.

Теорема 4.9. **(Необхідна умова локального екстремуму)**. Якщо функція $f(x)$ має у точці x_0 локальний екстремум та диференційована у цій точці, то $f'(x_0)=0$.

Доведення. Оскільки за умовою точка x_0 є точкою локального екстремуму, то існує проміжок $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, у якому значення $f(x_0)$ є найбільшим або найменшим. Тоді за теоремою Ферма $f'(x_0)=0$. Теорему доведено.

Умова $f'(x_0)=0$ є необхідною, проте недостатньою для того, щоб диференційована у точці x_0 функція мала у цій точці екстремум. Наприклад, для функції $f(x)=x^3$ похідна у точці $x=0$ $f'(0)=3\cdot 0^2=0$, проте при $x=0$ екстремум відсутній. Крім того, існують функції, що не мають похідної у точках екстремуму. Наприклад, функція $f(x)=|x|$ має мінімум у точці $x=0$, проте не має похідної у цій точці. При цьому, не кожна точка, у якій функція не має похідної, є її точкою екстремуму.

Можливими точками екстремуму є її критичні точки. Розглянемо критерії, що дають змогу з множини критичних точок вибрати точки максимуму та мінімуму.

Теорема 4.10. (Перша достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, неперервної у цій точці, і нехай існує окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, у якому функція має похідну $f'(x)$, можливо, крім самої точки x_0, тоді:

1) якщо у інтервалі $(x_0-\delta; x_0)$ похідна $f'(x)>0$, а у інтервалі $(x_0; x_0+\delta)$ $f'(x)<0$, то x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$;
2) якщо у інтервалі $(x_0-\delta; x_0)$ похідна $f'(x)<0$, а у інтервалі $(x_0; x_0+\delta)$ $f'(x)>0$, то x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$;
3) якщо у обох інтервалах $(x_0-\delta; x_0)$ і $(x_0; x_0+\delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то x_0 не є точкою екстремуму функції $f(x)$.

Доведення. Нехай для деякого $\delta>0$ виконуються умови: $\forall x\in(x_0-\delta; x_0)$ $f'(x)>0$, а $\forall x\in(x_0; x_0+\delta)$ $f'(x)<0$. Тоді на інтервалі $(x_0-\delta; x_0)$ функція $f(x)$ зростає і $f(x)<f(x_0)$ для всіх x з цього інтервалу, а на $(x_0; x_0+\delta)$ функція спадає і $f(x)<f(x_0)$ при $x\in(x_0; x_0+\delta)$. Отже, існує окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, такий, що для довільного $x\neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$, тобто x_0 – точка локального максимуму функції $f(x)$. Випадки 2) та 3) доводяться аналогічно.

З теорем 4.9 та 4.10 випливає наступне правило дослідження функції на екстремум. Щоб знайти локальні екстремуми функції $f(x)$, треба:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$;
2) відзначити їх у області визначення функції;
3) дослідити знак похідної на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення критичними точками;
4) за зміною знаку $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції у цих точках. Результати дослідження доцільно звести у таблицю.

Приклад 4.20. Дослідити на екстремум функцію $f(x)=\frac{3}{4}x^4-x^3-9x^2+7$.

Розв'язання. Задана функція визначена та диференційована на всій числовій прямій, тому її критичними точками є лише стаціонарні точки – корені похідної $f'(x)=3x^3-3x^2-18x$. З рівняння $f'(x)=3x^3-3x^2-18x=0$ або $3x\left(x^2-x-6\right)=0$ знаходимо ці точки: $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=3$. Нанесемо їх на числову пряму. Отримуємо інтервали $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;3)$ та $(3;+\infty)$. Визначимо знак похідної на кожному з цих інтервалів. Для цього виберемо всередині кожного з них довільним чином внутрішню точку і підставимо її у вираз для похідної. $f'(-3)=3(-3)^3-3(-3)^2-18\cdot(-3)<0$, отже на інтервалі $(-\infty;-2)$ $f'(x)<0$. $f'(-1)=3(-1)^3-3(-1)^2-18\cdot(-1)>0$, на $(-2;0)$ $f'(x)>0$. При $x=1$ $f'(1)=3\cdot1^3-3\cdot1^2-18\cdot1<0$, на $(0;3)$ $f'(x)<0$. Якщо $x=4$, то похідна $f'(4)=3\cdot4^3-3\cdot4^2-18\cdot4>0$, на $(3;+\infty)$ $f'(x)>0$.

При переході через критичну точку $x_1=-2$ похідна змінює свій знак з мінуса на плюс, тому це точка локального мінімуму, $f(-2)=-9$. Знак похідної змінюється з плюса на мінус при переході через точку $x_2=0$, це точка локального максимуму і $f(0)=7$. Точка $x=3$ – це точка локального мінімуму, оскільки при переході через неї похідна змінює знак з мінуса на плюс, мінімум функції у цій точці $f(3)=-\dfrac{161}{4}$. Результати дослідження зведемо у таблицю.

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	↘	–9 min	↗	7 max	↘	$-161/4$ min	↗

У цій таблиці символами ↗ та ↘ позначено зростання та спадання функції на відповідних інтервалах.

Приклад 4.21. Знайти екстремуми функції $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій прямій. Знайдемо похідну $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

У точках $x=\pm1$ похідна не існує. Коренем рівняння $f'(x)=0$ є $x=0$. Отже, критичними точками функції $f(x)$ є $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. Подальше дослідження представимо у вигляді таблиці.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	–	-	+	0	–	-	+
$f(x)$	↘	$\sqrt[3]{4}$ min	↗	2 max	↘	$\sqrt[3]{4}$ min	↗

Отже, задана функція має точки локального мінімуму $x = \pm 1$, $f(\pm 1) = \sqrt[3]{4}$. У цих точках похідна функції не існує. Стаціонарна точка $x = 0$ є точкою локального максимуму, $f(0) = 2$.

Приклад 4.22. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Розв'язання. Функція визначене при всіх дійсних $x \neq 0$. Її похідна має вигляд: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$. Вона визначена на всій області визначення функції – множині $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Знайдемо стаціонарні точки:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Нанесемо знайдені у стаціонарні точки на область визначення функції. Отримаємо проміжки $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$ та $(1; +\infty)$. Результати подальшого дослідження представимо у наступній таблиці.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	-	–	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	-2 max	$\searrow$	-	$\searrow$	2 min	$\nearrow$

Отже, точка $x = -1$ є точкою локального мінімуму, $f(-1) = -2$, у точці $x = 1$ маємо локальний максимум, $f(1) = 2$.

У випадках, коли обчислення другої похідної функції є простішим, ніж дослідження знаків її першої похідної, для дослідження функції на екстремум доцільно використовувати другу достатню умову.

Теорема 4.11. (Друга достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 є стаціонарною точкою функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і у околі цієї точки існує неперервна друга похідна $f''(x)$, причому $f''(x_0) \neq 0$. Якщо при цьому $f''(x_0) > 0$, точка x_0 є точкою локального мінімуму, якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму.

Розглянемо приклад застосування цієї теореми.

Приклад 4.23. Знайти точки екстремуму функції $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - 3$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є вся числова пряма. Похідна $f'(x) = x^2 - 3x + 2$ має корені $x_1 = 1$ та $x_2 = 2$. Знайдемо другу похідну заданої функції: $f''(x) = 2x - 3$. У точці $x_1 = 1$ $f''(1) = 2 \cdot 1 - 3 < 0$, тому $x = 1$ – точка локального максимуму, оскільки $f''(2) = 2 \cdot 2 - 3 > 0$, то точка $x = 2$ – точка локального мінімуму.

Приклад 4.24. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ визначена на всій числовій прямій та періодична з періодом 2π, тому при дослідженні обмежимось відрізком довжиною у період, наприклад, $[0; 2\pi]$. Знайдемо першу похідну:

$f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$.

Знайдемо стаціонарні точки, що належать проміжку $[0; 2\pi]$.

$$2\cos x - 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x \cdot (1 - 2\sin x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0; \\ \sin x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \vee x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, n \in Z, k \in Z.$$

Коренями цього рівняння, що належать відрізку $[0; 2\pi]$, є значення $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{5\pi}{6}$, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$. З'ясуємо характер знайдених стаціонарних точок. Для цього знайдемо $f''(x)$: $f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x$. Значення другої похідної $f''(x)$ у стаціонарних точках дорівнюють:

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{\pi}{6} - 4\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = -1 - 2 < 0,$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -2 + 4 > 0,$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{5\pi}{6} - 4\cos\left(2\cdot\frac{5\pi}{6}\right) = -1 - 2 < 0,$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{3\pi}{2} - 4\cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{2}\right) = 2 + 4 > 0.$$

Таким чином, на відрізку $[0; 2\pi]$ точками локального екстремуму є $x_1 = \frac{\pi}{6}$ та $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ – точки локального максимуму, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ та $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ – точки локального мінімуму. Отже, точками екстремуму функції $f(x)$ на числовій прямій з врахуванням періодичності функції є точки $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$ – точки локального мінімуму, а точки $x_k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$, є точками локального максимуму.

Загалом дослідження функції на екстремум за другою достатньою умовою є простішим, ніж за першою, проте її не можна застосовувати у випадках, коли у критичних точках друга похідна не існує, або дорівнює нулю. Узагальненням теореми 4.11 є третя достатня умова локального екстремуму, яку використовують для стаціонарних точок, у яких $f''(x)=0$.

Теорема 4.12. (Третя достатня умова локального екстремуму). Нехай у околі стаціонарної точки x_0 існує неперервна похідна $f^{(n)}(x)$, причому $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, а всі похідні до $(n-1)$-го порядку включно дорівнюють нулю. Тоді:

1) якщо n – парне і $f^{(n)}(x_0)<0$, то $f(x)$ має у точці x_0 локальний максимум;
2) якщо n – парне і $f^{(n)}(x_0)>0$, то $f(x)$ має у точці x_0 локальний мінімум;
3) якщо n – непарне, то $f(x)$ у точці x_0 екстремуму не має.

Доведення. Використаємо формулу Тейлора для функції $f(x)$ у околі точки x_0. Оскільки всі похідні до $(n-1)$-го порядку включно у цій точці дорівнюють нулю, отримуємо, що $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$, де точка ξ знаходиться між x та x_0. Оскільки похідна $f^{(n)}(x)$ є неперервною, то існує деякий δ-окіл точки x_0, у якому числа $f^{(n)}(x_0)$ та $f^{(n)}(\xi)$ мають однакові знаки. Тому залишковий член $\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ матиме знак $f^{(n)}(x_0)$, як при $x<x_0$, так і при $x>x_0$, якщо число n – парне, і набуватиме значень, протилежних за знаком, якщо n – непарне.

Таким чином, при парному n з нерівності $f^{(n)}(x_0)<0$ випливає нерівність $f(x)-f(x_0)<0$ для довільного x з δ-околу точки x_0, тобто x_0 – точка локального максимуму, аналогічно для парного n з нерівності $f^{(n)}(x_0)>0$ випливає, що x_0 – точка локального мінімуму функції $f(x)$. При непарному n різниця $f(x)-f(x_0)$ має різні знаки на проміжках $(x_0-\delta;x_0)$ та $(x_0;x_0+\delta)$, тому x_0 у цьому випадку не є точкою екстремуму. Теорему доведено.

Теорема 4.11 є окремим випадком теореми 4.12 при $n=2$.

Приклад 4.25. Дослідити на екстремум у точці $x_0=0$ функцію $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$.

Розв'язання. Точка $x_0=0$ є стаціонарною точкою заданої функції, оскільки $f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$, $f'(0)=0$. Знайдемо похідні вищих порядків функції $f(x)$ у точці $x_0=0$:

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x,\ f''(0)=0,$$
$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x,\ f'''(0)=0,$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad f^{(4)}(0) = 4 > 0.$$

Оскільки $n = 4$ – парне і $f^{(4)}(0) > 0$, то точка $x_0 = 0$ є точкою локального мінімуму і при цьому локальний мінімум функції $f(x)$ у цій точці $f(0) = 4$.

4.7 Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$. Тоді вона повинна досягати на цьому відрізку своїх найбільшого та найменшого значень, тобто абсолютних екстремумів $f(x)$ на цьому відрізку. Будемо позначати їх відповідно $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ та $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Точки, у яких досягається найбільше та найменше значення функції на відрізку можуть бути кінцями цього відрізка, або його внутрішніми точками. Якщо точка x_0, у якій досягається абсолютний екстремум, належить $(a;b)$, то таку точку потрібно шукати серед критичних точок даної функції.

Отже, щоб знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, потрібно:

1) знайти критичні точки цієї функції, що належать інтервалу $(a;b)$;
2) обчислити значення функції у знайдених критичних точках та на кінцях відрізка – точках $x = a$ та $x = b$;
3) вибрати серед них найбільше та найменше значення.

Якщо функція неперервна у інтервалі $(a;b)$, то вона може й не мати абсолютних екстремумів у цьому інтервалі. Про їх наявність роблять висновок на основі дослідження поведінки функції на кінцях інтервалу (знаходження границь $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$) та значень функції у критичних точках, що належать $(a;b)$.

Приклад 4.26. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2$ на відрізку $[-1;3]$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки даної функції. Її похідна $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$ має корені $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ та $x_3 = 2$. На інтервалі $(-1;3)$ знаходяться критичні точки $x = 0$ та $x = 2$. Обчислимо значення функції у цих точках: $f(2) = -16$, $f(0) = 0$. На кінцях відрізка $[-1;3]$маємо $f(-1) = -7$, $f(3) = 9$. Вибравши серед знайдених значень функції найбільше та найменше, остаточно визначаємо, що $M = \max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3) = 9$, $m = \min\limits_{[-1;3]} f(x) = f(2) = -16$.

4.8 Приклади розв'язання екстремальних задач геометричного та фізичного змісту

Розглянемо приклади застосування методів диференціального числення до визначення екстремальних (найбільших та найменших) величин у задачах фізичного та геометричного змісту.

Приклад 4.27. Посудина з вертикальною стінкою висотою h стоїть на горизонтальній площині. На якій глибині потрібно розмістити отвір у цій посудині, щоб дальність витікання води з отвору була найбільшою (швидкість рідини, що витікає, за законом Торрічеллі дорівнює $\sqrt{2gx}$, де x – глибина розміщення отвору, g – прискорення вільного падіння)?

Розв'язання. Позначимо через H відстань між отвором у посудині та горизонтальною площиною, а через l – дальність витікання води з отвору. Тоді $l=\sqrt{2gx}\cdot t$, де t – час витікання води. Оскільки $H=h-x=\frac{gt^2}{2}$, то для часу витікання води отримуємо $t=\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}$. Останній вираз дає змогу записати дальність витікання води l як функцію змінної x:

$$l=l(x)=\sqrt{2gx}\cdot\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}=2\sqrt{x(h-x)},\ 0<x<h.$$

Знайдемо найбільше значення цієї функції на проміжку $(0;h)$. Для цього знайдемо похідну $l'(x)$:

$$l'(x)=\frac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}}.$$

На відкритому проміжку $(0;h)$ ця похідна є неперервною функцією. Знаходимо критичні точки функції $l(x)$, що належать $(0;h)$. З рівняння $l'(x)=0$ знаходимо стаціонарну точку $x=\frac{h}{2}\in(0;h)$. Значення $l(x)$ у цій точці $l\left(\frac{h}{2}\right)=h$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}l(x)=\lim\limits_{x\to h}l(x)=0$, то у точці $x=\frac{h}{2}$ функція $l(x)$ досягає абсолютного максимуму на $(0;h)$.

Приклад 4.28. Пряма l ділить площину на два середовища: I і II. У середовищі I точка рухається з швидкістю v_1, а у середовищі II – з швидкістю v_2. По якому шляху має рухатися ця точка, що найшвидше дістатися з заданої точки A середовища I у задану точку B середовища II?

Розв'язання. Нехай AA_1 та BB_1 – перпендикуляри до прямої l, $AA_1=a$, $BB_1=b$, відстань між точками A_1 та B_1, розташованими на прямій l, $A_1B_1=c$. У обох середовищах найкоротший шлях буде прямолінійним. Нехай він складається з відрізків AM та MB, $M\in l$. За незалежну змінну x виберемо абсцису точки M: $x=A_1M$. Виразимо через цю змінну час t, за який рухома точка перейде з положення A у положення B:

$$t = t(x) = \frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}, \ x \in (-\infty; +\infty).$$

Знайдемо першу та другу похідні функції $t(x)$:

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

$$t''(x) = \frac{a^2}{v_1\sqrt{\left(a^2 + x^2\right)^3}} + \frac{b^2}{v_2\sqrt{\left(b^2 + (c - x)^2\right)^3}}.$$

Здійснимо дослідження рівняння $t'(x) = 0$. Оскільки похідні $t'(x)$ та $t''(x)$ існують при всіх дійсних значеннях x і $t''(x) > 0$, то похідна $t'(x)$ зростає на всій числовій прямій і не може мати більше одного кореня. Оскільки $t'(0) < 0$, а $t'(c) > 0$, то рівняння $t'(x) = 0$ має єдиний корінь x_0, розташований між точками $x = 0$ та $x = c$. Йому відповідає мінімум функції $t(x)$, оскільки $t''(x_0) > 0$. Абсциси $x = 0$ та $x = c$ відповідають точкам A_1 та B_1, тому точка M розташована між цими точками.

З'ясуємо геометричний зміст отриманого результату. Абсциса x точки M має задовольняти рівнянню $t'(x) = 0$ або

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}.$$

Це рівняння рівносильне умові $\frac{A_1M}{v_1 \cdot AM} = \frac{MB_1}{v_2 \cdot MB}$ або $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$. Ми отримали відомий з фізики закон заломлення світла, згідно з яким заломлення світла відбувається так, наче промінь світла обирає найшвидший шлях з точок одного середовища у точки другого.

Приклад 4.29. Нехай в результаті серії експериментів у зв'язку з наявністю похибок вимірювання отримали n різних значень величини x: $x_1, x_2, ..., x_n$. Знайти значення величини x_0, для якого сума квадратів відхилень від отриманих значень буде найменшою.

Розв'язання. Сума квадратів вказаних відхилень виражається функцією $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2$. Вона визначена на всій числовій прямій. При цьому маємо:

$$f'(x) = 2\sum_{i=1}^{n}(x - x_i), \ f''(x) = 2n > 0.$$

З останньої нерівності випливає, що стаціонарна точка функції $f(x)$ є її точкою мінімуму. Знайдемо цю стаціонарну точку з рівняння $f'(x) = 0$, з якого отримуємо, що $nx=\sum_{i=1}^{n}x_i \Rightarrow x=x_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$. Отже значення x_0, для якого сума квадратів його відхилень від отриманих значень x_i є мінімальною, дорівнює середньому арифметичному отриманих результатів вимірювання.

Приклад 4.30. На якій висоті від підлоги потрібно розмістити електричну лампочку, щоб у даній точці підлоги освітленість була найбільшою?

Розв'язання. Будемо розглядати підлогу як горизонтальну площину. Нехай OB – відстань від підлоги до лампочки, A – задана точка підлоги, $OA=a$.

Відомо, що освітленість I визначається законом $I=k\cdot\frac{\sin\varphi}{r^2}$, де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від сили світла лампочки, $r=BA$ – відстань від лампочки до точки A. Нехай шукана висота $OB=x$, тоді $\sin\varphi=\frac{x}{r}$, тому $I=f(x)=\frac{kx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$, де $x>0$. Знаходимо $f'(x)=\frac{k\left(a^2-2x^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^{5/2}}$. З рівності $f'(x)=0$ знаходимо стаціонарні точки $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$. Оскільки $x>0$, то $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$. З фізичного змісту задачі випливає, що точка екстремуму у даній задачі єдина і це точка максимуму, тому $OB=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Приклад 4.31. Завод A потрібно з'єднати шосейною дорогою з криволінійною залізничною колією, на якій розташоване місто B. Відстань AC до залізничної колії дорівнює a, відстань CB по залізничній колії дорівнює l. Вартість перевезень одиниці вантажу на одиницю відстані залізницею дорівнює α, шосе – β. Як прокласти шосе AM до залізниці, щоб вартість перевезень від заводу до міста B була найменшою?

Розв'язання. Нехай $CM=x$При довільному положенні точки M вартість y перевезень одиниці вантажу дорівнює

$$y=y(x)=\alpha(l-x)+\beta\sqrt{x^2+a^2},\ 0\le x\le l.$$

Маємо $y'(x)=-\alpha+\frac{\beta x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\beta\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Якщо $\alpha\ge\beta$, то, враховуючи, що $0\le\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\le 1$ при $0\le x\le l$, похідна $y'(x)$ завжди від'ємна. У цьому випадку функція $y(x)$ спадає з зростанням x від нуля до l. Вона набуває свого найменшого значення при $x=l$. У цьому випадку шосе потрібно прокладати безпосередньо від міста B, причому мінімальна вартість перевезень складатиме $y(l)=\beta\sqrt{l^2+a^2}$.

Якщо $\alpha < \beta$, то з рівняння $y'(x) = 0$ знаходимо:

$$\beta\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{\alpha}{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta^2 x^2 - \alpha^2 x^2 = \alpha^2 a^2 .$$

З останнього рівняння, з врахуванням того, що $x \geq 0$, випливає, що $x = x_0 = \dfrac{\alpha a}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$ є стаціонарною точкою функції $y(x)$, яка за умови $x_0 < l$ визначає положення точки M між точками B та C, при якому витрати на перевезення будуть найменшими: $y_{\min} = y(x_0) = \alpha l + a\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$.

Приклад 4.32. З круглої колоди діаметра d потрібно вирізати стояк, який має прямокутний переріз і може сприймати найбільше навантаження. Якими повинні бути розміри стояка?

Розв'язання. Оскільки стояк є елементом конструкції, що працює на стиск, то він витримуватиме найбільше навантаження тоді, коли площа його поперечного перерізу буде найбільшою. Задача зводиться до визначення прямокутника найбільшої площі, який можна вписати у круг діаметра d . Нехай x – одна з сторін шуканого прямокутника, тоді друга сторона дорівнюватиме $\sqrt{d^2 - x^2}$, а площа $S(x) = x\sqrt{d^2 - x^2}$, $0 < x < d$. Функція $S(x)$ неперервна та диференційована на інтервалі $(0; d)$. Знайдемо її стаціонарні точки, що належать цьому інтервалу.

$$S'(x) = \frac{d^2 - 2x^2}{\sqrt{d^2 - x^2}},\ S''(x) = \frac{x\left(2x^2 - 3a^2\right)}{\sqrt{\left(d^2 - x^2\right)^3}} .$$

З рівняння $S'(x) = 0$ знаходимо $x_{1,2} = \pm\dfrac{d}{\sqrt{2}}$. На проміжку $(0; d)$маємо єдину критичну точку $x = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$. Оскільки $S''\left(\dfrac{d}{\sqrt{2}}\right) < 0$, то функція $S(x)$ досягає у цій точці максимуму. Отже, $x = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{d^2 - x^2} = \dfrac{d}{\sqrt{2}} = x$, переріз стояка повинен бути квадратом з стороною $\dfrac{d}{\sqrt{2}}$.

Приклад 4.33. Визначити розміри консервної банки заданого об'єму V, при яких на її виготовлення піде найменше матеріалу.

Розв'язання. Нехай банка має форму циліндра з радіусом основи r і висотою h. Площа повної поверхні банки $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Оскільки об'єм V банки відомий і $V = \pi r^2 h$, то $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$. Тоді площу повної поверхні банки можна записати у вигляді функції радіуса її основи:

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r},\ r > 0 .$$

$$S'(r)=2\left(2\pi r-\frac{V}{r^2}\right).\ S'(r)=0\Rightarrow 2\pi r=\frac{V}{r^2}\Rightarrow r^3=\frac{V}{2\pi}\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\ .$$

$$S''(r)=2\left(2\pi+\frac{2V}{r^3}\right)>0,\ r>0.$$

З останньої нерівності випливає, що знайдена критична точка $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ є точкою мінімуму. Обчислимо для знайденого значення r висоту банки: $h=\frac{V}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2r$. Отже, щоб площа повної поверхні банки і, відповідно, витрати матеріалу на її виготовлення були мінімальними, потрібно, щоб її висота дорівнювала діаметру дна.

Приклад 4.34. З круга радіуса R потрібно вирізати сектор так, щоб з нього можна було виготовити конусоподібний фільтр з максимальним об'ємом.

Розв'язання. Нехай x – центральний кут вирізаного сектора, $V(x)$ – об'єм фільтра. Оскільки об'єм фільтра – величина невід'ємна і при $x\to 0$ або $x\to 2\pi$ $V(x)\to 0$, то існує таке значення x, при якому цей об'єм найбільший.

При склеюванні сектора утворюється конус, твірна якого дорівнює R, довжина кола основи дорівнює $R\cdot x$, радіус основи $r=\frac{R\cdot x}{2\pi}$, висота конуса $h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}$. Тоді об'єм конуса виражається через змінну x наступним чином:

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2},\ 0<x<2\pi.$$

Знаходимо похідну отриманої функції $V(x)$:

$$V'(x)=\frac{R^3}{24\pi^2}\left(2x\sqrt{4\pi^2-x^2}-\frac{x^3}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}\right)=\frac{R^3x\left(8\pi^2-3x^2\right)}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2-x^2}}.$$

З рівняння $V'(x)=0$ отримуємо три стаціонарні точки функції $V(x)$: $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Проміжку $(0;2\pi)$ належить лише одна з них – $x=\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Оскільки на цьому проміжку функція $V(x)$ досягає максимуму, то він досягається при центральному куті вирізаного сектора $x=\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

4.9 Опуклість графіка функції. Точки перегину

Означення 4.6. Графік диференційованої на $(a;b)$ функції $y=f(x)$ називають *опуклим вниз* на цьому інтервалі, якщо він розташований вище будь-якої дотичної до цього графіка на $(a;b)$.

Означення 4.7. Графік диференційованої на $(a;b)$ функції $y=f(x)$ називають *опуклим вгору* на цьому інтервалі, якщо він розташований нижче будь-якої дотичної до цього графіка на $(a;b)$.

Означення 4.8. Точку на графіку функції $y=f(x)$, що відокремлює його частини з різною випуклістю, називають *точкою перегину*.

Інтервали, на яких графік функції випуклий вгору та випуклий вниз знаходять з допомогою наступної теореми.

Теорема 4.13. Якщо для функції $y=f(x)$ у всіх точках інтервалу $(a;b)$ друга похідна $f''(x)<0$, то графік функції на цьому інтервалі випуклий вгору. Якщо ж $f''(x)>0$ на $(a;b)$, то графік функції опуклий вниз.

Доведення. Нехай $\forall x\in(a;b)\ f''(x)<0$. Виберемо на графіку функції $y=f(x)$ довільну точку M з абсцисою $x_0\in(a;b)$ і проведемо через цю точку дотичну. Рівняння цієї дотичної матиме вигляд: $\tilde{y}-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, де $\tilde{y}$ – значення y на дотичній. Звідси $\tilde{y}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Тоді отримуємо:

$$y-\tilde{y}=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0). \tag{4.23}$$

За теоремою Лагранжа $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, де точка c знаходиться між x та x_0. Тому рівність (4.23) можна записати у вигляді:

$$y-\tilde{y}=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=\left(f'(c)-f'(x_0)\right)(x-x_0). \tag{4.24}$$

До різниці $f'(c)-f'(x_0)$ у правій частині рівності (4.24) знову застосуємо теорему Лагранжа. Отримаємо: $f'(c)-f'(x_0)=f''(c_1)(x-x_0)$, де точка c_1 розташована між x_0 та c. Отже, маємо:

$$y-\tilde{y}=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0). \tag{4.25}$$

Розглянемо можливі випадки розташування точок x_0, x, c_1, c. Можливі два таких випадки.

Нехай $x_0<c_1<c<x$. Тоді $c-x_0>0$, $x-x_0>0$. При $f''(c_1)<0$ отримуємо, що $y-\tilde{y}<0$. При $x<c<c_1<x_0$ маємо $x-x_0<0$, $c-x_0<0$. Якщо $f''(c_1)<0$, то знову отримуємо $y-\tilde{y}<0$.

Отже, у обох випадках значення y на графіку функції менше, ніж відповідне значення $\tilde{y}$ на дотичній, тобто графік функції $y=f(x)$ $\forall x\in(a;b)$ розташований нижче дотичної до графіка цієї функції, тобто цей графік випуклий вгору. Аналогічно можна довести, що при $f''(x)>0$ графік функції випуклий вниз. Теорему доведено.

Для знаходження точок перегину графіка функції використовують наступну теорему.

Теорема 4.14. **(Достатня умова існування точок перегину**). Нехай x_0 – точка, у якій $f''(x)$ дорівнює нулю, або не існує. Якщо при переході через цю точку $f''(x)$ змінює свій знак, то точка графіка функції $y = f(x)$ з абсцисою x_0 є точкою перегину.

Доведення. Нехай $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Це означає, що зліва від точки з абсцисою x_0 графік функції опуклий вгору, а справа від неї – опуклий вниз, тобто точка $(x_0; f(x_0))$ графіка функції є точкою перегину. Аналогічно установлюємо, що коли $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то $(x_0; f(x_0))$ – точка перегину графіка функції. Теорему доведено.

Приклад 4.35. Дослідити на опуклість та визначити точки перегину графіка функції $y = x^5 - x + 2$.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій прямій. Знайдемо її другу похідну. $y'(x) = 5x^4 - 1$, $y''(x) = 20x^3$. Друга похідна існує у всіх точках числової прямої. З рівняння $y'' = 0$ знаходимо $x = 0$. При $x < 0$ $y'' < 0$, тут графік функції опуклий вгору. При $x > 0$ $y'' > 0$, тому при $x < 0$ графік опуклий вниз. Точка з абсцисою $x = 0$ є точкою перегину, її ордината $y(0) = 2$.

4.10. Загальна схема дослідження функції

Розглянемо загальну схему дослідження функції $y = f(x)$ та побудови її графіка. Вона складається з наступних етапів.

1. Знайти область визначення функції.
2. Якщо функція має точки розриву, то з'ясувати їх характер, а також дослідити поведінку функції на межах області визначення (скінченних чи нескінченних). Знайти асимптоти функції (вертикальні, горизонтальні, похилі).
3. Дослідити функцію на парність. Якщо функція є парною або непарною, то подальше дослідження доцільно виконувати лише для невід'ємних значень аргументу. Побудувавши графік для цих значень аргументу, потім добудувати його для від'ємних значень аргументу симетрично осі Oy для парної функції і симетрично відносно початку координат – для непарної функції.
4. Дослідити функцію на періодичність. Якщо функція є періодичною, то достатньо провести її дослідження на будь-якому відрізку, довжина якого дорівнює періоду функції і, побудувавши графік на цьому відрізку, продовжити його на всю область визначення функції.
5. Знайти нулі функції (корені рівняння $f(x) = 0$) та інтервали знакосталості функції (інтервали, на яких функція зберігає знак: є додатною, або від'ємною). Область визначення розбивається на інтервали знакосталості нулями та точками розриву функції.

6. Знайти локальні екстремуми та проміжки зростання та спадання функції.
7. Знайти проміжки, на яких графік функції зберігає напрям опуклості, а також точки перегину графіка.
8. За результатами виконаного дослідження побудувати графік функції.