Практичне заняття № 4. Послідовності. Границі послідовності.

Приклад 1. Для заданої послідовності записати її перші чотири члени:

а) $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$; б) $x_1 = \begin{cases} -n^2, n - \text{непарне}, \\ \dfrac{n-1}{n}, n - \text{парне}; \end{cases}$ в) $x_1 = 1; x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2} + 1, n > 1$.

Розв'язання. Підставимо у вирази для x_n послідовно $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$.

а) $x_1 = \dfrac{1}{1 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{6}$. $x_3 = \dfrac{1}{3 \cdot 4} = \dfrac{1}{12}$, $x_4 = \dfrac{1}{4 \cdot 5} = \dfrac{1}{20}$:

б) $n = 1 -$непарне, $x_1 = -1^2 = -1$, $n = 2$ – парне, $x_2 = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $n = 3$ – непарне, $x_3 = -3^2 = 9$, $n = 4$ – парне, $x_4 = \dfrac{4-1}{4} = 3$;

в) послідовність задана рекурентним способом, $x_1 = 1$ – задане, $x_2 = \dfrac{x_1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$,

$x_3 = \dfrac{x_2}{2} + 1 = \dfrac{3/2}{2} + 1 = \dfrac{7}{4}$, $x_4 = \dfrac{x_3}{2} + 1 = \dfrac{7/4}{2} + 1 = \dfrac{15}{8}$.

Приклад 2. Довести обмеженість послідовностей: а) $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$; б) $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$.

Розв'язання. а) $x_n = \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{\left(n^2+1\right)-1}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1}$. З останньої рівності випливає, що $\frac{1}{2} < x_n < 1$, тобто $\left|x_n\right| < 1$, тому послідовність $\left\{x_n\right\}$ обмежена.

б) $\left|x_n\right| = \left|\sin\frac{n\pi}{4}\right| \le 1$. Послідовність обмежена.

Приклад 3. Довести, що послідовність $\left\{x_n\right\}$ зростає, якщо $x_n = \frac{2n-1}{3n+2}$.

Розв'язання. Покажемо, що $x_{n+1} > x_n$, тобто $x_{n+1} - x_n > 0$. $x_{n+1} = \frac{2\left(n+1\right)-1}{3\left(n+1\right)+2} = \frac{2n+1}{3n+5}$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{\left(2n+1\right)\left(3n+2\right)-\left(2n-1\right)\left(3n+5\right)}{\left(3n+5\right)\left(3n+2\right)} = \frac{7}{\left(3n+5\right)\left(3n+2\right)} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отже, $x_{n+1} > x_n$, послідовність $\left\{x_n\right\}$ зростає.

Приклад 4. Довести, що послідовність $\left\{x_n\right\}$ спадає, якщо $x_n = \frac{2n+1}{6n-5}$.

Розв'язання. Для спадної послідовності $x_{n+1} < x_n$, тому $x_{n+1} - x_n < 0$. Для заданої послідовності

$$x_{n+1} = \frac{2\left(n+1\right)+1}{6\left(n+1\right)-5} = \frac{2n+3}{6n+1}.$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+3}{6n+1} - \frac{2n+1}{6n-5} = \frac{\left(2n+3\right)\left(6n-5\right)-\left(2n+1\right)\left(6n+1\right)}{\left(6n+1\right)\left(6n-5\right)} = -\frac{16}{\left(6n+1\right)\left(6n-5\right)} < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $x_{n+1} - x_n < 0$, то $x_{n+1} < x_n$, послідовність $\left\{x_n\right\}$ спадає.

Приклад 5. Довести, що послідовність $x_1 = 1, x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 1, n > 1$ зростає.

Розв'язання. При $n > 1$ маємо: $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n}{2} + 1 - x_n = 1 - \dfrac{x_n}{2}$. Для доведення зростання заданої послідовності покажемо, що $x_{n+1} - x_n = 1 - \dfrac{x_n}{2} > 0$. Для цього покажемо, що $x_n < 2$. Використаємо метод математичної індукції. $x_1 = 1 < 2$. Нехай для довільного $n = k$ виконується нерівність $x_{k+1} = \dfrac{x_k}{2} + 1 < 2$. Покажемо, що звідси випливає істинність нерівності і при $n = k + 1$, тобто $x_{k+2} = \dfrac{x_{k+1}}{2} + 1 < 2$. Дійсно, при $x_{k+1} < 2$ отримуємо, що $x_{k+2} = \dfrac{x_{k+1}}{2} + 1 < \dfrac{2}{2} + 1 = 2$. Отже, $x_{k+1} < 2 \Rightarrow x_{k+2} < 2$. Згідно з методом математичної індукції $x_n < 2 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Отже, $x_{n+1} - x_n = 1 - \dfrac{x_n}{2} > 0$, тому послідовність зростає.

Приклад 6. Довести, що число a є границею послідовності $\{x_n\}$, якщо а) $x_n = \dfrac{2n+1}{2n+5}$, $a = 1$;

б) $x_n = \dfrac{1}{n!}$, $a = 0$.

Розв'язання. Для доведення того, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, використаємо означення границі послідовності:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \; |x_n - a| < \varepsilon$$

а) $\left|x_n - a\right| = \left|\frac{2n+1}{2n+5} - 1\right| = \left|\frac{2n+1-(2n+5)}{2n+5}\right| = \left|\frac{-4}{2n+5}\right| = \frac{4}{2n+5} < \varepsilon$.

З цієї нерівності визначимо такий номер n_0, що $\forall n > n_0$ $\frac{4}{2n+5} < \varepsilon$. Отримуємо:

$$\frac{4}{2n+5} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4-(2n+5)\varepsilon}{2n+5} < 0.$$

Оскільки знаменник $2n+5>0\ \forall n \in \mathbb{N}$, то $4-(2n+5)\varepsilon < 0$. Звідси $2n+5 > \frac{4}{\varepsilon}$, $n > \frac{2}{\varepsilon} - \frac{5}{2}$. З цієї нерівності випливає, що за n_0 можна вибрати будь-яке натуральне число більше $\frac{2}{\varepsilon} - \frac{5}{2}$, наприклад, $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} - \frac{5}{2}\right] + 1$. Тоді $\forall n > n_0$ $\left|x_n - a\right| = \left|\frac{2n+1}{2n+5} - 1\right| < \varepsilon$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+5} = 1$.

б) Потрібно довести, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \left|\frac{1}{n!} - 0\right| = \frac{1}{n!} < \varepsilon \quad \forall n > n_0$.

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} < \frac{1}{2\cdot 2 \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Останню нерівність отримуємо, замінивши у знаменнику дробу $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ кожен з множників 2, 3,…, n на 2. При цьому ми зменшуємо знаменник дробу і збільшуємо дріб.

З нерівності $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ знаходимо, що $2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1$. За n_0 виберемо будь-яке натуральне число більше $\log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1$, наприклад, $n_0 = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 2$. Тоді $\forall n > n_0$ $|x_n - a| = \left| \frac{1}{n!} - 0 \right| < \varepsilon$, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

До **основних формул**, що використовуються при обчисленні границь послідовностей, відносять наступні:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, |a| < 1 \\ +\infty, a > 1, \\ \text{не існує}, a \le -1. \end{cases}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a = \text{const}$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0, \quad |a| > 1$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a = \text{const}$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{\alpha_n} = \infty, c - \text{const}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0,$ якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e, \quad e=2,718281...$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$, де α_n – нескінченно мала послідовність.

Розглянемо типові приклади обчислення границь послідовностей.

Приклад 7. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+4}{n^2+2n-1}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник та знаменник дробу на n^2 (старший степінь у чисельнику та знаменнику дробу). Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

При $n\to\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ (це границі виду $\dfrac{c}{\infty}=0, c=\mathrm{const}$). Тому, використавши теореми про границі суми, різниці та частки послідовностей, маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2n-1}=\frac{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0+0}{1+0+0}=3.$$

Приклад 8. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n^3+7n-4}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник та знаменник дробу на n^3 (старший степінь у чисельнику та знаменнику дробу). Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n^3+7n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{1+\frac{7}{n^2}-\frac{4}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^3}}=\frac{0+0}{1+0-0}=0.$$

Приклад 9. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+2n+3}{n^2+3n+1}$.

Розв'язання. Поділивши чисельник та знаменник дробу на n^4, знаходимо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n+3}{n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=\frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^4}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty.$$

Зауваження. Нехай загальний член послідовності – це дріб, у чисельнику та знаменнику якого знаходяться многочлени або ірраціональні вирази. Нехай m – старший степінь чисельника, k – старший степінь знаменника. Тоді при $m = k$ границя послідовності дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника, при $m < k$ ця границя дорівнює нулю, при $m > k$ вона дорівнює нескінченності.

Приклад 10. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{2n^6+3n^5-2n}-5n+1}{4n^2+2\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Старший степінь чисельника $m = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$, старший степінь знаменника $k = 2$. Для даної послідовності $m < k$, тому границя дорівнює нулю.

Приклад 11. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+2}{6n^2+7}$.

Розв'язання. Старший степінь чисельника $m = 2$, старший степінь знаменника $k = 2$. Маємо $m = k$, тому границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника, тобто при n^2: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+2}{6n^2+7} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Приклад 12. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+...+n}{5n^3+1}$.

Розв'язання. Сума перших n натуральних чисел $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Отже, отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{5n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{5n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2(5n^3+1)}.$$

Старший степінь чисельника $m=2$, старший степінь знаменника $k=3$. Оскільки $m<k$, то границя даної послідовності дорівнює нулю.

Приклад 13. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3}{2n^2+2}-\dfrac{5n^2-1}{5n+1}\right)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{2n^2+2}=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-1}{5n+1}=\infty$. Маємо так звану невизначеність виду $(\infty-\infty)$. Виконаємо віднімання дробів у дужках.

$$\frac{2n^3}{2n^2+2}-\frac{5n^2-1}{5n+1}=\frac{2n^3(5n+1)-(5n^2-1)(2n^2+2)}{(2n^2+2)(5n+1)}=\frac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+2}.$$

Отже, отримали $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3}{2n^2+2}-\dfrac{5n^2-1}{5n+1}\right)=\lim\dfrac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+2}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$.

Приклад 14. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)$.

Розв'язання. Помножимо та поділимо вираз $\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}$ на спряжений до нього вираз $\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}$. Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)-(n+1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}}=+\infty,$$

оскільки старший степінь чисельника $m=1$, старший степінь знаменника $k=\dfrac{1}{2}$, тобто $m>k$.

Приклад 15. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n!\cdot(n+1)-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n!\cdot(n+1-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Розглянемо обчислення границь послідовностей, пов'язаних з використанням числа «e». Воно ґрунтується на застосуванні формули (9): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e,\quad e=2,718281...$ Тут при $n\to\infty$ отримуємо так звану невизначеність виду $\left(1^\infty\right)$.

Формулу (9) часто застосовують у вигляді формули (10): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$, де α_n – нескінченно мала послідовність, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

Приклад 16. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n=\left(1^\infty\right)$. Маємо невизначеність виду $\left(1^\infty\right)$, тому потрібно застосувати формулу (10): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$, де α_n – нескінченно мала послідовність. У нашому прикладі $\alpha_n=\dfrac{3}{n}$. Отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}\cdot 3}=e^3,$$

оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$.

Приклад 17. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}$.

Розв'язання. Маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}=\left(1^\infty\right)$, отже, потрібно застосувати формулу (10). Для цього виконаємо наступне перетворення загального члена послідовності:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{n-1}{n+4}-1\right)\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{5}{n+4}\right)\right)^{2n+3}.$$

Тут $\alpha_n=-\dfrac{5}{n+4}$. Виділимо вираз виду $\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{5}{n+4}\right)\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{5}{n+4}\right)\right)^{-\frac{n+4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{n+4}\right)\cdot(2n+3)}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5(2n+3)}{n+4}}=e^{-10}.$$

Домашнє завдання:

1. Довести обмеженість послідовностей: а) $x_n=\dfrac{2n-1}{\sqrt{n^2+4}}$; б) $x_n=2^{\cos n}$.

2. Довести, що послідовність $x_n=n^2-2n$ є необмеженою.

3. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5\sqrt{n^2+2}+4n}{2n+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n\sqrt{n}+3n-1}{\sqrt{4n^5+2}-\sqrt{n}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+2n^2-3}{5n+1}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-1}{3n^2+2n}\right)^{4n^2}$

Послідовності

<u>Основні формули,</u> що використовуються при обчисленні границь послідовностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0, |a|<1\\ +\infty, a>1,\\ \text{не існує}, a\le -1.\end{cases}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0, \alpha>0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n}}{n!}=0,\ a=\text{const}.$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^{n}}=0, \quad |a|>1.$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, a=\text{const}.$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c}{x_n}=\left(\dfrac{c}{0}\right)=\infty, c-\text{const}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c}{x_n}=\left(\dfrac{c}{\infty}\right)=0,, c-\text{const}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e, \quad e=2,718281...$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$, де α_n – нескінченно мала послідовність.

Послідовність $\{x_n\}$ називають **<u>обмеженою</u>**, якщо $\exists M>0:\forall n\in\mathbb{N}\ |x_n|\le M$. (існує таке додатне число M, що для будь-якого номера n модуль n-го члена послідовності не перевищує M).

Послідовність називають **необмеженою**, якщо $\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \left|x_{n_0}\right| > M$ (для будь-якого додатного числа M існує такий номер n_0, що модуль члена послідовності з цим номером більший M).

Приклади розв'язання задач

. **I. Дослідити послідовність на обмеженість**

1. $x_n = \dfrac{8n}{2n-1}$.

Розв'язання. $\left|x_n\right| = \dfrac{8n}{2n-1} = \dfrac{4\cdot(2n-1)+4}{2n-1} = 4 + \dfrac{4}{2n-1} \le 4+4=8$. $\left|x_n\right| \le 8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тому послідовність є обмеженою.

2. $x_n = (-1)^n n^2$.

Розв'язання. Доведемо, що послідовність $\{x_n\}$ є необмеженою. Для цього покажемо, що для будь-якого додатного числа M існує такий номер n_0, що модуль члена послідовності з цим номером більший M. $\left|x_n\right| = n^2 > M \Rightarrow n > \sqrt{M}$. Виберемо у якості n_0 будь-який номер, що перевищує $\sqrt{M}$, наприклад, $n_0 = \left[\sqrt{M}\right]+1$. Тоді $\left|x_{n_0}\right| > M$, послідовність необмежена.

3. $x_n = \sqrt{n^2+8} - \sqrt{n^2+3}$.

Розв'язання. Оскільки $x_n > 0$, то отримуємо:

$$\left|x_n\right| = x_n = \sqrt{n^2+8} - \sqrt{n^2+3} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+8} - \sqrt{n^2+3}\right)\left(\sqrt{n^2+8} + \sqrt{n^2+3}\right)}{\sqrt{n^2+8} + \sqrt{n^2+3}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{n^2+8} + \sqrt{n^2+3}} < \frac{5}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \frac{5}{2n} \le \frac{5}{2}.$$

Отже, згідно з означенням послідовність обмежена.

4. $x_n = \dfrac{n^3}{4n+1}$.

Розв'язання. Оскільки $x_n > 0$, то $\left|x_n\right| = x_n = \dfrac{n^3}{4n+1}$. Покажемо, що $4n+1 < n^2$, $n > 4$. З останньої нерівності випливає, що $n^2 - 4n - 1 > 0$. Дійсно, $n^2 - 4n - 1 = (n-2)^2 - 5 > 0$ при $n > 4$. Отже, $4n+1 < n^2$, звідси $\dfrac{n^3}{4n+1} > \dfrac{n^3}{n^2} = n$. Для довільного як завгодно великого $M > 0$ завжди можна вибрати номер $n_0 > M$, тоді $\left|x_{n_0}\right| = \dfrac{n_0^{\,3}}{4n_0+1} > n_0 > M$, послідовність необмежена.

5. $x_n = \arcsin\dfrac{n}{2n+3}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{n}{2n+3} > 0$, то $|x_n| = x_n = \arcsin\frac{n}{2n+3} \le \frac{\pi}{2} \; \forall n \in \mathbb{N}$, тому послідовність є обмеженою.

ІІ. Знайти наступні границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\sqrt[4]{16n^8+3n^2-2n+1}+6n^2-n+1}{4n^2+3}$.

Розв'язання. Старший степінь чисельника $n^{\frac{8}{4}} = n^2$, старший степінь знаменника також n^2. Отже, границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt[4]{16n^8+3n^2-2n+1}+6n^2-n+1}{4n^2+3} =$$
$$= \frac{5\sqrt[4]{16}+6}{4} = \frac{16}{4} = 4.$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{2n^2+9}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{2n^2+9}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n^2+9}=\dfrac{1/2}{2}=\dfrac{1}{4}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}}=\frac{5}{2}.$$

Тут ми використали формулу суми n членів геометричної прогресії $b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots+b_1q^{n-1}=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$, а також формулу 1) з основних формул ($\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5^n}=0$).

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{2^n+3^n}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник та знаменник дробу на степінь з найбільшою основою, тобто на 4^n. Отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty .$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n\cdot n!+(n+2)!}{3\cdot(n+1)!}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot n!+(n+2)!}{3\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot\left(2n+(n+1)(n+2)\right)}{3n!\cdot(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+2}{3n+3}=\infty,$$

оскільки старший степінь чисельника більший, ніж старший степінь знаменника.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+1}{5n-2}\right)^{3n+2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $(1)^{\infty}$, тому використовуємо формулу 10). Для цього дріб у дужках приведемо до вигляду $1+\alpha_n$, де α_n – нескінченно мала послідовність. Для цього до дробу у основі степеня додамо та віднімемо 1:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+1}{5n-2}\right)^{3n+2} = (1)^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{5n+1}{5n-2}-1\right)\right)^{3n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{5n-2}\right)^{\frac{5n-2}{3}\cdot\frac{3}{5n-2}\cdot(3n+2)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(3n+2)}{5n-2}} =$$

$$= e^{\frac{9}{5}}.$$

Приклади для самостійного розв'язання.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5\sqrt{25n^2+3n+2}}{9n+4}$. (Відповідь: $\dfrac{28}{9}$).
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{n^5}-2n^3+5n^2-4\sqrt{n}+1}{n^5+5}$. (Відповідь: 0).
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^{2n}$. (Відповідь: e^{16}).

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+3^2+...+3^n}{3^n}$. (Відповідь: $\dfrac{3}{2}$).

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$. (Відповідь: 0).

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-3\cdot n!}{2n^2\cdot n!}$. (Відповідь: $\dfrac{1}{2}$).

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^6+4n^5-1}{n\cdot\sqrt[3]{n^{12}+3n^2+1}+8n^3+3n+2}$. (Відповідь: ∞).

Практичне заняття на тему: «Обчислення границь функцій». Частина 1.

При обчисленні границь, коли $x\to x_0$, підстановка замість змінної x числа x_0 досить часто приводить до виразів виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$,

$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, $\left(1^{\infty}\right)$, $(\infty)^{0}$, $\left(0^{0}\right)$. Такі вирази називають *невизначеностями,* а перетворення цих виразів, що дозволяють обчислити границю – *розкриттям невизначеностей*.

Метод знаходження тієї чи іншої границі вибираємо у залежності від типу невизначеності у даному конкретному випадку.

Таблиця основних формул, пов'язаних з обчисленням границь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k. \tag{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}=e. \tag{3}$$

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)^{\varphi(x)}=\left(\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}. \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=1. \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \qquad (6)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}. \qquad (7)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \qquad (8)$$

Розглянемо приклади розкриття невизначеностей у випадках, що найчастіше зустрічаються на практиці.

1. Невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ задана відношенням двох многочленів або ірраціональних виразів.

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x-3}{5x^4+2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, задану відношенням многочленів. Старший степінь цих многочленів – четвертий, тому поділимо чисельник та знаменник дробу під знаком границі на x^4. Отримуємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-3}{5x^4+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}{5+\dfrac{2}{x^4}}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{3}{x^4}}{5+\frac{2}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{3}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{2}{x^4}\right)}=$$

$$=\frac{0}{5}=0.$$

При знаходженні аналогічних границь доцільно використовувати наступне правило. Якщо степінь чисельника дробу є меншою, ніж степінь знаменника, то границя дорівнює нулю; якщо степінь чисельника дорівнює степені знаменника, то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника; якщо степінь чисельника більший за степінь знаменника, то границя дробу дорівнює нескінченності.

Приклад 2. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[5]{x}+1}{\sqrt[3]{8x^2+5}-\sqrt{2x-1}}.$$

Розв'язання. У цьому прикладі вираз під знаком границі є відношенням ірраціональних функцій, утворюючи при $x\to\infty$ невизначеність виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Старший степінь чисельника дорівнює $\dfrac{2}{3}$ (доданок $\sqrt[3]{x^2}$), старший степінь знаменника також дорівнює $\dfrac{2}{3}$ ($\sqrt[3]{8x^2+5}$), тому поділимо чисельник та знаменник дробу на $x^{2/3}$. Отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[5]{x}+1}{\sqrt[3]{8x^2+5}-\sqrt{2x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^{1/2}}{x^{2/3}}+\dfrac{x^{2/3}}{x^{2/3}}-\dfrac{2x^{1/5}}{x^{2/3}}}{\left(\dfrac{8x^2+5}{x^2}\right)^{1/3}-\left(\dfrac{(2x-1)^3}{x^4}\right)^{1/6}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}.$$

2. Невизначеність виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ при $x\to x_0$ задана відношенням двох многочленів. У цьому випадку потрібно розкласти

чисельник і знаменник на множники . Оскільки при $x = x_0$ чисельник та знаменник дробу дорівнюють нулю, то у їхньому розкладу на множники присутній множник $\left(x - x_0\right)^k, k \in \mathbb{N}$. Скорочення на степінь $\left(x - x_0\right)$ можливе, оскільки $x \to x_0$, але $x \neq x_0$. Після такого скорочення невизначеність усувається.

Приклад 3.

Знайти $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x - 4}$.

Розв’язання. Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу під знаком границі. Маємо:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2\left(x + 2\right) - \left(x + 2\right) =$$

$$= \left(x + 2\right)\left(x^2 - 1\right) = \left(x + 2\right)\left(x - 1\right)\left(x + 1\right).$$

Коренями квадратного тричлена x^2+3x-4 є $x_1=-4$, $x_2=1$, тому його розклад на множники має вигляд:

$$x^2+3x-4=(x+4)(x-1).$$

Підставивши знайдені розклади на множники у задану границю, отримуємо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)(x+1)}{(x+4)(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x+1)}{x+4}=\frac{3\cdot 2}{5}=\frac{6}{5}.$$

3. Невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x \to x_0$ задана відношенням ірраціональних виразів. Для розкриття таких невизначеностей звичайно позбавляються від ірраціональності у чисельнику або знаменнику.

Приклад 4. Обчислити

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+10}-3}.$$

Розв’язання. Позбудемося ірраціональності у знаменнику. Маємо:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+10}-3}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+10}+3\right)}{\left(\sqrt{x+10}-3\right)\left(\sqrt{x+10}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+10}+3\right)}{\left(\sqrt{x+10}\right)^{2}-3^{2}}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+10}+3\right)}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\left(\sqrt{x+10}+3\right)=3+3=6.$$

Від ірраціональності можна позбавитися також шляхом введення нової змінної.

Приклад 5. Обчислити $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Щоб позбутися ірраціональності, виконаємо заміну змінної $x=t^{15}$. При $x\to -1$ $t\to -1$, $\sqrt[3]{x}=t^5$, $\sqrt[5]{x}=t^3$. Отримаємо:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\lim_{t\to -1}\frac{1+t^5}{1+t^3}.$$

$t=-1$ –корінь чисельника та знаменника дробу, їх можна поділити націло на $t+1$. Маємо:

$$t^5+1=(t+1)\left(t^4-t^3+t^2-t+1\right),$$
$$t^3+1=(t+1)(t^2-t+1).$$

Підставивши ці вирази у останню границю, отримуємо:

$$\lim_{x\to-1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\lim_{t\to-1}\frac{1+t^5}{1+t^3}=$$
$$=\lim_{t\to-1}\frac{(t+1)\left(t^4-t^3+t^2-t+1\right)}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)}=$$
$$=\lim_{t\to-1}\frac{t^4-t^3+t^2-t+1}{t^2-t+1}=\frac{5}{3}.$$

4. Невизначеність виду $\infty-\infty$ задана різницею раціональних дробів або ірраціональних виразів.

Приклад 6. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\infty-\infty$, утворену різницею раціональних дробів. Виконаємо віднімання:

$$\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}=$$

$$=\frac{x^3(3x+2)-x^2\left(3x^2-4\right)}{\left(3x^2-4\right)(3x+2)}=$$

$$=\frac{3x^4+2x^3-3x^4+4x^2}{9x^3-12x+6x^2-8}.$$

Підставивши знайдену різницю дробів у границю,отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^3-3x^4+4x^2}{9x^3-12x+6x^2-8}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{9+\frac{6}{x}-\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}}=\frac{2}{9}.$$

Приклад 7. Обчислити $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $(\infty - \infty)$, утворену різницею виразів, що містять ірраціональність. Розкриємо дану невизначеність:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\cdot\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

5. Невизначеності виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, задані виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкриваються за допомогою першої важливої границі (1).

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення виразу у чисельнику дробу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3\cos x}=$$

$$=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}\times$$

$$\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

При обчисленні цієї границі було використано формулу (2):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k \text{ при } k=\frac{1}{2}.$$

Приклад 9. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg} 2x\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)$.

Розв’язання. У даному прикладі при підстановці замість x значення $\pi/4$ отримуємо невизначеність $(\infty\cdot 0)$. Перетворимо її до вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для цього задану границю запишемо у вигляді:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\operatorname{ctg} 2x}.$$

Виконаємо заміну змінної $x-\frac{\pi}{4}=t$. Тоді при $x\to\frac{\pi}{4}$ $t\to 0$, тригонометричні вирази у границі набувають вигляду:

$$\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} 2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \operatorname{ctg}\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} 2t.$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t.$$

Підставимо ці вирази у границю:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}\,t}{\operatorname{tg}\,2t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\sin t}{\cos t}}{\dfrac{\sin 2t}{\cos 2t}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\sin 2t}\times$$

$$\times\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t}{\cos t}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 2t}{t}}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Приклад 10. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

Розв'язання. Виконаємо заміну змінної $\arcsin x = t$, $x = \sin t$. При $x \to 0$ $t \to 0$. Задана границя набуває вигляду:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

7. При розкритті невизначеності виду $\left(1^{\infty}\right)$ використовують другу важливу границю (3).

Приклад 11. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{4x-5}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{2x+1}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4x-5\right)=\infty$, то обчислення даної границі зводиться до знаходження невизначеності $\left(1^{\infty}\right)$. Застосуємо другу важливу границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$. Для цього представимо дріб $\dfrac{2x+3}{2x+1}$ у вигляді суми одиниці та нескінченно малої величини:

$$\frac{2x+3}{2x+2}=1+\left(\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)=$$

$$=1+\frac{2x+3-2x-1}{2x+1}=$$

$$=1+\frac{2}{2x+1}.$$

Отримуємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^{4x-5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{4x-5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2(4x-5)}{2x+1}}.$$

Тут у показнику степеня ми виділили величину $\dfrac{2x+1}{2}$, обернену нескінченно малій, що додається до одиниці у основі степеня.

Застосовуючи формулу (4), знаходимо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{4x-5} =$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(4x-5)}{2x+1}} =$$

$$= e^{\frac{8}{2}} = e^{4}$$

Приклад 12. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. Підставивши у вираз під знаком границі $x=0$, отримуємо невизначеність $\left(1^{\infty}\right)$, тому для розв'язання прикладу використаємо другу важливу границю. Для цього представимо вираз у основі степеня у вигляді суми одиниці та нескінченно малої і виділимо у показнику степеня величину, обернену цій нескінченно малій:

Використовуючи формулу (4), отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}} =$$

$$= e^{-2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{x}}{x}\right)^2} = e^{-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

.

8. При розкритті невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ у випадках, коли під знаком границі знаходяться логарифмічні або показникові функції, доцільно використовувати формули (5) – (8).

Приклад 13. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}$.

Розв'язання. Підстановка у вираз під знаком границі значення $x=0$ приводить до невизначеності $\frac{0}{0}$. Оскільки під знаком границі знаходиться показникова функція, то для обчислення границі можна використати формулу (6). Зробимо заміну $ax=t$, $x=\frac{t}{a}$. При $x\to 0$ $t\to 0$. Отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t/a}=$$

$$=a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=a\cdot 1=a.$$

Приклад 14. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{kx}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ і під знаком границі знаходяться показникові функції. Отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{kx}=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\alpha x}-1\right)-\left(e^{\beta x}-1\right)}{x}=$$

$$=\frac{1}{k}\left[\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}-1}{x}\right]=\frac{1}{k}\left(\alpha-\beta\right).$$

Тут ми використали результат, отриманий у попередньому прикладі – $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=a$.

Приклад 15. Обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}.$$

Розв'язання. Підстановка у вираз під знаком границі значення $x=0$ визначає невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Оскільки у виразі під знаком границі знаходиться логарифмічна функція, для розв'язання прикладу доцільно використати формулу (5). Виконавши заміну $kx=t$, $x={}^{t}\!/\!_{k}$, отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t/k}=$$

$$=k\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=k\cdot 1=k.$$

Приклад 17. Обчислити $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

Розв'язання. Після підстановки у вираз під знаком границі значення $x=e$ маємо невизначеність виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Зробивши заміну $x-e=t$, $x=t+e$, отримуємо (при $x\to e$ $t\to 0$):

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+e)-\ln e}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{t+e}{e}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{t}{e}\right)}{t}=\frac{1}{e}.$$

Тут ми використали результат попереднього прикладу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=k,\text{ де } k=\frac{1}{e}.$$

Приклади для самостійного розв’язання:

1) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}.$

Відповідь: ∞.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{4}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$.

Відповідь: 3.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$.

Відповідь: 2.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

Відповідь: e^8.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

Відповідь: -1.

7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{6}$

8) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}$.Відповідь: $-\sin a$.

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}$.

Відповідь: $\dfrac{m}{n}$.

10) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 1}{x - 1}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{\cos^2 1}$.

11) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$.

Відповідь: $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

12) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi - 2x}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.

13) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$.

Відповідь: $\dfrac{3}{4}$

14) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$.

Відповідь: $-\dfrac{1}{4}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

Відповідь: 3.

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$.

Відповідь: $\dfrac{25}{9}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$.

Відповідь: 0.

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-5^x}{1-e^x}$.

Відповідь: $\ln 5$.

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$.

Відповідь: $\dfrac{\ln(8/7)}{\ln(6/5)}$.

20) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$.

Відповідь: $\frac{1}{4}$

21) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{\ln(x+1)}$.

Відповідь: 2.

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{3x}$.

Відповідь: e^{-6}.

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$.

Відповідь: e^{10}.

24) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

Відповідь: e^{10}.

25) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{x}}$.

Відповідь: e^{3}.

26) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln\left(2+x\right)-\ln x\right)$.

Відповідь: 2.

Таблиця основних формул, пов'язаних з обчисленням границь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k. \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}=e. \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}. \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1. \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}. \tag{7}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a. \tag{8}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \tag{9}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1. \tag{10}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1. \tag{11}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x\right)^{k}-1}{x}=k. \tag{12}$$

Обчислити наступні границі.

Приклад 1.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)\left(x^2+1\right)}{x^2+x+1}=\frac{4}{3}.$$

Приклад 2.

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 3.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\|\begin{matrix}x=t^3,\\ x\to -1,\, t\to -1\end{matrix}\right\|=$$

$$=\lim_{t\to -1}\frac{t+1}{\sqrt{t^3+1}}=\lim_{t\to -1}\frac{t+1}{\sqrt{(t+1)\left(t^2-t+1\right)}}=$$

$$=\lim_{t\to -1}\frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t^2-t+1}}=0.$$

Приклад 4.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}-x=t, x=\frac{\pi}{2}-t,\\ x\to\frac{\pi}{2}, t\to 0\end{matrix}\right\|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{-t}==\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{-t}=-\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t}=$$

$$=-2\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\sin\frac{t}{2}=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 0.$$

Приклад 5.

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\sin a}{\cos a}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{\cos x\cdot\cos a\cdot(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\cos x\cdot\cos a}\times$$

$$\times\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}=\frac{1}{\cos^2 a}\cdot 1=\frac{1}{\cos^2 a}.$$

Приклад 6.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\|\begin{matrix}x-1=t,\\ x=t+1,\\ x\to 1, t\to 0\end{matrix}\right\|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}\right)}==\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2}}}=\frac{2}{\pi}.$$

Приклад 7.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\|\begin{matrix}\sin x=t,\\ x\to\frac{\pi}{6},\, t\to\frac{1}{2}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\lim_{t\to\frac{1}{2}}\frac{2t^2+t-1}{2t^2-3t+1}=\lim_{t\to\frac{1}{2}}\frac{2(t+1)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)}=\lim_{t\to\frac{1}{2}}\frac{t+1}{t-1}=-3.$$

Приклад 8.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=(1)^{\infty}=\left\|\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{2}=t, x=t+\frac{\pi}{2}, \\ x\to\frac{\pi}{2}, t\to 0 \end{array}\right\|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}(\cos t)^{-\operatorname{ctg} t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\big(1+(\cos t-1)\big)^{\frac{1}{\cos t-1}\cdot(\cos t-1)\cdot\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\cos t}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\cdot 1}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}1}=$$

$$=e^{0}=1.$$

Приклад 9.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\left\|\begin{matrix}x-\frac{\pi}{4}=t,x=t+\frac{\pi}{4},\\ x\to\frac{\pi}{4},\ t\to 0\end{matrix}\right\|=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-1}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\operatorname{tg}t+1}{1-\operatorname{tg}t}-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\operatorname{tg}t}{t\left(1-\operatorname{tg}t\right)}=2\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-\operatorname{tg}t}=$$

$$=2\cdot 1\cdot 1=2.$$

Приклад 10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x\sin x}\cdot\frac{x\sin x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Приклад 11.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)=\left(\infty-\infty\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)\left(\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}\right)}{\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-c)x+(b-d)}{\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}}=\frac{a-c}{2}.$$

Приклад 12.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=2\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\times$$

$$\times\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=2\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=$$

$$=\left(\text{нескінченно мала}\times\text{обмежена величина}\right)=0.$$

Приклад 13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{8^x-7^x}{6^x-5^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(8^x-1\right)-\left(7^x-1\right)}{\left(6^x-1\right)-\left(5^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{8^x-1}{x}-\dfrac{7^x-1}{x}}{\dfrac{6^x-1}{x}-\dfrac{5^x-1}{x}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{x}}=\frac{\ln 8-\ln 7}{\ln 6-\ln 5}.$$

Приклад 14.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x=\left(1\right)^\infty=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x+8}{x-2}-1\right)\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x-2}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{10}\cdot\frac{10}{x-2}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x}{x-2}}=e^{10}.$$

Приклад 15.

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(2-\cos\alpha\right)^{\frac{1}{\sin^2\alpha}} = \left(1^{\infty}\right) = \lim_{\alpha\to 0}\left(1+\left(1-\cos\alpha\right)\right)^{\frac{1}{\sin^2\alpha}} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\left(1+2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}} = e^{2\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\big/\alpha}{\sin\alpha\big/\alpha}\right)^2} = e^{2\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt{e}.$$

Приклад 16.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \left(1^{\infty}\right) = \left\|\begin{matrix} x-2=t, x=t+2, \\ x\to 2, t\to 0 \end{matrix}\right\| = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t+2}{2}\right)^{\frac{1}{t}} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{2}{t}\cdot\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Приклад 17.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\left\|\begin{matrix}t=x\ln x,\\ x\to 1, t\to 0\end{matrix}\right\|=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1.$$

Приклад 18.

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

Приклад 19.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}=\left\|\begin{matrix}\sqrt[4]{x}=t, x=t^4,\\ x\to 1, t\to 1\end{matrix}\right\|=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^4-1}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{1}{4}.$$

Таблиця еквівалентних нескінченно малих

1. $\sin\alpha \sim \alpha$	6. $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$
2. $\mathrm{tg}\,\alpha \sim \alpha$	7. $a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln a$
3. $\arcsin\alpha \sim \alpha$	8. $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$
4. $\mathrm{arctg}\,\alpha \sim \alpha$	9. $\log_a(1+\alpha) \sim \dfrac{\alpha}{\ln a}$
5. $1 - \cos\alpha \sim \dfrac{\alpha^2}{2}$	10. $(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha$

Застосовуючи еквівалентні нескінченно малі, обчислити наступні границі.

Приклад 20.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\sin 4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left\| \begin{array}{l} \arcsin 2x \sim 2x, \\ \sin 4x \sim 4x, \\ x \to 0 \end{array} \right\| = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 21.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\|\begin{array}{l}\sin 3x\sim 3x,\\ \ln(1+2x)\sim 2x,\\ x\to 0\end{array}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{4x^2}=\frac{9}{4}.$$

Приклад 22.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\|\begin{array}{l}e^{2x}-1\sim 2x,\\ \ln(1-4x)\sim(-4x),\\ x\to 0\end{array}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-4x}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 23.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\|\begin{matrix}(1+x)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{x}{3},\\ x\to 0\end{matrix}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}}{x}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 24.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}^2(x-1)}{1-\cos(x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\|\begin{matrix}x-1=t,\\ x\to 1, t\to 0\end{matrix}\right\|=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 t}{1-\cos t}=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\operatorname{tg} t\sim t,\\ 1-\cos t\sim\dfrac{t^2}{2}\end{matrix}\right\|=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2/2}=2.$$

Приклад 25.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{x^3}=\left\|\begin{matrix}\sin x\sim x.\\ 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},\\ x\to 0\end{matrix}\right\|=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=$$

$$=\frac{1}{2}.$$

Приклад 26.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\|\begin{matrix}\ln(1+mx)\sim mx,\\ x\to 0\end{matrix}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{x}=m.$$

Приклад 27.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+2}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\sim\frac{x}{2},\\ x\to 0\end{array}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{x/2}{x}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 28.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\ln(1+x^2)}=\left\|\begin{array}{l}1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\\ \ln(1+x^2)\sim x^2,\\ \ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\sim-\frac{x^2}{2}\end{array}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 29.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(e^{t-1}-1\right)}{\ln x}=\left\|\begin{matrix} x-1=t, \\ x=t+1, \\ x\to 1,\, t\to 0 \end{matrix}\right\|=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(e^{t}-1\right)}{\ln\left(1+t\right)}=$$

$$=\left\|\begin{matrix} e^{t}-1\sim t, \\ \ln\left(1+t\right)\sim t, \\ t\to 0 \end{matrix}\right\|=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

Приклад 30.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{3}{5}}-1}{(1+x)^{\frac{5}{3}}-1}=\left\|\begin{matrix}(1+x)^{\frac{3}{5}}-1\sim\dfrac{3}{5}x,\\(1+x)^{\frac{5}{3}}-1\sim\dfrac{5}{3}x\end{matrix}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{5}\cdot x}{\frac{5}{3}\cdot x}=\frac{9}{25}.$$

Приклад 31.

$$\lim_{z\to 0}\frac{(5^z-1)(4^z-1)}{(3^z-1)(6^z-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\|\begin{matrix}a^z-1\sim\ln a,\\z\to 0\end{matrix}\right\|=\frac{\ln 5\cdot\ln 4}{\ln 3\cdot\ln 6}.$$

Приклад 32.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+5x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\left(1+\frac{3x}{8}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)}{2\left(\left(1+\frac{5x}{16}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right)}=$$

$$=\left\|\begin{matrix}(1+\alpha)^{k}-1\sim k\alpha,\\ \alpha\to 0\end{matrix}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{8}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{5x}{16}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{64}{5}=\frac{8}{5}.$$

Приклади для самостійної роботи

Обчислити границі.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$. Відповідь: $-\dfrac{3}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$. Відповідь: 4.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+1}-1}$. Відповідь: 6.

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}$. Відповідь: $\sqrt{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$. Відповідь: 0,5.

6. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(\alpha+2h)-2\sin(\alpha+h)+\sin\alpha}{h^2}$. Відповідь: $-\sin\alpha$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. Відповідь: 3.

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$. Відповідь: $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{e^x-1}$. Відповідь: $\ln 5$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+4x)}$. Відповідь: 0,5.

11. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$. Відповідь: e.

12. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$. Відповідь: e^{a-b}.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-4^x}{x^2+x}$. Відповідь: $\ln\dfrac{5}{4}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\ln(1+x)}$. Відповідь: 2.