Диференціювання.

Знайти похідні наступних функцій:

1. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3.$

$$y' = \left(x^5\right)' - 4\left(x^3\right)' + 2\left(x\right)' - 3' = 5x^4 - 4\cdot 3x^2 + 2\cdot 1 - 0 =$$
$$= 5x^4 - 12x^2 + 2.$$

2. $y = \dfrac{\pi}{x} + \ln 2.$

$$y' = \pi\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\ln 2\right)' = \pi\left(x^{-1}\right)' + 0 = \pi\left(-1\cdot x^{-2}\right) =$$
$$= -\frac{\pi}{x^2}.$$

3. $y = \dfrac{2x+3}{5-7x}.$

$$y' = \frac{\left(2x+3\right)'\left(5-7x\right) - \left(2x+3\right)\left(5-7x\right)'}{\left(5-7x\right)^2} =$$
$$= \frac{2\cdot\left(5-7x\right) - \left(2x+3\right)\cdot\left(-7\right)}{\left(5-7x\right)^2} = \frac{31}{\left(5-7x\right)^2}.$$

4. $y = x^2\sqrt[3]{x^2} = x^2\cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{8}{3}}.$

$$y' = \frac{8}{3}x^{\frac{8}{3}-1} = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} = \frac{8}{3}x\cdot x^{\frac{2}{3}} = \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2}.$$

5. $y=\dfrac{5}{\sqrt[3]{x^4}}=\dfrac{5}{x^{\frac{4}{3}}}=5x^{-\frac{4}{3}}.$

$$y'=5\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}-1}=-\frac{20}{3}x^{-\frac{7}{3}}=-\frac{20}{3x^{\frac{7}{3}}}=$$

$$=-\frac{20}{3x^2\cdot x^{\frac{1}{3}}}=-\frac{20}{3x^2\sqrt[3]{x}}.$$

6. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$

$$y'=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)'\left(1-\sqrt{x}\right)-\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)'}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)-\left(1+\sqrt{x}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}.$$

7. $y=x\cdot\arcsin x.$

$$y'=(x)'\cdot\arcsin x+x\cdot(\arcsin x)'=\arcsin x+$$

$$+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8. $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}.$

$$y' = \frac{(\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= -\frac{2}{1 - \sin 2x}.$$

9. $y = x \cdot \operatorname{ctg} x$.

$$y' = \operatorname{ctg} x + x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}.$$

10. $y = (x^2 - 2)\cos x$.

$$y' = 2x \cdot \cos x - (x^2 - 2)\sin x.$$

11. $y = e^x \cdot \arcsin x$.

$$y' = e^x \cdot (\arcsin x) + e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = e^x \left(\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right).$$

12. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

13. $y = (x^2 - 2x + 2) \cdot \operatorname{ch} x$.

$$y' = \left(2x-2\right)\cdot \mathrm{ch}\, x + \left(x^2-2x+2\right)\cdot \mathrm{sh}\, x.$$

14. $y = e^x \cdot \cos x$.

$$y' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x\left(\cos x - \sin x\right).$$

15. $y = \left(1+3x-5x^2\right)^{100}$.

Розв'язання. Нехай $u = 1+3x-5x^2$. Тоді $y = u^{100}$. За правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 100\cdot u^{99}\cdot u'_x = 100\left(1+3x-5x^2\right)^{99}\times$$

$$\times\left(1+3x-5x^2\right)' = 100\left(1+3x-5x^2\right)^{99}\cdot\left(3-10x\right).$$

16. $y = \mathrm{tg}^4 x$.

Розв'язання. $y = \mathrm{tg}^4 x = u^4$, де $u = \mathrm{tg}\, x$.

$$y' = y'_x = y'_u \cdot u'_x = 4u^3 \cdot \left(\mathrm{tg}\, x\right)' = 4\mathrm{tg}^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

17. $y = \sqrt{\mathrm{arctg}\, x}$.

Розв'язання. $y = \sqrt{\mathrm{arctg}\, x} = \sqrt{u}, \quad u = \mathrm{arctg}\, x$.

$$y' = y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\left(\mathrm{arctg}\, x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{arctg}\, x}}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

18. $y = \sin\left(2x+3\right)$.

Розв'язання. $y=\sin(2x+3)=\sin u, \quad u=2x+3$.

$$y'=y'_x=y'_u\cdot u'_x=\cos u\cdot(2x+3)'=2\cos(2x+3).$$

19. $y=\operatorname{ctg}\left(x^2-x+1\right)$.

Розв'язання. $y'=-\dfrac{1}{\sin^2\left(x^2-x+1\right)}\cdot(2x\text{-}1)$.

20. $y=\ln^3\left(x^2+5\right)$.

Розв'язання. $y=\ln^3\left(x^2+5\right)=u^3, u=\ln v, v=x^2+5$.

$$y'=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=3u^2\cdot\frac{1}{v}\cdot 2x=3\ln^2\left(x^2+5\right)\cdot\frac{1}{x^2+5}\cdot 2x=$$
$$=\frac{6x\ln^2\left(x^2+5\right)}{x^2+5}.$$

21. $y=\sin^2\left(x^3+1\right)$.

Розв'язання.

$$y'=2\sin\left(x^3+1\right)\cdot\cos\left(x^3+1\right)\cdot 3x^2=3x^2\sin\left(2x^3+2\right).$$

22. $y=\ln(\arcsin 5x)$.

Розв'язання. $y'=\dfrac{1}{\arcsin 5x}\cdot(\arcsin 5x)'=\dfrac{1}{\arcsin 5x}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$.

23. $y=e^{\sin^2 x}$.

Розв’язання.

$$y' = e^{\sin^2 x} \cdot \left(\sin^2 x\right)' = e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot \cos x = e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x.$$

24. $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$**.**

Розв’язання.

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

25. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{x}\right)$**.**

Розв’язання.

$$y' = \frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)' = \operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{x}\right)}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\left(\sqrt{x}\right)}.$$

26. $y = \ln\left(\ln\left(\ln x\right)\right)$.

Розв’язання.

$$y' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot (\ln(\ln x))' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}.$$

27. Довести, що функція $y = xe^{-x}$ задовольняє рівняння $xy' = (1-x)y$.

Розв'язання. $y = xe^{x}$, $y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$, підставимо y' та y у рівняння:

$$xy' = xe^{-x}(1-x) = (1-x)y.$$

28. Знайти $f'(0)$, якщо $f(x) = e^{-x}\cos 3x$.

Розв'язання. Знайдемо $f'(x)$.

$$f'(x) = -e^{-x}\cos 3x + e^{-x}(-3\sin 3x) = -e^{-x}(\cos 3x + 3\sin 3x).$$

Підставивши у цей вираз $x = 0$, отримуємо $f'(0) = -1 \cdot (1 + 3 \cdot 0) = -1$.

29. Знайти $y'(1)$, якщо $y(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 2$.

Розв'язання. Знайдемо $y'(x)$: $y'(x) = 3x^2 + 6x - 7$. Підставивши сюди $x = 1$, отримуємо: $y'(1) = 3 + 6 - 7 = 2$.

30. Знайти $y'(e)$, якщо $y(x) = x\ln^3 x$.

Розв'язання.

$$y'(x) = \ln^3 x + x \cdot 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \ln^3 x + 3\ln^2 x = \ln^2 x(\ln x + 3),$$

$$y'(e) = 1^2 \cdot (1+3) = 4.$$

31. Знайти $f'(0)$, якщо $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$.

Розв'язання.

$$f'(x) = \frac{2\sin x \cdot \cos x \cdot (1+\cos x) - \sin^2 x \cdot (-\sin x)}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\sin 2x \cdot (1+\cos x) + \sin^3 x}{(+\cos x)^2}.$$

$$f'(0) = 0.$$

Домашнє завдання.

Знайти похідні.

1. $y = \dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \dfrac{4}{11}x^5.$

Відповідь: $y' = x^2\sqrt{x}\left(x^2-1\right)^2.$

2. $y=\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$.

Відповідь: $y'=-x^2e^{-x}$.

3. $y=3x^3\ln x-x^3$.

Відповідь: $y'=9x^2\ln x$.

4. $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$.

Відповідь: $y'=x^2\cos x$.

5. $y=\ln\left(2x^3+3x^2\right)$.

Відповідь: $y'=\dfrac{6(x+1)}{2x^2+3x}$.

6. $y=\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$.

Відповідь: $y'=-\cos x$.

7. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

Відповідь: $y' = \dfrac{1}{\cos x}$.

8. $y = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$.

Відповідь: $y' = \dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$.

9. $y = \operatorname{arctg}(x+1) + \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$.

Відповідь: $y' = \dfrac{2}{(x^2+2x+2)^2}$.

10. $y = \dfrac{2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2}}$.

Відповідь: $y' = \dfrac{1}{3\sin x + 4\cos x + 5}$.

11. $y = \dfrac{x - e^{2x}}{x + e^{2x}}$.

Відповідь: $y' = \dfrac{2e^{2x}\left(1-2x\right)}{\left(x+e^{2x}\right)^2}$.

12. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{3x - x^3}{1-3x^2}$.

Відповідь: $y' = \dfrac{3}{1+x^2}$.

13. $y = \sqrt{2x+1}\left(\ln\left(2x+1\right)-2\right)$.

Відповідь: $y' = \dfrac{\ln\left(2x+1\right)}{\sqrt{2x+1}}$.

14. $y = \dfrac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

Відповідь: $y' = 2xe^{x^2} \cdot \dfrac{x^4+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

15. $y = \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{\sin x}$.

Відповідь: $y' = \dfrac{x\cos x}{\sin^2 x}$.

16. Довести, що функція $y=\left(x^2+1\right)\cdot e^x$ задовольняє рівняння $y'-\dfrac{2xy}{x^2+1}=e^x\left(x^2+1\right)$.

Похідні функцій, заданих неявно та параметрично. Диференціали.

Знайти похідну y'_x функцій, заданих у неявній формі.

1. $x^3+\ln y-x^2e^y=0$.

Розв'язання. Диференціюємо рівність по змінній *x*, вважаючи *y=y(x)*.

$$3x^2+\frac{y'}{y}-2x\cdot e^y-x^2e^y\cdot y'=0\ .$$

$$3x^2y+y'-2xy\cdot e^y-x^2e^yy\cdot y'=0$$

Звідси знаходимо y':

$$y'\left(1-x^2ye^y\right)=2xye^y-3x^2y\ .$$

$$y'=\frac{\left(2xe^y-3x^2\right)y}{1-x^2ye^y}.$$

Отримали похідну $y' = y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, виражену через змінні x та y.

2. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Розв'язання. $3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0$.

$$3\left(y^2 - x\right)y' = 3\left(y - x^2\right).$$

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

3. $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0$.

Розв'язання.

$$4x^3 - 12xy^2 - 12x^2y \cdot y' + 36y^3y' - 10x + 30y \cdot y' = 0.$$

$$4x^3 - 12xy^2 - 10x = \left(12x^2y - 36y^3 - 30y\right) \cdot y'.$$

$$y' = \frac{2x\left(2x^2 - 6y^2 - 5\right)}{6y\left(2x^2 - 6y^2 - 5\right)} = \frac{x}{3y}.$$

4. $x^2 \sin y + y^2 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0$.

Розв'язання.

$$2x\sin y + x^2 \cos y \cdot y' + 2y \cdot y' \cos x -$$
$$-y^2 \sin x - 2 - 3y' = 0.$$

$$\left(x^2\cos y+2y\cos x-3\right)y'=2+y^2\sin x-2x\sin y.$$

$$y'=\frac{2+y^2\sin x-2x\sin y}{x^2\cos y+2y\cos x-3}.$$

5. Знайти значення y'_x у точці з координатами $x=y=1$, якщо $x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0$.

Розв'язання. Знайдемо значення y'_x. Диференціюємо задану рівність по x:

$$3x^2-4xy^2-4x^2y\cdot y'+5+y'=0.$$

$$3x^2-4xy^2+5=\left(4x^2y-1\right)y',$$

$$y'=\frac{3x^2-4xy^2+5}{4x^2y-1}.$$

При $x=y=1$ отримуємо $y'=\dfrac{4}{3}$.

Знайти похідну y'_x функцій, заданих у параметричній формі.

Нехай $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ t\in[\alpha;\beta]. \end{cases}$ – функція, задана у параметричній формі.

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

1. $\begin{cases} x = e^{-t}\sin t, \\ y = e^{t}\cos t, \\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Розв'язання. $x_t' = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = e^{-t}\left(\cos t - \sin t\right)$,

$y_t' = e^{t}\cos t - e^{t}\sin t = e^{t}\left(\cos t - \sin t\right)$.

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{e^{t}\left(\cos t - \sin t\right)}{e^{-t}\left(\cos t - \sin t\right)} = e^{2t}.$$

2. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln\left(1 - t^2\right), \\ t \in \left(-1; 1\right). \end{cases}$

Розв'язання. $x_t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $y_t' = -\dfrac{2t}{1-t^2}$,

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = -\frac{2t}{1-t^2}\cdot\sqrt{1-t^2} = -\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

3. $\begin{cases} x = \sec t, \\ y = \operatorname{tg} t, \\ t \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

Розв'язання. $x'_t=\left(\dfrac{1}{\cos t}\right)'=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$, $y'_t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$,

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{\cos^2 t}{\sin t}=\frac{1}{\sin t}.$$

4. Знайти похідну y'_x функції $\begin{cases} x=t\ln t, \\ y=\dfrac{\ln t}{t}. \end{cases}$ у точці t=1.

Розв'язання. Знайдемо похідну $y'_x(t)=\dfrac{y'_t}{x'_t}$. $x'_t=\ln t+1$,

$y'_t=\left(\dfrac{\ln t}{t}\right)'=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$. $y'_x=\dfrac{1-\ln t}{t^2}\cdot\dfrac{1}{\ln t+1}$. При t=1 отримаємо:

$y'_t\big|_{t=1}=1.$

Знайти диференціали вказаних функцій.

1. $y=\operatorname{arctg}\left(e^{2x}\right)$. $dy=y'(x)dx=\dfrac{2e^{2x}dx}{1+e^{4x}}$.

2. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{49-x^2}+\dfrac{49}{2}\arcsin\dfrac{x}{7}$.

$$dy=y'(x)dx=\frac{1}{2}\sqrt{49-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{(-2x)}{2\sqrt{49-x^2}}+$$

$$+\frac{49}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{49}}}=\frac{1}{2}\sqrt{49-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{49-x^2}}+$$

$$+\frac{49}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{49-x^2}}=\frac{49-x^2-x^2+49}{2\sqrt{49-x^2}}=\frac{2\left(49-x^2\right)}{2\sqrt{49-x^2}}=$$

$$=\sqrt{49-x^2}.$$

3. Порівняти приріст та диференціал функції $y=2x^3+5x^2$.

Розв'язання. Знайдемо приріст Δy функції $y=y(x)$ при переході від точки x до точки $x+\Delta x$:
$\Delta y = y(x+\Delta x)-y(x)$.

$$\Delta y = 2(x+\Delta x)^3+5(x+\Delta x)^2-2x^3-5x^2=$$

$$=2\left((x+\Delta x)^3-x^3\right)+5\left((x+\Delta x)^2-x^2\right)=$$

$$=2\left(3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\right)+5\left(2x\Delta x+(\Delta x)^2\right)=$$

$$=\left(6x^2+10x\right)\Delta x+(6x+5)(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3.$$

$$dy=y'(x)dx=\left(6x^2+10x\right)dx.$$

Різниця між Δy та dy є нескінченно малою вищого порядку, ніж Δx:

$$o(\Delta x)=(6x+5)(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3.$$

4. Обчислити наближене значення $\arcsin 0,51$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\arcsin x$. Маємо: $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$. Нехай $x=0,5$, $\Delta x=0,01$. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Отримуємо:

$$\arcsin 0,51\approx \arcsin 0,5+\frac{1}{\sqrt{1-(0,5)^2}}\cdot 0,01\approx$$

$$\approx\frac{\pi}{6}+0,011\approx 0,513.$$

Домашнє завдання:

Обчислити похідні y'_x.

1. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$. **Відповідь**: $y'_x = \dfrac{x\left(y^2 - 2x^2\right)}{y\left(2y^2 - x^2\right)}$**.**

2. $y^2 \cos x = \sin 3x$. **Відповідь**: $y'_x = \dfrac{3\cos 3x + y^2 \sin x}{2y\cos x}$**.**

3. $y^2 - 2xy + 4 = 0$**. Відповідь**: $y'_x = \dfrac{y}{y - x}$**.**

4. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$ **Відповідь**: $y'_x = \dfrac{3t^2 - 1}{2t}$**.**

5. $\begin{cases} x = \dfrac{1 + t^3}{t^2 - 1}, \\ y = \dfrac{1}{t^2 - 1}. \end{cases}$ **Відповідь**: $y'_x = \dfrac{t^2 + 1}{t\left(2 + 3t - t^3\right)}$**.**

6. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$ **Відповідь**: $y'_x = -\dfrac{3}{2}\,\mathrm{tg}\, t$**.**

7. Знайти y'_x у точці $t = 0$**,** якщо $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3. \end{cases}$

Відповідь: $y'_x = 0$**.**

Знайти диференціали вказаних функцій.

8. $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x-6}{x+6}$. **Відповідь**: $dy=\frac{dx}{x^2-36}$.

9. $s=e^{t^2}$. **Відповідь**: $ds=2te^{t^2}dt$.

Фізичні та геометричні застосування похідної

Похідна $f'(x)$ виражає миттєву швидкість зміни функції $f(x)$. Зокрема, похідна від шляху $s(t)$, пройденого тілом, що рухається прямолінійно, за час t, дорівнює його миттєвій швидкості у момент часу t, тобто швидкість $v(t)=s'(t)$. У цьому полягає механічний зміст похідної.

Фізичний зміст похідної полягає у тому, що, коли функція $y=f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y'=f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу.

Геометричний зміст похідної функції $y=f(x)$ у точці $x=x_0$ полягає у тому, що значення $f'(x_0)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка цієї функції, проведеної у точці з абсцисою $x=x_0$, до додатного напряму осі Ox, тобто кутовому коефіцієнту цієї дотичної. При цьому рівняння дотичної до графіка $y=f(x)$ у точці $P_0(x_0;f(x_0))$ має вигляд:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \tag{1}$$

Нормаллю до кривої називають пряму, що проходить перпендикулярно дотичній через точку дотику. Рівняння нормалі має вигляд:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (2)$$

Задача 1. Шлях s (у метрах), пройдений тілом за час t (у секундах) після початку руху, визначається за формулою

$$s = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t.$$

Обчислити швидкість та прискорення тіла у момент часу $t = 1$ с.

Розв'язання. За фізичним змістом похідної, швидкість тіла є похідною пройденого ним шляху за часом;

$$v = s'(t) = t^2 + t + 2.$$

У момент часу $t = 1$ с $v(1) = 1^2 + 1 + 2 = 4$ (м/с).

Прискорення є похідною швидкості:

$$a(t) = v'(t) = 2t + 1.$$

При $t = 1$ с $a(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ (м/с^2).

Задача 2. Закон радіоактивного розпаду виражається формулою $m = m_0 e^{-kt}$, де m_0 – маса радіоактивної речовини, що не розпалася, k – стала розпаду, t – час розпаду. Визначити швидкість розпаду у початковий момент часу.

Розв'язання. Швидкість розпаду у момент часу t дорівнює похідній функції $m = m_0 e^{-kt}$ за змінною *t,* тобто $v(t) = m'(t) = -km_0 e^{-kt}$. Підставивши у цю формулу значення $t = 0$, отримуємо швидкість радіоактивного розпаду у початковий момент часу: $v(0) = -km_0$. Знак «–« тут свідчить, що кількість речовини з часом зменшується.

Задача 3. Сторони a та b прямокутника змінюються за законом $a = 3t + 1, b = 2t + 5$. З якою швидкістю змінюються його площа та периметр у момент часу $t = 5$?

Розв'язання. Площа прямокутника

$$S = ab = (3t + 1)(2t + 5) = 6t^2 + 17t + 5,$$

а його периметр $P = 2(a + b) = 10t + 12$.

Швидкість зміни площі: $v_1 = s'(t) = 12t + 17, v_1(5) = 77$,

Швидкість зміни периметра: $v_2 = p'(t) = 10, v_2(5) = 10$.

Задача 4. Довжина драбини дорівнює 5 м. Нижній кінець драбини починає відсуватися від стіни зі сталою швидкістю 2 м/с. З якою швидкістю опускається у момент часу t верхній кінець драбини? Чому дорівнює його прискорення у цей момент часу?

Розв'язання. За t секунд нижній кінець драбини пройде відстань у $2t$ метри. За теоремою Піфагора верхній кінець драбини знаходиться у цей час на висоті $h(t) = \sqrt{25 - 4t^2}$.

Щоб знайти швидкість руху верхнього кінця драбини, знайдемо похідну від цієї функції:

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}.$$

Знак «–« свідчить про те, що висота, на якій знаходиться верхній кінець драбини, зменшується.

Знайдемо прискорення верхнього кінця драбини у момент часу *t*. Для цього знайдемо похідну від швилкості або другу похідну від $h(t)$:

$$\frac{d^2h}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}\right)=-\frac{4\sqrt{25-4t^2}-4t\cdot\left(-\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}\right)}{\left(25-4t^2\right)}=$$

$$=-\frac{100}{\left(25-4t^2\right)\sqrt{25-4t^2}}.$$

Задача 5. Резервуар, що має форму півкулі, заповнюється водою. Радіус резервуара дорівнює R, швидкість його заповнення дорівнює v_1. Визначити швидкість v підвищення рівня води у резервуарі.

Розв'язання. Швидкість підвищення рівня води у резервуарі дорівнює похідній за часом від рівня води у ньому. Якщо рівень води у резервуарі дорівнює h, то $v=\frac{dh}{dt}$.

Знайдемо залежність $h(t)$.

Об'єм води V, що наповнює резервуар, обчислюється за формулою:

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Маємо:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = \left(2\pi hR - \pi h^2\right)\frac{dh}{dt} = v_1.$$

Звідси знаходимо:

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{v_1}{2\pi hR - \pi h^2}\ .$$

Задача 6. Човен підтягують до берега з допомогою каната, який намотується на барабан з швидкістю 3 м/хв. Визначити швидкість руху човна у момент часу, коли він знаходиться від берега на відстані 25 м, якщо барабан знаходиться на березі вище поверхні води на 4 м.

Розв'язання. Нехай s – довжина канату між барабаном та човном, x – відстань від човна до берега. За умовою маємо:

$$s^2 = x^2 + 4^2.$$

Диференціюємо цю рівність за часом t. При цьому знаходимо співвідношення між швидкостями: $2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$.

Звідси знаходимо:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x}\cdot\frac{ds}{dt}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{ds}{dt} = 3,\ x = 25,\ s = \sqrt{25^2 + 16} = \sqrt{641} \approx 25,3,$$

отримуємо швидкість руху човна

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{641} \cdot 3}{25} \approx 3,03 \text{ (м/хв).}$$

Задача 7. Тіло масою 6 кг рухається прямолінійно за законом $s = -1 + \ln(t+1) + (t+1)^3$ м. Обчислити його кінетичну енергію через 1 с після початку руху.

Розв'язання. Кінетична енергія тіла обчислюється за формулою $K = \frac{mv^2}{2}$. Знайдемо швидкість руху тіла:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t+1} + 3(t+1)^2.$$

Маємо: $v(1) = 12,5$ м/с, $K = \frac{6 \cdot (12,5)^2}{2} = 468,75$ Дж.

Задача 8. Рух двох матеріальних точок вздовж прямої задано рівняннями $s_1 = 4t^2 + 2$м та $s_2 = 3t^2 + 4t - 1$м. Знайти швидкість руху точок у моменти, коли вони проходять однакові відстані.

Розв'язання. У момент часу, коли вони проходять однакові відстані, $s_1 = s_2$, $4t^2 + 2 = 3t^2 + 4t - 1$, $t^2 - 4t + 3 = 0$, $t_1 = 1$с, $t_2 = 3$с.

$v_1 = \dfrac{ds_1}{dt} = \dot{s}_1 = 8t$, $v_2 = \dfrac{ds_2}{dt} = \dot{s}_2 = 6t + 4$,

$v_1(1) = 8 \cdot 1 = 8$м/с, $v_1(3) = 8 \cdot 3 = 24$м/с,

$v_2(1) = 6 \cdot 1 + 4 = 10$м/с, $v_2(3) = 6 \cdot 3 + 4 = 22$м/с.

Задача 9. Кут α, на який повернеться колесо через проміжок часу tс, $\alpha = 3t^2 - 12t + 36$ рад. Знайти кутову швидкість ω в момент часу $t = 4$ с і визначити, у який момент часу колесо зупиниться.

Розв'язання. $\omega = \dfrac{d\alpha}{dt} = 6t - 12$рад/с, $\omega(4) = 6 \cdot 4 - 12 = 12$ рад/с, $\omega = 0 \Rightarrow 6t - 12 = 0 \Rightarrow t = 2$с.

Задача 10. Записати рівняння дотичної та нормалі до параболи $y = x^2 - 3x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x = x_0$ має вигляд (1):

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Маємо $x_0 = 2$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$, $f'(x) = 2x - 3$, $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$. Отже, за формулою (1), отримуємо рівняння дотичної:

$y + 1 = x - 2$ або $y = x - 3$.

Рівняння нормалі у точці з абсцисою $x = x_0$ має вигляд (2):

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Отже, отримуємо: $y + 1 = -(x - 2)$ або $y = 1 - x$.

Задача 11. Обчислити довжину відрізка дотичної до кривої $y = e^x$ від точки дотику з абсцисою $x = 0$ до точки її перетину з віссю Ox.

Розв'язання. Знайдемо ординату точки дотику: $f(0) = e^0 = 1$. Оскільки $y'(x) = e^x$, $y'(0) = 1$, то рівняння дотичної набуває вигляду: $y - 1 = x$ або $y = x + 1$. У точці перетину дотичної з віссю Ox $y = 0$, тобто $x + 1 = 0$, $x = -1$. Точка A дотику має координати $(0; 1)$, координати точки B перетину дотичної з віссю Ox $(-1; 0)$. Довжина відрізка AB дорівнює:

$$AB=\sqrt{(-1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}.$$

Задача 12. У якій точці дотична до кривої $y=\ln x$ паралельна прямій $y=x+1$?

Розв'язання. Нехай ця точка має координати $(x_0;y_0)$. Тоді кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює значенню похідної у точці дотику, тобто $k=f'(x_0)$, $f(x)=\ln x$, $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$. Оскільки дотична паралельна прямій $y=x+1$, кутовий коефіцієнт якої дорівнює 1, то $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}=1$. Звідси $x_0=1$, $y_0=f(x_0)=\ln 1=0$.

Отже, шуканою точкою є $(1;0)$.

Задача 13. Під яким кутом перетинаються параболи $y=x^2$ та $x=y^2$?

Розв'язання. Дві прямі з кутовими коефіцієнтами k_1 та k_2 перетинаються під кутом, що визначається з рівності

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}.$$

Кут між двома кривими визначають як кут між дотичними до цих кривих, проведеними у точці перетину кривих. Знайдемо координати точки перетину кривих $y = x^2$ та $x = y^2$. Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2. \end{cases}$$

З неї отримуємо рівняння $x = x^4$, звідки знаходимо абсциси точок перетину $x_1 = 1$ та $x_2 = 0$. У точці з абсцисою $x_1 = 1$ ордината точки перетину $y_1 = x_1^2 = 1$.

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до кривих $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$ у цій точці. Маємо $k_1 = \left(x^2\right)'\Big|_{x=1} = 2x\big|_{x=1} = 2$, $k_2 = \left(\sqrt{x}\right)'\Big|_{x=1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=1} = \dfrac{1}{2}$. Підставивши ці значення у вираз для $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$, знаходимо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \ .$$

Отже, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.

У початку координат дотичною до параболи $y = x^2$ є вісь абсцис, до параболи $y = \sqrt{x}$ – вісь ординат, між якими маємо прямий кут.

Задача 14. Знайти абсцису точки, у якій дотичні до графіків функцій $y = x^2$ та $y = x^3$ є паралельними.

Розв’язання. $\left(x^2\right)' = 2x$, $\left(x^3\right)' = 3x^2$. Оскільки дотичні до графіків у шуканій точці є паралельними, то їх кутові коефіцієнти у цій точці рівні. Маємо $2x = 3x^2$, звідки знаходимо $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

Задача 15. Крива задана рівнянням $y = x^2 + 5x + 3$. Визначити кут між дотичними до кривої у точках з абсцисами $x_1 = -2$ та $x_2 = 0$.

Розв’язання. Похідна $y' = 2x + 5$. У точці з абсцисою $x_1 = -2$ кутовий коефіцієнт дотичної $k_1 = 2 \cdot \left(-2\right) + 5 = 1$, у точці з абсцисою $x_2 = 0$ $k_2 = 2 \cdot 0 + 5 = 5$. Тангенс кута між дотичними

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Підставивши сюди значення кутових коефіцієнтів між дотичними, отримуємо $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5-1}{1+5\cdot 1} = \frac{2}{3}$. Отже, кут $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{2}{3}$.

Задача 16. На кривій $y = x^3 - 3x + 5$ знайти точки, у яких дотична: 1) паралельна до прямої $y = -2x$; 2) перпендикулярна до прямої $y = -\frac{x}{9}$; 3) утворює з додатним напрямом осі Ox кут 45°.

Розв'язання. У точці дотику кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює похідній $y' = 3x^2 - 3$, обчисленій у цій точці.

1) З умови паралельності маємо $3x^2 - 3 = -2$, звідси $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2) З умови перпендикулярності прямих (добуток їх кутових коефіцієнтів дорівнює –1) знаходимо: $3x^2 - 3 = 9$, звідки $x_1 = -2, x_2 = 2$.

3) Оскільки $\mathrm{tg}\,45^\circ = 1$, то отримуємо рівність:

$$3x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Домашнє завдання

1. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^3 - 3x + 2$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Відповідь: $y = 9x - 14$, $y = -\frac{1}{9}x + \frac{38}{9}$.

2. Записати рівняння дотичних та нормалей до кривої $y = x^4 + 3x^2 - 16$ у точках її перетину з параболою $y = 3x^2$.

Відповідь: рівняння дотичних мають вигляд: $y - 12 = -44\left(x + 2\right)$, $y - 12 = 44\left(x - 2\right)$, рівняння нормалей $y - 12 = \frac{1}{44}\left(x + 2\right)$, $y - 12 = -\frac{1}{44}\left(x - 2\right)$.

3. Знайти кути між кривими $y = 4 - x$ та $y = 4 - \frac{x^2}{2}$ у точках їх перетину.

Відповідь: $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = \mathrm{arctg}\frac{1}{3}$.

4. Залежність шляху від часу має вигляд: $s = t\ln\left(t + 1\right)$ м. Знайти швидкість руху при $t = 2$ с.

Відповідь: $\approx 1,76$ м/с.

5. По параболі $y = x\left(8 - x\right)$ рухається точка так, що її абсциса змінюється у залежності від часу t за законом

$x = t\sqrt{t}$ м. Чому дорівнює швидкість зміни ординати у точці $M\left(1;7\right)$?

Відповідь: 9 м/с.

6. Закон прямолінійного руху матеріальної точки має вигляд $x = \frac{t^4}{4} - 4t^3 + 16t^2$. У які моменти часу її прискорення дорівнює нулю?

Відповідь: $\frac{4}{3}\left(3 \pm \sqrt{3}\right)$с.