Теорія ігор

Елементи теорії ігор

На практиці часто виникають ситуації, в яких треба ухвалювати рішення в умовах невизначеності, тобто дві або більше сторони переслідують різні цілі, а результати дій кожної із сторін залежать від дій партнерів.

Так, наприклад, ігри в шашки, шахи, карти відносяться до конфліктних, результат кожного ходу гравця залежить від ходу у відповідь супротивника, мета гри - виграш одного з партнерів. У економіці конфліктні ситуації зустрічаються часто і мають різноманітний характер.

До них відносяться, наприклад, взаємини між продавцями і покупцями, постачальниками і споживачами, банком і клієнтом.
Будь-який партнер прагне прийняти оптимальне рішення і при цьому стикається не тільки зі своїми цілями, але і з цілями партнера, і залежить від рішень, які прийматиме партнер.

Методи для прийняття рішень в конфліктній ситуації розроблені в математичній теорії, яка називається **теорією ігор.**

Джон фон Нейман

(англ. *John von Neumann*),

Нейман Янош Лайош (угор. *Neumann János Lajos)*;

Йоганн фон Нойман (нім. *Johann von Neumann*;

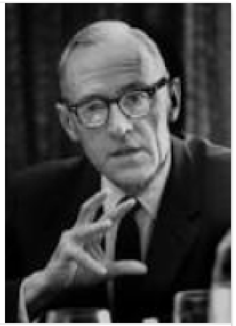
28 грудня 1903 — 8 лютого 1957) — американський математик угорського походження, що зробив значний вклад у квантову фізику, функціональний аналіз, теорію множин, інформатику, економічні науки та в інші численні розділи знання.

Розробив архітектуру (так звану «архітектуру фон Неймана»), яка використовується в усіх сучасних комп'ютерах.

Він став засновником теорії ігор разом із Оскаром Морґенштерном у 1944 році.

Оскар Моргенштерн

Экономист



Оскар Моргенштерн — американский экономист немецкого происхождения, один из создателей теории игр. Википедия

Родился: 24 января 1902 г., Гёрлиц, Германия

Умер: 26 июля 1977 г., Принстон, Нью-Джерси, США

Образование: Венский университет

Книги: Theory of Games and Economic Behavior, ЕЩЁ

Научный руководитель: Людвиг фон Мизес

Известный Ученик: Мартин Шубик, Лайонел Маккензи

Основні поняття теорії ігор

Гравці - сторони, що беруть участь в конфлікті.

Виграш - результат конфлікту.

Для будь-якої формалізованої гри вводяться правила, які визначають:

1. Варіанти дій гравців;
2. Об'єм інформації кожного гравця про поведінку партнера;
3. Виграш, до якого приводить кожна сукупність дій.

Як правило виграш або програш може бути заданий кількісно.

Гра називається **парною**, якщо в ній беруть участь 2 гравці, якщо гравців більше 2, то гра називається **множинною**. Ми розглядатимемо парні ігри.

Хай є 2 гравці: А і В. Іх інтереси протилежні. Гра - це ряд дій гравців А і В.

Гра називається грою **з нульовою сумою або антагоністичною**, якщо інтереси партнерів протилежні, тобто виграш одного гравця рівний програшу іншого. а - виграш гравця А; в - виграш гравця В, тоді а=-в. В цьому випадку досить розглядати тільки а.

Основні поняття теорії ігор

Ходом гравця називається вибір і здійснення одне з передбачених правилами дій.

Особистий хід - це свідомий вибір гравцем однієї з можливих дій (наприклад, хід в шахах).

Випадковий хід - випадково вибрана дія (наприклад, вибір карти з колоди).

Стратегія гравця - це сукупність правил, що визначають вибір гравця при будь-якому особистому ході, залежно від ситуації.

Іноді можливо, що всі рішення гравця у відповідь на ситуацію що склалася, прийняті заздалегідь. Це означає, що гравець вибрав певну стратегію, яка може бути задана у вигляді списку правил або програми. (Так можна здійснити гру за допомогою комп'ютера).

Основні поняття теорії ігор

Гра називається **скінченною**, якщо гравець має скінченне число стратегій. Інакше гра називається **нескінченною**.

Р**ішення гри** - це вибір кожним гравцем стратегії, яка задовольняє умові оптимальності, ті є один гравець повинен отримати максимальний виграш, коли інший гравець дотримується своєї стратегії, в той же час інший гравець повинен мати мінімальний програш, якщо перший дотримується своєї стратегії. Такі стратегії називаються **оптимальними.**

Умова стійкості: кожному з гравців повинно бути не вигідно відмовитися від своєї стратегії. Оптимальна стратегія повинна задовольняти умові стійкості.

Основні поняття теорії ігор

Якщо гра повторюється багато разів, то гравців цікавить виграш або програш у середньому.

Метою теорії ігор *є* визначення оптимальної стратегії кожного гравця.

При виборі оптимальної стратегії природно припускати, що обидва гравці поводяться розумно сточування зору своїх інтересів.

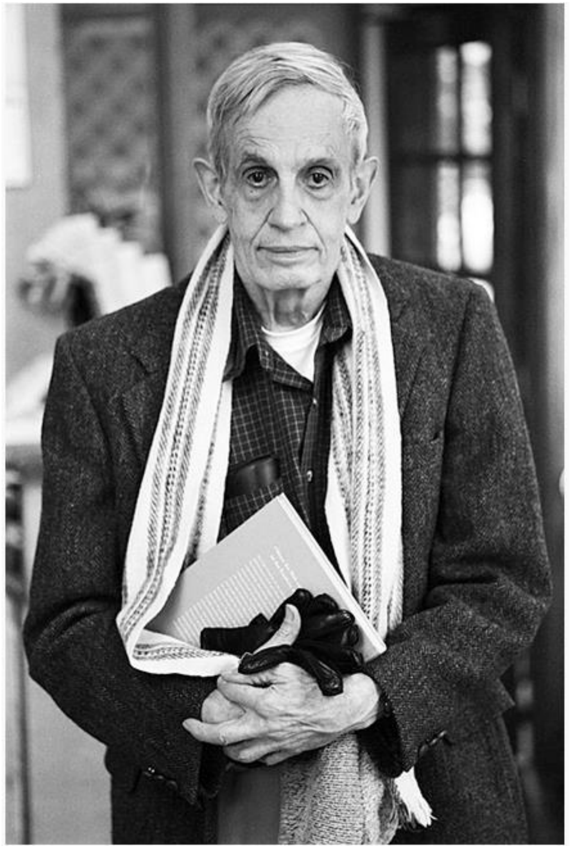
Найважливіше обмеження теорії ігор - єдиність виграшу, як показника ефективності, в той час, як більшість економічних завдань мають більш за один показник ефективності. Крім того, в економіці, як правило виникають ситуації, де інтереси партнерів не антагоністичні.

Рівновага за Нешем

Дилема в’язня: «Помаранчевий» варіант (1, 1) є прийнятним для обох і в якомусь сенсі це оптимум в даній ситуації. Однак у кожного є ще кращий варіант - відповідний «зелений» (1, 2) або (2, 1). В результаті чого на ділі буде реалізований «червоний» варіант (2, 2).

	Другий мовчить	**Другийсвідчить**
Перший мовчить	Обом по 1 року	Першому 10 років Другого відпустять
Перший свідчить	Першого відпустять Другому 10 років	Обом по 5 років

Джон Неш



Джон Форбс Неш молодший

(англ. *John Forbes Nash, Jr.*;

13 червня 1928, Блюфілд —

23 травня 2015) —

американський математик, який працював у галузі теорії ігор та диференціальної геометрії.

Лауреат Нобелівської премії економіки 1994 року (разом з Райнхардом Зелтеном і Джоно Харсані), Абелівської премії 2015 року (разом з Луїсом Ніренбергом).

Гра зі своїм Я

Вмикає будильник вечірнє Я граючи з ранковим Я: Верхня стратегія краща для для вечірнього Я і в якомусь сенсі це оптимум в даній ситуації. Ця стратегія домінує нижню. Для ранкового Я оптимальної стратегії немає.

Ранкове Я / Вечірнє Я	Спати	Встати
Будильник вимкнутий	10 0	0 10
Будильник увімкнутий	-5 -2	-1 8

Матрична гра двох гравців з нульовою сумою

Перший гравець має m стратегій (i=1…m).

Другий гравець має n стратегій (j=1…n).

Кожній парі стратегій (i, j) відповідає виграш першого гравця a_{ij} за рахунок другого.

Кожна стратегія гравця називається чистою, коли він її застосовує один раз.

Для формалізації реальної конфліктної ситуації гравців необхідно занумерувати їх чисті стратегії та скласти матрицю виграшів першого гравця.

Наступний етап – визначення оптимальних стратегій.

Матрична гра двох гравців з нульовою сумою

Приклад 1. Гра римських легіонерів

Правила:

1. Кожен гравець показує один або два пальці і одночасно називає кількість пальців показаних противником.
2. Якщо обидва вгадали, чи обидва не вгадали то виграш у кожного – нуль.
3. Якщо перший вгадав, а другий ні, то виграш першого дорівнює сумі показаних пальців і навпаки.

Матрична гра двох гравців з нульовою сумою
Приклад 1. Гра римських легіонерів

Формалізуємо конфліктну ситуацію.

У кожного гравця по чотири чистих стратегії типу (показав, сказав).

1. Пронумеруємо їх:

1.(1;1), 2.(1;2), 3.(2;1),4.(2;2)

2.Складаємо матрицю виграшів першого гравця

	(1;1)	(1;2)	(2;1)	(2;2)	
(1;1)	0	2	-3	0	
(1;2)	-2	0	0	3	= A
(2;1)	3	0	0	-4	
(2;2)	0	-3	4	0	

Матрична гра двох гравців з нульовою сумою
Приклад 2. Гра полковника Зотто

Правила:

1.У полковника - 4 полки. У противника - генерала - 3 полки. Їм треба захопити дві позиції.

2.Позиція захоплена, якщо противник направив більше полків.

3.За виграш позиції дається одне очко плюс кількість полків противника на захопленій позиції.

Матрична гра двох гравців з нульовою сумою
Приклад 2. Гра полковника Зотто

Формалізуємо конфліктну ситуацію.

Стратегії полковника типу (1 позиція, 2 позиція).

Пронумеруємо їх: 1.(4;0), 2.(0;4), 3.(3;1),4.(1;3) ,5.(2;2)

Стратегії генерала типу (1 позиція, 2 позиція).

Пронумеруємо їх: 1.(3;0), 2.(0;3), 3.(2;1),4.(1;2)

2.Складаємо матрицю виграшів першого гравця

$$
\begin{array}{c}
 \\ (4;0) \\ (0;4) \\ (3;1) \\ (1;3) \\ (2;2)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} (3;0) & (0;3) & (2;1) & (1;2) \end{array} \\
\left|\begin{array}{cccc}
4 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 4 & 1 & 2 \\
1 & -1 & 3 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 3 \\
-2 & -2 & 2 & 2
\end{array}\right|
\end{array} = A
$$

Оптимізація стратегій

Оптимальною називається стратегія, що дає гравцеві найбільший гарантований виграш при всіх можливих стратегіях іншого гравця.

Для отримання оптимальної стратегії перший гравець знаходить мінімальні значення виграшів для своїх стратегій (мінімальні значення в рядках матриці А та обирає стратегію з найбільшим значенням цього мінімуму.

Це нижня чиста ціна гри:

$$\boldsymbol{\alpha = max_i \, min_j \, a_{ij}}$$

Оптимізація стратегій

Для отримання оптимальної стратегії другий гравець знаходить максимальні значення виграшів для своїх стратегій (максимальні значення в стовпцях матриці А та обирає стратегію з найменшим значенням цього максимуму. Це верхня чиста ціна гри:

$$\boldsymbol{\beta = \min_j \max_i a_{ij}}$$

Перший гравець за рахунок вибору оптимальних стратегій може забезпечити собі виграш не менший чим нижня ціна гри

$$\boldsymbol{\alpha = \max_i \min_j a_{ij}}$$

.

Оптимізація стратегій

Другий гравець гравець за рахунок вибору оптимальних стратегій може не дати першому виграти більше чим верхня ціна гри ***в.***

Якщо в матриці гри А верхня чиста ціна гри збігаються, тобто ***α=в=v,*** то ***v*** називається чистою ціною матричної гри.

Пара стратегій двох гравців (i_0, j_0) , що реалізує чисту ціну гри називається **сідловою** точкою.

В матриці гри може бути декілька сідлових точок, а може не бути жодної.

В останньому випадку говорять. Що матрична гра не має рішення в чистих стратегіях.

Оптимізація стратегій

Якщо один гравець вибрав стратегію, що відповідає сідловій точці, то другий гравець не знайде стратегії кращої стратегії, що відповідає сідловій точці.

Для сідлової точки справедливі нерівності:

$$a_{ij_0} <= a_{i_0j_0} <= a_{i_0j}$$

Якщо існує для матричної гри хоч одна сідлова точка, то говорять, що гра має рішення в чистих стратегіях, тобто знайдена сідлова точка - ***(i₀, j₀)*** і ціна гри **v= *α=β***.

Приклади знаходження чистої ціни гри

Приклад 1

$$A=\begin{vmatrix} 5 & \color{red}{3} & 4 & \color{red}{3} \\ 7 & 2 & 0 & -2 \\ 10 & -1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

Нижня ціна гри **:**

$\boldsymbol{\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{3,-2,-4\} = 3}$

Верхня ціна гри **:**

$\boldsymbol{\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \{10,3,4,3\} = 3}$

Чиста ціна гри: α= β=v=3

Сідлові точки: (1.2), (1,4)

Приклади знаходження чистої ціни гри

Приклад 2 Гра легіонерів

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Нижня ціна гри **:**

$\alpha = max_i\ min_j\ a_{ij} = max_i\ \{-3,-2,-4,-3\} = -2$

Верхня ціна гри **:**

$\beta = min_j\ max_i\ a_{ij} = min_j\ \{3,2,4,3\} = 2$

Рішення в чистих стратегіях відсутні

Приклади знаходження чистої ціни гри

Приклад 2 Гра полковника Зотто

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Нижня ціна гри **:**

$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{0,0,-1,-2\} = 0$

Верхня ціна гри **:**

$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \{4,4,3,2\} = 2$

Рішення в чистих стратегіях відсутні

Теорема про співвідношення верхньої і нижньої чистих цін гри:

Хай ***f(x,y)*** – дійсна функція двох змінних ***x є A, y є B***.

Тоді, якщо існує $\boldsymbol{\alpha = max_x\, min_y\, f(x,y)}$ і $\boldsymbol{\beta = min_y\, max_x\, f(x,y)}$,

то завжди $\boldsymbol{\alpha <= \beta}$.

Доведення:

Очевидно, що: $\boldsymbol{min_y\, f(x,y)} <= \boldsymbol{f(x,y) <= max_x\, f(x,y)}$,

тоді: $\boldsymbol{min_y\, f(x,y)} <= \boldsymbol{max_x\, f(x,y)}$,

тоді: $\boldsymbol{max_x\, min_y\, f(x,y) <= max_x\, f(x,y)}$ ***для x є A,***

тоді: $\boldsymbol{max_x\, min_y\, f(x,y) <= min_y\, max_x\, f(x,y)}$, ***для y є B,***

тобто $\boldsymbol{\alpha <= \beta}$.

В нашому випадку можна розглянути дискретну функцію f(i,j) і теорема доведена.

Оптимальні змішані стратегії

Коли відсутні сідлові точки в матричній грі, тоді виграш знаходиться між нижньою і верхньою ціною гри, а рішення в чистих стратегіях відсутні.

Проте, якщо гру можна повторити багато разів, то можна знайти розподіл ймовірностей застосування чистих стратегій для досягнення оптимального середнього виграшу.

Пошук таких ймовірностей і оптимальної середньої ціни гри називається рішенням у змішаних стратегіях.

Оптимальні змішані стратегії

Нехай $\boldsymbol{x}(x_1,x_2,\ldots x_m)$ – ймовірності застосування чистих стратегій першим гравцем (x_i>=0, $\sum^{m}_{i=1} x_i$ =1) , $\boldsymbol{y}(y_1,y_2,\ldots y_n)$ - ймовірності застосування чистих стратегій другим гравцем (y_j>=0, $\sum^{n}_{j=1} y_j$ =1)

Середній виграш першого гравця у матричній грі визначається, як математичне очікування:

$$E(A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})= \sum_i^m \sum_j^n a_{ij} x_i y_j$$

Тепер перший гравець за рахунок вибору ймовірності своїх стратегій $\boldsymbol{x}(x_1,x_2,\ldots x_m)$ максимізує середню ціну гри, а другий гравець її мінімізує за рахунок вибору $\boldsymbol{y}(y_1,y_2,\ldots y_n)$.

Нижня і верхня ціна гри у змішаних стратегіях

Нижня ціна гри **:**

$$\boldsymbol{\alpha = \max_x \min_y} \; E(A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

Верхня ціна гри **:**

$$\boldsymbol{\beta = \min_y \max_y} \; E(A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

Тут також можливе існування сідлової точки, коли

$$\boldsymbol{\alpha = \beta.}$$

Тоді говорять про існування рішення матричної гри в змішаних стратегіях:

$$\boldsymbol{x}^0 \, (x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0), \; \boldsymbol{y}^0 \, (y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$$

з ціною гри :

$$\boldsymbol{v = \alpha = \beta =} E(A,\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0)$$

Чи завжди існує рішення гри узмішаних стратегіях?

Основна теорема матричних ігор (Неймана)

Теорема 1 : Для матричної гри з будь-якою матрицею А завжди існують такі змішані стратегії ***x, y*** , що нижня ціна гри **:**

$\boldsymbol{\alpha = \max_x \min_y} \, E(A, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

і верхня ціна гри **:**

$\boldsymbol{\beta = \min_y \max_y} \, E(A, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$

рівні між собою **:** $\boldsymbol{\alpha = \beta =} \, V,$

тобто ***завжди існує рішення гри у змішаних стратегіях.***

Як знайти рішення матричної гри у змішаних стратегіях?

Теорема 2 : Про оптимальні змішані стратегії

Для того, щоб у матричній грі з матрицею А і ціною *V* змішана стратегія $\mathbf{x}^0$ першого гравця була оптимальною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якої змішаної стратегії другого гравця **y** виконувалась нерівність**:**

$$E(A, \mathbf{x}^0, \boldsymbol{y}) \geq V$$

Для того, щоб у матричній грі з матрицею А і ціною *V* змішана стратегія $\boldsymbol{y}^0$ другого гравця була оптимальною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якої змішаної стратегії першого гравця **x** виконувалась нерівність**:**

$$E(A, \mathbf{x}, \boldsymbol{y}^0) \leq V$$

Як знайти рішення матричної гри у змішаних стратегіях?

Наслідок теореми 2: Для того, щоб у матричній грі з матрицею А і ціною V змішана стратегія $\boldsymbol{x}^0(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$ першого гравця була оптимальною, необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність**:**

$$\sum_i^m a_{ij} x_i^0 \geq V \qquad (j=1,2\ldots n)$$

Для того, щоб у матричній грі з матрицею А і ціною V змішана стратегія $\boldsymbol{y}^0\ (y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ другого гравця була оптимальною, необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність**:**

$$\sum_j^n a_{ij} y_j^0 \leq V \qquad (i=1,2\ldots m)$$

Крім того повинні виконуватись властивості ймовірностей **:**

$$\sum_i^m x_i = 1 \quad \sum_j^n y_j = 1, \text{ де } x_i \geq 0 \text{ і } y_j \geq 0.$$

Про ймовірність деяких стратегій

Теорема 3: Хай є матрична гра з матрицею A, ціною V і оптимальними стратегіями $\mathbf{x}^0$, $\boldsymbol{y}^0$. Тоді, якщо для якогось j виконується строга нерівність

$$\sum_i^m a_{ij} x_i^0 > V,$$

то $y_j^0 = 0$

Також, якщо для якогось i виконується строга нерівність

$$\sum_j^n a_{ij} y_j^0 < V,$$

то $x_i^0 = 0$

Про рішення симетричної матричної гри

Матрична гра називається симетричною, якщо її матриця А кососиметрична, тобто $a_{ij} = -a_{ji}$

Теорема 4 : Ціна симетричної матричної гри V=0, а оптимальні стратегії першого і другого гравців однакові $\mathbf{x}^0 = \boldsymbol{y}^0$.

Приклад : Гра легіонерів

$$A = \begin{matrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{matrix}$$

Знайдемо рішення гри

$V=0$, $\mathbf{x}^0 = \boldsymbol{y}^0$

Стратегії (показав, сказав) 1.(1;1), **2.(1;2), 3.(2;1),** 4.(2;2)

$$A = \begin{matrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{matrix}$$

Складемо систему нерівностей

$-2x_2+3x_3 \ge 0$, $2x_1-3x_4 \ge 0$, $-3x_1+4x_4 \ge 0$, $3x_2-4x_3 \ge 0$, $x_1+x_2+x_3+x_4=1$, $x_i \ge 0$

Шукаємо рішення у рівностях

1) $-2x_2+3x_3 = 0$, $3x_2-4x_3 = 0 \to x_2 = x_3 = 0$

$2x_1-3x_4 = 0$, $x_1+x_4=1 \to x_1 = 3/2x_4 \to x_1 = 3/5$, $x_4 = 2/5 \to -3x_1+4x_4 = -1/5<0$

$-3x_1+4x_4 = 0$, $x_1+x_4=1 \to x_1 = 4/3x_4 \to x_1 = 4/7$, $x_4 = 3/7 \to 2x_1-3x_4 = -1/9 <0$

2) $2x_1-4x_4 = 0$, $-3x_1+4x_4 = 0 \to x_1 = x_4 = 0$

$-2x_2+3x_3 = 0$, $x_2+x_3=1 \to x_2 = 3/2x_3 \to x_2 = 3/5$, $x_3 = 2/5 \to 3x_2-4x_3 = 1/5>0$

$$\mathbf{x}^0(0, 3/5, 2/5, 0) = \mathbf{y}^0(0, 3/5, 2/5, 0)$$

$3x_2 - 4x_3 = 0$, $x_2+x_3=1 \to x_2 = 4/3x_3 \to x_2 = 4/7$, $x_3 = 3/7 \to -2x_2+3x_3 = 1/7>0$

$$\mathbf{x}^0(0, 4/7, 3/7, 0) = \mathbf{y}^0(0, 4/7, 3/7, 0)$$

Домінування стратегій

Стратегія i першого гравця домінує його стратегію k, коли $a_{ij} \geq a_{kj}$, *де* $(j=1,2\ldots n)$ і хоч одна нерівність строга.

Стратегія j другого гравця домінує його стратегію p, коли $a_{ij} \leq a_{ip}$, *де* $(i=1,2\ldots m)$ і хоч одна нерівність строга.

Теорема 5 Якщо стратегія i першого гравця домінує його стратегію k, то ймовірність оптимальної стратегії k **:** $x_k=0$, при цьому, всі інші ймовірності і ціна оптимальної стратегії не зміняться. Відповідний k–й рядок можна видалити з матриці гри.

Теорема 6 Якщо стратегія j другого гравця домінує його стратегію p, то ймовірність оптимальної стратегії p **:** $y_p=0$, при цьому, всі інші ймовірності і ціна оптимальної стратегії не зміняться. Відповідний p–й стовбець можна видалити з матриці гри.

Домінування стратегій

Приклад

$$A = \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}$$

$x_2=0,\ x_4=0$

$$A1 = \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \end{array}$$

$y_2=0,\ y_3=0$

$$A2 = \begin{array}{cc} 0 & 4 \\ 1 & -4 \end{array}$$

Рішення матричної гри 2x2

Матриця гри

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

Ціна гри V, стратегії $\boldsymbol{x}(x_1,x_2)$, $\boldsymbol{y}(y_1,y_2)$

Система нерівностей

$a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 \geq V,$

$a_{12}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \geq V$

$x_1 + x_2 = 1$

$a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 \leq V,$

$a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 \leq V$

$y_1 + y_2 = 1$

Обидві системи вирішуємо в рівностях відносно x_1 , x_2 , V, y_1 , y_2

Отримаємо

$D = (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$, $x_1 = (a_{22} - a_{21})/D$, $x_2 = (a_{11} - a_{12})/D$,

$V = (a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21})/D$, $y_1 = (a_{22} - a_{12})/D$, $y_2 = (a_{11} - a_{21})/D$

Рішення матричної гри 2x2

D= $(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$, $x_1 = (a_{22} - a_{21})/D$, $x_2 = (a_{11} - a_{12})/D$,

$V = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})/D$, $y_1 = (a_{22} - a_{12})/D$, $y_2 = (a_{11} - a_{21})/D$

Приклад (продовження)

$x_2=0$, $x_4=0$

$y_2=0$, $y_3=0$

$$A2= \begin{matrix} 0 & 4 \\ 1 & -4 \end{matrix}$$

D=0-4-1-4=-9, x_1=(-4-1)/(-9)=5/9, x_3=4/9,

V=(0*(-4) -1*4)(-9)=4/9, y_1=(-4-4)/(-9)=8/9, y_4=1/9

Відповідь **x**^{0}(5/9, 0, 4/9, 0), **y**^{0}(8/9, 0, 0, 1/9), V=4/9

Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Нехай є матрична гра з матрицею A і ціною гри V. Треба знайти її рішення у змішаних стратегіях. Запишемо основні співвідношення із наслідку **теореми** 2

$$\sum_i^m a_{ij} x_i \geq V \qquad (j=1,2\ldots n)$$

$$\sum_j^n a_{ij} y_j \leq V \qquad (i=1,2\ldots m)$$

$$\sum_i^m x_i = 1$$

$$\sum_j^n y_j = 1 ,$$

де $x_i \geq 0$ і $y_j \geq 0$.

Розділимо ліві і праві частини рівнянь і нерівностей на V та введемо позначення $p_i = x_i / V$, $q_j = y_j / V$.

Отримаємо дві системи рівнянь і нерівностей

Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

$\sum_i^m a_{ij} p_i \geq 1 \qquad (j=1,2\ldots n)$

$\sum_i^m p_i = 1/V \rightarrow min$

$p_i \geq 0$

Так як оптимальні стратегії першого гравця $\mathbf{x}^0$ $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$,

максимізують ціну гри, то при $V \rightarrow max$, $1/V \rightarrow min$

Так як оптимальні стратегії другого гравця $\boldsymbol{y}^0$ $(y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$

максимізують ціну гри, то при $V \rightarrow min$, $1/V \rightarrow max$

$\sum_j^n a_{ij} q_j \leq 1 \qquad (i=1,2\ldots m)$

$\sum_j^n q_j = 1/V \rightarrow max,$

$q_j \geq 0.$

Маємо пару двоїстих задач лінійного програмування, вирішуючи які, отримаємо рішення гри $x_i^0 = p_i V$, $y_j^0 = q_j V$

Рішення гри полковника

Приклад Гра полковника

	(3;0)	(0;3)	(2;1)	(1;2)	
(4;0)	4	0	2	1	
(0;4)	0	4	1	2	
(3;1)	1	-1	3	0	= A
(1;3)	-1	1	0	3	
(2;2)	-2	-2	2	2	

V=1.555

	(7/90)	(3/90)	(32/90)	(48/90)
(40/90)	4	0	2	1
(40/90)	0	4	1	2
(0)	1	-1	3	0
(0)	-1	1	0	3
(10/90)	-2	-2	2	2