Гомогенізація волокнистого композиту із ізотропними компонентами

В цілому композит можна представити як матеріал з анізотропними властивостями. Зв'язок між напруженнями та деформаціями для анізотропного матеріалу описується узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl},$$

де σ^{ij} – компоненти тензора напружень, ε_{kl} – компоненти тензора деформацій, C^{ijkl} – компоненти тензора пружних сталих.

Таким чином, для описання пружних властивостей композиційного матеріалу необхідно знати 81 компоненту тензора C^{ijkl}. Різних компонент для анізотропного матеріалу залишається всього 21, якщо враховувати, що коефіцієнти тензора пружних сталих мають симетрію відносно індексів *i, j, k, l*:

$$C^{ijkl} = C^{klij},\ C^{ijkl} = C^{ijlk},\ C^{ijkl} = C^{jikl},\ C^{ijkl} = C^{jilk}.$$

А враховуючи, що волокнистий композиційний матеріал являє собою односпрямований армований шар (рис. 2.1), його можна розглядати як ортотропне середовище, що визначається 9 незалежними пружними сталими.

Для ортотропного матеріалу закон Гука запишеться в такому вигляді:

$$\varepsilon_{11} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{22} = a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{33} = a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{23} = a_{44}\sigma_{23},$$

$$\varepsilon_{13} = a_{55}\sigma_{13},$$

$$\varepsilon_{12} = a_{66}\sigma_{12},$$

де a_{ij} – компоненти тензора податливості.

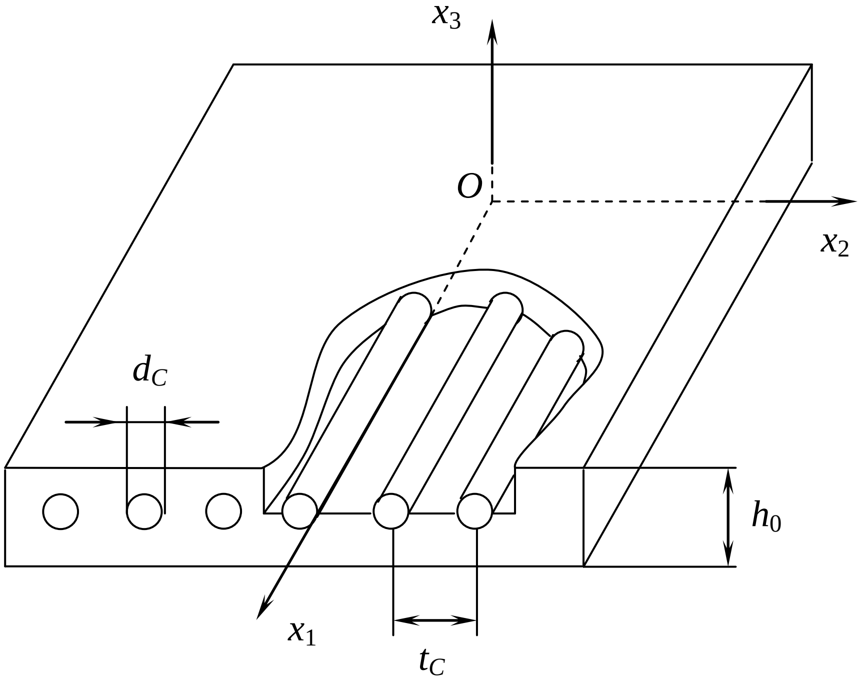

Рисунок 2.1 – Елементарний односпрямований армований шар.

Якщо перейти від компонентів тензора податливості до технічних сталих, то закон Гука запишеться у вигляді:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{22} + \frac{1}{E_3}\sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{G_{23}}\sigma_{23},$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{G_{13}}\sigma_{13},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12},$$

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1},\ \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1},\ \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2},$$

де E_1, E_2, E_3 – модулі пружності в напрямі осей x_1, x_2, x_3; G_{23}, G_{13}, G_{12} – модулі зсуву в площинках x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2; ν_{ij} $(i, j = 1,2,3; i \neq j)$ – коефіцієнти Пуассона, котрі характеризують поперечне стискання при розтягненні в напрямі осей координат (визначають скорочення в напряму осі x_j (другий індекс) при розтягненні вздовж осі x_i (перший індекс). Враховуючи напрям армування (рис.2.1), E_1 називають поздовжнім модулем пружності, а E_2, E_3 – поперечними модулями пружності, аналогічно модулі G_{13}, G_{12} називають модулями поздовжнього зсуву, G_{23} – модулем поперечного зсуву.

Якщо припустити, що частота армування волокнами достатньо велика, то армований шар можна вважати трансверсально-ізотропним із площиною ізотропії x_2Ox_3. Тоді закон Гука можна переписати у вигляді:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2}(\sigma_{22} + \sigma_{33}),$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}(\sigma_{22} - \nu_{23}\sigma_{33}),$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}(-\nu_{23}\sigma_{22} + \sigma_{33}),$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{G_{23}}\sigma_{23},$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{G_{13}}\sigma_{13},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12},$$

$$\nu_{21} = \nu_{12}\frac{E_2}{E_1},\ G_{13} = G_{12},\ \nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1.$$

Таким чином, для визначення пружних характеристик композиційного шару необхідно знайти 5 незалежних величин E_1, E_2, G_{12}, G_{23}, ν_{12}.

Існує низка схем розташування волокон в односпрямованих композиційних матеріалах, зокрема, однією з таких схем є гексагональна укладка волокон (рис. 2.2).

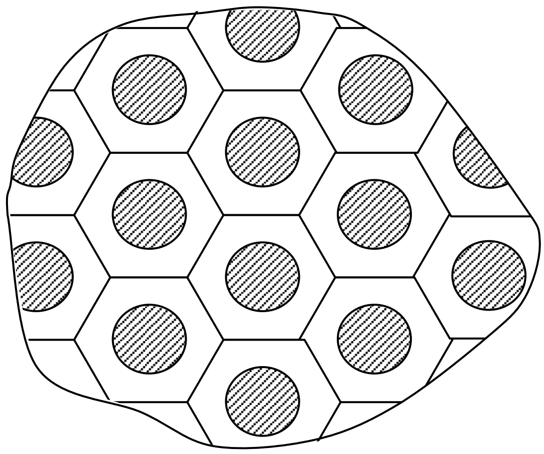

Рис. 2.2. Гексагональна укладка волокон

Припустимо, що і матриця, і волокно представлені ізотропними матеріалами. Зробимо також низку припущень: і матеріал матриці, й матеріал волокна підкорюються закону Гука, між матеріалом матриці й матеріалом волокна існує ідеальне зчеплення. В цілому розміри волокон та частота армування є такими, що композиційний матеріал можна вважати макроскопічно однорідним.

Представимо елемент волокнистого композиційного матеріалу у вигляді комбінації двох циліндрів нескінченної довжини – ізотропного порожнистого, що моделює матрицю, та ізотропного суцільного, що моделює волокно (рис.2.3).

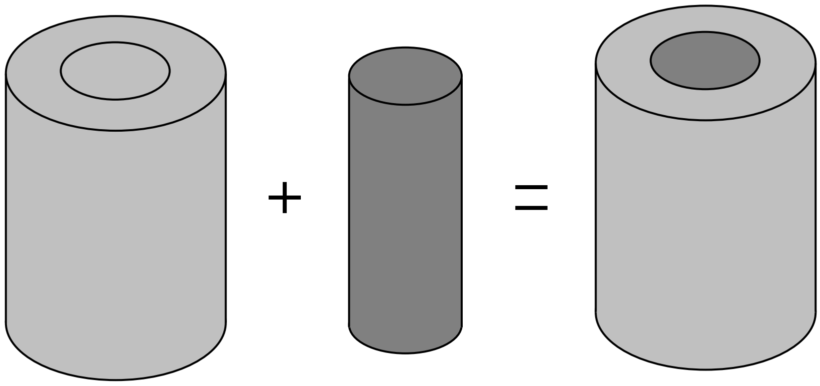

Рис. 2.3. Елемент волокнистого композита

Для цього апроксимуємо об’єм елементарної гексагональної комірки об’ємом циліндра, причому радіус циліндра приймемо таким, щоб об’ємний вміст волокна в гексагональній комірці, і об’ємний вміст волокна в циліндричній комірці були б однаковими (рис.2.4).

Якщо об'ємний вміст волокон в композиті дорівнює f, то, враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку займає волокно в елементарній комірці, мають однакову висоту, справедливе таке співвідношення:

$$f = \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2}. \tag{2.1}$$

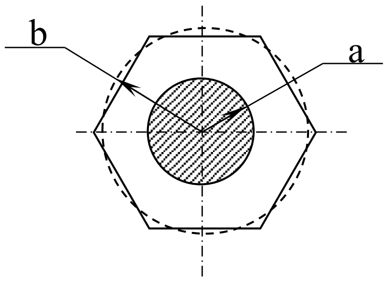

Рис. 2.4. Гексагональна комірка

Пружні сталі знаходяться із розв'язання двох крайових задач, спочатку розв'язується крайова задача сумісного деформування ізотропної матриці та ізотропного волокна. В результаті її розв'язання отримуємо компоненти напружено-деформованого стану як функції пружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, а також об'ємної частки кожного з них у композиті. Далі отримуємо розв'язок аналогічної крайової задачі для композита, котрий представляється однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом із поки що невідомими пружними сталими. В результаті розв'язання отримуємо компоненти напружено-деформованого стану як функції невідомих пружних сталих однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композит. Умовою узгодження виступає рівність деяких компонентів вектору переміщень у обох задачах. Із цієї умови знаходимо невідомі пружні сталі трансверсально-ізотропного матеріалу як функції пружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, а також об'ємної частки кожного з них в композиті.

Із наведеного вище ясно, що чим точніше розв'язана крайова задача, тим точнішими будуть пружні характеристики композита. Аналітичні розв'язки для такої комбінації можна отримати лише для обмеженого кола крайових задач. До числа таких задач належать: рівномірне поздовжнє розтягнення, рівномірне поперечне розтягнення, чистий поперечний зсув та чистий поздовжній зсув.

Розглянемо вісесиметричний напружено-деформований стан циліндричного тіла, тоді $\sigma_{zz} = \sigma_0$, $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r)$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r)$, $\sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0$. Основні формули для циліндричної системи координат наведені наприкінці лекцій в додатку А. Перші два з рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + G_r = 0;$$
$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + G_\theta = 0;$$
$$\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + G_z = 0.$$

виконуються тотожно, а третє рівняння при масовій силі $G_r = 0$ набуде вигляду:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \qquad (2.2)$$

Якщо вважати осьове напруження сталим, зокрема нульовим, то тоді з закону Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{zz} + \frac{1}{E_2}\sigma_{rr} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{\theta\theta} =$$
$$= \frac{1}{E_2}\left(\sigma_{rr} - (\nu_{21}\sigma_{zz} + \nu_{23}\sigma_{\theta\theta})\right);$$
$$\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{zz} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{rr} + \frac{1}{E_2}\sigma_{\theta\theta} =$$
$$= \frac{1}{E_2}\left(\sigma_{\theta\theta} - (\nu_{21}\sigma_{zz} + \nu_{23}\sigma_{rr})\right);$$

витікає, що $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}(r)$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}(r)$ і, відповідно, $\varepsilon_{zz} = const$. Тоді з урахуванням співвідношень Коші для вісесиметричного напружено-деформованого стану рівняння (2.2) запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \qquad (2.3)$$

Розв’язок цієї задачі має вигляд:

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \qquad (2.4)$$

де C_1 і C_2 – сталі, що визначаються з граничних умов.

Звідси отримуємо:

$$\varepsilon_{rr}(r) = \frac{\partial u_r}{\partial r} = C_1 - \frac{C_2}{r^2};$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r) = \frac{u_r}{r} = C_1 + \frac{C_2}{r^2}. \tag{2.5}$$

Скориставшись співвідношеннями закону Гука, запишемо наступні вирази:

$$\sigma_{rr} = \frac{E_2\left(\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_{zz} + C_1(1+\nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2}(\nu_{23} + 2\nu_{12}\nu_{21} - 1)\right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}};$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_2\left(\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_{zz} + C_1(1+\nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2}(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})\right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}. \tag{2.6}$$

Підставляючи отримані співвідношення та значення $\sigma_{zz} = \sigma_0$ у вираз для ε_{zz} знайдемо співвідношення:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1-\nu_{23})} = const. \tag{2.7}$$

Звідки отримаємо вирази для осьових переміщень:

$$u_z(z) = \int \varepsilon_{zz} dz = \int \left(\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1-\nu_{23})}\right) dz =$$

$$= \left(\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1-\nu_{23})}\right) z + C_3. \tag{2.8}$$

За умови $u_z(0) = 0$, маємо $C_3 = 0$. І співвідношення (2.8) запишеться в вигляді:

$$u_z(z) = \left(\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1-\nu_{23})}\right) z. \tag{2.9}$$

З урахуванням отриманого співвідношення (2.9) вирази для напружень набудуть вигляду:

$$\sigma_{rr}(r) = E_2\left(\frac{\sigma_0 \nu_{12}}{E_1(1-\nu_{23})} + \frac{C_1}{1-\nu_{23}} - \frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})}\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = E_2\left(\frac{\sigma_0 \nu_{12}}{E_1(1-\nu_{23})} + \frac{C_1}{1-\nu_{23}} + \frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})}\right). \quad (2.10)$$

Таким чином, для вісесиметричного напружено-деформованого стану отримані всі компоненти напружень, деформацій і переміщень, як функції пружних характеристик матеріалу і сталих, які знаходяться з крайових умов.

Поздовжнє розтягнення. Розглянемо сумісне поздовжнє розтягнення (рис.2.5а) суцільного циліндра $(0 \leq r \leq a)$, що моделює волокно, і порожнистого циліндра $(a \leq r \leq b)$, що моделює матрицю.

Крайові умови підберемо таким чином, щоб вони відповідали експериментальним даним, отриманим для композиційного матеріалу. В місці зчеплення волокна з матрицею відсутній стрибок за радіальним переміщенням та радіальним напруженням, осьові переміщення і волокна, й матриці сталі й однакові:

$$\sigma_{rr}^{\circ}(a) = \sigma_{rr}^{*}(a), u_r^{\circ}(a) = u_r^{*}(a), u_z^{\circ}(h) = u_z^{*}(h). \quad (2.11)$$

Тут і далі символ $\circ$ означає величини, що відносяться до волокна, а символом * – величини, що відносяться до матриці.

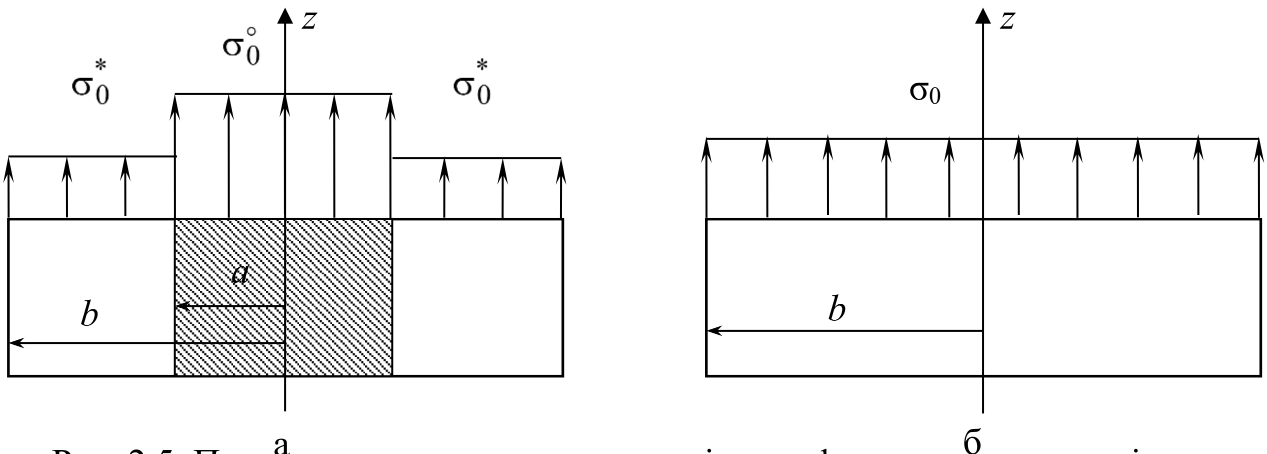

Рис. 2.5. Поздовжнє розтягнення: а – сумісне деформування матриці та волокна; б – деформування композита

Крім цього, крайові умови в напруженнях при сумісному деформуванні матриці й волокна запишуться таким чином:

$$\sigma_{rr}^{*}(b) = 0. \quad (2.12)$$

Радіальні переміщення ізотропного волокна будуть описуватися співвідношенням (2.4), а з урахуванням того, що при $r = 0$ $u_r^\circ(0) = 0$ випливає, що $C_2 = 0$, тоді співвідношення (2.4) запишуться у вигляді (перепозначимо C_1 на C):

$$u_r^\circ(r) = Cr. \tag{2.13}$$

Тоді напружено-деформований стан ізотропного волокна буде описуватися, окрім (2.13), такими співвідношеннями:

$$u_z^\circ(z) = \frac{1}{(1-\nu^\circ)}\left(\frac{\sigma_0^\circ(1-\nu^\circ - 2(\nu^\circ)^2)}{E^\circ} - 2C\nu^\circ\right)z, \tag{2.14}$$

$$\sigma_{rr}^\circ(r) = \frac{E^\circ}{(1-\nu^\circ)}\left(\frac{\sigma_0^\circ\nu^\circ}{E^\circ} + C\right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^\circ(r) = \frac{E^\circ}{(1-\nu^\circ)}\left(\frac{\sigma_0^\circ\nu^\circ}{E^\circ} + C\right). \tag{2.15}$$

Аналогічно запишемо співвідношення, які описують напружено-деформований стан ізотропної матриці (перепозначимо C_1 на A, а C_2 на B):

$$u_r^*(r) = Ar + \frac{B}{r};$$

$$u_z^*(z) = \frac{1}{(1-\nu^*)}\left(\frac{\sigma_0^*(1-\nu^* - 2(\nu^*)^2)}{E^*} - 2A\nu^*\right)z, \tag{2.16}$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E^*\left(\frac{\sigma_0^*\nu^*}{E^*(1-\nu^*)} + \frac{A}{1-\nu^*} - \frac{B}{r^2(1+\nu^*)}\right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E^*\left(\frac{\sigma_0^*\nu^*}{E^*(1-\nu^*)} + \frac{A}{1-\nu^*} + \frac{B}{r^2(1+\nu^*)}\right). \tag{2.17}$$

Виходячи з крайових умов (2.11), (2.12) знайдемо тепер сталі A, B, C та залежність між σ_0° та σ_0^*. Із другої рівності (2.11) маємо:

$$C = A + \frac{B}{a^2}. \tag{2.18}$$

Із рівності (2.12) отримуємо:

$$A = \frac{B}{b^2}\frac{(1-\nu^*)}{(1+\nu^*)} - \frac{\sigma_0^*\nu^*}{E^*}. \tag{2.19}$$

Тоді (2.18) запишеться у вигляді:

$$C = B\left(\frac{f(1-\nu^*) + (1+\nu^*)}{a^2(1+\nu^*)}\right) - \frac{\sigma_0^*\nu^*}{E^*}. \qquad (2.20)$$

Із першої рівності (2.11) маємо:

$$B = \left(\frac{\sigma_0^\circ\nu^\circ}{E^\circ} - \frac{\sigma_0^*\nu^*}{E^*}\right)\times$$

$$\times\frac{a^2E^\circ(1+\nu^*)}{E^*(f-1)(1-\nu^\circ) - E^\circ\left(f(1-\nu^*) + (1+\nu^*)\right)}, \quad (2.21)$$

Позначимо

$$d_1 = E^*(f-1)(1-\nu^\circ),\ d_2 = E^\circ\left(f(1-\nu^*) + (1+\nu^*)\right). \quad (2.22)$$

Тоді

$$B = \frac{\nu^\circ a^2(1+\nu^*)}{d_1 - d_2}\sigma_0^\circ - \frac{a^2E^\circ(1+\nu^*)}{d_1-d_2}\frac{\nu^*}{E^*}\sigma_0^*;$$

$$C = \frac{d_2}{d_1-d_2}\frac{\nu^\circ}{E^\circ}\sigma_0^\circ - \frac{\nu^*}{E^*}\frac{d_1}{d_1-d_2}\sigma_0^*;$$

$$A = \frac{f\nu^\circ(1-\nu^*)}{d_1-d_2}\sigma_0^\circ - \frac{\nu^*}{E^*}\frac{fE^\circ(1-\nu^*) + d_1 - d_2}{d_1-d_2}\sigma_0^*. \quad (2.23)$$

Нарешті, з третьої рівності (2.11) знаходимо співвідношення між σ_0^* та σ_0°:

$$\left(\frac{(1-2(\nu^\circ)^2-\nu^\circ)(d_1-d_2)}{E^\circ(1-\nu^\circ)} - \frac{2\nu^\circ\nu^\circ d_2}{E^\circ(1-\nu^\circ)} + \frac{2f\nu^\circ\nu^*}{1}\right)\sigma_0^\circ =$$

$$= \left(\frac{(1-2(\nu^*)^2-\nu^*)(d_1-d_2)}{E^*(1-\nu^*)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(\nu^*)^2(fE^\circ(1-\nu^*) + d_1 - d_2)}{E^*(1-\nu^*)} - \frac{2\nu^*\nu^\circ d_1}{E^*(1-\nu^\circ)}\right)\sigma_0^*. \quad (2.24)$$

Позначивши

$$d^\circ = (E^*(f-1)(1-\nu^\circ - 2(\nu^\circ)^2) -$$

$$-E^\circ\left(f(1-\nu^* - 2\nu^\circ\nu^*) + (1+\nu^*)\right))/E^\circ;$$

$$d^* = (E^*(f-1)(1-\nu^\circ - 2\nu^*\nu^\circ) -$$

$$-E^{\circ}\ \left(f(1-\nu^{*}\ -2(\nu^{*}\ )^{2})+(1+\nu^{*}\ )\right)\Big)/E^{*}\ , \tag{2.25}$$

отримуємо

$$d^{\circ}\sigma_0^{\circ}=d^{*}\sigma_0^{*}. \tag{2.26}$$

Ефективні пружні сталі волокнистого композиту із транстропними компонентами при лінійних деформаціях

Розглянемо тепер аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу (рис. 2.5б). В цьому випадку поле напружень буде визначатися такими співвідношеннями:

$$\sigma_{zz}=\sigma_0,\sigma_{rr}=0,\sigma_{\theta\theta}=0,\sigma_{zr}=\sigma_{\theta z}=\sigma_{r\theta}=0. \tag{2.27}$$

Причому для того, щоб збіглися умови рівноваги для обох задач, необхідно, щоб виконувалися умови:

$$\pi a^2\sigma_0^{\circ}+\pi(b^2-a^2)\sigma_0^{*}=\pi b^2\sigma_0,$$

або

$$\sigma_0^{\circ}f+\sigma_0^{*}(1-f)=\sigma_0. \tag{2.28}$$

З урахуванням (2.26) отримаємо:

$$\sigma_0^{*}=\frac{\sigma_0 d^{\circ}}{d^{\circ}+f(d^{*}-d^{\circ})},\sigma_0^{\circ}=\frac{\sigma_0 d^{*}}{d^{\circ}+f(d^{*}-d^{\circ})}. \tag{2.29}$$

З урахуванням (2.27) співвідношення (А.34), (А.36) (наприкінці лекцій) набудуть вигляду:

$$\varepsilon_{rr}=-\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0;\ \varepsilon_{zz}=\frac{1}{E_1}\sigma_0. \tag{2.30}$$

Тоді переміщення, згідно з (А.1), (А.5), будуть визначатися формулами:

$$u_r(r)=-\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0 r+C_1;\ u_z(z)=\frac{1}{E_1}\sigma_0 z+C_2. \tag{2.31}$$

Сталі $C_1 = C_2 = 0$ з урахуванням того, що для цієї задачі будуть виконуватися умови $u_r(0) = 0$ та $u_z(0) = 0$, тоді

$$u_r(r) = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0 r;\ u_z(z) = \frac{1}{E_1}\sigma_0 z. \tag{2.32}$$

Будемо вважати, що як умови узгодження для задачі про поздовжнє розтягнення однорідного трасверсально-ізотропного композита та задачі про сумісне поздовжнє розтягнення матриці й волокна будуть виступати рівність осьових переміщень для довільної осьової координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні:

$$u_r(b) = u_r^*(b); u_z(h) = u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \tag{2.33}$$

Тоді друге зі співвідношень (2.33) з урахуванням (2.16) та (2.32) запишеться у вигляді:

$$\frac{\sigma_0^*(1-\nu^* - 2(\nu^*)^2)}{E^*\left(1-\nu^*\right)} - \frac{2A\nu^*}{\left(1-\nu^*\right)} = \frac{1}{E_1}\sigma_0, \tag{2.34}$$

а з урахуванням (2.23) та (2.29) отримаємо співвідношення:

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{d^\circ + f(d^* - d^\circ)}\left(-\frac{2\nu^* f\nu^\circ}{d_1 - d_2}d^* + \right.$$
$$+\left(\frac{(1-\nu^* - 2(\nu^*)^2)}{E^*\left(1-\nu^*\right)} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{2\nu^*}{\left(1-\nu^*\right)}\frac{\nu^*}{E^*}\frac{fE^\circ(1-\nu^*) + d_1 - d_2}{d_1 - d_2}\right)d^\circ\right). \tag{2.35}$$

Після перетворень отримуємо формулу для визначення поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними матрицею і волокном:

$$E_1 = \frac{(\alpha - 2\nu^\circ\beta)E^*(1-f) + (\alpha - 2\nu^*\beta)E^\circ f}{\alpha - 2\beta\nu^\circ + 2f\nu^* E^\circ\left(\nu^\circ - \nu^*\right)}, \tag{2.36}$$

з урахуванням співвідношень

$$\alpha = E^*(1-f)(1-\nu^\circ) + E^\circ\left(f(1-\nu^*) + (1+\nu^*)\right);$$
$$\beta = \nu^\circ E^*(1-f) + \nu^* fE^\circ. \tag{2.37}$$

Із першої з умов (2.33) знайдемо співвідношення $-\nu_{21}/E_2$ для композиційного матеріалу. Тоді, з урахуванням виразу для A (2.23), отримуємо

$$\frac{f\nu^{\circ}\,(1-\nu^{*}\,)}{d_1-d_2}\sigma_0^{\circ}-\frac{\nu^{*}}{E^{*}}\frac{fE^{\circ}\,(1-\nu^{*}\,)+d_1-d_2}{d_1-d_2}\sigma_0^{*}+\frac{B}{b^2}=$$

$$=-\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0. \tag{2.38}$$

Підставляючи в останній вираз співвідношення для B (2.23), з урахуванням (2.29), остаточно отримуємо:

$$-\frac{\nu_{21}}{E_2}=\frac{1}{d^{\circ}+f(d^{*}-d^{\circ})}\left(\frac{2f\nu^{\circ}\,d^{*}}{d_1-d_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu^{*}}{E^{*}}\frac{(2fE^{\circ}\,+d_1-d_2)d^{\circ}}{d_1-d_2}\right). \tag{2.39}$$

Або, використовуючи співвідношення між коефіцієнтами Пуассона і модулями пружності анізотропного матеріалу, отримуємо співвідношення для коефіцієнта Пуассона ν_{12}:

$$\nu_{12}=\frac{(\alpha-2\beta\nu^{\circ}\,)\nu^{*}\,+2E^{\circ}\,f(\nu^{\circ}\,-\nu^{*}\,)}{\alpha-2\beta\nu^{\circ}\,+2f\nu^{*}\,E^{\circ}\left(\nu^{\circ}\,-\nu^{*}\,\right)}. \tag{2.40}$$

ДОДАТОК А

ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \tag{A.1}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \tag{A.2}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \tag{A.3}$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \tag{A.4}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \tag{A.5}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \tag{A.6}$$

Рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + G_r = 0; \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + G_\theta = 0; \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + G_z = 0. \tag{A.9}$$

Закон Гука для ізотропного матеріалу:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{rr} - \frac{3\nu}{1+\nu}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})\right); \quad (А.10)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{3\nu}{1+\nu}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})\right); \quad (А.11)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{zz} - \frac{3\nu}{1+\nu}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})\right); \quad (А.12)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{\theta z}; \quad (А.13)$$

$$\gamma_{zr} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{zr}; \quad (А.14)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{r\theta}, \quad (А.15)$$

або

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2G}\left(\frac{1-2\nu}{1+\nu}\sigma_{rr} - \frac{3\nu}{1+\nu}(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})\right); \quad (А.16)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2G}\left(\frac{1-2\nu}{1+\nu}\sigma_{\theta\theta} - \frac{3\nu}{1+\nu}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})\right); \quad (А.17)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2G}\left(\frac{1-2\nu}{1+\nu}\sigma_{zz} - \frac{3\nu}{1+\nu}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})\right); \quad (А.18)$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\sigma_{zr}}{G}; \quad (А.19)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\sigma_{\theta z}}{G}; \quad (А.20)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{G}. \quad (А.21)$$

Зворотний закон Гука:

$$\sigma_{rr} = 2G\left(\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})\right); \quad (А.22)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G\left(\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})\right); \quad (А.23)$$

$$\sigma_{zz} = 2G\left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}\right)\right); \qquad (А.24)$$

$$\sigma_{\theta z} = G\gamma_{\theta z}; \qquad (А.25)$$

$$\sigma_{zr} = G\gamma_{zr}; \qquad (А.26)$$

$$\sigma_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}, \qquad (А.27)$$

або

$$\sigma_{rr} = 2G\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}\right)\right); \qquad (А.28)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}\right)\right); \qquad (А.29)$$

$$\sigma_{zz} = 2G\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}\right)\right); \qquad (А.30)$$

$$\sigma_{\theta z} = G\gamma_{\theta z}; \qquad (А.31)$$

$$\sigma_{zr} = G\gamma_{zr}; \qquad (А.32)$$

$$\sigma_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}. \qquad (А.33)$$

Рівняння стану трансверсально-ізотропного матеріалу:

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{zz} + \frac{1}{E_2}\sigma_{rr} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_2}\left(\sigma_{rr} - \left(\nu_{21}\sigma_{zz} + \nu_{23}\sigma_{\theta\theta}\right)\right); \qquad (А.34)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{zz} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{rr} + \frac{1}{E_2}\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_2}\left(\sigma_{\theta\theta} - \left(\nu_{21}\sigma_{zz} + \nu_{23}\sigma_{rr}\right)\right); \qquad (А.35)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1}\sigma_{zz} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{rr} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_1}\left(\sigma_{zz} - \nu_{12}\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\right)\right); \qquad (А.36)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2\left(1+\nu_{23}\right)}{E_2}\sigma_{r\theta}; \qquad (А.37)$$

$$\gamma_{zr} = \frac{1}{G_{12}}\sigma_{zr}; \qquad (А.38)$$

$$\gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_{12}}\sigma_{z\theta}. \qquad (А.39)$$

Зворотний закон Гука для ортотропного матеріалу:

$$\sigma_{zz} = \frac{E_1\left(\left(1-\nu_{23}\nu_{32}\right)\varepsilon_{zz} + \left(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}\right)\varepsilon_{rr} + \left(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}\right)\varepsilon_{\theta\theta}\right)}{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{13}\nu_{31}-\nu_{23}\nu_{32}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}; \qquad (A.40)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E_2\left(\left(\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13}\right)\varepsilon_{zz} + \left(1-\nu_{13}\nu_{31}\right)\varepsilon_{rr} + \left(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}\right)\varepsilon_{\theta\theta}\right)}{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{13}\nu_{31}-\nu_{23}\nu_{32}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}; \qquad (A.41)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_3\left(\left(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}\right)\varepsilon_{zz} + \left(\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}\right)\varepsilon_{rr} + \left(1-\nu_{12}\nu_{21}\right)\varepsilon_{\theta\theta}\right)}{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{13}\nu_{31}-\nu_{23}\nu_{32}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}; \qquad (A.42)$$

$$\sigma_{zr} = G_{12}\gamma_{zr}; \qquad (A.43)$$

$$\sigma_{z\theta} = G_{31}\gamma_{z\theta}; \qquad (A.44)$$

$$\sigma_{r\theta} = G_{23}\gamma_{r\theta}. \qquad (A.45)$$

Зворотний закон Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу:

$$\sigma_{zz} = \frac{E_1\left(\left(1-\nu_{23}^2\right)\varepsilon_{zz} + \nu_{21}\left(1+\nu_{23}\right)\varepsilon_{rr} + \nu_{21}\left(1+\nu_{23}\right)\varepsilon_{\theta\theta}\right)}{1-2\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}^2-2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \qquad (A.46)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E_2\left(\nu_{12}\left(1+\nu_{23}\right)\varepsilon_{zz} + \left(1-\nu_{12}\nu_{21}\right)\varepsilon_{rr} + \left(\nu_{23}+\nu_{12}\nu_{21}\right)\varepsilon_{\theta\theta}\right)}{1-2\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}^2-2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \qquad (A.47)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_2\left(\nu_{12}\left(1+\nu_{23}\right)\varepsilon_{zz} + \left(\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}\right)\varepsilon_{rr} + \left(1-\nu_{12}\nu_{21}\right)\varepsilon_{\theta\theta}\right)}{1-2\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}^2-2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \qquad (A.48)$$

$$\sigma_{zr} = G_{12}\gamma_{zr}; \qquad (A.49)$$

$$\sigma_{z\theta} = G_{12}\gamma_{z\theta}; \qquad (A.50)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E_2}{2\left(1+\nu_{23}\right)}\gamma_{r\theta}. \qquad (A.51)$$