Гомогенізація волокнистого композиту із транстропними компонентами при лінійних деформаціях

Розглянемо гексагональну укладку волокон у випадку, коли анізотропні властивості мають і матеріал матриці, і матеріал волокна. Припустимо, що і матриця, і волокно представлені трансверсально-ізотропними матеріалами, причому площини ізотропії збігаються й розташовані перпендикулярно осі волокна. Зробимо також низку припущень: і матеріал матриці, й матеріал волокна підкорюються закону Гука, між матеріалом матриці й матеріалом волокна існує ідеальне зчеплення. В цілому розміри волокон та частота армування є такими, що композиційний матеріал можна вважати макроскопічно однорідним.

Представимо елемент волокнистого композиційного матеріалу, що має трансверсально-ізотропні властивості, у вигляді комбінації двох циліндрів нескінченної довжини – трансверсально-ізотропного порожнистого, що моделює матрицю, та трансверсально-ізотропного суцільного, що моделює волокно.

Для цього апроксимуємо об’єм елементарної гексагональної комірки об’ємом циліндра, причому радіус циліндра приймемо таким, щоб об’ємний вміст волокна в гексагональній комірці, і об’ємний вміст волокна в циліндричній комірці були б однаковими (рис. 3.1).

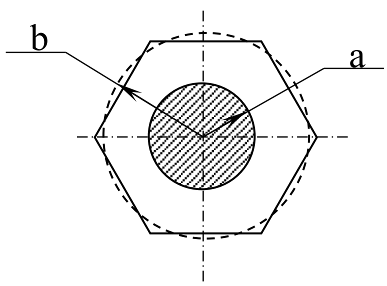

Рис. 3.1. Гексагональна комірка

Якщо об’ємний вміст волокон в композиті дорівнює f, то, враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку займає волокно в елементарній комірці, мають однакову висоту, справедливе таке співвідношення:

$$f = \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2}. \qquad (3.1)$$

Пружні сталі знаходяться із розв’язання двох крайових задач, спочатку розв’язується крайова задача сумісного деформування трансверсально-ізотропної матриці та трансверсально-ізотропного волокна. В результаті її розв’язання отримуємо компоненти напружено-деформованого стану як функції пружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, а також об’ємної частки кожного з них у композиті. Далі отримуємо розв’язок аналогічної крайової задачі для композита, котрий представляється однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом із поки що невідомими пружними сталими. В результаті розв’язання отримуємо компоненти напружено-деформованого стану як функції невідомих пружних сталих однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композит. Умовою узгодження виступає рівність деяких компонентів вектору переміщень у обох задачах. Із цієї умови знаходимо невідомі пружні сталі трансверсально-ізотропного матеріалу як функції пружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, а також об’ємної частки кожного з них в композиті.

Із наведеного вище ясно, що чим точніше розв’язана крайова задача, тим точнішими будуть пружні характеристики композита. Аналітичні розв’язки для такої комбінації можна отримати лише для обмеженого кола крайових задач. До числа таких задач належать: рівномірне поздовжнє розтягнення, рівномірне поперечне розтягнення, чистий поперечний зсув та чистий поздовжній зсув.

Розглянемо вісесиметричний напружено-деформований стан циліндричного тіла, тоді $\sigma_{zz} = \sigma_0$, $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r)$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r)$, $\sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0$. Рівняння рівноваги, виконуються тотожно, окрім рівняння:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \qquad (3.2)$$

Якщо вважати осьове напруження сталим, зокрема нульовим, то тоді витікає, що $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}(r)$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}(r)$ і, відповідно, $\varepsilon_{zz} = const$. Тоді для вісесиметричного напружено-деформованого стану рівняння (3.2) запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \tag{3.3}$$

Розв'язок цієї задачі має вигляд:

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \tag{3.4}$$

де C_1 і C_2 – сталі, що визначаються з граничних умов.

Звідси, отримуємо:

$$\varepsilon_{rr}(r) = \frac{\partial u_r}{\partial r} = C_1 - \frac{C_2}{r^2};$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}(r) = \frac{u_r}{r} = C_1 + \frac{C_2}{r^2}. \tag{3.5}$$

Скориставшись співвідношеннями закону Гука, запишемо наступні вирази:

$$\sigma_{rr} = \frac{E_2\left(\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_{zz} + C_1(1+\nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2}(\nu_{23} + 2\nu_{12}\nu_{21} - 1)\right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}};$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_2\left(\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_{zz} + C_1(1+\nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2}(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})\right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}. \tag{3.6}$$

Враховуючи отримані співвідношення та значення $\sigma_{zz} = \sigma_0$), знайдемо співвідношення для ε_{zz}:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_0(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1-\nu_{23})} = const. \quad (3.7)$$

А для осьових переміщень, матимемо:

$$u_z(z) = \int \varepsilon_{zz} dz = \int \left(\frac{\sigma_0(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1-\nu_{23})}\right) dz =$$
$$= \left(\frac{\sigma_0(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1-\nu_{23})}\right) z + C_3. \quad (3.8)$$

За умови $u_z(0) = 0$, маємо $C_3 = 0$. І співвідношення (3.8) запишеться в вигляді:

$$u_z(z) = \left(\frac{\sigma_0(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1-\nu_{23})}\right) z. \quad (3.9)$$

З урахуванням отриманого співвідношення (3.9) вирази для напружень набудуть вигляду:

$$\sigma_{rr}(r) = E_2\left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1(1-\nu_{23})} + \frac{C_1}{1-\nu_{23}} - \frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})}\right),$$
$$\sigma_{\theta\theta}(r) = E_2\left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1(1-\nu_{23})} + \frac{C_1}{1-\nu_{23}} + \frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})}\right). \quad (3.10)$$

Таким чином, для вісесиметричного напружено-деформованого стану отримані всі компоненти напружень, деформацій і переміщень, як функції пружних характеристик матеріалу і сталих, які знаходяться з крайових умов.

Поздовжнє розтягнення. Розглянемо сумісне поздовжнє розтягнення (рис.3.2а) суцільного циліндра $(0 \leq r \leq a)$, що моделює волокно, і порожнистого циліндра $(a \leq r \leq b)$, що моделює матрицю.

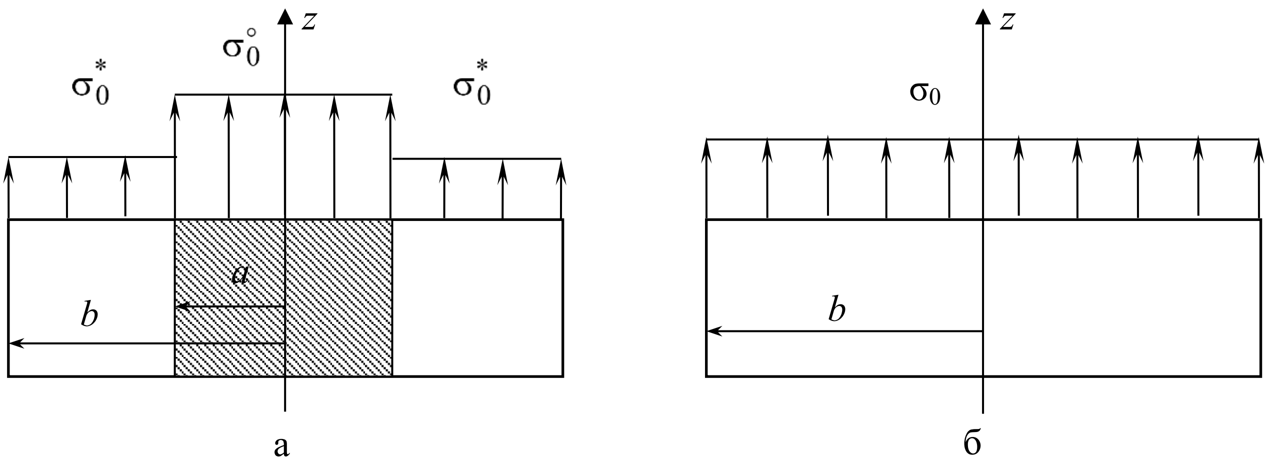

Рис. 3.2. Поздовжнє розтягнення: а – сумісне деформування матриці та волокна; б – деформування композита

Крайові умови підберемо таким чином, щоб вони відповідали експериментальним даним, отриманим для композиційного матеріалу. В місці зчеплення волокна з матрицею відсутній стрибок за радіальним переміщенням та радіальним напруженням, осьові переміщення і волокна, й матриці сталі й однакові:

$$\sigma_{rr}^{\circ}(a) = \sigma_{rr}^{*}(a), u_r^{\circ}(a) = u_r^{*}(a), u_z^{\circ}(h) = u_z^{*}(h). \qquad (3.11)$$

Тут і далі символ $\circ$ означає величини, що відносяться до волокна, а символом * – величини, що відносяться до матриці.

Крім цього, крайові умови в напруженнях при сумісному деформуванні матриці й волокна запишуться таким чином:

$$\sigma_{rr}^{*}(b) = 0. \qquad (3.12)$$

Радіальні переміщення трансверсально-ізотропного волокна будуть описуватися співвідношенням (3.4), а з урахуванням того, що при $r = 0$ $u_r^\circ(0) = 0$ випливає, що $C_2 = 0$, тоді співвідношення (3.4) запишуться у вигляді (перепозначимо C_1 на C):

$$u_r^\circ(r) = Cr. \tag{3.13}$$

Тоді напружено-деформований стан трансверсально-ізотропного волокна буде описуватися, окрім (3.13), такими співвідношеннями:

$$u_z^\circ(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^\circ)}\left(\frac{\sigma_0^\circ(1-\nu_{23}^\circ-2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ\right)z, \tag{3.14}$$

$$\sigma_{rr}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)}\left(\frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C\right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)}\left(\frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C\right). \tag{3.15}$$

Аналогічно запишемо співвідношення, які описують напружено-деформований стан трансверсально-ізотропної матриці (перепозначимо C_1 на A, а C_2 на B):

$$u_r^*(r) = Ar + \frac{B}{r};$$

$$u_z^*(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^*)}\left(\frac{\sigma_0^*(1-\nu_{23}^*-2\nu_{12}^*\nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^*\right)z, \tag{3.16}$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E_2^*\left(\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*(1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} - \frac{B}{r^2(1+\nu_{23}^*)}\right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E_2^*\left(\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*(1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} + \frac{B}{r^2(1+\nu_{23}^*)}\right). \tag{3.17}$$

Виходячи з крайових умов (3.11), (3.12) знайдемо тепер сталі A, B, C та залежність між σ_0° та σ_0^*. Із другої рівності (3.11) маємо:

$$C = A + \frac{B}{a^2}. \qquad (3.18)$$

Із рівності (3.12) отримуємо:

$$A = \frac{B}{b^2}\frac{(1-\nu_{23}^*)}{(1+\nu_{23}^*)} - \frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*}. \qquad (3.19)$$

Тоді (3.18) запишеться у вигляді:

$$C = B\left(\frac{f(1-\nu_{23}^*) + (1+\nu_{23}^*)}{a^2(1+\nu_{23}^*)}\right) - \frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*}. \qquad (3.20)$$

Із першої рівності (3.11) маємо:

$$B = \left(\frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} - \frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*}\right)\times$$
$$\times\frac{a^2E_2^\circ(1+\nu_{23}^*)}{E_2^*(f-1)(1-\nu_{23}^\circ) - E_2^\circ\big(f(1-\nu_{23}^*) + (1+\nu_{23}^*)\big)}, \qquad (3.21)$$

Позначимо

$$d_1 = E_2^*(f-1)(1-\nu_{23}^\circ),\ d_2 = E_2^\circ\big(f(1-\nu_{23}^*) + (1+\nu_{23}^*)\big). \qquad (3.22)$$

Тоді

$$B = \frac{\nu_{21}^{\circ} a^2 (1+\nu_{23}^{*})}{d_1 - d_2}\sigma_0^{\circ} - \frac{a^2 E_2^{\circ}(1+\nu_{23}^{*})}{d_1 - d_2}\frac{\nu_{12}^{*}}{E_1^{*}}\sigma_0^{*};$$

$$C = \frac{d_2}{d_1 - d_2}\frac{\nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}}\sigma_0^{\circ} - \frac{\nu_{12}^{*}}{E_1^{*}}\frac{d_1}{d_1 - d_2}\sigma_0^{*};$$

$$A = \frac{f\nu_{21}^{\circ}(1-\nu_{23}^{*})}{d_1 - d_2}\sigma_0^{\circ} - \frac{\nu_{12}^{*}}{E_1^{*}}\frac{fE_2^{\circ}(1-\nu_{23}^{*}) + d_1 - d_2}{d_1 - d_2}\sigma_0^{*}. \quad (3.23)$$

Нарешті, з третьої рівності (3.11) знаходимо співвідношення між σ_0^{*} та σ_0°:

$$\left(\frac{(1-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}-\nu_{23}^{\circ})(d_1-d_2)}{E_1^{\circ}(1-\nu_{23}^{\circ})} - \frac{2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}d_2}{E_1^{\circ}(1-\nu_{23}^{\circ})} + \frac{2f\nu_{21}^{\circ}\nu_{21}^{*}}{1}\right)\sigma_0^{\circ} =$$
$$= \left(\frac{(1-2\nu_{12}^{*}\nu_{21}^{*}-\nu_{23}^{*})(d_1-d_2)}{E_1^{*}(1-\nu_{23}^{*})} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\nu_{12}^{*}\nu_{21}^{*}(fE_2^{\circ}(1-\nu_{23}^{*}) + d_1 - d_2)}{E_1^{*}(1-\nu_{23}^{*})} - \frac{2\nu_{12}^{*}\nu_{21}^{\circ}d_1}{E_1^{*}(1-\nu_{23}^{\circ})}\right)\sigma_0^{*}. \quad (3.24)$$

Позначивши

$$d^{\circ} = (E_2^{*}(f-1)(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}) -$$
$$- E_2^{\circ}\big(f(1-\nu_{23}^{*}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{*}) + (1+\nu_{23}^{*})\big)\Big)\Big/E_1^{\circ};$$
$$d^{*} = (E_2^{*}(f-1)(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{*}\nu_{21}^{\circ}) -$$
$$- E_2^{\circ}\big(f(1-\nu_{23}^{*}-2\nu_{12}^{*}\nu_{21}^{*}) + (1+\nu_{23}^{*})\big)\Big)\Big/E_1^{*}, \quad (3.25)$$

Отримуємо

$$d^{\circ}\sigma_0^{\circ} = d^{*}\sigma_0^{*}. \quad (3.26)$$

Ефективні пружні сталі волокнистого композиту із транстропними компонентами при лінійних деформаціях

Розглянемо тепер аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу (рис. 3.2б). В цьому випадку поле напружень буде визначатися такими співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \sigma_{rr} = 0, \sigma_{\theta\theta} = 0, \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0. \quad (3.27)$$

Причому для того, щоб збіглися умови рівноваги для обох задач, необхідно, щоб виконувалися умови:

$$\pi a^2 \sigma_0^\circ + \pi(b^2 - a^2)\sigma_0^* = \pi b^2 \sigma_0,$$

або

$$\sigma_0^\circ f + \sigma_0^*(1 - f) = \sigma_0. \quad (3.28)$$

З урахуванням (3.26) отримаємо:

$$\sigma_0^* = \frac{\sigma_0 d^\circ}{d^\circ + f(d^* - d^\circ)}, \sigma_0^\circ = \frac{\sigma_0 d^*}{d^\circ + f(d^* - d^\circ)}. \quad (3.29)$$

З урахуванням (3.27) співвідношення для деформацій набудуть вигляду:

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0;\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1}\sigma_0. \quad (3.30)$$

Тоді переміщення будуть визначатися формулами:

$$u_r(r) = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0 r + C_1;\ u_z(z) = \frac{1}{E_1}\sigma_0 z + C_2. \qquad (3.31)$$

Сталі $C_1 = C_2 = 0$ з урахуванням того, що для цієї задачі будуть виконуватися умови $u_r(0) = 0$ та $u_z(0) = 0$, тоді

$$u_r(r) = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0 r;\ u_z(z) = \frac{1}{E_1}\sigma_0 z. \qquad (3.32)$$

Будемо вважати, що як умови узгодження для задачі про поздовжнє розтягнення однорідного трасверсально-ізотропного композита та задачі про сумісне поздовжнє розтягнення матриці й волокна будуть виступати рівність осьових переміщень для довільної осьової координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні:

$$u_r(b) = u_r^*(b); u_z(h) = u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \qquad (3.33)$$

Тоді друге зі співвідношень (3.33) з урахуванням (3.16) та (3.32) запишеться у вигляді:

$$\frac{\sigma_0^*(1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*)}{E_1^*(1-\nu_{23}^*)} - \frac{2A\nu_{21}^*}{(1-\nu_{23}^*)} = \frac{1}{E_1}\sigma_0, \qquad (3.34)$$

а з урахуванням (3.23) та (3.29) отримаємо співвідношення:

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{d^\circ + f(d^* - d^\circ)}\Bigg(-\frac{2\nu_{21}^* f \nu_{21}^\circ}{d_1 - d_2}d^* + \\ + \Bigg(\frac{(1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*)}{E_1^*(1-\nu_{23}^*)} + \\ + \frac{2\nu_{21}^*}{(1-\nu_{23}^*)}\frac{\nu_{12}^*}{E_1^*}\frac{f E_2^\circ(1-\nu_{23}^*) + d_1 - d_2}{d_1 - d_2}\Bigg)d^\circ\Bigg). \qquad (3.35)$$

Після перетворень отримуємо формулу для визначення поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними матрицею і волокном:

$$E_1 = \frac{(\alpha - 2\nu_{12}^{\circ}\beta)E_1^*(1-f) + (\alpha - 2\nu_{12}^*\beta)E_1^{\circ}f}{\alpha - 2\beta\nu_{12}^{\circ} + 2f\nu_{21}^*E_2^{\circ}(\nu_{12}^{\circ} - \nu_{12}^*)}, \quad (3.36)$$

з урахуванням співвідношень

$$\alpha = E_2^*(1-f)(1-\nu_{23}^{\circ}) + E_2^{\circ}\big(f(1-\nu_{23}^*) + (1+\nu_{23}^*)\big);$$
$$\beta = \nu_{21}^{\circ}E_2^*(1-f) + \nu_{21}^*fE_2^{\circ}. \quad (3.37)$$

Із першої з умов (3.33) знайдемо співвідношення $-\nu_{21}/E_2$ для композиційного матеріалу. Тоді отримуємо

$$\frac{f\nu_{21}^{\circ}(1-\nu_{23}^*)}{d_1 - d_2}\sigma_0^{\circ} - \frac{\nu_{12}^*}{E_1^*}\frac{fE_2^{\circ}(1-\nu_{23}^*) + d_1 - d_2}{d_1 - d_2}\sigma_0^* + \frac{B}{b^2} =$$
$$= -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0. \quad (3.38)$$

Підставляючи в останній вираз співвідношення для B (3.23), з урахуванням (3.29), остаточно отримуємо:

$$-\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{1}{d^{\circ} + f(d^* - d^{\circ})}\left(\frac{2f\nu_{21}^{\circ}d^*}{d_1 - d_2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\nu_{12}^*}{E_1^*}\frac{(2fE_2^{\circ} + d_1 - d_2)d^{\circ}}{d_1 - d_2}\right). \quad (3.39)$$

Або, використовуючи співвідношення між коефіцієнтами Пуассона і модулями пружності анізотропного матеріалу, отримуємо співвідношення для коефіцієнта Пуассона ν_{12}:

$$\nu_{12} = \frac{(\alpha - 2\beta\nu_{12}^{\circ})\nu_{12}^{*} + 2E_2^{\circ}f(\nu_{12}^{\circ} - \nu_{12}^{*})}{\alpha - 2\beta\nu_{12}^{\circ} + 2f\nu_{21}^{*}E_2^{\circ}(\nu_{12}^{\circ} - \nu_{12}^{*})}. \qquad (3.40)$$