Гомогенізація волокнистого композиту із в’язкопружними компонентами при лінійних деформаціях

Розглянемо задачу гомогенізації односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу, складовими елементами (фазами) якого є трансверсально-ізотропні в’язкопружні матриця та волокно. Одною із найбільш розповсюджених схем розташування волокон в односпрямованих композиційних матеріалах є гексагональна укладка волокон.

Площини ізотропії матриці та волокна збігаються та розташовані перпендикулярно осі волокна. Будемо вважати, що для матеріалів матриці та волокна справджується закон Гука, на межі поділу матриці та волокна існує ідеальний контакт.

Подамо представницький елемент волокнистого композиційного матеріалу у вигляді комбінації двох циліндрів нескінченної довжини – трансверсально-ізотропного порожнистого, що моделює матрицю, та трансверсально-ізотропного суцільного, що моделює волокно.

При переході від гексагональної до циліндричної елементарної комірки вибираємо циліндр так, щоб його об’єм дорівнював об’єму гексагональної комірки. При цьому радіус циліндра приймемо таким, щоб об’ємний вміст волокна у гексагональній та циліндричній комірках співпадав (рис. 5.1).

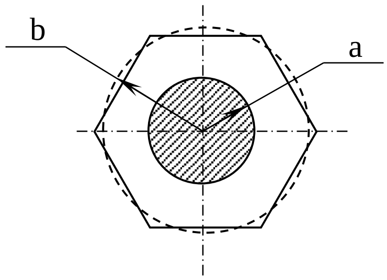

Рис. 5.1 – Гексагональна комірка.

Нехай f – об’ємний вміст волокон в композиті. Оскільки циліндри, що апроксимують матрицю та волокно у елементарній комірці, мають однакову висоту, то отримуємо, що

$$f = \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2}. \tag{5.1}$$

При дослідженні в'язкопружних матеріалів для моделювання зміни їх реологічних характеристик у часі замість вказаних модулів пружності та зсуву використовують інтегральні оператори

$$\bar{E}_i\left[y(t)\right] = E_i\left(y(t) - \int_0^t R(t-\tau)y(\tau)d\tau\right), \tag{5.2}$$

$$\bar{G}_{ij}\left[y(t)\right] = G_{ij}\left(y(t) - \int_0^t R(t-\tau)y(\tau)d\tau\right), \tag{5.3}$$

$i = 1, 2,\ j = 1, 2$. Структура та властивості цих операторів розглянуті у розділі 1.

За достатньо великої частоти армування матеріалу композиту волокнами армований шар можна розглядати як трансверсально-ізотропний. Тоді для визначення пружних характеристик композитів необхідно знайти п'ять незалежних величин: інтегральні оператори $\bar{E}_1$ та $\bar{E}_2$, що моделюють лінійні деформації в'язкопружного композиту, інтегральні оператори $\bar{G}_{12}$ та $\bar{G}_{23}$, що моделюють зсувні деформації, а також коефіцієнт Пуассона ν_{12}, що розглядається як стала у часі величина.

Для знаходження ефективних пружних характеристик композиту застосуємо кінематичні умови узгодження переміщень для точок циліндрів, що моделюють матрицю, волокно та однорідний композит. Для цього розв'яжемо дві крайові задачі. Спочатку знайдемо розв'язок крайової задачі про сумісне деформування трансверсально-ізотропної матриці та трансверсально-ізотропного волокна. При цьому знайдемо компоненти їх напружено-деформованого стану у вигляді функцій пружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, а також об’ємної частки кожної з цих фаз у композиті.

На наступному кроці розв’язання задачі гомогенізації отримуємо розв’язок аналогічної крайової задачі для композита, що подається у вигляді однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, пружні характеристики якого (ефективні характеристики) поки що є невідомими. Визначаємо компоненти напружено-деформованого стану як функції невідомих пружних характеристик однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композит. Умовою узгодження виступає рівність деяких компонентів вектора переміщень у обох задачах. Із цієї умови знаходимо невідомі ефективні характеристики композиту у вигляді функцій пружних сталих матеріалів матриці та волокна, а також об’ємної частки кожного з них у композиті.

Для визначення системи ефективних пружних характеристик, що повністю відображає механічні властивості трансверсально-ізотропного в’язкопружного композиту достатньо розв’язати квазістатичні крайові задачі про рівномірне поздовжнє розтягнення, рівномірне поперечне розтягнення, чистий поперечний зсув та чистий поздовжній зсув циліндричної елементарної комірки композиційного матеріалу.

Розглянемо вісесиметричний напружено-деформований стан циліндричного в’язкопружного тіла. Поле напружень для нього визначається рівностями:

$$\sigma_z = \sigma_0(t),\ \sigma_r = \sigma_r(r,t),\ \sigma_\theta = \sigma_\theta(r,t),$$
$$\tau_{zr} = \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0.$$

Рівняння рівноваги виконуються тотожно, а одне з рівнянь при масовій силі $G_r = 0$ набуває вигляду:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \tag{5.4}$$

Для осьового напруження, що залежить лише від часу, осьова деформація $\varepsilon_z = \varepsilon_z(t)$ теж залежить лише від часу, лінійні деформації $\varepsilon_r = \varepsilon_r(r,t)$, $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta(r,t)$. Тоді А для вісесиметричного напружено-деформованого стану рівняння (5.4) є рівнянням відносно радіального переміщення $u_r(r,t)$ та набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \tag{5.5}$$

Загальним розв’язком цього рівняння є функція:

$$u_r(r,t) = C_1(t) r + \frac{C_2(t)}{r}. \tag{5.6}$$

де функції $C_1(t)$ та $C_2(t)$ визначаються з крайових умов.

Використовуючи співвідношення Коші знаходимо лінійні деформації у вигляді:

$$\varepsilon_r(r,t) = \frac{\partial u_r}{\partial r} = C_1(t) - \frac{C_2(t)}{r^2}, \tag{5.7}$$

$$\varepsilon_\theta(r,t) = \frac{u_r}{r} = C_1(t) + \frac{C_2(t)}{r^2}. \tag{5.8}$$

Використовуючи закон Гука у оберненій формі для трансверсально-ізотропного матеріалу та співвідношення (5.7), (5.8), знаходимо вирази для напружень $\sigma_r(r,t)$ та $\sigma_\theta(r,t)$:

$$\sigma_r(r,t) = \frac{\overline{E}_2\left(\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_z + C_1(1+\nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2}(\nu_{23} + 2\nu_{12}\nu_{21} - 1)\right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \qquad (5.9)$$

$$\sigma_\theta(r,t) = \frac{\overline{E}_2\left(\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_z + C_1(1+\nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2}(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})\right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}. \qquad (5.10)$$

Підставляючи отримані співвідношення та значення $\sigma_z = \sigma_0(t)$ у вираз для осьової деформації, знаходимо вираз для осьової деформації $\varepsilon_z(t)$:

$$\varepsilon_z(t) = \overline{E}_1^{-1}\left[\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{(1-\nu_{23})}\right] - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1-\nu_{23})}. \qquad (5.11)$$

У (5.11) $\overline{E}_1^{-1}$ – інтегральний оператор, обернений до оператора $\overline{E}_1$. Осьові переміщення, знаходимо, інтегруючи за осьовою координатою осьові деформації:

$$u_z(z) = \int \varepsilon_{zz} dz = \left(\overline{E}_1^{-1}\left[\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{(1-\nu_{23})}\right] - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1-\nu_{23})}\right) z + C_3 . \qquad (5.12)$$

За умови $u_z(0) = 0$ знаходимо, що стала інтегрування $C_3 = 0$. Отже, остаточно отримуємо:

$$u_z(z) = \int \varepsilon_{zz} dz = \left(\overline{E}_1^{-1}\left[\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{(1-\nu_{23})}\right] - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1-\nu_{23})}\right) z . \qquad (5.13)$$

З урахуванням отриманого співвідношення (5.11) вирази для напружень набудуть вигляду:

$$\sigma_r(r,t)=\overline{E}_2\left(\overline{E}_1^{-1}\left[\frac{\sigma_0\nu_{12}}{(1-\nu_{23})}\right]+\frac{C_1}{1-\nu_{23}}-\frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})}\right), \qquad (5.14)$$

$$\sigma_\theta(r,t)=\overline{E}_2\left(\overline{E}_1^{-1}\left[\frac{\sigma_0\nu_{12}}{(1-\nu_{23})}\right]+\frac{C_1}{1-\nu_{23}}+\frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})}\right), \qquad (5.15)$$

Таким чином, для вісесиметричного напружено-деформованого стану в’язкопружного циліндра отримані компоненти напружень, деформацій і переміщень у вигляді функцій механічних характеристик матеріалу та функцій часу, що можуть бути визначеними з крайових умов.

Поздовжнє розтягнення. Розглянемо вісесиметричний напружено-деформований стан комірки композиційного матеріалу. Введемо циліндричну систему координат (r,θ,z), де вісь Oz співпадає з напрямом армування композита волокном. Моделлю матриці є в’язкопружний ізотропний порожнистий циліндр $(a \le r \le b)$, а волокна – трансверсально-ізотропний суцільний циліндр $(0 \le r \le a)$. На межі розподілу матриці та волокна $(r = a)$ спостерігається ідеальний контакт, тобто радіальні переміщення та напруження тут є неперервними, осеві переміщення матриці та волокна співпадають (рис.5.2 а). Далі будемо використовувати символ * для компонент напружень, переміщень та деформацій матриці, символ $^\circ$ – для волокна.

Нехай на волокно діє у напрямі його осі стале навантаження $\overset{\circ}{\sigma}_0$, відповідно осьове напруження для волокна також є сталою величиною та не залежить від просторових координат: $\overset{\circ}{\sigma}_z(t)=\overset{\circ}{\sigma}_0$. Радіальне та тангенціальне напруження $\overset{\circ}{\sigma}_r=\overset{\circ}{\sigma}_r(r,t)$, $\overset{\circ}{\sigma}_\theta=\overset{\circ}{\sigma}_\theta(r,t)$, дотичні напруження дорівнюють нулю.

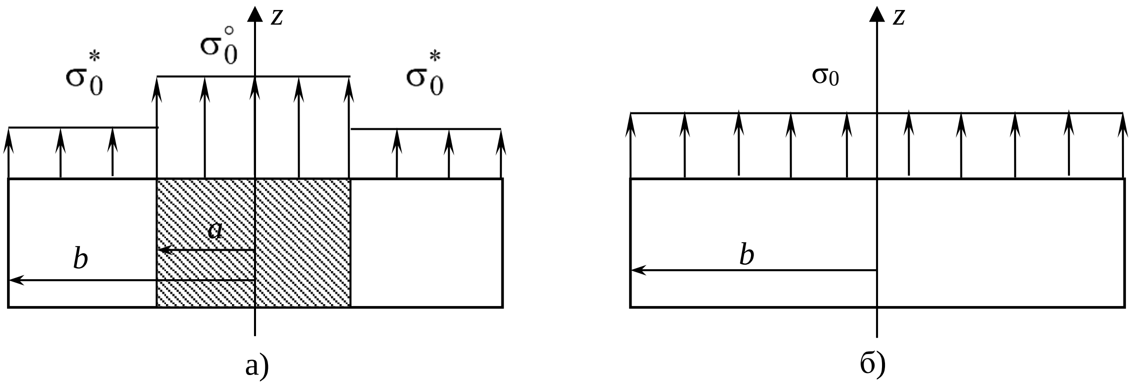

Рис. 5.2 – Поздовжнє розтягнення

Аналогічно до (5.4) та (5.5) для радіальних переміщень волокна отримуємо рівняння відносно радіального переміщення точок волокна, розв’язок якого запишемо у відповідності до (5.6):

$$u_r^\circ(r,t) = C(t)r + \frac{D(t)}{r}.$$

Враховуючи, що це переміщення повинне бути обмеженим при $r = 0$, то $D(t) \equiv 0$. Вираз для радіального переміщення волокна набуває вигляду:

$$u_r^\circ(r,t) = C(t)r\,, \tag{5.16}$$

Вирази для осевого переміщення та радіального напруження трансверсально-ізотропного матеріалу волокна запишемо згідно з формулами (5.13) та (5.14), замінивши відповідно C_1 на C і прирівнявши $C_2 = 0$. Оскільки розглядається пружне волокно, то E_1° та E_2° є сталими, пов’язаними між собою співвідношенням

$$\frac{E_1^\circ}{\nu_{12}^\circ} = \frac{E_2^\circ}{\nu_{21}^\circ}. \tag{5.17}$$

З врахуванням (5.17) отримуємо:

$$u_z^{\circ}\left(z,t\right)=\frac{1}{1-\nu_{23}^{\circ}}\left(\frac{\sigma_0^{\circ}\left(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}\right)}{E_1^{\circ}}-2C\left(t\right)\nu_{21}^{\circ}\right)z, \tag{5.18}$$

$$\sigma_r^{\circ}\left(t\right)=\frac{E_2^{\circ}}{1-\nu_{23}^{\circ}}\left(\frac{\sigma_0^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}}+C\left(t\right)\right). \tag{5.19}$$

У рівностях (5.18) та (5.19) E_1° та E_2° – модулі пружності, ν_{12}°, ν_{21}° та ν_{23}° – коефіцієнти Пуассона, індекс 1 відповідає осі z, перпендикулярній площині ізотропії.

Знайдемо компоненти напружено-деформованого стану матриці. Оскільки вона є ізотропною, то $\nu_{12}^{*}=\nu_{21}^{*}=\nu_{23}^{*}=\nu$, поздовжнє деформування точок матриці визначається за допомогою лінійного інтегрального оператора $\bar{E}$, аналогічного до (5.2):

$$\bar{E}\left[y\left(t\right)\right]=E\cdot\left(y\left(t\right)-\int_0^t R\left(t-\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau\right), \tag{5.20}$$

де $E=\text{const}$ – миттєвий поздовжній модуль пружності (значення модуля пружності в’язкопружного матеріалу у початковий момент часу $t=0$), $R\left(t\right)$ – ядро релаксації для матеріалу матриці.

Оператор, обернений до (5.20), має вигляд:

$$\bar{E}^{-1}\left[y\left(t\right)\right]=\frac{1}{E}\cdot\left(y\left(t\right)+\int_0^t Q\left(t-\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau\right),$$

де $Q\left(t\right)$ – ядро повзучості матриці.

Нормальні напруження у матриці мають вигляд: $\sigma_z^* = \sigma_0^*\left(t\right)$, $\sigma_r^* = \sigma_r^*\left(r,t\right)$, $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta^*\left(r,t\right)$, дотичні напруження дорівнюють нулю. Аналогічно розглянутому вище випадку для волокна, отримуємо радіальні переміщення точок матриці у наступному вигляді:

$$u_r^*\left(r,t\right) = A\left(t\right)r + \frac{B\left(t\right)}{r}. \tag{5.21}$$

Знайдемо деформації ε_r^* та ε_θ^* матриці за формулами (5.7), (5.8). Отримуємо:

$$\varepsilon_r^* = \frac{du_r^*}{dr} = A\left(t\right) - \frac{B\left(t\right)}{r^2}, \tag{5.22}$$

$$\varepsilon_\theta^* = \frac{u_r^*}{r} = A\left(t\right) + \frac{B\left(t\right)}{r^2}. \tag{5.23}$$

Деформацію ε_z^* знайдемо зі зворотного закону Гука з врахуванням в’язкопружності матриці:

$$\sigma_z^* = \frac{\bar{E}\left[\left(1-\nu\right)\varepsilon_z^* + \nu\left(\varepsilon_r^* + \varepsilon_\theta^*\right)\right]}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}, \tag{5.24}$$

де ν – коефіцієнт Пуассона матриці. Враховуючи, що $\sigma_z^* = \sigma_0^*\left(t\right)$, $\varepsilon_r^* + \varepsilon_\theta^* = 2A\left(t\right)$, отримуємо:

$$\sigma_0^*\left(t\right) = \frac{\bar{E}\left[\left(1-\nu\right)\varepsilon_z^* + 2\nu A\left(t\right)\right]}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}. \tag{5.25}$$

Звідси визначаємо осьову деформацію матриці ε_z^*:

$$\varepsilon_z^* = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\bar{E}^{-1}\left[\sigma_0^*(t)\right] - \frac{2\nu}{1-\nu}A(t). \tag{5.26}$$

Осьове переміщення $u_z^*(z,t)$ точок матриці має вигляд:

$$u_z^*(z,t) = \left(\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\bar{E}^{-1}\left[\sigma_0^*(t)\right] - \frac{2\nu A(t)}{1-\nu}\right)z. \tag{5.27}$$

Використавши закон Гука у зворотній формі для ізотропного матеріалу, знайдемо вираз для радіального напруження σ_r^* точок матриці:

$$\sigma_r^* = \frac{\bar{E}\left[(1-\nu)\varepsilon_r^* + \nu\left(\varepsilon_z^* + \varepsilon_\theta^*\right)\right]}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

З врахуванням отриманих виразів для деформацій ε_z^*, ε_r^* та ε_θ^* з останньої рівності знаходимо:

$$\sigma_r^* = \frac{1}{1-\nu}\bar{E}\left[A(t)\right] - \frac{\bar{E}\left[B(t)\right]}{(1+\nu)r^2} + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_0^*(t). \tag{5.28}$$

Таким чином, отримано вирази для переміщень u_r^*, u_z^* та напружень σ_r^* точок матриці.

На межі контакту матриці та волокна $r = a$ маємо крайові умови неперервності радіальних переміщень та напружень:

$$u_r^*(a) = u_r^\circ(a), \tag{5.29}$$

$$\sigma_r^*(a) = \sigma_r^\circ(a). \tag{5.30}$$

У довільному перерізі $z = h$ осеві переміщення матриці та волокна повинні співпадати:

$$u_z^*(h) = u_z^\circ(h). \tag{5.31}$$

На межі $r = b$ комірки композиту радіальні напруження дорівнюють нулю:

$$\sigma_r^*(b) = 0. \tag{5.32}$$

Використовуючи крайові умови (5.29) – (5.32), а також отримані вирази (5.16), (5.18), (5.19), (5.21), (5.27) та (5.28) для радіальних переміщень та напружень матриці та волокна, а також осьових переміщень складових композиту, отримаємо систему рівнянь, з якої визначимо невідомі функції $A(t)$, $B(t)$ та $C(t)$, а також співвідношення між σ_0° та $\sigma_0^*(t)$.

Введемо позначення:

$$\alpha_1 = \frac{1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ}{E_1^\circ\left(1 - \nu_{23}^\circ\right)},\ \alpha_2 = \frac{2\nu_{21}^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ},\ \beta_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu},$$

$$\beta_2 = \frac{2\nu}{1-\nu},\ \gamma_1 = \frac{E_2^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ\left(1 - \nu_{23}^\circ\right)},\ \gamma_2 = \frac{E_2^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ}.$$

Вказана система набуває вигляду:

$$\begin{cases} C(t) = A(t) + \dfrac{B(t)}{a^2}, \\ \dfrac{1}{1-\nu}\bar{E}\left[A(t)\right] - \dfrac{1}{(1+\nu)a^2}\bar{E}\left[B(t)\right] + \dfrac{\nu}{1-\nu}\sigma_0^*(t) = \\ = \gamma_1\sigma_0^\circ + \gamma_2 C(t), \\ \beta_1\bar{E}^{-1}\left[\sigma_0^*(t)\right] - \beta_2 A(t) = \alpha_1\sigma_0^\circ - \alpha_2 C(t), \\ \dfrac{1}{1-\nu}\bar{E}\left[A(t)\right] - \dfrac{1}{(1+\nu)b^2}\bar{E}\left[B(t)\right] + \dfrac{\nu}{1-\nu}\sigma_0^*(t) = 0. \end{cases}$$

Застосувавши до обох частин третього рівняння цієї системи оператор $\bar{E}^*$, з врахуванням першого рівняння системи отримуємо:

$$\begin{aligned} &\beta_1\sigma_0^*(t) - \beta_2\bar{E}\left[A(t)\right] = \alpha_1\sigma_0^\circ h(t) - \\ &-\alpha_2\left(\bar{E}\left[A(t)\right] + \frac{\bar{E}\left[B(t)\right]}{a^2}\right) \end{aligned}, \qquad (5.33)$$

де $h(t) = \bar{E}[1] = E\left(1 - \int\limits_0^t R(t-\tau)\,d\tau\right)$.

Замінивши трете рівняння системи на рівняння (5.33), розв’яжемо отриману систему відносно $\bar{E}\left[A(t)\right]$, $\bar{E}\left[B(t)\right]$ та $C(t)$. Знаходимо вирази для цих функцій у вигляді:

$$\bar{E}\left[A(t)\right] = m\left(\alpha_1(1-\nu) f \cdot h(t)\sigma_0^\circ - \left(\alpha_2\nu(1+\nu) + \beta_1(1-\nu) f\right)\sigma_0^*\right),$$

$$\bar{E}\left[B(t)\right] = m\left(a^2(1+\nu)\alpha_1 h(t)\sigma_0^\circ + a^2(1+\nu)\left(\nu(\alpha_2 - \beta_2) - \beta_1\right)\sigma_0^*\right)$$

$$C(t) = \frac{1}{\gamma_2}\left(m\alpha_1(f-1)h(t) - \gamma_1\right)\sigma_0^\circ +$$

$$+\frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{\nu}{1-\nu}-m\left(\frac{\alpha_2\nu(1+\nu)}{1-\nu}+\nu(\alpha_2-\beta_2)+\beta_1(f-1)\right)\right)\sigma_0^*.$$

де $m=\dfrac{1}{(\alpha_2-\beta_2)(1-\nu)f+\alpha_2(1+\nu)}$.

Введемо позначення:

$$k_1=m\alpha_1(1-\nu)f,\ k_2=m\left(\alpha_2\nu(1+\nu)+\beta_1(1-\nu)f\right),$$

$$k_3=m(1+\nu)\alpha_1,\ k_4=m(1+\nu)\left(\nu(\alpha_2-\beta_2)-\beta_1\right),\ k_5=\frac{m\alpha_1(f-1)}{\gamma_2},$$

$$k_6=\frac{\gamma_1}{\gamma_2},\ k_7=\frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{\nu}{1-\nu}-m\left(\frac{\alpha_2\nu(1+\nu)}{1-\nu}+\nu(\alpha_2-\beta_2)+\beta_1(f-1)\right)\right).$$

Після застосування оберненого оператора $\bar{E}^{-1}$ до функцій $\bar{E}\left[A(t)\right]$ та $\bar{E}\left[B(t)\right]$ знаходимо вирази для функцій $A(t)$ та $B(t)$:

$$A(t)=k_1\sigma_0^{\circ}-k_2\bar{E}^{-1}\left[\sigma_0^*(t)\right], \tag{5.34}$$

$$B(t)=k_3a^2\sigma_0^{\circ}+k_4a^2\bar{E}^{-1}\left[\sigma_0^*(t)\right]. \tag{5.35}$$

Вираз для $C(t)$ набуває вигляду:

$$C(t)=\left(k_5h(t)-k_6\right)\sigma_0^{\circ}+k_7\sigma_0^*(t). \tag{5.36}$$

Знайдемо співвідношення між $\sigma_0^*(t)$ та σ_0°. Для цього у перше з рівнянь системи підставимо вирази (5.34)-(5.36). Отримаємо:

$$\left(k_5 h(t) - k_6 - k_1 - k_3\right)\sigma_0^{\circ} + k_7 \sigma_0^{*} = \left(k_4 - k_2\right) E^{-1}\left[\sigma_0^{*}\right].$$

Застосувавши до цієї рівності оператор $\bar{E}$, отримаємо співвідношення:

$$k_7 \bar{E}\left[\sigma_0^{*}\right] + \left(k_2 - k_4\right)\sigma_0^{*} = \bar{E}\left[k_1 + k_3 + k_6 - k_5 h(t)\right]\sigma_0^{\circ}. \qquad (5.37)$$

Застосуємо до отриманого інтегрального рівняння відносно функції $\sigma_0^{*}(t)$ перетворення Лапласа. Для оператора $\bar{E}\left[y(t)\right]$ зображення при перетворенні Лапласа має вигляд:

$$\bar{E}\left[y(t)\right] \div E\left(\tilde{Y}(p) - \tilde{R}(p)\tilde{Y}(p)\right) = E\tilde{Y}(p)\left(1 - \tilde{R}(p)\right), \qquad (5.38)$$

де $\tilde{Y}(p) \div y(t)$, $\tilde{R}(p) \div R(t)$. Знайдемо зображення функції $h(t)$:

$$h(t) = \bar{E}[1] \div \frac{E\left(1 - \tilde{R}(p)\right)}{p}. \qquad (5.39)$$

Застосувавши перетворення Лапласа до рівняння (5.37), з урахуванням співвідношень (5.38) та (5.39) отримуємо алгебраїчне рівняння, що містить $\tilde{S}^{*}(p)$ – зображення функції $\sigma_0^{*}(t)$:

$$k_7 E\tilde{S}^{*}(p)\left(1 - \tilde{R}(p)\right) + \left(k_2 - k_4\right)\tilde{S}^{*}(p) =$$

$$= E\left(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E\left(1 - \tilde{R}(p)\right)\right)\left(1 - \tilde{R}(p)\right)\frac{\sigma_0^{\circ}}{p}.$$

З цього рівняння знаходимо зображення функції $\tilde{S}^*(p)$:

$$\tilde{S}^*(p)=\frac{E\Big(k_1+k_3+k_6-k_5E\big(1-\tilde{R}(p)\big)\Big)\big(1-\tilde{R}(p)\big)}{k_7E\big(1-\tilde{R}(p)\big)+k_2-k_4}\cdot\frac{\sigma_0^\circ}{p}\div\sigma_0^*(t)=\varphi(t)\sigma_0^\circ$$

.

Таким чином, співвідношення між $\sigma_0^*(t)$ та $\sigma_0^\circ(t)$ має вигляд:

$$\sigma_0^*(t)=\varphi(t)\sigma_0^\circ, \tag{5.40}$$

де $\varphi(t)$ є оригіналом функції

$$\tilde{\Phi}(p)=\frac{E\Big(k_1+k_3+k_6-k_5E\big(1-\tilde{R}(p)\big)\Big)\big(1-\tilde{R}(p)\big)}{k_7E\big(1-\tilde{R}(p)\big)+k_2-k_4}.$$

Ефективні механічні характеристики волокнистого композиту із в’язкопружними компонентами при лінійних деформаціях

Отримавши розв’язок задачі про спільне деформування матриці та волокна, розглянемо задачу про поздовжнє розтягнення для циліндричної комірки з однорідного трансверсально-ізотропного в’язкопружного матеріалу, що моделює композит. Поле напружень для цієї комірки описується рівностями:

$$\sigma_z=\sigma_0(t),\ \sigma_r=\sigma_\theta=\tau_{rz}=\tau_{r\theta}=\tau_{\theta z}=0. \tag{5.41}$$

Для трансверсально-ізотропного в’язкопружного матеріалу формули зворотного закону Гука для нормальних напружень мають вигляд:

$$\sigma_z = \frac{\bar{E}_1\left[\left(1-\nu_{23}^2\right)\varepsilon_z + \nu_{21}\left(1+\nu_{23}\right)\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta\right)\right]}{1-2\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}^2-2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}, \qquad (5.42)$$

$$\sigma_r = \frac{\bar{E}_2\left[\nu_{12}\left(1+\nu_{23}\right)\varepsilon_z + \left(1-\nu_{12}\nu_{21}\right)\varepsilon_r + \left(\nu_{23}+\nu_{12}\nu_{21}\right)\varepsilon_\theta\right]}{1-2\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}^2-2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}, \qquad (5.43)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\bar{E}_2\left[\nu_{12}\left(1+\nu_{23}\right)\varepsilon_z + \left(1-\nu_{12}\nu_{21}\right)\varepsilon_\theta + \left(\nu_{23}+\nu_{12}\nu_{21}\right)\varepsilon_r\right]}{1-2\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}^2-2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}. \qquad (5.44)$$

У рівностях (5.42) – (5.44) $\bar{E}_1$ та $\bar{E}_2$ – лінійні інтегральні оператори, що мають вигляд (5.2).

При цьому вони пов’язані рівністю:

$$\frac{\bar{E}_1}{\nu_{12}} = \frac{\bar{E}_2}{\nu_{21}}. \qquad (5.45)$$

Знайдемо лінійні деформації ε_z, ε_r та ε_θ. Для цього до обох частин рівності (5.42) застосуємо зворотний оператор $\tilde{E}_1^{-1}$, рівностей (5.43) та (5.44) – оператор $\tilde{E}_2^{-1}$. Отримаємо систему:

$$\begin{aligned}
&\left(1-\nu_{23}^2\right)\varepsilon_z + \nu_{21}\left(1+\nu_{23}\right)\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta\right) = \\
&= \left(1-2\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}^2-2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}\right)\bar{E}_1^{-1}\left[\sigma_0\left(t\right)\right],
\end{aligned}$$

$$\nu_{12}\left(1+\nu_{23}\right)\varepsilon_z + \left(1-\nu_{12}\nu_{21}\right)\varepsilon_r + \left(\nu_{23}+\nu_{12}\nu_{21}\right)\varepsilon_\theta = 0,$$

$$\nu_{12}\left(1+\nu_{23}\right)\varepsilon_z + \left(\nu_{23}+\nu_{12}\nu_{21}\right)\varepsilon_r + \left(1-\nu_{12}\nu_{21}\right)\varepsilon_\theta = 0.$$

З цієї системи знаходимо деформацію ε_z:

$$\varepsilon_z = \bar{E}_1^{-1}\left[\sigma_0\left(t\right)\right], \tag{5.46}$$

Знайдемо переміщення $u_z\left(z,t\right)$:

$$u_z\left(z,t\right) = \int_0^z \varepsilon_z dz_1 = \bar{E}_1^{-1}\left[\sigma_0\left(t\right)\right]\cdot z\,. \tag{5.47}$$

Значення $\sigma_0^*\left(t\right)$, $\sigma_0^\circ\left(t\right)$ та $\sigma_0\left(t\right)$ повинні задовольняти умовам рівноваги:

$$\pi a^2\sigma_0^\circ + \pi\left(b^2 - a^2\right)\sigma_0^*\left(t\right) = \pi b^2\sigma_0\left(t\right).$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на πb^2, запишемо його у вигляді:

$$f\cdot\sigma_0^\circ + \left(1 - f\right)\sigma_0^*\left(t\right) = \sigma_0\left(t\right). \tag{5.48}$$

Підставивши у цю рівність (5.40), отримаємо:

$$f\cdot\sigma_0^\circ + \left(1 - f\right)\varphi\left(t\right)\cdot\sigma_0^\circ = \sigma_0\left(t\right). \tag{5.49}$$

За умову узгодження переміщень при поздовжньому розтягненні однорідної комірки та комірки «матриця – волокно» виберемо рівність осьових переміщень для довільних значень координати z:

$$u_z^* = u_z^\circ = u_z\,. \tag{5.50}$$

З (5.50) та співвідношень Коші випливає рівність осьових деформацій матриці, волокна та однорідного матеріалу, що моделює композит.

З врахуванням введених позначень з співвідношень (5.18), (5.36) та (5.40) отримуємо, що осьова деформація волокна має вигляд:

$$\varepsilon_z^{\circ} = \alpha_1 \sigma_0^{\circ} - \alpha_2 \left(k_5 h(t) - k_6 + k_7 \varphi(t) \right) \sigma_0^{\circ}. \tag{5.51}$$

Для моделі композита, використовуючи рівність (5.46) та умову (5.48), можна записати, що

$$\varepsilon_z = \bar{E}_1^{-1} \left[\sigma_0(t) \right] = \bar{E}_1^{-1} \left[f \cdot \sigma_0^{\circ} + (1 - f) \varphi(t) \sigma_0^{\circ} \right]. \tag{5.52}$$

Враховуючи умови (5.50), маємо, що виконання умови узгодження забезпечує рівність $\varepsilon_z = \varepsilon_z^{\circ}$. Підставимо в цю рівність співвідношення (5.51) та (5.52):

$$\alpha_1 \sigma_0^{\circ} - \alpha_2 \left(k_5 h(t) - k_6 + k_7 \varphi(t) \right) \sigma_0^{\circ} = \bar{E}_1^{-1} \left[f \cdot \sigma_0^{\circ} + (1 - f) \varphi(t) \sigma_0^{\circ} \right].$$

Застосовуючи до обох частин цієї рівності оператор $\bar{E}_1$, після ділення на ненульову сталу σ_0° отримуємо:

$$f + (1 - f) \varphi(t) = \bar{E}_1 \left[\alpha_1 + \alpha_2 k_6 - \alpha_2 k_5 h(t) - \alpha_2 k_7 \varphi(t) \right]. \tag{5.53}$$

Рівняння (5.53) є лінійним інтегральним рівнянням типу згортки відносно невідомого ядра релаксації композиту $R_1(t)$. Для його розв’язання використаємо перетворення Лапласа. Нехай $R_1(t) \div \tilde{R}_1(p)$. Зважаючи на те, що зображенням для інтегрального оператора $\bar{E}_1\left[y(t)\right]$ є вираз

$$\tilde{E}_1\left[x(t)\right] \div E_1\tilde{X}(p)\left(1-\tilde{R}_1(p)\right),$$

то, з урахуванням отриманого раніше зображення функції

$$\varphi(t) \div \tilde{\Phi}(p) = \frac{E\left(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)\right)\left(1-\tilde{R}(p)\right)}{p\left(k_7 E\left(1-\tilde{R}(p)\right) + k_2 - k_4\right)},$$

знаходимо зображення рівняння (5.53) у вигляді:

$$\frac{f}{p} + \frac{(1-f)E\left(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)\right)\left(1-\tilde{R}(p)\right)}{p\left(k_7 E\left(1-\tilde{R}(p)\right) + k_2 - k_4\right)} =$$

$$= E_1\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 k_6 - \alpha_2 k_5 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)}{p} - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha_2 k_7 E\left(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)\right)\left(1-\tilde{R}(p)\right)}{p\left(k_7 E\left(1-\tilde{R}(p)\right) + k_2 - k_4\right)}\right)\left(1-\tilde{R}_1(p)\right).$$

Звідси знаходимо:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 F_2(p) - F_1(p)}{E_1 F_2(p)}, \qquad (5.54)$$

$$F_1(p) = f\left(k_7 E\left(1-\tilde{R}(p)\right) + k_2 - k_4\right) +$$

$$+(1-f)E\left(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E\left(1-\tilde{R}(p)\right)\right)\left(1-\tilde{R}(p)\right),$$

$$F_2(p) = (\alpha_1 + \alpha_2 k_6)\Big(k_7 E\big(1-\tilde{R}(p)\big) + k_2 - k_4\Big) -$$

$$-\alpha_2 k_5\big(1-\tilde{R}(p)\big)E\Big(Ek_7\big(1-\tilde{R}(p)\big) + k_2 - k_4\Big) -$$

$$-\alpha_2 k_7 E\Big(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E\big(1-\tilde{R}(p)\big)\Big)\big(1-\tilde{R}(p)\big).$$

Знайдемо миттєвий модуль пружності E_1. Для цього підставимо в рівняння (5.53) $t=0$ та скористаємося тим, що $\tilde{E}_1\big[y(0)\big] = E_1 y(0)$. Отримуємо:

$$f + (1-f)\cdot\varphi(0) = E_1\big[\alpha_1 + \alpha_2 k_6 - \alpha_2 k_5 h(0) - \alpha_2 k_7 \varphi(0)\big]. \qquad (5.55)$$

Знайдемо $\varphi(0)$. Відомо, що для диференційованої функції-оригіналу $\varphi(t)$, що має зображення $\Phi(p)$, $\lim\limits_{p\to\infty} p\Phi(p) = \varphi(0)$. Враховуючи, що $\tilde{R}(p)$ є зображенням і тому $\lim\limits_{p\to\infty}\tilde{R}(p) = 0$, знаходимо значення $\varphi(0)$, яке позначимо k:

$$\varphi(0) = \lim_{p\to\infty}\frac{E\Big(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E\big(1-\tilde{R}(p)\big)\Big)\big(1-\tilde{R}(p)\big)}{\Big(k_7 E\big(1-\tilde{R}(p)\big) + k_2 - k_4\Big)} = .$$

$$= \frac{E\big(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E\big)}{k_7 E + k_2 - k_4} = k.$$

Підставивши у (5.55) знайдене значення $k = \varphi(0)$, а також $h(0) = E$, отримаємо рівняння, з якого визначаємо E_1:

$$E_1=\frac{f+(1-f)\cdot k}{\alpha_1+\alpha_2\left(k_6-k_5E-k_7k\right)}. \tag{5.56}$$

Знайдемо оригінал $R_1(t)$ ядра інтегрального оператора $\bar{E}_1$ у виразі для ефективного модуля пружності композита. Введемо наступні позначення:

$$x=x(p)=1-\tilde{R}(p),\ c_1=E\Big(\alpha_1k_7+\alpha_2\left(k_5\left(k_4-k_2\right)-k_7\left(k_1+k_3\right)\right)\Big),$$

$$c_2=(f-1)E^2k_5,\ c_3=E\left(fk_7+(1-f)\left(k_1+k_3+k_6\right)\right),\ c_4=f\left(k_2-k_4\right),$$

$$x_0=\frac{\left(k_4-k_2\right)\left(\alpha_1+\alpha_2k_6\right)}{c_1}.$$

Тоді зображення $\tilde{R}_1(p)$ можна записати у вигляді:

$$\tilde{R}_1(p)=\frac{E_1c_1\left(x-x_0\right)-c_2x^2-c_3x-c_4}{E_1c_1\left(x-x_0\right)}. \tag{5.57}$$

Особливими точками зображення $\tilde{R}_1(p)$ (5.57) є особливі точки функції $R(p)$, а також корені рівняння $x(p)=1-\tilde{R}(p)=0$. Для знаходження оригіналу $R_1(t)$ можна використати теорему обернення для перетворення Лапласа.

Розглянемо випадок експоненціального ядра $R(t)=s_1e^{s_0t}$. Тоді отримуємо:

$$\tilde{R}(p)=\frac{s_1}{p-s_0},\ x(p)=\frac{p-s_0-s_1}{p-s_0}.$$

Позначимо $y_1 = y_1(p) = p - s_0$, $y_2 = y_2(p) = y_1 - s_1$. Вираз для $\tilde{R}_1(p)$ набуває вигляду:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 c_1 y_1 (y_2 - x_0 y_1) - c_2 {y_2}^2 - c_3 y_2 y_1 - c_4 {y_1}^2}{E_1 c_1 (y_2 - y_1 x_0) y_1}.$$

Особливі точки цієї функції знаходимо з рівнянь

$$y_2(p) - y_1(p) x_0 = 0, \; y_1(p) = 0.$$

Отримуємо два прості полюси:

$$p_1 = s_0 + \frac{s_1}{1 - x_0}, \; p_2 = s_0.$$

Тоді оригінал $R_1(t)$ знайденого зображення перетворення $\tilde{R}_1(p)$ знаходимо у вигляді:

$$R_1(t) = q_1 e^{p_1 t} + q_2 e^{p_2 t}. \tag{5.58}$$

У цьому виразі значення коефіцієнтів q_1 та q_2:

$$q_1 = \operatorname{Res} \left. \tilde{R}_1(p) \right|_{p=p_1} = -\frac{s_1 \left(c_2 x_0^2 + c_3 x_0 + c_4 \right)}{E_1 c_1 (1 - x_0)^2},$$

$$q_2 = \operatorname{Res} \left. \tilde{R}_1(p) \right|_{p=s_0} = \frac{c_2 s_1}{E_1 c_1}.$$

Таким чином, для розглянутого двофазного композиту, що складається з в’язкопружної ізотропної матриці і трансверсально-ізотропного волокна отримано лінійний інтегральний оператор $\overline{E}_1$, що характеризує поздовжній модуль пружності першого типу, тобто одну з ефективних характеристик, з допомогою якої композит подається в’язкопружним трансверсально-ізотропним однорідним матеріалом.