Гомогенізація волокнистого композиту із в'зкопружними компонентами при зсувних деформаціях

Розглянемо задачу гомогенізації в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту в умовах чистого поздовжнього зсуву. Тоді у циліндричній області компоненти напружено-деформованого стану визначаються співвідношеннями:

$$\tau_{zr}\left(b,\theta\right)=\sigma_0\left(t\right)\cos\theta .$$

$$\sigma_z=\sigma_r=\sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0\ ,\ \tau_{zr}=\tau_{zr}\left(r,\theta\right),\ \tau_{\theta z}=\tau_{\theta z}\left(r,\theta\right),$$

$$\gamma_{zr}=\gamma_{zr}\left(r,\theta\right),\ \gamma_{\theta z}=\gamma_{\theta z}\left(r,\theta\right),\ \varepsilon_z=\varepsilon_r=\varepsilon_\theta=\gamma_{r\theta}=0.$$

Нехай на зовнішню циліндричну поверхню області діє навантаження (рис.6.1).

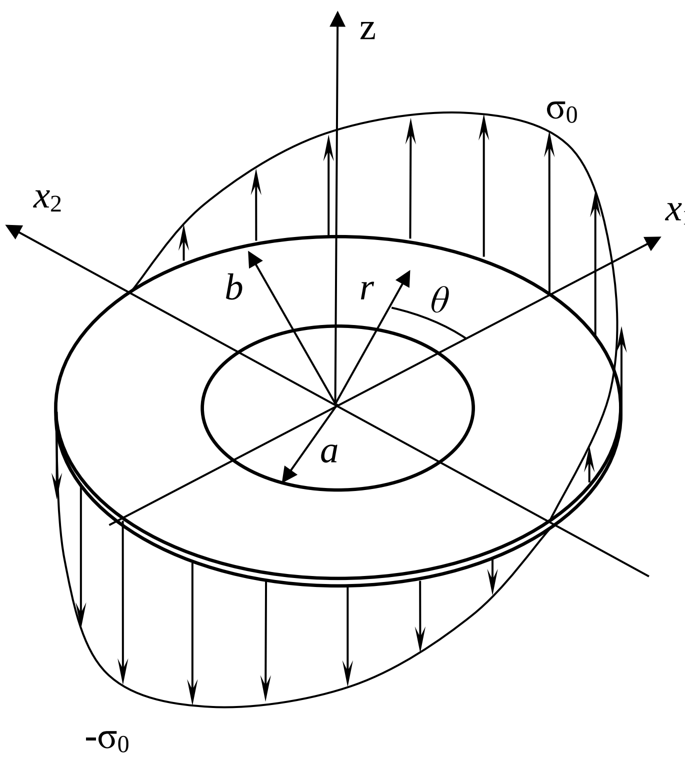

Рис. 6.1 – Крайові умови (для напружень $\tau_{zr}\left(b,\theta\right)$)

при поздовжньому зсуві в кільці

Осьові переміщення при цьому визначаються рівністю:

$$u_z(r,\theta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos\theta, \tag{6.1}$$

де C_1 та C_2 є сталими величинами.

$$\tau_{zr}(b,\theta) = \sigma_0(t) \cos\theta. \tag{6.2}$$

Використовуючи формули Коші, отримаємо вираз для деформацій:

$$\gamma_{z\theta}(r,\theta) = -\left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin\theta, \tag{6.3}$$

$$\gamma_{zr}(r,\theta) = \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos\theta. \tag{6.4}$$

Застосування закону Гука дозволяє визначити вирази для напружень:

$$\tau_{zr}(r,\theta) = G_{12} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos\theta, \tag{6.5}$$

$$\tau_{z\theta}(r,\theta) = -G_{12} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin\theta. \tag{6.6}$$

Розглянемо задачу про спільний повздовжній зсув порожнистого циліндра ($a \le r \le b$), що моделює матрицю, та суцільного циліндра ($0 \le r \le a$), що моделює волокно.

Основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан в’язкопружної матриці (замість сталих у цьому випадку використовуємо функції часу t) подамо у вигляді:

$$u_z^*(t,r,\theta)=\left(A(t)r+\frac{B(t)}{r}\right)\cos\theta, \tag{6.7}$$

$$\gamma_{\theta z}^*(t,r,\theta)=-\left(A(t)+\frac{B(t)}{r^2}\right)\sin\theta, \tag{6.8}$$

$$\gamma_{zr}^*(t,r,\theta)=\left(A(t)-\frac{B(t)}{r^2}\right)\cos\theta, \tag{6.9}$$

$$\tau_{zr}^*(t,r,\theta)=\tilde{G}_{12}^*\left(A(t)-\frac{B(t)}{r^2}\right)\cos\theta, \tag{6.10}$$

$$\tau_{z\theta}^*(t,r,\theta)=-\bar{G}_{12}^*\left(A(t)+\frac{B(t)}{r^2}\right)\sin\theta. \tag{6.11}$$

У рівностях (6.10), (6.11) $\bar{G}_{12}^*$ – лінійний інтегральний оператор, який характеризує в’язкопружні властивості матеріалу матриці:

$$\bar{G}_{12}^*\left[y(t)\right]=G_{12}^*\left(y(t)-\int_0^t R^*(t-\tau)y(\tau)d\tau\right), \tag{6.12}$$

де G_{12}^* – миттєвий модуль зсуву, що відповідає значенню $t=0$, $R^*(t)$ – ядро релаксації матриці.

Основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан волокна (суцільний циліндр) з врахуванням скінченності переміщень при $r=0$ набувають вигляду:

$$u_z^\circ(t,r,\theta)=C(t)r\cos\theta, \tag{6.13}$$

$$\gamma_{z\theta}^\circ(t,\theta)=-C(t)\sin\theta, \tag{6.14}$$

$$\gamma_{zr}^\circ(t,\theta)=C(t)\cos\theta \ , \tag{6.15}$$

$$\tau_{zr}^\circ(t,\theta)=G_{12}^\circ\cdot C(t)\cos\theta, \tag{6.16}$$

$$\tau_{z\theta}^\circ(t,\theta)=-G_{12}^\circ\cdot C(t)\sin\theta. \tag{6.17}$$

Знайдемо функції $A(t)$, $B(t)$ та $C(t)$ у співвідношеннях (6.17) – (6.11) та (6.13) – (6.17) для задачі про сумісний повздовжній зсув матриці і волокна. Для цього використаємо крайову умову та умови неперервності переміщень та напружень в композиті при $r=a$:

$$\tau_{zr}^\circ(t,\theta)=\tau_{zr}^*(t,a,\theta),\ u_z^\circ(t,a,\theta)=u_z^*(t,a,\theta). \tag{6.18}$$

З урахуванням (6.12) отримуємо систему інтегральних рівнянь типу згортки відносно невідомих функцій $A(t)$, $B(t)$ та $C(t)$:

$$\begin{cases} \bar{G}_{12}^*\left[A(t)-\dfrac{B(t)}{b^2}\right]=\sigma_0, \\ \bar{G}_{12}^*\left[A(t)-\dfrac{B(t)}{a^2}\right]=G_{12}^\circ\cdot C(t), \\ A(t)\cdot a+\dfrac{B(t)}{a}=C(t)\cdot a. \end{cases} \tag{6.19}$$

З останнього рівняння системи (6.19) отримуємо:

$$C(t)=A(t)+\frac{B(t)}{a^2}. \tag{6.20}$$

З врахуванням (6.20) система (6.19) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \bar{G}_{12}^{*}\left[A(t)-\dfrac{B(t)}{b^2}\right]=\sigma_0(t), \\ \bar{G}_{12}^{*}\left[A(t)-\dfrac{B(t)}{a^2}\right]=G_{12}^{\circ}\cdot\left(A(t)+\dfrac{B(t)}{a^2}\right). \end{cases} \tag{6.21}$$

Для розв'язання системи інтегральних рівнянь (6.21) використаємо інтегральне перетворення Лапласа. Використовуючи його властивості, зокрема, властивість лінійності та теорему про зображення згортки, знаходимо зображення для інтегрального оператора $\bar{G}_{12}^{*}$ у вигляді:

$$\bar{G}_{12}^{*}\left[y(t)\right]\div G_{12}^{*}Y(p)\left(1-\tilde{R}^{*}(p)\right),$$

де $R^{*}(t)\div\tilde{R}^{*}(p)$.

Позначимо $A(t)\div\tilde{A}(p)$, $B(t)\div\tilde{B}(p)$. Зображення системи (6.21) має вигляд:

$$\begin{cases} G_{12}^{*}\left(\tilde{A}(p)-\dfrac{\tilde{B}(p)}{b^2}\right)\left(1-\tilde{R}^{*}(p)\right)=b^2\tilde{\sigma}_0(p), \\ G_{12}^{*}\left(\tilde{A}(p)-\dfrac{\tilde{B}(p)}{a^2}\right)\left(1-\tilde{R}^{*}(p)\right)=G_{12}^{\circ}\left(\tilde{A}(p)+\dfrac{\tilde{B}(p)}{a^2}\right). \end{cases} \tag{6.22}$$

З другого рівняння цієї системи виразимо $\tilde{B}(p)$ через $\tilde{A}(p)$:

$$\tilde{B}(p)=\frac{a^2\left(G_{12}^{*}\left(1-\tilde{R}^{*}(p)\right)-G_{12}^{\circ}\right)\tilde{A}(p)}{G_{12}^{\circ}+G_{12}^{*}\left(1-\tilde{R}^{*}(p)\right)}. \tag{6.23}$$

Підставивши (6.20) у перше рівняння системи (6.22), отримуємо вираз для зображення $\tilde{A}(p)$ у вигляді:

$$\tilde{A}(p)=\frac{\left(G_{12}^{\circ}+G_{12}^{*}x^{*}\right)\tilde{\sigma}_0}{G_{12}^{*}x^{*}\left(G_{12}^{\circ}\left(1+f\right)+G_{12}^{*}x^{*}\left(1-f\right)\right)}. \tag{6.24}$$

де $x^{*}=1-\tilde{R}^{*}\left(p\right)$, $f=\dfrac{a^2}{b^2}$ – частка волокна у об'ємі композиту.

Підставивши (6.24) у (6.23), після елементарних перетворень отримуємо:

$$\tilde{B}(p)=\frac{a^2\left(G_{12}^{*}x^{*}-G_{12}^{\circ}\right)\tilde{\sigma}_0}{G_{12}^{*}x^{*}\left(G_{12}^{\circ}\left(1+f\right)+G_{12}^{*}x^{*}\left(1-f\right)\right)}. \tag{6.25}$$

Зображення функції $C\left(t\right)$ має вигляд:

$$\tilde{C}(p)=\tilde{A}(p)+\frac{\tilde{B}(p)}{a^2}.$$

Ефективні механічні характеристики волокнистого композиту із в'язкопружними компонентами при зсувних деформаціях

Розв'яжемо аналогічну задачу про чистий повздовжній зсув для однорідного трансверсально-ізотропного в'язкопружного однорідного матеріалу, що моделює композит. Подамо елементарну комірку для нього у вигляді суцільного нескінченного циліндра з радіусом $r=b$. Переміщення, напруження та деформації однорідного композиту при чистому поздовжньому зсуві мають вигляд:

$$u_z\left(t,r,\theta\right)=D\left(t\right)r\cos\theta, \tag{6.26}$$

$$\gamma_{\theta z}\left(t,\theta\right)=-D\left(t\right)\sin\theta, \tag{6.27}$$

$$\gamma_{zr}\left(t,\theta\right)=D\left(t\right)\cos\theta, \tag{6.28}$$

$$\tau_{zr}\left(t,\theta\right)=\bar{G}_{12}\left[D\left(t\right)\right]\cdot\cos\theta, \tag{6.29}$$

$$\tau_{z\theta}\left(t,\theta\right)=-\bar{G}_{12}\left[D\left(t\right)\right]\cdot\sin\theta. \tag{6.30}$$

У рівностях (6.29) та (6.30) $\bar{G}_{12}$ – лінійний інтегральний оператор, за структурою аналогічний до (6.12), з миттєвим модулем зсуву G_{12} та ядром релаксації $R\left(t\right)$, $R\left(t\right)\div\tilde{R}\left(p\right)$.

З крайової умови отримуємо, що

$$\bar{G}_{12}\left[D\left(t\right)\right]=\sigma_0\left(t\right). \tag{6.31}$$

Кінематична умова узгодження переміщень на зовнішній циліндричній поверхні комірки має вигляд:

$$u_z\left(b,\theta\right)=u_z^*\left(b,\theta\right). \tag{6.32}$$

Підставивши сюди відповідні вирази для осьових переміщень, отримаємо:

$$D\left(t\right)=A\left(t\right)+\frac{B\left(t\right)}{b^2}. \tag{6.33}$$

Нехай $x = x(p) = 1 - \tilde{R}(p)$. З врахуванням (6.23), (6.24) рівняння (6.31) у зображеннях набуває вигляду

$$\frac{\tilde{\sigma}_0}{G_{12}x} = \frac{\left(G_{12}^{\circ} + G_{12}^{*}x^{*} + f\cdot\left(G_{12}^{*}x^{*} - G_{12}^{\circ}\right)\right)\tilde{\sigma}_0}{G_{12}^{*}x^{*}\left(G_{12}^{\circ}\left(1+f\right) + G_{12}^{*}x^{*}\left(1-f\right)\right)}.$$

З останньої рівності отримаємо:

$$G_{12}x = \frac{G_{12}^{*}x^{*}\left(G_{12}^{\circ}\left(1+f\right) + G_{12}^{*}x^{*}\left(1-f\right)\right)}{\left(1-f\right)G_{12}^{\circ} + \left(1+f\right)G_{12}^{*}x^{*}}. \qquad (6.34)$$

Перейшовши у цій рівності до границі при $p \to \infty$, отримуємо формулу для визначення миттєвого модуля зсуву:

$$G_{12} = \frac{G_{12}^{*}\left(G_{12}^{\circ}\left(1+f\right) + G_{12}^{*}\left(1-f\right)\right)}{\left(1-f\right)G_{12}^{\circ} + \left(1+f\right)G_{12}^{*}}. \qquad (6.35)$$

Знайдемо ядро релаксації $R(t)$. Для цього з рівняння (6.34), враховуючи, що $x = 1 - \tilde{R}(p)$, знайдемо зображення $\tilde{R}(p)$:

$$\tilde{R}(p) = \frac{C_1\left(x^{*}\right)^2 + C_2x^{*} + C_3}{C_4\left(x^{*} + C_5\right)}, \qquad (6.36)$$

де коефіцієнти C_i, $i = 1,\ldots,5$, набувають наступних значень:

$$C_1=(f-1)\left(G_{12}^*\right)^2,\ C_2=G_{12}^*\left(G_{12}-G_{12}^\circ\right)(1+f),$$
$$C_3=G_{12}\cdot G_{12}^\circ(1-f),\ C_4=G_{12}\cdot G_{12}^*(1+f),$$
$$C_5=\frac{G_{12}^\circ(1-f)}{G_{12}^*(1+f)}.$$

Нехай в'язкопружні властивості матриці композиту моделюються з допомогою ядра релаксації експоненціального типу $R^*(t)=s_1e^{s_0t}$. Його зображення при перетворенні Лапласа має вигляд:

$$\tilde{R}^*(p)=\frac{s_1}{p-s_0},$$

Тоді вираз для x^* у (6.36) набуває вигляду:

$$x^*=1-\tilde{R}^*(p)=\frac{p-s_0-s_1}{p-s_0}.$$

Нехай $s=p-s_0$. Для ядра вказаного типу запишемо зображення ядра релаксації (6.36):

$$\tilde{R}(p)=\frac{C_1(s-s_1)^2+C_2(s-s_1)s+C_3s^2}{C_4s\left((C_5+1)s-s_1\right)}. \tag{6.37}$$

Функція $\tilde{R}(p)$ має дві особливі точки – прості полюси $p_1 = s_0$ та $p_2 = s_0 + \frac{s_1}{C_5 + 1}$. Оригінал $R(t)$ зображення $\tilde{R}(p)$ знаходимо з допомогою теореми розвинення.

Знайдемо лишки раціонального зображення $\tilde{R}(p)$.

$$q_1 = \mathrm{Res}\,\tilde{R}_1(p)\Big|_{p=s_0} = -\frac{C_1 s_1}{C_4},$$

$$q_2 = \mathrm{Res}\,\tilde{R}_1(p)\Big|_{p=p_2} = \frac{s_1\left(C_1 C_5^2 - C_2 C_5 + C_3\right)}{C_4\left(C_5 + 1\right)}.$$

Тоді оригінал ядра релаксації однорідного композиту набуває вигляду:

$$R(t) = q_1 e^{s_0 t} + q_2 e^{p_2 t},$$

Побудуємо залежність

$$h(t) = \tilde{G}_{12}[1] = G_{12}\left(1 - \int_0^t R_1(t-\tau)\,d\tau\right).$$

Для експоненціального ядра ця залежність має вигляд:

$$h(t) = G_{12}\left(\alpha_1 + \alpha_2 e^{s_0 t} + \alpha_3 e^{p_2 t}\right),$$

де $\alpha_1 = 1 + \frac{q_1}{s_0} + \frac{q_2}{p_2}$, $\alpha_2 = -\frac{q_1}{s_0}$, $\alpha_3 = -\frac{q_2}{p_2}$.