Гомогенізація волокнистого композиту в умовах температурного навантаження

Розглядається задача визначення ефективних термопружних коефіцієнтів лінійного розширення композиційного матеріалу. Об’єктом дослідження вважається односпрямований волокнистий композит. Матриця та волокно розташовані у матеріалі у вигляді сукупності елементарних гексагональних комірок (рис. 7.1). Розглядаються трансверсально-ізотропні матриця та волокно між якими існує ідеальне зчеплення, причому площини ізотропії збігаються й розташовані перпендикулярно осі волокна. Вважається, що для поставленої задачі справедливий закон Гука. Розміри волокон та частота армування вибираються таким чином, щоб композит можна було розглядати як макроскопічно однорідний матеріал.

За допомогою комбінації двох циліндрів, що мають нескінченну довжину представлено елемент волокнистого композита з трансверсально-ізотропними властивостями. Порожнистий циліндр з транверсально-ізотропними властивостями моделює матрицю, суцільний циліндр з транверсально-ізотропними властивостями – волокно.

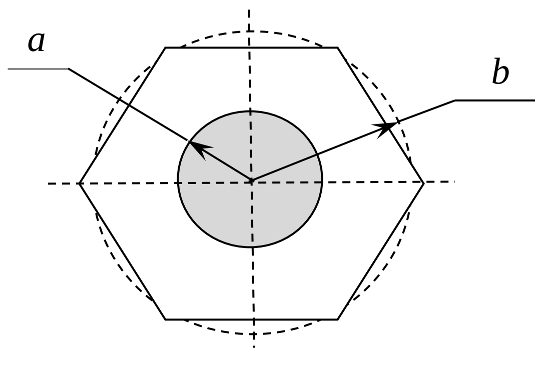

Рисунок 7.1 – Гексагональна комірка

Припускається, що об’ємний вміст волокон в композиті дорівнює f. Тоді, враховуючи, що області, які займають матриця та волокно в елементарній комірці мають однакову висоту, виконується співвідношення:

$$f = \frac{a^2}{b^2}. \tag{7.1}$$

Пропонується наступний підхід для знаходження температурних коефіцієнтів лінійного розширення. Розв’язуються дві крайові задачі. Першою є задача сумісного деформування. Матриця і волокно композиційного матеріалу мають трансверсально-ізотропні властивості. Як результат, знаходять компоненти напружено-деформованого стану, що залежать від термопружних сталих матриці та волокна, а також об’ємної частки кожного із них у композиті. Далі для композиційного матеріалу, що вважається однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом із поки що невідомими термопружними сталими, розв’язується аналогічна крайова задача. Результатом розв’язання є компоненти напружено-деформованого стану, що залежать від невідомих термопружних сталих однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу. Для узгодження обох задач необхідно прирівняти відповідні компоненти вектора переміщень. Із умови узгодження знаходяться ефективні температурні коефіцієнти лінійного розширення однорідного трансверсально-ізотропного композиту, що залежать від термопружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, а також об’ємної частки кожного з них в композиті.

Розглядається вісесиметричний напружено-деформований стан циліндричного тіла, тоді $\sigma_{zz} = \sigma_0$, $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r)$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r)$, $\sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0$. У циліндричній системі координат (r, θ, z) два рівняння рівноваги виконуються тотожно, а третє рівняння запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \tag{7.2}$$

Закон Гука з урахуванням впливу температури T для трансверсально-ізотропного матеріалу запишеться у вигляді:

$$\varepsilon_{zz}-\alpha_{11}T=\frac{1}{E_1}\left(\sigma_{zz}-\nu_{12}\left(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}\right)\right),$$

$$\varepsilon_{rr}-\alpha_{22}T=\frac{1}{E_2}\left(\sigma_{rr}-\left(\nu_{21}\sigma_{zz}+\nu_{23}\sigma_{\theta\theta}\right)\right),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}-\alpha_{33}T=\frac{1}{E_2}\left(\sigma_{\theta\theta}-\left(\nu_{21}\sigma_{zz}+\nu_{23}\sigma_{rr}\right)\right),$$

де $\alpha_{11},\alpha_{22},\alpha_{33}$ – температурні коефіцієнти лінійного розширення по осям z,r,θ.

При умові, що осьове напруження є сталим, випливає, що $\varepsilon_{rr}=\varepsilon_{rr}(r)$, $\varepsilon_{\theta\theta}=\varepsilon_{\theta\theta}(r)$ і, відповідно, $\varepsilon_{zz}=const$. Для вісесиметричного напружено-деформованого стану рівняння (7.2) набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}=\left(\frac{\nu_{12}\left(1+\nu_{23}\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11}+\alpha_{22}+\frac{\left(\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\frac{\partial T}{\partial r}-$$

$$-\frac{T\left(1-\nu_{23}-2\nu_{21}\nu_{12}\right)\left(\alpha_{22}-\alpha_{33}\right)}{r\left(1-\nu_{21}\nu_{12}\right)}. \tag{7.3}$$

Розв’язком задачі є функція радіальних переміщень (7.4):

$$u_r(r)=\left(\frac{\nu_{12}\left(\nu_{23}+1\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11}+\alpha_{22}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r_2}Trdr+C_1r+\frac{C_2}{r}$$

$$, \tag{7.4}$$

де C_1 и C_2 – сталі, що визначаються з граничних умов. Звідки маємо:

$$\varepsilon_{rr}(r) = -\left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11} + \alpha_{22} + \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\left(\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2} Trdr - T\right) + C_1 - \frac{C_2}{r^2}$$

,

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r) = \left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11} + \alpha_{22} + \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2} Trdr + C_1 + \frac{C_2}{r^2}$$

. (7.5)

Скориставшись оберненим законом Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу, отримуємо:

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{E_2\left[\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_{zz} + (1+\nu_{23})C_1 + (\nu_{23}+2\nu_{21}\nu_{12}-1)\frac{C_2}{r^2}\right]}{1-2\nu_{21}\nu_{12}-\nu_{23}^2-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{21}} -$$

$$-\frac{E_2}{1+\nu_{23}}\cdot\left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11} + \alpha_{22} + \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2} Trdr\ ,$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{E_2\left[\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_{zz} + (1+\nu_{23})C_1 + (1-\nu_{23}-2\nu_{21}\nu_{12})\frac{C_2}{r^2}\right]}{1-2\nu_{21}\nu_{12}-\nu_{23}^2-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{21}} +$$

$$+\frac{E_2}{1+\nu_{23}}\cdot\left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11} + \alpha_{22} + \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2} Trdr -$$

$$-\frac{E_2 T(\alpha_{33}+\nu_{12}\alpha_{11})}{1-\nu_{21}\nu_{12}}. \qquad (7.6)$$

Підставимо отримані співвідношення та значення $\sigma_{zz} = \sigma_0$ у вираз для осьової деформації, отримаємо формулу для ε_{zz}:

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\sigma_0(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})}-\frac{2\nu_{21}C_1}{(1-\nu_{23})}+\frac{T(\nu_{21}\alpha_{33}+\alpha_{11})(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{(1-\nu_{21}\nu_{12})(1-\nu_{23})}. \qquad (7.7)$$

Співвідношення для осьових переміщень запишемо у вигляді:

$$u_z(z)=\int\varepsilon_{zz}dz=$$
$$=\left(\frac{\sigma_0(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})}-\frac{2\nu_{21}C_1}{(1-\nu_{23})}+\frac{T(\nu_{21}\alpha_{33}+\alpha_{11})(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{(1-\nu_{21}\nu_{12})(1-\nu_{23})}\right)z+C_3. \qquad (7.8)$$

При умові, що $u_z(0)=0$, маємо $C_3=0$. Останнє співвідношення (7.8) набуде вигляду:

$$u_z(z)=$$
$$=\left(\frac{\sigma_0(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})}-\frac{2\nu_{21}C_1}{(1-\nu_{23})}+\frac{T(\nu_{21}\alpha_{33}+\alpha_{11})(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{(1-\nu_{21}\nu_{12})(1-\nu_{23})}\right)z. \qquad (7.9)$$

Беручи до уваги отриманий вираз (7.9) співвідношення для напружень запишуться у вигляді:

$$\sigma_{rr}(r)=E_2\left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1(1-\nu_{23})}+\frac{C_1}{(1-\nu_{23})}-\frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})}\right)+\frac{E_2T\nu_{12}(\nu_{21}\alpha_{33}+\alpha_{11})}{(1-\nu_{21}\nu_{12})(1-\nu_{23})}-$$
$$-\frac{E_2}{1+\nu_{23}}\cdot\left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11}+\alpha_{22}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2}Trdr,$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r)=E_2\left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1(1-\nu_{23})}+\frac{C_1}{(1-\nu_{23})}+\frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})}\right)+$$

$$+\frac{E_2T\left(\left(\nu_{12}\nu_{21}+\nu_{23}-1\right)\alpha_{33}+\nu_{12}\nu_{23}\alpha_{11}\right)}{\left(1-\nu_{21}\nu_{12}\right)\left(1-\nu_{23}\right)}+$$

$$+\frac{E_2}{1+\nu_{23}}\cdot\left(\frac{\nu_{12}\left(\nu_{23}+1\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11}+\alpha_{22}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2}Trdr$$

$$. \qquad (7.10)$$

Як результат, знайдено компоненти напружень, деформацій і переміщень для вісесиметричного напружено-деформованого стану, як функції термопружних сталих та характеристик матеріалу матриці і матеріалу волокна.

Розглянемо сумісну температурну деформацію суцільного та порожнистого циліндрів. При чому, волокно моделює суцільний циліндр $(0\le r\le a)$, а матрицю − порожнистий циліндр $(a\le r\le b)$. Окрім сталої температури, у осьовому напрямку на торцях суцільного і порожнистого циліндрів прикладаються навантаження $\overset{\circ}{\sigma}_0$ і $\overset{*}{\sigma}_0$, відповідно. Це потрібно для вирівнювання осьових переміщень матриці волокна.

Для композиційного матеріалу крайові умови підбираються таким чином, щоб вони відповідали експериментальним даним. Вважається, що волокно і матриця мають ідеальне щеплення, а для довільного $z=h$ осьові переміщення і волокна, і матриці – сталі й однакові:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{rr}(a)=\overset{*}{\sigma}_{rr}(a),\ \overset{\circ}{u}_r(a)=\overset{*}{u}_r(a),\ \overset{\circ}{u}_z(h)=\overset{*}{u}_z(h). \qquad (7.11)$$

Тут і далі символом $^\circ$ будемо позначати величини, що відносяться до матеріалу волокна, а символом * – величини, що відносяться до матеріалу матриці. Також маємо таку крайову умову:

$$\overset{*}{\sigma}_{rr}(b)=0. \qquad (7.12)$$

Враховуючи, що в площині ізотропії $\alpha_{22}=\alpha_{33}$, радіальні переміщення трансверсально-ізотропного волокна будуть описуватись співвідношенням:

$$u_r^\circ(r)=\frac{\left(1+\nu_{23}^\circ\right)\left(\nu_{12}^\circ\alpha_{11}^\circ+\alpha_{22}^\circ\right)}{1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ}\cdot\frac{1}{r}\int_0^r Trdr+C_1r+\frac{C_2}{r}, \qquad (7.13)$$

а при $r=0$ $u_r^\circ(r)$ обмежене. Тоді випливає, що $C_2=0$, а значить дане співвідношення запишеться у вигляді (перепозначимо C_1 на C):

$$u_r^\circ(r)=\frac{\left(1+\nu_{23}^\circ\right)\left(\nu_{12}^\circ\alpha_{11}^\circ+\alpha_{22}^\circ\right)}{1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ}\cdot\frac{Tr}{2}+Cr. \qquad (7.14)$$

Напружено-деформований стан трансверсально-ізотропного волокна буде описуватися, окрім (7.14), такими співвідношеннями:

$$u_z^\circ(z)=$$

$$=\left(\frac{\sigma_0^\circ\left(1-\nu_{23}^\circ-2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ\right)}{E_1^\circ\left(1-\nu_{23}^\circ\right)}-\frac{2\nu_{21}^\circ C}{1-\nu_{23}^\circ}+\frac{T\left(\nu_{21}^\circ\alpha_{22}^\circ+\alpha_{11}^\circ\right)\left(1-\nu_{23}^\circ-2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ\right)}{\left(1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ\right)\left(1-\nu_{23}^\circ\right)}\right)z, \qquad (7.15)$$

$$\sigma_{rr}^\circ(r)=\frac{E_2^\circ}{1-\nu_{23}^\circ}\left(\frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ}+C\right)+\frac{E_2^\circ T\nu_{12}^\circ\left(\nu_{21}^\circ\alpha_{22}^\circ+\alpha_{11}^\circ\right)}{\left(1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ\right)\left(1-\nu_{23}^\circ\right)}-\frac{E_2^\circ\left(\nu_{12}^\circ\alpha_{11}^\circ+\alpha_{22}^\circ\right)}{1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ}\cdot\frac{T}{2}, \qquad (7.16)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^\circ(r)=\frac{E_2^\circ}{1-\nu_{23}^\circ}\left(\frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ}+C\right)+$$

$$+\frac{E_2^\circ T\left(\left(\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ+\nu_{23}^\circ-1\right)\alpha_{22}^\circ+\nu_{12}^\circ\nu_{23}^\circ\alpha_{11}^\circ\right)}{\left(1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ\right)\left(1-\nu_{23}^\circ\right)}+\frac{E_2^\circ\left(\nu_{12}^\circ\alpha_{11}^\circ+\alpha_{22}^\circ\right)}{1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ}\cdot\frac{T}{2}. \qquad (7.17)$$

Аналогічно запишемо співвідношення, які описують напружено-деформований стан трансверсально-ізотропної матриці (перепозначимо C_1 на A, а C_2 на B):

$$u_r^*(r) = \frac{\left(1+\nu_{23}^*\right)\left(\nu_{12}^*\alpha_{11}^* + \alpha_{22}^*\right)}{1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*} \cdot \frac{T\left(r^2-a^2\right)}{2r} + Ar + \frac{B}{r}, \tag{7.18}$$

$$u_z^*(z) = \left(\frac{\sigma_0^*\left(1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*\right)}{E_1^*\left(1-\nu_{23}^*\right)} - \frac{2\nu_{21}^* A}{1-\nu_{23}^*} + \frac{T\left(\nu_{21}^*\alpha_{22}^* + \alpha_{11}^*\right)\left(1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*\right)}{\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)\left(1-\nu_{23}^*\right)} \right) z, \tag{7.19}$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E_2^*\left(\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*\left(1-\nu_{23}^*\right)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} - \frac{B}{r^2\left(\nu_{23}^*+1\right)} \right) + \frac{E_2^* T \nu_{12}^*\left(\nu_{21}^*\alpha_{22}^* + \alpha_{11}^*\right)}{\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)\left(1-\nu_{23}^*\right)} -$$

$$- \frac{E_2^*\left(\alpha_{22}^* + \nu_{12}^*\alpha_{11}^*\right)}{1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*} \cdot \frac{T\left(r^2-a^2\right)}{2r^2}, \tag{7.20}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E_2^*\left(\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*\left(1-\nu_{23}^*\right)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} + \frac{B}{r^2\left(\nu_{23}^*+1\right)} \right) +$$

$$+ \frac{E_2^* T \cdot \left(\left(\nu_{12}^*\nu_{21}^* + \nu_{23}^* - 1\right)\alpha_{22}^* + \nu_{23}^*\nu_{12}^*\alpha_{11}^*\right)}{\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)\left(1-\nu_{23}^*\right)} + \frac{E_2^*\left(\alpha_{22}^* + \nu_{12}^*\alpha_{11}^*\right)}{1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*} \cdot \frac{T\left(r^2-a^2\right)}{2r^2}$$

$$. \tag{7.21}$$

Використовуючи крайові умови (7.11) та (7.12), знаходимо сталі A, B і C та залежність між σ_0° і σ_0^*. Застосовуючи другу рівність (7.11) маємо:

$$C = A + \frac{B}{a^2} - \frac{T}{2} \cdot \frac{\left(1+\nu_{23}^\circ\right)\left(\nu_{12}^\circ\alpha_{11}^\circ + \alpha_{22}^\circ\right)}{1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ}. \tag{7.22}$$

Використовуючи співвідношення (7.12) отримуємо:

$$A=\frac{B\left(1-\nu_{23}^{*}\right)}{b^{2}\left(1+\nu_{23}^{*}\right)}-\frac{\sigma_{0}^{*}\nu_{12}^{*}}{E_{1}^{*}}-\frac{T\nu_{12}^{*}\left(\nu_{21}^{*}\alpha_{22}^{*}+\alpha_{11}^{*}\right)}{1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}}+$$

$$+\frac{T\left(1-\nu_{23}^{*}\right)\left(1-f\right)\left(\nu_{12}^{*}\alpha_{11}^{*}+\alpha_{22}^{*}\right)}{2\left(1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}\right)}. \quad (7.23)$$

Тоді вираз (7.22) набуде вигляду:

$$C=B\left(\frac{f\left(1-\nu_{23}^{*}\right)+\left(1+\nu_{23}^{*}\right)}{a^{2}\left(1+\nu_{23}^{*}\right)}\right)-\frac{\sigma_{0}^{*}\nu_{12}^{*}}{E_{1}^{*}}-\frac{T\nu_{12}^{*}\left(\nu_{21}^{*}\alpha_{22}^{*}+\alpha_{11}^{*}\right)}{1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}}+$$

$$+\frac{T(1-f)\left(1-\nu_{23}^{*}\right)\left(\nu_{12}^{*}\alpha_{11}^{*}+\alpha_{22}^{*}\right)}{2\left(1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}\right)}-\frac{T\left(1+\nu_{23}^{\circ}\right)\left(\nu_{12}^{\circ}\alpha_{11}^{\circ}+\alpha_{22}^{\circ}\right)}{2\left(1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}\right)}. \quad (7.24)$$

Використовуючи першу рівності (7.11) отримаємо:

$$B=\left(\frac{\sigma_{0}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{E_{1}^{\circ}}-\frac{\sigma_{0}^{*}\nu_{12}^{*}}{E_{1}^{*}}\right)\frac{a^{2}E_{2}^{\circ}\left(1+\nu_{23}^{*}\right)}{E_{2}^{*}(f-1)\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)-E_{2}^{\circ}\left(f\left(1-\nu_{23}^{*}\right)+\left(1+\nu_{23}^{*}\right)\right)}-$$

$$-\frac{a^{2}TE_{2}^{\circ}\left(1+\nu_{23}^{*}\right)}{E_{2}^{*}(f-1)\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)-E_{2}^{\circ}\left(f\left(1-\nu_{23}^{*}\right)+\left(1+\nu_{23}^{*}\right)\right)}\left(\frac{\nu_{12}^{*}\left(\nu_{21}^{*}\alpha_{22}^{*}+\alpha_{11}^{*}\right)}{1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}}+\alpha_{22}^{\circ}\right)+$$

$$+\frac{a^{2}T\left(E_{2}^{*}(f-1)\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)+E_{2}^{\circ}\left(1-\nu_{23}^{*}\right)-E_{2}^{\circ}f\left(1-\nu_{23}^{*}\right)\right)}{2\left(E_{2}^{*}(f-1)\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)-E_{2}^{\circ}\left(f\left(1-\nu_{23}^{*}\right)+\left(1+\nu_{23}^{*}\right)\right)\right)}\cdot\frac{\left(1+\nu_{23}^{*}\right)\left(\nu_{12}^{*}\alpha_{11}^{*}+\alpha_{22}^{*}\right)}{1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}}.$$

$$(7.25)$$

Прийнявши

$$d_{1}=E_{2}^{*}(f-1)\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right),\ d_{2}=E_{2}^{\circ}\left(f\left(1-\nu_{23}^{*}\right)+\left(1+\nu_{23}^{*}\right)\right), \quad (7.26)$$

отримаємо:

$$B=\frac{a^2E_2^{\circ}\left(1+\nu_{23}^{*}\right)}{d_1-d_2}\left(\frac{\sigma_0^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}}-\frac{\sigma_0^{*}\nu_{12}^{*}}{E_1^{*}}\right)-$$

$$-\frac{a^2TE_2^{\circ}\left(1+\nu_{23}^{*}\right)}{d_1-d_2}\left(\frac{\nu_{12}^{*}\left(\nu_{21}^{*}\alpha_{22}^{*}+\alpha_{11}^{*}\right)}{1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}}+\alpha_{22}^{\circ}\right)+$$

$$+\frac{a^2T\left(1+\nu_{23}^{*}\right)\left(\nu_{12}^{*}\alpha_{11}^{*}+\alpha_{22}^{*}\right)\left(d_1+E_2^{\circ}\left(1-\nu_{23}^{*}\right)(1-f)\right)}{2\left(d_1-d_2\right)\left(1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}\right)}. \qquad (7.27)$$

Тоді

$$C=\frac{d_2\nu_{12}^{\circ}}{\left(d_1-d_2\right)E_1^{\circ}}\sigma_0^{\circ}-\frac{d_1\nu_{12}^{*}}{\left(d_1-d_2\right)E_1^{*}}\sigma_0^{*}+\frac{T\left(d_1\alpha_{22}^{*}-d_2\alpha_{22}^{\circ}\right)}{d_1-d_2}-\frac{T\left(1+\nu_{23}^{\circ}\right)\left(\nu_{12}^{\circ}\alpha_{11}^{\circ}+\alpha_{22}^{\circ}\right)}{2\left(1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}\right)}$$

,

$$A=\frac{\nu_{21}^{\circ}f\left(1-\nu_{23}^{*}\right)}{d_1-d_2}\sigma_0^{\circ}-\frac{\nu_{12}^{*}}{E_1^{*}}\cdot\frac{fE_2^{\circ}\left(1-\nu_{23}^{*}\right)+d_1-d_2}{d_1-d_2}\sigma_0^{*}+$$

$$+\frac{T\left(1-\nu_{23}^{*}\right)\left(\nu_{12}^{*}\alpha_{11}^{*}+\alpha_{22}^{*}\right)}{2\left(1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}\right)}\cdot\frac{2fE_2^{\circ}+d_1-d_2}{d_1-d_2}-$$

$$-\frac{fTE_2^{\circ}\left(1-\nu_{23}^{*}\right)}{d_1-d_2}\left(\frac{\nu_{12}^{*}\left(\nu_{21}^{*}\alpha_{22}^{*}+\alpha_{11}^{*}\right)}{1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}}+\alpha_{22}^{\circ}\right)-\frac{T\nu_{12}^{*}\left(\nu_{21}^{*}\alpha_{22}^{*}+\alpha_{11}^{*}\right)}{1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}}. \qquad (7.28)$$

З урахуванням третьої рівності (7.11) знаходимо залежність між σ_0^{*} і σ_0°

:

$$\left(\frac{\left(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}\right)\left(d_1-d_2\right)}{E_1^{\circ}\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)}-\frac{2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}d_2}{E_1^{\circ}\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)}+\frac{2f\nu_{21}^{*}\nu_{21}^{\circ}}{1}\right)\sigma_0^{\circ}+\frac{2\nu_{21}^{\circ}Td_1\left(\alpha_{22}^{\circ}-\alpha_{22}^{*}\right)}{\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)}+$$

$$+T\left(d_1-d_2\right)\alpha_{zz}^{\circ}=$$

$$=\left(\frac{\left(1-\nu_{23}^{*}-2\nu_{12}^{*}\nu_{21}^{*}\right)\left(d_1-d_2\right)}{E_1^{*}\left(1-\nu_{23}^{*}\right)}+\frac{2\nu_{12}^{*}\nu_{21}^{*}\left(fE_2^{\circ}\left(1-\nu_{23}^{*}\right)+d_1-d_2\right)}{E_1^{*}\left(1-\nu_{23}^{*}\right)}-\frac{2\nu_{12}^{*}\nu_{21}^{\circ}d_1}{E_1^{*}\left(1-\nu_{23}^{*}\right)}\right)\sigma_0^{*}-$$

$$-\frac{\nu_{21}^{*}T\left(2fE_{2}^{\circ}+d_{1}-d_{2}\right)\left(\nu_{12}^{*}\alpha_{11}^{*}+\alpha_{22}^{*}\right)}{1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}}+\frac{2\nu_{21}^{*}fTE_{2}^{\circ}\alpha_{22}^{\circ}}{1}+$$

$$+\frac{T\left(\nu_{21}^{*}\alpha_{22}^{*}+\alpha_{11}^{*}\right)\left(d_{1}-d_{2}+2\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}fE_{2}^{\circ}\right)}{1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}}.$$

Прийнявши

$$d^{\circ}=\frac{E_{2}^{*}(f-1)\left(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}\right)-E_{2}^{\circ}\left(f\left(1-\nu_{23}^{*}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{*}\right)+\left(1+\nu_{23}^{*}\right)\right)}{E_{1}^{\circ}},$$

$$d^{*}=\frac{E_{2}^{*}(f-1)\left(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{*}\nu_{21}^{\circ}\right)-E_{2}^{\circ}\left(f\left(1-\nu_{23}^{*}-2\nu_{12}^{*}\nu_{21}^{*}\right)+\left(1+\nu_{23}^{*}\right)\right)}{E_{1}^{*}}$$

$$, \qquad (7.29)$$

отримаємо:

$$d^{\circ}\sigma_{0}^{\circ}-d^{*}\sigma_{0}^{*}=$$

$$=T\left(2\nu_{21}^{\circ}E_{2}^{*}(f-1)-2\nu_{21}^{*}E_{2}^{\circ}f\right)\left(\alpha_{22}^{*}-\alpha_{22}^{\circ}\right)+\left(d_{1}-d_{2}\right)\left(\alpha_{11}^{*}-\alpha_{11}^{\circ}\right). \qquad (7.30)$$

Ефективні термопружні сталі волокнистого композиту

Розглянемо аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу. Виконуються рівності:

$$\sigma_{zz}=\sigma_{0},\ \sigma_{rr}=0,\ \sigma_{\theta\theta}=0,\ \sigma_{zr}=\sigma_{\theta z}=\sigma_{r\theta}=0. \qquad (7.31)$$

Тут σ_0=0. Для того, щоб обидві задачі були узгодженими, необхідно, щоб виконувалися умови:

$$\pi a^2 \sigma_0^\circ + \pi\left(b^2 - a^2\right)\sigma_0^* = 0, \quad \text{або} \quad \sigma_0^\circ f + \sigma_0^*(1 - f) = 0. \qquad (7.32)$$

Використовуючи (7.30), отримуємо:

$$\sigma_0^* = \frac{\gamma T f}{d^\circ + f\left(d^* - d^\circ\right)}, \; \sigma_0^\circ = -\frac{\gamma T(1 - f)}{d^\circ + f\left(d^* - d^\circ\right)}, \qquad (7.33)$$

де

$$\gamma = \left(2\nu_{21}^\circ E_2^*(f - 1) - 2\nu_{21}^* E_2^\circ f\right)\left(\alpha_{22}^\circ - \alpha_{22}^*\right) + \left(d_1 - d_2\right)\left(\alpha_{11}^\circ - \alpha_{11}^*\right).$$

З урахуванням (7.31) співвідношення для деформацій набудуть вигляду:

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0 + \alpha_{rr}T; \; \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1}\sigma_0 + \alpha_{zz}T \; . \qquad (7.34)$$

Переміщення будуть описуватися формулами:

$$u_r(r) = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0 r + \alpha_{rr}Tr + C_1, \quad u_z(z) = \frac{1}{E_1}\sigma_0 z + \alpha_{zz}Tz + C_2 . \qquad (7.35)$$

Сталі $C_1 = C_2 = 0$. З урахуванням того, що для цієї задачі будуть виконуватися умови $u_r(0) = 0$ та $u_z(0) = 0$, а також $\sigma_0 = 0$, отримуємо

$$u_r(r) = \alpha_{rr}Tr, \quad u_z(z) = \alpha_{zz}Tz. \qquad (7.36)$$

Умовами узгодження для задачі про температурне деформування однорідного трансверсально-ізотропного композита та задачі про сумісне температурне деформування матриці й волокна є рівність осьових переміщень для довільної осьової координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні:

$$u_r(b) = u_r^*(b), \quad u_z(h) = u_z^*(h). \tag{7.37}$$

Друге співвідношення (7.37) з урахуванням (7.19) та (7.36) запишеться у вигляді:

$$\frac{1}{1-\nu_{23}^*}\left(\frac{\sigma_0^*\left(1-\nu_{23}^*-2\nu_{12}^*\nu_{21}^*\right)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^* + \frac{T\left(\nu_{21}^*\alpha_{22}^*+\alpha_{11}^*\right)\left(1-\nu_{23}^*-2\nu_{12}^*\nu_{21}^*\right)}{\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)}\right) = \alpha_{11}T \cdot \tag{7.38}$$

Використовуючи (7.23) та вираз, отриманий раніше для A, отримаємо:

$$\alpha_{11} = \frac{\gamma f d^*}{\left(d^\circ + f\left(d^* - d^\circ\right)\right)\left(d_1 - d_2\right)} + \frac{2\nu_{21}^* f E_2^\circ}{d_1 - d_2}\left(\alpha_{22}^\circ - \alpha_{22}^*\right) + \alpha_{11}^*. \tag{7.39}$$

Знайдемо вираз для α_{22}. З першої умови (7.37) маємо:

$$\frac{\left(1+\nu_{23}^*\right)\left(\alpha_{22}^* + \nu_{12}^*\alpha_{11}^*\right)}{1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*}\cdot\frac{T}{2}\left(1-f\right) + A + \frac{B}{b^2} = \alpha_{22}T \cdot \tag{7.40}$$

Підставимо в (7.40) вирази, отримані для констант A і B, отримаємо:

$$\alpha_{22} = -\frac{\gamma f}{\left(d_1-d_2\right)\left(d^\circ + f\left(d^*-d^\circ\right)\right)}\left(2\nu_{21}^\circ\left(1-f\right) + \frac{\nu_{12}^*\left(2fE_2^\circ + d_1 - d_2\right)}{E_1^*}\right) +$$

$$+\frac{2fE_2^\circ}{d_1-d_2}\left(\alpha_{22}^* - \alpha_{22}^\circ\right) + \alpha_{22}^*. \tag{7.41}$$