ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. Теоретичні довідки та розрахункові формули

Будь-яка кількісна характеристика експерименту називається *випадковою величиною.*

Випадковим процесом X(t) називається процес, значення якого при будь-якому значенні аргументу t є випадковою величиною.

Реалізацією випадкового процесу $X(t)$ називається невипадкова функція $x(t)$, в яку перетворюється випадковий процес $X(t)$ в результаті експерименту; іншими словами, конкретний вид, що прийняв випадковий процес $X(t)$, який спостерігався на якомусь відрізку часу від 0 до τ.

Якщо проведено не один експеримент, а декілька, в результаті кожного з яких було спостережено якусь реалізацію випадкового процесу $x_i(t)$ (i – номер експерименту), то отримаємо декілька різних реалізацій випадкового процесу $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_i(t)$, … або *сім'ю реалізацій.*

Характеристиками випадкового процесу називають його моменти, які є невипадковими функціями.

Математичним сподіванням випадкового процесу $X(t)$ називається невипадкова функція $m_X(t)$ аргументу t, яка при кожному даному значенні аргументу дорівнює математичному сподіванню значення випадкового процесу при тому ж значенні аргументу:

$$m_X(t) = M\left[X(t)\right].$$

Властивості математичного сподівання випадкового процесу.

1. Якщо $\varphi(t)$ – невипадковий процес, то $M\left[\varphi(t)\right] = \varphi(t)$.
2. Якщо $X(t)$ – випадковий процес, а $\varphi(t)$ – невипадковий процес, то $M\left[X(t)\cdot\varphi(t)\right] = M\left[X(t)\right]\cdot\varphi(t) = m_X(t)\cdot\varphi(t)$.
3. Якщо $X_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ – випадкові процеси, то $M\left[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i(t)\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{X_i}(t)$.

Центрованим випадковим процесом називається різниця між випадковим процесом та його математичним сподіванням:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_X(t). \qquad (1.1)$$

Дисперсією випадкового процесу X(t) називається невипадкова функція $D_X(t)$ аргументу *t*, яка при кожному даному значенні аргументу *t* дорівнює дисперсії значення випадкового процесу при тому ж значенні аргументу:

$$D_X(t)=D[X(t)].$$

Середім квадратичним відхил ом випадкового процесу називається квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma_X(t)=\sqrt{D_X(t)}. \tag{1.2}$$

Властивості дисперсії випадкового процесу.

1. Якщо $\varphi(t)$– невипадковий процес, то $D[\varphi(t)]=0$.
2. Якщо *X(t)* – випадковий процес, а $\varphi(t)$– невипадковий процес, то $D[X(t)+\varphi(t)]=D_X(t)$; $D[X(t)\cdot\varphi(t)]=\varphi^2(t)\cdot D_X(t)$.

Кореляційною функцією випадкового процесу X(t) називається невипадкова функція двох аргументів $K_X(t_1,t_2)$, яка при кожній парі значень t_1 і t_2 дорівнює кореляційному моменту відповідних значень випадкового процесу:

$$K_X(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)\right]. \tag{1.3}$$

При рівних між собою значеннях аргументів $t_1=t_2=t$ кореляційна функція випадкового процесу дорівнює дисперсії цього процесу:

$$K_X(t,t)=D_X(t). \tag{1.4}$$

Властивості кореляційної функції.

1. $K_X(t_1,t_2)=K_X(t_2,t_1)$.
2. Якщо $Y(t)=X(t)+\varphi(t)$, де *X(t)* – випадковий процес, $\varphi(t)$– невипадковий процес, то $K_Y(t_1,t_2)=K_X(t_1,t_2)$.
3. Якщо $Y(t)=X(t)\cdot\varphi(t)$, де *X(t)* – випадковий процес, $\varphi(t)$– невипадковий процес, то $K_Y(t_1,t_2)=K_X(t_1,t_2)\cdot\varphi(t_1)\varphi(t_2)$.
4. $|K_X(t_1,t_2)|\le\sqrt{K_X(t_1,t_1)K_X(t_2,t_2)}=\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)$.

Нормованою кореляційною функцією випадкового процесу *X(t)* називається невипадкова функція двох незалежних аргументів t_1 і t_2 , що визначається за формулою:

$$\rho_X(t_1,t_2)=\frac{K_X(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)}. \qquad (1.5)$$

Абсолютна величина $\left|\rho_X(t_1,t_2)\right|\le 1$.

Взаємною кореляційною функцією двох випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ називається невипадкова функція $K_{XY}(t_1,t_2)$ двох незалежних аргументів t_1 і t_2, яка при кожній парі значень аргументів дорівнює кореляційному моменту відповідних значень випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$:

$$K_{XY}(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)\right]. \qquad (1.6)$$

Корельованими називаються два випадкових процеса, якщо їх взаємна кореляційна функція не дорівнює тотожно нулю.

Некорельованими називаються два випадкових процеса, взаємна кореляційна функція яких тотожно дорівнює нулю.

Властивості взаємної кореляційної функції.

1. $K_{XY}(t_1,t_2)=K_{YX}(t_2,t_1)$.

3. Якщо $X_1(t)=X(t)+\varphi(t),\ \ Y_1(t)=Y(t)+\psi(t)$, де $X(t)$, $Y(t)$ – випадкові процеси, $\varphi(t)$, $\psi(t)$– невипадкові процеси, то $K_{X_1Y_1}(t_1,t_2)=K_{XY}(t_1,t_2)$.

4. Якщо $X_1(t)=X(t)\cdot\varphi(t),\ \ Y_1(t)=Y(t)\cdot\psi(t)$, де $X(t)$, $Y(t)$ – випадкові процеси, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – невипадкові процеси, то $K_{X_1Y_1}(t_1,t_2)=K_{XY}(t_1,t_2)\cdot\varphi(t_1)\psi(t_2)$.

5. $\left|K_{XY}(t_1,t_2)\right|\le\sqrt{D_X(t_1)D_Y(t_2)}$.

Нормованою кореляційною функцією двох випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ називається невипадкова функція двох незалежних аргументів t_1 і t_2 , що визначається за формулою:

$$\rho_{XY}(t_1,t_2)=\frac{K_{XY}(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)}. \qquad (1.7)$$

Абсолютна величина $\left|\rho_{XY}(t_1,t_2)\right|\le 1$.

Математичне сподівання випадкового процесу називають *початковим моментом першого порядку*, а кореляційну функцію – *центральним моментом другого порядку.*

Згідно визначенню моментів будь-якого порядку для випадкової величини (або системи випадкових величин) початковий момент порядку *n* випадкового процесу *X(t)* визначається формулою:

$$\mu_n(t_1, t_2, ..., t_n) = M\left[X(t_1)X(t_2)...X(t_n)\right]. \tag{1.8}$$

Центральний момент порядку *n* випадкового процесу визначається формулою:

$$K_n(t_1, t_2, ..., t_n) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)...\overset{\circ}{X}(t_n)\right], \tag{1.9}$$

де $\overset{\circ}{X}(t)$ – центрований випадковий процес.

Аналогічним чином можна визначити взаємні моменти вищіх порядків кількох випадкових процесів.

Якщо відома *n*-мірна щільність імовірності $f_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n)$, то початковий момент порядку *n* випадкового процесу висловлюється формулою:

$$\mu_n(t_1, t_2, ..., t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 ... x_n f_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) dx_1 dx_2 ... dx_n . \tag{1.10}$$

Аналогічною формулою визначається центральний момент порядку *n*:

$$K_n(t_1, ..., t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_X(t_1))...(x_n - m_X(t_n)) f_n(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) dx_1 ... dx_n . \tag{1.11}$$