

## ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

**Викладач:** к. ф.-м.н., доц. Світлана Петрівна Швидка

**Кафедра:** прикладної математики і механіки, 1й корп. ЗНУ, ауд. 21-в (1<sup>й</sup> поверх)

**Email:** [svetlana.shvydka@gmail.com](mailto:svetlana.shvydka@gmail.com)

**Телефон:** (061) 289-12-52 (кафедра), 289-12-60 (деканат)

**Facebook Messenger:**

<b>Освітня програма, рівень вищої освіти</b>	Математика; Бакалавр					
<b>Статус дисципліни</b>	Нормативна					
<b>Кредити ECTS</b>	5	<b>Навч. рік</b>	2021-2022 2 семестр	<b>Рік навчання - 3</b>	<b>Тижні</b>	14
<b>Кількість годин</b>	150	<b>Кількість змістових модулів<sup>1</sup></b>	<b>8</b>	<b>Лекційні заняття – 28 год Практичні заняття – 28 год Самостійна робота – 94 год.</b>		
<b>Вид контролю</b>	<i>Ictum</i>					
<b>Посилання на курс в Moodle</b>	<a href="https://moodle.znu.edu.ua/course/view.php?id=719">https://moodle.znu.edu.ua/course/view.php?id=719</a>					
<b>Консультації:</b>	щосереди, 11.25-12.45 або за домовленістю чи ел. поштою					

### ОПИС КУРСУ

**Метою** вивчення навчальної дисципліни «Варіаційне числення та методи оптимізації» є систематизація та отримання нових знань про основні типи задач варіаційного числення і оптимізації та методи пошуку оптимальних розв'язків, оволодіння аналітичними та чисельними методами розв'язання задач, що зводяться до дослідження на екстремум функцій і функціоналів, розширення кругозору щодо застосування методів оптимізації для математичного моделювання прикладних задач, поглиблення студентами теоретичних відомостей і набуття навичок та вмінь застосування математичного апарату з основних розділів математичного аналізу, диференціальних рівнянь і рівнянь математичної фізики для розв'язання варіаційних задач.

### ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

У разі успішного завершення курсу студент **зможе:**

1. знаходити екстремалі найпростішої задачі варіаційного числення та узагальненої найпростішої задачі варіаційного числення;
2. знаходити екстремалі варіаційної задачі на множині функцій з рухомими границями;
3. знаходити ламані екстремалі;
4. визначати тип екстремуму функціонала;
5. знаходити екстремалі задачі Лагранжа з неголономними та голономними в'язями,
6. знаходити екстремалі ізопериметричної задачі;

<sup>1</sup> 1 змістовий модуль = 15 годин (0,5 кредита ECTS). Детальна формула розрахунку – в рекомендаціях.



7. знаходити екстремалі за допомогою прямих методів варіаційного числення;
8. знаходити екстремум функції за допомогою прямих методів оптимізації;
9. знаходити екстремум функції за допомогою методів, що використовують похідні функції;
10. знаходити екстремум функції в задачах багатовимірної оптимізації;
11. будувати математичну модель і формулювати математичну постановку варіаційної задачі та задачі оптимізації;
12. використовувати сучасні математичні методи при дослідженні варіаційних задач та задач оптимізації;
13. проводити аналіз отриманих аналітичних розв'язків та робити відповідні висновки з точки зору вихідної прикладної задачі.

## ОСНОВНІ НАВЧАЛЬНІ РЕСУРСИ

1. Аттетков А. В., Галкин С. В., Зарубин В. С. Методы оптимизации: учеб. для вузов. Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 440 с.
2. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. Москва: Радио и связь, 1988. 128 с.
3. Буслаев В. С. Вариационное исчисление. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1980. 288 с.
4. Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 488 с.
5. Грищак В. З., Швидка С. П. Варіаційне числення: методичні вказівки до практичних і лабораторних занять. Запоріжжя: ЗНУ, 2007. 52 с.
6. Карташов А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. Москва: Наука, 1986. 238с.
7. Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление: задачи и упражнения. Москва: Наука, 1973. 190 с.
8. Моклячук М. П. Варіаційне числення: екстремальні задачі. Київ: Либідь, 1994. 328 с.
9. Моклячук М. П. Збірник задач з варіаційного числення та методів оптимізації. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. 255 с.
10. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1969. 424 с.
11. Варіаційне числення та методи оптимізації: навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр», напряму підготовки «Математика». Запоріжжя: ЗНУ, 2015. 84 с.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАХОДИ

### Поточні контрольні заходи (тах 60 балів):

Поточний контроль передбачає такі *теоретичні* завдання:

- Усне опитування.
- Тестові завдання за пройденим матеріалом.



Поточний контроль передбачає такі *практичні* завдання:

- Лабораторні роботи та тести за пройденим матеріалом.

**Підсумкові контрольні заходи (max 40 балів):**

*Індивідуальне завдання* – 20 балів.

*Іспит* – 20 балів.

**Шкала оцінювання: національна та ECTS**

За шкалою ECTS	За шкалою університету	За національною шкалою	
		Екзамен	Залік
A	90 – 100 (відмінно)	5 (відмінно)	Зараховано
B	85 – 89 (дуже добре)	4 (добре)	
C	75 – 84 (добре)		
D	70 – 74 (задовільно)	3 (задовільно)	
E	60 – 69 (достатньо)		
FX	35 – 59 (незадовільно – з можливістю повторного складання)	2 (незадовільно)	Не зараховано
F	1 – 34 (незадовільно – з обов'язковим повторним курсом)		

**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**  
**Силабус навчальної дисципліни**



<b>Контрольний захід</b>		<b>Термін виконання</b>	<b>% від загальної оцінки</b>
<b>Поточний контроль (max 60%)</b>			
<i>Змістовий модуль 1</i>	<i>Вид теоретичного завдання: опитування</i>	тиждень 1	1%
	<i>Вид практичного завдання: лабораторна робота</i>	тиждень 1	4%
<i>Змістовий модуль 2</i>	<i>Вид теоретичного завдання: опитування</i>	тиждень 2,3	2%
	<i>Вид практичного завдання: лабораторна робота</i>	тиждень 2,3	8%
<i>Змістовий модуль 3</i>	<i>Вид теоретичного завдання: опитування</i>	тиждень 4	1%
	<i>Вид практичного завдання: лабораторна робота</i>	тиждень 4	4%
<i>Змістовий модуль 4</i>	<i>Вид теоретичного завдання: опитування</i>	Тиждень 5-8	2%
	<i>Вид практичного завдання: лабораторна робота</i>	Тиждень 5-8	8%
<i>Змістовий модуль 5</i>	<i>Вид теоретичного завдання: опитування</i>	Тиждень 9,10	2%
	<i>Вид практичного завдання: лабораторна робота, тестове завдання</i>	Тиждень 9,10	12%
<i>Змістовий модуль 6</i>	<i>Вид теоретичного завдання: опитування</i>	Тиждень 11	1%
	<i>Вид практичного завдання: лабораторна робота</i>	Тиждень 11	3%
<i>Змістовий модуль 7</i>	<i>Вид теоретичного завдання: опитування</i>	Тиждень 12	2%
	<i>Вид практичного завдання: лабораторна робота</i>	Тиждень 12	4%
<i>Змістовий модуль 8</i>	<i>Вид теоретичного завдання: опитування</i>	Тиждень 13,14	2%
	<i>Вид практичного завдання: лабораторна робота</i>	Тиждень 13,14	4%
<b>Підсумковий контроль (max 40%)</b>			
<i>Індивідуальне завдання</i>		тиждень 15	20%
<i>Іспит</i>		тиждень 16	20%
<b>Разом</b>			<b>100%</b>



## РОЗКЛАД КУРСУ ЗА ТЕМАМИ І КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Тиждень і вид заняття	Тема змістового модулю	Контрольний захід	Кількість балів
Змістовий модуль 1			
Тиждень 1 Лабораторна робота 1	Введення у варіаційний метод	Лабораторна робота №1.	5
Змістовий модуль 2			
Тиждень 2 Лабораторна робота 2	Варіаційні задачі на множині функцій з рухомими границями	Лабораторна робота №2.	5
Тиждень 3 Лабораторна робота №3		Лабораторна робота №3.	5
Змістовий модуль 3			
Тиждень 4 Лабораторна робота №4	Ламані екстремалі	Лабораторна робота №4.	5
Змістовий модуль 4			
Тиждень 5 Лабораторна робота №5	Поле екстремалей. Достатні умови екстремуму	Лабораторна робота №5.	5
Тиждень 6 Лабораторна робота №5			
Тиждень 7 Лабораторна робота №6		Лабораторна робота №6.	5
Тиждень 8 Лабораторна робота №6			
Змістовий модуль 5			
Тиждень 9 Лабораторна робота №7	Варіаційні задачі на умовний екстремум	Лабораторна робота №7.	8
Тиждень 10		Лабораторна робота №7.	



Лабораторна робота №7		Тестове завдання. Правильна відповідь за кожну тестову задачу – 1 бал, загальна кількість 6 балів.	6
Змістовий модуль 6			
Тиждень 11 Лабораторна робота №8	Прямі методи варіаційного числення	Лабораторна робота №8.	4
Змістовий модуль 7			
Тиждень 12 Лабораторна робота №9	Методи одновимірної оптимізації нульового порядку (прямі методи)	Лабораторна робота №9.	6
Змістовий модуль 8			
Тиждень 13 Лабораторна робота №10	Методи одновимірної оптимізації першого порядку	Лабораторна робота №10.	6
Тиждень 14 Лабораторна робота №10		Лабораторна робота №10.	
Тиждень 15	Підсумковий контроль (теоретичний і практичний)	Індивідуальне завдання	20
		Іспит	20
			100

### Рекомендована література

#### Основна

1. Аттетков А. В., Галкин С. В., Зарубин В. С. Методы оптимизации: учеб. для вузов. Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 440 с.
2. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. Москва: Радио и связь, 1988. 128 с.
3. Буслаев В. С. Вариационное исчисление. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1980. 288 с.
4. Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 488 с.
5. Грищак В. З., Швидка С. П. Варіаційне числення: методичні вказівки до практичних і лабораторних занять. Запоріжжя: ЗНУ, 2007. 52 с.
6. Карташов А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. Москва: Наука, 1986. 238с.
7. Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление: задачи и упражнения. Москва: Наука, 1973. 190 с.
8. Моклячук М. П. Варіаційне числення: екстремальні задачі. Київ: Либідь, 1994. 328



с.

9. Моклячук М. П. Збірник задач з варіаційного числення та методів оптимізації. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. 255 с.
10. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1969. 424 с.
11. Варіаційне числення та методи оптимізації: навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр», напряму підготовки «Математика». Запоріжжя: ЗНУ, 2015. 84 с.

### Додаткова

1. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. Москва: Наука, 1983. 448 с.
2. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Москва: Физматлит, 1961. 228 с.
3. Коша А. Вариационное исчисление. Москва: Высшая школа, 1983. 280 с.
4. Ланцош К. Вариационные принципы механики. Москва: Мир, 1965. 408 с.
5. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. Москва: Наука, 1966. 432 с.
6. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике. Москва: Мир, 1985. 590 с.
7. Спасский Р. А. Классическое вариационное исчисление и вариационные принципы механики. Севастополь: СевНТУ, 2004. 176 с.
8. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения: справочное руководство. Москва: Наука, 1966. 192 с.
9. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению. Москва: Мир, 1974. 488с.

### Інформаційні ресурси

1. Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению: учебник для гос. ун-тов. Москва: Гостехиздат, 1955. 248 с. URL:  
[http://ebooks.znu.edu.ua/files/mathbooks/differentsialnie\\_i\\_integraln\\_uravneniya/book\\_s/var\\_ischislenie/ahiezer.djvu](http://ebooks.znu.edu.ua/files/mathbooks/differentsialnie_i_integraln_uravneniya/book_s/var_ischislenie/ahiezer.djvu)
2. Будылин А. М. Вариационное исчисление. 2001. 197 с. URL:  
[http://ebooks.znu.edu.ua/files/phiziki/matematika/mat\\_fizika/16var.pdf](http://ebooks.znu.edu.ua/files/phiziki/matematika/mat_fizika/16var.pdf)
3. Реклейтис Г. Оптимизация в технике. В 2-х кн. Кн. 2. Москва: Мир, 1986. 320 с. URL:  
[http://ebooks.zsu.zp.ua/files/mathbooks/differentsialnie\\_i\\_integraln\\_uravneniya/books/diff\\_uravneniya/elsgoltc.djvu](http://ebooks.zsu.zp.ua/files/mathbooks/differentsialnie_i_integraln_uravneniya/books/diff_uravneniya/elsgoltc.djvu)



---

## РЕГУЛЯЦІЯ І ПОЛІТИКИ КУРСУ<sup>2</sup>

### **Відвідування занять. Регуляція пропусків.**

Відвідування занять обов'язкове.

Завдання мають бути виконані перед заняттями. Пропуски можливі лише з поважної причини. Відпрацювання пропущених занять має бути регулярним за домовленістю з викладачем у години консультацій. Накопичення відпрацювань неприпустиме! За умови систематичних пропусків може бути застосована процедура повторного вивчення дисципліни (див. посилання на Положення у додатку до силабусу).

### **Політика академічної доброчесності**

Кожний студент зобов'язаний дотримуватися принципів академічної доброчесності.

### **Використання комп'ютерів/телефонів на занятті**

Будь ласка, вимкніть на беззвучний режим свої мобільні телефони та не користуйтеся ними під час занять. Мобільні телефони відволікають викладача та ваших колег. Під час занять заборонено надсилання текстових повідомлень, прослуховування музики, перевірка електронної пошти, соціальних мереж тощо. Електронні пристрої можна використовувати лише за умови виробничої необхідності в них (за погодженням з викладачем).

### **Комунікація**

Очікується, що студенти перевірятимуть свою електронну пошту і сторінку дисципліни в Moodle та реагуватимуть своєчасно. Всі робочі оголошення можуть надсилатися через старосту, на електронну пошту та розміщуватимуться в Moodle. Будь ласка, перевіряйте повідомлення вчасно. Ел. пошта має бути підписана справжнім ім'ям і прізвищем. Адреси типу user123@gmail.com не приймаються!

---

<sup>2</sup> Тут зазначається все, що важливо для курсу: наприклад, умови допуску до лабораторій, реактивів тощо. Викладач сам вирішує, що треба знати студенту для успішного проходження курсу!





## ДОДАТОК ДО СИЛАБУСУ ЗНУ – 2021-2022 рр.

**ГРАФІК НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ 2021-2022 н. р.** ([http://sites.znu.edu.ua/navchalnyj\\_viddil/1635.ukr.html](http://sites.znu.edu.ua/navchalnyj_viddil/1635.ukr.html))

**АКАДЕМІЧНА ДОБРОЧЕСНІСТЬ.** Студенти і викладачі Запорізького національного університету несуть персональну відповідальність за дотримання принципів академічної доброчесності, затверджених **Кодексом академічної доброчесності ЗНУ**: <https://tinyurl.com/ya6yk4ad>. Декларація академічної доброчесності здобувача вищої освіти (додається в обов'язковому порядку до письмових кваліфікаційних робіт, виконаних здобувачем, та засвідчується особистим підписом): <https://tinyurl.com/y6wzzlu3>.

**НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЦЕС ТА ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЯКОСТІ ОСВІТИ.** Перевірка набутих студентами знань, навичок та вмінь (атестації, заліки, іспити та інші форми контролю) є невід'ємною складовою системи забезпечення якості освіти і проводиться відповідно до *Положення про організацію та методу проведення поточного та підсумкового семестрового контролю навчання студентів ЗНУ*: <https://tinyurl.com/y9tve4lk>.

**ПОВТОРНЕ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІН, ВІДРАХУВАННЯ.** Наявність академічної заборгованості до 6 навчальних дисциплін (в тому числі проходження практики чи виконання курсової роботи) за результатами однієї екзаменаційної сесії є підставою для надання студенту права на повторне вивчення зазначених навчальних дисциплін. Порядок повторного вивчення визначається *Положенням про порядок повторного вивчення навчальних дисциплін та повторного навчання у ЗНУ*: <https://tinyurl.com/y9pkmmp5>. Підстави та процедури відрахування студентів, у тому числі за невиконання навчального плану, регламентуються *Положенням про порядок переведення, відрахування та поновлення студентів у ЗНУ*: <https://tinyurl.com/yvcds57la>.

**НЕФОРМАЛЬНА ОСВІТА.** Порядок зарахування результатів навчання, підтверджених сертифікатами, свідоцтвами, іншими документами, здобутими поза основним місцем навчання, регулюється *Положенням про порядок визнання результатів навчання, отриманих у неформальній освіті*: <https://tinyurl.com/y8gbt4xs>.

**ВИРІШЕННЯ КОНФЛІКТІВ.** Порядок і процедури врегулювання конфліктів, пов'язаних із корупційними діями, зіткненням інтересів, різними формами дискримінації, сексуальними домаганнями, міжособистісними стосунками та іншими ситуаціями, що можуть виникнути під час навчання, регламентуються *Положенням про порядок і процедури вирішення конфліктних ситуацій у ЗНУ*: <https://tinyurl.com/yvufws9v>. Конфліктні ситуації, що виникають у сфері стипендіального забезпечення здобувачів вищої освіти, вирішуються стипендіальними комісіями факультетів, коледжів та університету в межах їх повноважень, відповідно до: *Положення про порядок призначення і виплати академічних стипендій у ЗНУ*: <https://tinyurl.com/yd6bq6p9>; *Положення про призначення та виплату соціальних стипендій у ЗНУ*: <https://tinyurl.com/y9r5dpwh>.

**ПСИХОЛОГІЧНА ДОПОМОГА.** Телефон довіри практичного психолога (061)228-15-84 (щоденно з 9 до 21).

**ЗАПОБІГАННЯ КОРУПЦІЇ.** Уповноважена особа з питань запобігання та виявлення корупції (Воронков В. В., 1 корп., 29 каб., тел. +38 (061) 289-14-18).

**РІВНІ МОЖЛИВОСТІ ТА ІНКЛЮЗИВНЕ ОСВІТНЄ СЕРЕДОВИЩЕ.** Центральні входи усіх навчальних корпусів ЗНУ обладнані пандусами для забезпечення доступу осіб з інвалідністю та інших маломобільних груп населення. Допомога для здійснення входу у разі потреби надається черговими охоронцями навчальних корпусів. Якщо вам потрібна спеціалізована допомога, будь-ласка, зателефонуйте (061) 228-75-11 (начальник охорони). Порядок супроводу (надання допомоги) осіб з інвалідністю та інших маломобільних груп населення у ЗНУ: <https://tinyurl.com/ydhcsagx>.

**РЕСУРСИ ДЛЯ НАВЧАННЯ.** Наукова бібліотека: <http://library.znu.edu.ua>. Графік роботи абонементів: понеділок – п'ятниця з 08.00 до 17.00; субота з 09.00 до 15.00.

**ЕЛЕКТРОННЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАВЧАННЯ (MOODLE):** <https://moodle.znu.edu.ua>

Якщо забули пароль/логін, направте листа з темою «Забув пароль/логін» за адресами:

- для студентів ЗНУ - [moodle.znu@gmail.com](mailto:moodle.znu@gmail.com), Савченко Тетяна Володимирівна
- для студентів Інженерного інституту ЗНУ - [alexvask54@gmail.com](mailto:alexvask54@gmail.com), Василенко Олексій Володимирович

У листі вкажіть: прізвище, ім'я, по-батькові українською мовою; шифр групи; електронну адресу.

Якщо ви вказували електронну адресу в профілі системи Moodle ЗНУ, то використовуйте посилання для відновлення паролю <https://moodle.znu.edu.ua/mod/page/view.php?id=133015>.

**Центр інтенсивного вивчення іноземних мов:** <http://sites.znu.edu.ua/child-advance/>

**Центр німецької мови, партнер Гете-інституту:** <https://www.znu.edu.ua/ukr/edu/ocznu/nim>

**Школа Конфуція (вивчення китайської мови):** <http://sites.znu.edu.ua/confucius>