

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Декан математичного факультету

_____ С.І. Гоменюк

« _____ » _____ 2021 р.

ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Підготовки бакалавра

спеціальності 111 Математика

освітньо-професійна програма Математика

Укладач Швидка Світлана Петрівна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри
прикладної математики і механіки

Обговорено та ухвалено
на засіданні кафедри
прикладної математики і механіки

Протокол № 1 від 31 серпня 2021 р.

Завідувач кафедри

_____ **В.З. Гришак**
(підпис) (ініціали, прізвище)

Ухвалено науково-методичною радою
математичного факультету

Протокол № 1 від «02»вересня 2021 р.

Голова науково-методичної ради
факультету

_____ **О.С. Пшенична**
(підпис) (ініціали, прізвище)

2021 рік

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, освітня програма, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни	
		денна форма навчання	заочна форма навчання
Кількість кредитів – 6	Галузь знань 11 Математика та статистика	За вибором ВНЗ	
		Цикл дисциплін професійної підготовки	
Розділів – 2	Спеціальність 111 Математика	Рік підготовки:	
Загальна кількість годин – 180		Освітньо-професійна програма Математика	1-й
	Лекції		
	24 год.		
	Практичні заняття		
Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 5 самостійної роботи студента – 10	Рівень вищої освіти: бакалаврський	36 год.	
		Самостійна робота	
		120 год.	
		Вид контролю: іспит	

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни «Варіаційне числення та методи оптимізації» є систематизація та отримання нових знань про основні типи задач варіаційного числення і оптимізації та методи пошуку оптимальних розв'язків, оволодіння аналітичними та чисельними методами розв'язання задач, що зводяться до дослідження на екстремум функцій і функціоналів, розширення кругозору щодо застосування методів оптимізації для математичного моделювання прикладних задач, поглиблення студентами теоретичних відомостей і набуття навичок та вмій застосування математичного апарату з основних розділів математичного аналізу, диференціальних рівнянь і рівнянь математичної фізики для розв'язання варіаційних задач.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Варіаційне числення та методи оптимізації» є:

- актуалізація знань з варіаційного числення та методів оптимізації;
- систематизація знань стосовно постановок і методики розв'язання екстремальних задач, застосування прямих методів варіаційного числення;
- ознайомлення з чисельними методами оптимізації;
- застосування теоретичних знань для розв'язання задач знаходження екстремальних значень функцій і функціоналів.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати основні поняття, положення, завдання і методи варіаційного числення та методів оптимізації в межах тем:

- найпростіша задача варіаційного числення та її узагальнення;
- варіаційні задачі на множині функцій з рухомими границями, умови трансверсальності;
- варіаційні задачі з кутовими точками;
- достатні умови екстремуму функціоналів;
- варіаційні задачі на умовний екстремум;
- прямі методи варіаційного числення;
- методи оптимізації;

вміти розв'язувати типові задачі по вищезазначених темах, а саме:

- знаходити екстремалі найпростішої задачі варіаційного числення та узагальненої найпростішої задачі варіаційного числення;
- знаходити екстремалі варіаційної задачі на множині функцій з рухомими границями;
- знаходити ломані екстремалі;
- визначати тип екстремуму функціонала;
- знаходити екстремалі задачі Лагранжа з неголономними та голономними в'язями,
- знаходити екстремалі ізопериметричної задачі;
- знаходити екстремалі за допомогою прямих методів варіаційного числення;
- знаходити екстремум функції за допомогою прямих методів оптимізації;
- знаходити екстремум функції за допомогою методів, що використовують похідні функції;
- знаходити екстремум функції в задачах багатовимірної оптимізації;
- будувати математичну модель і формулювати математичну постановку варіаційної задачі та задачі оптимізації;
- використовувати сучасні математичні методи при дослідженні варіаційних задач та задач оптимізації;
- проводити аналіз отриманих аналітичних розв'язків та робити відповідні висновки з точки зору вихідної прикладної задачі.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких **результатів навчання (компетентностей)**:

- здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми прикладної математики у професійній діяльності або в процесі навчання, що передбачає застосування математичних теорій та методів і характеризується комплексністю та невизначеністю умов;
- здатність вести дослідницьку діяльність, включаючи аналіз проблем, вибір способу й методів дослідження, а також оцінку якості результатів;

- здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем;
- здатність математично формалізувати постановку завдання;
- здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання практичних задач дослідження, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень.

Міждисциплінарні зв'язки

Для успішного оволодіння дисципліною «Варіаційне числення та методи оптимізації» студентам необхідні знання з дисциплін циклів фундаментальної та професійної підготовки: «Математичний аналіз» (диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної та багатьох незалежних змінних); «Диференціальні рівняння» (методи інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку, вищих порядків та систем диференціальних рівнянь); «Рівняння математичної фізики» (методи інтегрування рівнянь у частинних похідних), «Аналітична геометрія» (рівняння кривих другого порядку). Теоретичні знання і практичні уміння, отримані при вивченні курсу, можуть бути корисними при написанні курсових робіт та виконанні кваліфікаційної роботи бакалавра.

3. Програма навчальної дисципліни

Розділ 1. Варіаційне числення

Тема 1. Введення у варіаційний метод.

Основні типи варіаційних задач. Сучасна термінологія. Необхідні умови екстремуму функціонала. Рівняння Ейлера та його узагальнення. Задача Больца. Умови трансверсальності.

Тема 2. Варіаційні задачі на множині функцій з рухомими границями.

Задачі Больца та Лагранжа на множині функцій з вільними границями. Задача Лагранжа на множині функцій з рухомими границями. Задача Больца на множині функцій з рухомими границями.

Тема 3. Ломані екстремалі.

Ломані екстремалі. Умови Вейерштрасса-Ердмана. Однобічні варіації.

Тема 4. Поле екстремалей. Достатні умови екстремуму.

Поле екстремалей. Умова Якобі. Достатні умови екстремуму функціонала. Достатні умови Вейерштрасса. Функція Вейерштрасса. Достатні умови Лежандра. Достатні умови екстремуму функціонала задачі Больца.

Тема 5. Варіаційні задачі на умовний екстремум.

Задача Лагранжа. Правило невизначених множників Лагранжа. Ізопериметричні задачі.

Тема 6. Прямі методи варіаційного числення.

Поняття про прямі методи варіаційного числення. Кінцево-різницевий метод Ейлера. Метод Рітца. Метод Канторовича.

Розділ 2. Методи оптимізації

Тема 7. Чисельні методи оптимізації та їх класифікація.

Загальна постановка задачі оптимізації та її етапи. Унімодальні функції. Опуклі функції. Умова Ліпшица. Умовна та безумовна оптимізація. Одновимірна та багатовимірна оптимізації. Короткий огляд методів оптимізації.

Тема 8. Методи одновимірної оптимізації нульового порядку (прямі методи).

Загальна характеристика методів нульового порядку. Стратегія пошуку. Пасивний та послідовний пошуки оптимуму. Установлення меж інтервалу. Евристичний метод Свенна. Прямі методи: перебору і порозрядного пошуку; ділення відрізу навпіл (метод дихотомії та метод «золотого перетину»); метод Фібоначчі. Метод поліноміальної апроксимації (метод парабол). Суть, алгоритм, збіжність, переваги і недоліки кожного з методів, послідовність виконання розрахунку.

Тема 9. Методи одновимірної оптимізації першого порядку.

Метод середньої точки. Метод хорд. Метод січних. Метод кубічної інтерполяції. Суть, алгоритм, збіжність, переваги і недоліки кожного з методів, послідовність виконання розрахунку.

Тема 10. Методи одновимірної оптимізації другого порядку.

Метод Ньютона. Суть, алгоритм, збіжність, переваги і недоліки, послідовність виконання розрахунку. Регуляризовані методи.

Тема 11. Загальні принципи багатовимірної оптимізації.

Постановка задачі пошуку мінімуму функції. Матриця Гессе та її властивості. Опуклі квадратичні функції. Загальні принципи багатовимірної мінімізації. Метод градієнтного спуску. Метод найшвидшого спуску. Метод спряжених напрямків. Метод спряжених градієнтів. Квазіньютонівські методи.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви тематичних розділів і тем	Кількість годин									
	денна форма					заочна форма				
	усього	у тому числі				усього	у тому числі			
		л	прак	сам. роб.	I.З.		л	прак	сам. роб.	I.З.
1	2	3	4	5	6	7	8	9		
Розділ 1. Варіаційне числення										
Тема 1. Введення у варіаційний метод	16	2	4	10						
Тема 2. Варіаційні задачі на множині функцій з рухомими границями	14	2	2	10						
Тема 3. Ломані екстремалі	14	2	2	10						
Тема 4. Поле екстремалей. Достатні умови екстремуму	14	2	2	10						
Тема 5. Варіаційні задачі на умовний екстремум	16	2	4	10						

Тема 6. Прямі методи варіаційного числення	16	2	4	10						
Разом за розділом 1	90	12	18	60						
Розділ 2. Методи оптимізації										
Тема 7. Чисельні методи оптимізації та їх класифікація	13	2		11						
Тема 8. Методи одновимірної оптимізації нульового порядку (прямі методи)	17	2	4	11						
Тема 9. Методи одновимірної оптимізації першого порядку	17	2	4	11						
Тема 10. Методи одновимірної оптимізації другого порядку	17	2	4	11						
Тема 11. Загальні принципи багатовимірної оптимізації	26	4	6	16						
Разом за розділом 2	90	12	18	60						
Усього годин	180	24	36	120						

5. Теми лекційних занять

№ теми з/прогр.	Назва теми	Кількість годин	
		денна	заочна
1	Введення у варіаційний метод	2	
2	Варіаційні задачі на множині функцій з рухомими границями	2	
3	Ломані екстремалі	2	
4	Поле екстремалей. Достатні умови екстремуму	2	
5	Варіаційні задачі на умовний екстремум	2	
6	Прямі методи варіаційного числення	2	
7	Чисельні методи оптимізації та їх класифікація	2	
8	Методи одновимірної оптимізації нульового порядку (прямі методи)	2	
9	Методи одновимірної оптимізації першого порядку	2	
10	Методи одновимірної оптимізації другого порядку	2	
11	Загальні принципи багатовимірної мінімізації. Метод градієнтного спуску. Метод найшвидшого спуску.	2	
11	Метод спряжених напрямків. Метод спряжених градієнтів. Квазіньютонівські методи	2	
Разом		24	

6. Теми практичних занять

№ теми з/прогр.	Назва теми	Кількість годин	
		денна	заочна
1	Розв'язання найпростішої задачі варіаційного числення та її узагальнень	2	
1	Розв'язання задачі Больца	2	
2	Варіаційні задачі на множині функцій з рухомими границями. Умови трансверсальності	2	

3	Знаходження ломаних екстремалей	2	
4	Поле екстремалей. Достатні умови екстремуму. Визначення типу екстремуму	2	
5	Розв'язання задачі Лагранжа	2	
5	Розв'язання ізопериметричної задачі	2	
6	Розв'язання варіаційної задачі методом Ейлера	2	
6	Розв'язання варіаційної задачі методом Рітца	2	
8	Застосування методів перебору, порозрядного пошуку та дихотомії в задачах оптимізації. Послідовність виконання розрахунків	2	
8	Застосування методів «золотого перетину» та Фібоначчі в задачах оптимізації. Послідовність виконання розрахунків	2	
9	Застосування методів хорд та січних в задачах оптимізації. Послідовність виконання розрахунків	2	
9	Застосування методу кубічної інтерполяції в задачах оптимізації. Послідовність виконання розрахунків	2	
10	Застосування методу Ньютона в задачах оптимізації. Послідовність виконання розрахунків	2	
10	Застосування регуляризованих методів в задачах оптимізації. Послідовність виконання розрахунків	2	
11	Застосування методу градієнтного спуску в задачах оптимізації. Послідовність виконання розрахунків	2	
11	Застосування методу спряжених градієнтів в задачах оптимізації. Послідовність виконання розрахунків	2	
11	Застосування квазіньютонівських методів в задачах оптимізації. Послідовність виконання розрахунків.	2	
Разом		36	

7. Самостійна робота

№ теми з/прогр.	Назва теми	Кількість годин	
		денна	заочна
1	Проблема мінімуму квадратичного функціоналу. Варіаційний метод у задачі на власні значення. Мінімаксна властивість власних чисел. Існування мінімуму квадратичного функціоналу	10	
2	Канонічна (Гамільтонова) форма рівнянь Ейлера. Рівняння Гамільтона-Якобі	10	
3	Однобічні варіації	10	
4	Достатні умови екстремуму функціонала задачі зі старшими похідними	10	
5	Задача Лагранжа у формі Понтрягіна	10	
6	Розв'язання варіаційної задачі методом Канторовича.	10	
7	Унімодальні функції. Опуклі функції. Умова Ліпшица.	11	
8	Застосування методу поліноміальної апроксимації (методу парабол) в задачах оптимізації. Послідовність виконання розрахунків	11	
9	Застосування методу середньої точки в задачах оптимізації. Послідовність виконання розрахунків	11	
10	Методи оцінки довжини кроку	11	
11	Застосування методів найшвидшого спуску і спряжених напрямків в задачах оптимізації. Послідовність виконання розрахунків	16	

Разом	120
--------------	------------

Індивідуальне завдання

Індивідуальне завдання має комплексний характер і передбачає виконання 5 задач.

Задача 1. – Розв’язати найпростішу задачу варіаційного числення.

Задача 2. – Визначити допустимі екстремалі функціонала, що залежить від n функцій однієї змінної або функціонала, що залежить від похідних вищого порядку.

Задача 3. – Використовуючи умови Вейєрштрасса та Лежандра, дослідити функціонал на екстремум.

Задача 4. – Відшукати допустимі екстремалі у варіаційній задачі з рухомими границями.

Задача 5. – Розв’язати ізопериметричну задачу.

Розв’язані та детально описані завдання треба оформити в окремому зошиті та захистити на 14-му тижні.

9. Види контролю і система накопичення балів

	Вид контролю	Кількість балів
Розділ 1	1) Самостійна робота за темою 1	6
	2) Самостійна робота за темою 2	6
	3) Самостійна робота за темою 4	6
	4) Контрольна робота за темою 5	9
	5) Колоквіум з питань для самостійної роботи	3
Разом		30
Розділ 2	6) Контрольна робота за темою 8	10
	7) Самостійна робота за темою 9	6
	8) Самостійна робота за темою 10	6
	9) Самостійна робота за темою 11	5
	10) Колоквіум з питань для самостійної роботи	3
Разом		30
Індивідуальне завдання	11) Захист індивідуального завдання	20
Іспит		20
Всього за семестр		100

Критерії оцінювання кожного з проведених видів контролю

1) Самостійна робота за темою «Введення у варіаційний метод» складається з 3 практичних задач, кожна з яких оцінюється у 2 бали.

2) Самостійна робота за темою «Варіаційні задачі на множині функцій з рухомими границями» складається з 2 задач, кожна з яких оцінюється у 3 бали.

3) Самостійна робота за темою «Поле екстремалей. Достатні умови екстремуму» складається з 3 задач, кожна з яких оцінюється у 2 бали.

4) Контрольна робота за темою «Варіаційні задачі на умовний екстремум» складається з 3 задач, кожна з яких оцінюється у 3 бали.

5) Колоквіум проводиться з питань для самостійної роботи. Під час колоквіуму заслуховуються короткі доповіді з опрацьованих питань, після кожної доповіді обов'язкове обговорення. Максимальна оцінка – 3 бали.

6) Контрольна робота за темою «Методи одновимірної оптимізації нульового порядку (прямі методи)» складається з 5 задач, кожне з яких оцінюється у 2 бали.

7) Самостійна робота за темою «Методи одновимірної оптимізації першого порядку» складається з 3 задач, кожна з яких оцінюється у 2 бали.

8) Самостійна робота за темою «Методи одновимірної оптимізації другого порядку» складається з 2 задач, кожна з яких оцінюється у 3 бали.

9) Самостійна робота за темою «Загальні принципи багатовимірної оптимізації» складається з 2 задач, кожна з яких оцінюється у 2,5 бали.

10) Колоквіум проводиться з питань для самостійної роботи. Під час колоквіуму заслуховуються короткі доповіді з опрацьованих питань, після кожної доповіді обов'язкове обговорення. Максимальна оцінка – 3 балів.

11) Під час захисту індивідуального завдання треба бути готовим пояснити або окремі етапи розв'язання обраних викладачем задач, або повністю задачу. Максимальна кількість балів дорівнює 20, по 4 бали за кожну задачу.

Шкала оцінювання: національна та ECTS

ЗА ШКАЛОЮ ECTS	За шкалою університету	За національною шкалою	
		Іспит	Залік
A	90 – 100 (відмінно)	5 (відмінно)	Зараховано
B	85 – 89 (дуже добре)	4 (добре)	
C	75 – 84 (добре)		
D	70 – 74 (задовільно)	3 (задовільно)	
E	60 – 69 (достатньо)		
FX	35 – 59 (незадовільно – з можливістю повторного складання)	2 (незадовільно)	Не зараховано
F	1 – 34 (незадовільно – з обов'язковим повторним курсом)		

9. Рекомендована література

Основна

1. Аттетков А. В., Галкин С. В., Зарубин В. С. Методы оптимизации: учеб. для вузов. Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 440 с.
2. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. Москва: Радио и связь, 1988. 128 с.

3. Буслаев В. С. Вариационное исчисление. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1980. 288 с.
4. Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 488 с.
5. Грищак В. З., Швидка С. П. Варіаційне числення: методичні вказівки до практичних і лабораторних занять. Запоріжжя: ЗНУ, 2007. 52 с.
6. Карташов А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. Москва: Наука, 1986. 238с.
7. Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление: задачи и упражнения. Москва: Наука, 1973. 190 с.
8. Моклячук М. П. Варіаційне числення: екстремальні задачі. Київ: Либідь, 1994. 328 с.
9. Моклячук М. П. Збірник задач з варіаційного числення та методів оптимізації. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. 255 с.
10. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1969. 424 с.
11. Варіаційне числення та методи оптимізації: навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр», напряму підготовки «Математика». Запоріжжя: ЗНУ, 2015. 84 с.

Додаткова

1. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. Москва: Наука, 1983. 448 с.
2. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Москва: Физматлит, 1961. 228 с.
3. Коша А. Вариационное исчисление. Москва: Высшая школа, 1983. 280 с.
4. Ланцош К. Вариационные принципы механики. Москва: Мир, 1965. 408 с.
5. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. Москва: Наука, 1966. 432 с.
6. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике. Москва: Мир, 1985. 590 с.
7. Спасский Р. А. Классическое вариационное исчисление и вариационные принципы механики. Севастополь: СевНТУ, 2004. 176 с.
8. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения: справочное руководство. Москва: Наука, 1966. 192 с.
9. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению. Москва: Мир, 1974. 488с.

Інформаційні ресурси

1. Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению: учебник для гос. ун-тов. Москва: Гостехиздат, 1955. 248 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/mathbooks/differentsialnie_i_integraln_uravneniya/books/var_ischislenie/ahiezer.djvu

2. Будылин А. М. Вариационное исчисление. 2001. 197 с. URL:
http://ebooks.znu.edu.ua/files/phiziki/matematika/mat_fizika/16var.pdf
3. Реклейтис Г. Оптимизация в технике. В 2-х кн. Кн. 2. Москва: Мир, 1986. 320 с. URL:
http://ebooks.zsu.zp.ua/files/mathbooks/differentsialnie_i_integraln_uravneniya/books/diff_uravneniya/elsgoltc.djvu

Погоджено _____
навчальний відділ
« _____ » _____