Тема 1. Інтегральний функціонал. Окремі випадки рівняння Ейлера

Мета: набуття навичок розв'язання найпростішої задачі варіаційного числення.

План:
1. Інтегральний функціонал. Варіація функціонала та її властивості.
2. Найпростіша задача варіаційного числення.
3. Рівняння Ейлера.
4. Окремі випадки рівняння Ейлера.

Ключові поняття та терміни: інтегральний функціонал, область визначення функціонала, варіація аргументу функціонала, близькість кривих, неперервність функціонала, лінійність функціонала, приріст функціонала, варіація функціонала, екстремум функціонала, сильний і слабкий екстремум, відносний і абсолютний екстремум, найпростіша задача варіаційного числення, рівняння Ейлера, екстремаль.

Теоретичні відомості та методичні рекомендації до розв'язання задач

Нехай дано деякий клас M функцій $y(x)$. Якщо кожній функції $y(x)\in M$ згідно з деяким законом поставлено у відповідність число J, то кажуть, що у класі M визначено *інтегральний функціонал* J та пишуть

$$J = J\left[y(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx.$$

Клас функцій, на якому визначено функціонал $J\left[y(x)\right]$, називають *областю визначення функціонала.*

Варіацією δy аргументу $y(x)$ функціонала $J\left[y(x)\right]$ називають різницю $\delta y = y(x) - y_0(x)$, де $y(x)$ змінюється довільно у деякому класі функцій.

Якщо приріст функціонала

$$\Delta J = J\left[y(x) + \delta y\right] - J\left[y(x)\right]$$

можна представити у вигляді

$$\Delta J = L\left[y(x), \delta y\right] + \beta\left(y(x), \delta y\right)\max_{[x_0, x_1]}|\delta y|,$$

де $L\left[y(x),\delta y\right]$ – лінійний відносно δy функціонал, $\max\limits_{[x_0,x_1]}|\delta y|$ – максимальне значення $|\delta y|$ і $\beta\left(y(x),\delta y\right)\to 0$ при $\max\limits_{[x_0;x_1]}|\delta y|\to 0$, то лінійну відносно δy частину приросту функціонала, тобто $L\left[y(x),\delta y\right]$, називають *варіацією функціонала* і позначають δJ .

Теорема *(необхідна умова екстремуму).* Якщо функціонал $J\left[y(x)\right]$, що має варіацію, досягає екстремуму при $y=y_0(x)$, де $y_0(x)$ – внутрішня точка області визначення функціонала, то при $y=y_0(x)$ $\delta J=0$.

Основна лема варіаційного числення. Якщо для кожної неперервної функції $\eta(x)$

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\Phi(x)\,\eta(x)\,dx=0,$$

де функція $\Phi(x)$ є неперервною на відрізку $\left[x_0,x_1\right]$, то $\Phi(x)\equiv 0$ на цьому відрізку.

Найпростіша задача варіаційного числення: знайти екстремум інтегрального функціонала

$$J\left[y(x)\right]=\int\limits_{x_0}^{x_1}F\left(x,y,y'\right)dx\to extr \qquad (1.1)$$

на множині неперервно диференційовних функцій $C^1[x_0,x_1]$, що задовольняють граничні умови

$$y(x_0)=y_0,\; y(x_1)=y_1. \qquad (1.2)$$

Вважається, що функція $F(x,y,y')$ є тричі диференційовною.

Теорема *(про необхідну умову екстремуму в найпростішій задачі варіаційного числення).* Нехай функція $y(x)\in C^1\left[x_0,x_1\right]$ є розв’язком задачі (1.1), (1.2). Тоді вона задовольняє рівняння

$$F_y\left(x,y,y'\right)-\frac{d}{dx}F_{y'}\left(x,y,y'\right)=0. \qquad (1.3)$$

Рівняння (1.3) називають *рівнянням Ейлера*. Допустиму функцію, яка задовольняє це рівняння, називають *екстремаллю*.

Рівняння Ейлера можна записати у розгорнутому вигляді:

$$y''(x)F_{y'y'}(x,y,y')+y'(x)F_{yy'}(x,y,y')+F_{xy'}(x,y,y')-F_y(x,y,y')=0,$$
(1.4)
$$(F_{y'y'}(x,y,y')\neq 0).$$

Рівняння (1.4) є диференціальним рівнянням другого порядку, загальний розв'язок якого залежить від двох довільних констант, що обчислюють з граничних умов (1.2).

Теорема. Нехай функція $y=y(x)$ є розв'язком рівняння Ейлера (1.3). Якщо функція $F(x,y,y')$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно, то в усіх точках, для яких

$$F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))\neq 0,$$

функція $y=y(x)$ має неперервну другу похідну.

Наслідок. Екстремаль може мати злом лише у точках, для яких $F_{y'y'}=0$.

Окремі випадки рівняння Ейлера.

1. Функція F не залежить від y': $F(x,y,y')=F(x,y)$.

Рівняння Ейлера має вигляд

$$F_y(x,y)=0.$$
(1.5)

Рівняння (1.5) не є диференціальним. Його розв'язки не містять невідомих констант і можуть не задовольняти умови (1.2). Лише у випадку, коли розв'язок рівняння проходить через граничні точки $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$, існує функція, що може давати екстремум.

2. Функція F лінійно залежить від y':

$F(x,y,y')=M(x,y)+N(x,y)y'.$

Рівняння Ейлера має вигляд

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0.$$
(1.6)

Рівняння (1.6) також не є диференціальним і в загальному випадку його розв'язки не задовольняють умови (1.2). У випадку, коли $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\equiv 0$, вираз $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ є точним диференціалом і функціонал

$$J\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}\left(M(x,y)dx+N(x,y)dy\right)$$

не залежить від шляху інтегрування. Варіаційна задача не має сенсу.

3. Функція F залежить лише від y': $F(x,y,y')=F(y')$.

Рівняння Ейлера має вигляд

$$F_{y'y'}(x,y,y')\cdot y''=0 \qquad (1.7)$$

а його розв'язки – $y(x)=C_1x+C_2$.

4. Функція F залежить лише від x, y': $F(x,y,y')=F(x,y')$.

Рівняння Ейлера має вигляд

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0 \quad \text{або} \quad F_{y'}(x,y')=C, \qquad (1.8)$$

де C – довільна стала. Рівняння (1.8) є диференціальним рівнянням першого порядку. Інтегруючи його, знаходять екстремалі задачі.

5. Функція F залежить лише від y, y': $F(x,y,y')=F(y,y')$.

Рівняння Ейлера має перший інтеграл

$$F(y,y')-y'\cdot F_{y'}(y,y')=C, \qquad (1.9)$$

де C – довільна стала.

Приклад. Відшукати екстремалі задачі [6,8]:

$$J\left[y(x)\right]=\int_0^{\pi/2}\left(y'^2(x)-y^2(x)\right)dx\to extr, \qquad y(0)=0,\ \ y(\pi/2)=1.$$

Розв'язання. Оскільки $F(x,y,y')=y'^2-y^2$, то $F_y=-2y$, $F_{y'}=2y'$, $\frac{d}{dx}F_{y'}=2y''$. Рівняння Ейлера має вигляд $y''+y=0$. Його загальний розв'язок

$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. З граничних умов обчислюємо $C_1 = 0, \quad C_2 = 1$.

Відповідь. Функція $y(x) = \sin x$ єдина допустима екстремаль.

Питання для самоперевірки:

1. Дайте визначення інтегрального функціонала.
2. Сформулюйте умову близькості нульового порядку для кривих.
3. Сформулюйте умову близькості *k*-го порядку для кривих.
4. Дайте визначення неперервності функціонала.
5. Дайте визначення лінійності функціонала.
6. Дайте визначення варіації функціонала.
7. Дайте визначення сильного і слабкого екстремуму функціонала.
8. Дайте визначення відносного і абсолютного екстремуму функціонала.
9. Сформулюйте найпростішу задачу варіаційного числення.
10. Сформулюйте необхідну умову екстремуму функціонала.
11. Сформулюйте основну лему варіаційного числення.
12. Який вигляд має рівняння Ейлера?
13. Дайте визначення екстремалі.
14. Наведіть окремі випадки рівняння Ейлера.

Практичні завдання

Відшукати екстремалі наступних функціоналів:

1. $J[y(x)] = \int\limits_{-1}^{0} \left(12xy - y'^2\right) dx \to extr, \quad y(-1) = 1, \; y(0) = 0$.
2. $J[y(x)] = \int\limits_{0}^{\pi} \left(4y \cos x + y'^2 - y^2\right) dx \to extr, \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$.
3. $J[y(x)] = \int\limits_{1}^{2} \left(xy^2 - y\right) dx \to extr, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \; y(2) = \frac{1}{2}$.
4. $J[y(x)] = \int\limits_{0}^{1} \left(2xy + (x^2 + e^y)y'\right) dx \to extr, \quad y(0) = 0, \; y(1) = 1$.
5. $J[y(x)] = \int\limits_{1}^{2} \left(y'^2 + 2y'\right) dx \to extr, \quad y(1) = 0, \; y(2) = 1$.
6. $J[y(x)] = \int\limits_{0}^{1} \left(xy' + y'^2\right) dx \to extr, \quad y(0) = 0, \; y(1) = 1$.
7. $J[y(x)] = \int\limits_{0}^{1} \left(y'^2 + xy\right) dx \to extr; \; y(0) = y(1) = 0.$

8. $J\left[y(x)\right]=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(y'^2-y^2-xy\right)\,dx\to extr;\ \ y(0)=y(\pi/2)=0.$

9. $J\left[y(x)\right]=\int\limits_{0}^{1}\left(y'^2+yy'+12xy\right)\,dx\to extr;\ \ y(0)=y(1)=0.$