Тема 2. Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення

Мета: набуття навичок розв’язання узагальненої задачі варіаційного числення.

План:
1. Функціонали, що залежать від n функцій однієї змінної.
2. Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку.

Ключові поняття та терміни: система рівнянь Ейлера, рівняння Ейлера-Пуассона.

Теоретичні відомості та методичні рекомендації до розв’язання задач

Теорема. Для варіаційної задачі

$$J\left[y_1, y_2, ..., y_n\right] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right) dx \to extr, \qquad (2.1)$$

$$y_k\left(x_0\right) = y_{k0},\ y_k\left(x_1\right) = y_{k1},\ k = \overline{1, n}, \qquad (2.2)$$

де $y_k\left(x\right),\ k = \overline{1, n}$ – функції з простору $C^1\left[x_0, x_1\right]$, причому вважається, що функція F неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку по всіх $2n+1$ аргументах, екстремалі задовольняють систему рівнянь Ейлера:

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y_k'} = 0\ \left(k = \overline{1, n}\right). \qquad (2.3)$$

Теорема. Для варіаційної задачі

$$J\left[y\left(x\right)\right] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y\left(x\right), y'\left(x\right), ..., y^{(n)}\left(x\right)\right) dx \to extr, \qquad (2.4)$$

$$y^{(k)}\left(x_0\right) = y_0^{(k)},\ y^{(k)}\left(x_1\right) = y_1^{(k)},\ k = \overline{0, n-1} \qquad (2.5)$$

у просторі $C^n\left[x_0, x_1\right]$ n раз неперервно диференційовних функцій, причому вважається, що функція $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right)$ має неперервні частинні похідні першого порядку по всіх аргументах, екстремаль задовольняє *рівняння Ейлера-Пуассона*

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - ... + \left(-1\right)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \qquad (2.6)$$

Приклад 1. Відшукати екстремалі задачі [8]:

$$J\left[y_1(x), y_2(x)\right] = \int\limits_0^{\pi/2} \left(y_1'^2(x) + y_2'^2(x) + 2y_1(x)y_2(x)\right) dx \to extr,$$

$$y_1(0) = 0,\;\; y_1(\pi/2) = 1,\; y_2(0) = 0,\;\; y_2(\pi/2) = -1.$$

Розв'язання. Складаємо систему диференціальних рівнянь Ейлера. Вона має вигляд

$$y_1'' - y_2 = 0,\;\; y_2'' - y_1 = 0.$$

Вилучаючи одну зі змінних, наприклад y_2, дістаємо рівняння $y_1^{(4)} - y_1 = 0.$ Інтегруючи його, отримуємо загальний розв'язок системи рівнянь

$$y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

$$y_2(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

З граничних умов обчислюємо $C_1 = 0,\, C_2 = 0,\, C_3 = 0,\;\, C_4 = 1.$

Відповідь. Функції $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = -\sin x$ є екстремалями задачі.

Приклад 2. Відшукати екстремаль функціонала [6,8]:

$$J\left[y(x)\right] = \int\limits_0^{\pi/2} \left(y''^2(x) - y^2(x) + x^2\right) dx \to extr,$$

$$y(0) = 1,\;\; y(\pi/2) = 0,\; y'(0) = 0,\;\; y'(\pi/2) = -1.$$

Розв'язання. Рівняння Ейлера-Пуассона має вигляд $y^{(4)} - y = 0$. Його загальний розв'язок:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Невідомі константи C_1, C_2, C_3, C_4 обчислюємо з граничних умов: $C_1 = 0,\, C_2 = 0,\, C_3 = 1,$ $C_4 = 0.$

Відповідь. Функція $y(x) = \cos x$ – єдина допустима екстремаль задачі.

Приклад 3. Відшукати екстремаль функціонала [6,8]:

$$J\left[z(x,y)\right] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2zf(x,y)\right] dxdy \to extr;$$

$$z(x,y) = v(x,y),\; (x,y) \in \Gamma.$$

Розв'язання. Складаємо рівняння Ейлера-Остроградського. Воно має вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y)\Leftrightarrow \Delta z=f(x,y).$$

Рівняння Ейлера-Остроградського цієї задачі перетворюється у рівняння Пуассона.

Відповідь. Екстремаль функціонала – неперервна функція $z(x,y)$, яка задовольняє рівняння Пуассона і набуває заданих значень $v(x,y)$ на границі області D.

Питання для самоперевірки:

1. Сформулюйте задачу варіаційного числення для функціоналів, що залежать від n функцій однієї змінної.
2. Який порядок має система рівнянь Ейлера?
3. Сформулюйте задачу варіаційного числення для функціоналів, що залежать від похідних вищого порядку.
4. Який порядок має рівняння Ейлера-Пуассона?

Практичні завдання

Відшукати екстремалі наступних функціоналів:

1. $\int\limits_1^2 \left(y_1'^2+y_2^2+y_2'^2\right)dx\to extr;\ y_1(1)=1,\ y_1(2)=2,\ y_2(1)=0,\ y_2(2)=1.$
2. $\int\limits_0^\pi \left(2y_1y_2-2y_1^2+y_1'^2-y_2'^2\right)dx\to extr;\ y_1(0)=0,\ y_1(\pi)=1,\ y_2(0)=0,$ $y_2(\pi)=1.$
3. $\int\limits_0^{\pi/4} \left(2y_2-4y_1^2+y_1'^2-y_2'^2\right)dx\to extr;\ y_1(0)=0,\ y_1(\pi/4)=1,\ y_2(0)=0,$ $y_2(\pi/4)=1.$
4. $\int\limits_{-1}^1 \left(2xy_1-y_1'^2+y_2'^3/3\right)dx\to extr;\ y_1(1)=0,\ y_1(-1)=2,\ y_2(1)=1,$ $y_2(-1)=-1.$
5. $\int\limits_0^1 \left(y_1'^2+y_2'^2-2y_1y_2\right)dx\to extr;\ y_1(0)=0,\ y_1(1)=sh\ 1,\ y_2(0)=0,$ $y_2(1)=-sh\ 1.$
6. $\int\limits_0^1 \left(y_1^2+y_2^2+2y_1'y_2'\right)dx\to extr;\ y_1(0)=y_2(0)=0,\ y_1(1)=y_2(1)=sh\ 1.$

7. $\int_0^1 \left(y_1' y_2' + y_1 y_2\right) dx \to extr;\;\; y_1(0) = y_2(0) = 1,\;\; y_1(1) = e,\; y_2(1) = 1/e.$

8. $\int_0^{\pi/2} \left(y_1' y_2' - y_1 y_2\right) dx \to extr;\;\; y_1(0) = y_2(0) = 0,\;\; y_1(\pi/2) = 1,\; y_2(\pi/2) = -1.$

9. $\int_0^{\pi/2} \left(y_1'^2 + y_3'^2 + 2y_1 y_2 + 2y_2 y_3 + 2y_2^2\right) dx \to extr;\;\; y_1(0) = y_3(0) = 1,\;\; y_2(0) = -1,$

$y_1(\pi/2) = \pi/2,\; y_2\left(\pi/2\right) = 0,\; y_3\left(\pi/2\right) = -\pi/2.$

10. $\int_0^1 e^{-x} y''^2 dx \to extr;\;\; y(0) = 0,\; y'(0) = 1,\; y(1) = e,\; y'(1) = 2e.$

11. $\int_0^1 e^{-x} y''^2 dx \to extr;\;\; y(0) = 1,\; y'(0) = 1,\; y(1) = y'(1) = e.$

12. $\int_0^1 \left(x+1\right) y''^2 dx \to extr;\;\; y(0) = y'(0) = 0,\; y(1) = 1,\; y'(1) = 2.$

13. $\int_0^1 \left(x+1\right) y''^2 dx \to extr;\;\; y(0) = 0,\; y(1) = \ln 2,\; y'(0) = 1,\; y'(1) = 1/2.$