РОЗРИВНІ ЗАДАЧІ

Екстремалі з кутовими точками

Основна задача варіаційного числення досліджувалась у просторі $C_1[x_0, x_1]$ один раз неперервно диференційовних функцій. Однак у цьому просторі розв'язується не кожна задача. Навіть за умови, що функція $F(x, y, y')$ під знаком інтеграла, разом з похідними $F_y(x, y, y')$, $F_{y'}(x, y, y')$ неперервна по сукупності змінних, не завжди існує розв'язок задачі в просторі $C_1[x_0, x_1]$. У деяких класах варіаційних задач розв'язок досягається на екстремалях, що мають кутові точки. До таких задач належать, наприклад, задачі про відбиття та заломлення екстремалей.

Задача про відбиття екстремалей.

Визначити функцію, що дає екстремум функціонала

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')dx \to extr \qquad (3.1)$$

з граничними умовами $y(x_0) = y_0, \quad y(x_2) = y_2,$

причому крива проходить з точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x_2, y_2)$ лише після відбиття від заданої лінії $y = \varphi(x)$.

Вважається, що у точці відбиття $C(x_1, y_1)$ шукана крива має злом $y'(x_1 - 0) \neq y'(x_1 + 0)$, а на інтервалах $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ похідна $y'(x)$ неперервна. Записують функціонал (3.1) у вигляді

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx = J_1[y(x)] + J_2[y(x)]. \quad (3.2)$$

Функція $y(x)$, що дає екстремум функціонала задачі, задовольняє рівняння Ейлера.

У точці відбиття виконується *умова*

$$\left[F + (\varphi'(x) - y'(x))F_{y'}\right]\Big|_{x = x_1 - 0} = \left[F + (\varphi'(x) - y'(x))F_{y'}\right]\Big|_{x = x_1 + 0}. \quad (3.3)$$

Умова (3.3) разом з граничними умовами $y(x_0) = y_0$, $y(x_2) = y_2$ та умовою $y(x_1) = \varphi(x_1)$ дозволяє визначити координату точки відбиття та невідомі константи загального розв'язку рівняння Ейлера.

Задача про заломлення екстремалей.

Вважається, що підінтегральна функція $F(x, y, y')$ функціонала (3.1) має лінію розриву $y = \varphi(x)$ похідної $y'(x)$ і граничні точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_2, y_2)$ лежать по різні боки від лінії розриву. Записують функціонал $J[y(x)]$ у вигляді

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y, y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F_2(x, y, y')dx = J_1[y(x)] + J_2[y(x)], \qquad (3.4)$$

де $F_1(x, y, y') = F(x, y, y')$ з одного боку лінії розриву $y = \varphi(x)$ і $F_2(x, y, y') = F(x, y, y')$ з іншого боку. Якщо існує ломана екстремаль, то вона складається з екстремалей $y_1(x)$, $x \in [x_0, x_1]$ та $y_2(x)$, $x \in [x_1, x_2]$ функціоналів $J_1[y(x)]$ і $J_2[y(x)]$, що мають спільну точку $(x_1, \varphi(x_1))$ на лінії розриву.

З необхідної умови екстремуму $\delta J[y(x)] = 0$ випливає така *умова заломлення*:

$$\left[F_1 + (\varphi'(x) - y_1'(x))F_{1y'}\right]\Big|_{x = x_1 - 0} = \left[F_2 + (\varphi'(x) - y_2'(x))F_{2y'}\right]\Big|_{x = x_1 + 0}. \quad (3.5)$$

Умова (3.5) разом з двома граничними умовами $y_1(x_0) = y_0$, $y_2(x_2) = y_2$ та умовами $y_1(x_1) = \varphi(x_1)$, $y_2(x_1) = \varphi(x_1)$ дозволяє визначити точку заломлення x_1 та невідомі константи C_1, C_2, C_3, C_4 розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$ рівнянь Ейлера

$$F_{1y} - \frac{d}{dx} F_{1y'} = 0, \quad x \in [x_0, x_1];$$
$$F_{2y} - \frac{d}{dx} F_{2y'} = 0, \quad x \in [x_1, x_2].$$

Ломані екстремалі. Умови Вейєрштрасса-Ердмана

Поширимо основну задачу варіаційного числення на клас кусково-гладких функцій. Нагадаємо, що кусково-гладкою функцією на $[x_0, x_1]$ називається неперервна функція $y(x)$, що має похідну, неперервну на $[x_0, x_1]$, за винятком скінченного числа точок $x_0 < \tilde{x}_1 < \ldots < \tilde{x}_m < x_1$ і в точках $\tilde{x}_j$ похідна $y'(x)$ має розриви першого роду. Сукупність усіх кусково-гладких функцій на $[x_0, x_1]$ позначимо $KC_1[x_0, x_1]$.

Розглядається основна задача варіаційного числення

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \to extr, \tag{3.6}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \tag{3.7}$$

у просторі $KC_1[x_0, x_1]$. Функціонал $J[y(x)]$ визначений на множині функцій $y(x) \in KC_1[x_0, x_1]$, оскільки на множині таких $y(x)$ функція $F(x, y, y')$ кусково-неперервна й інтеграл існує.

Розглядається задача про знаходження екстремуму функціонала (3.6), вважаючи, що допустимі криві задовольняють граничні умови (3.7) і можуть мати злом у деякій точці з абсцисою $c\,(x_0 < c < x_1)$. Цей злом є можливим лише там, де $F_{y'y'} = 0$. У точці злому екстремаль повинна задовольняти *умови Вейєрштрасса-Ердмана:*

$$\begin{gathered} F_{y'}\big|_{x=c-0} = F_{y'}\big|_{x=c+0}, \\ \left(F - y'F_{y'}\right)\big|_{x=c-0} = \left(F - y'F_{y'}\right)\big|_{x=c+0}. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Ці умови разом із умовами неперервності шуканої екстремалі дозволяють визначити координати точки злому.

На кожному із двох відрізків $[x_0, c]$ і $[c, x_1]$ екстремаль повинна задовольняти рівняння Ейлера, тобто диференціальне рівняння 2-го порядку. При розв’язуванні цих двох рівнянь дістають чотири довільні сталі, які, взагалі кажучи, знаходяться з граничних умов (3.7) та умов (3.8) у точці злому.