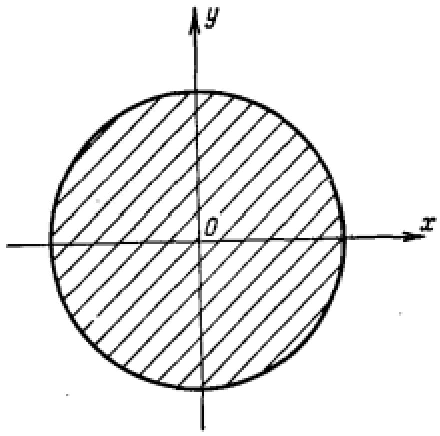
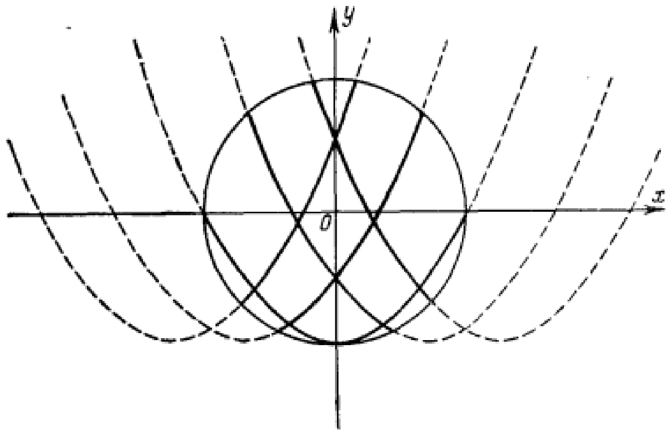
ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ

Поле екстремалей. Умова Якобі

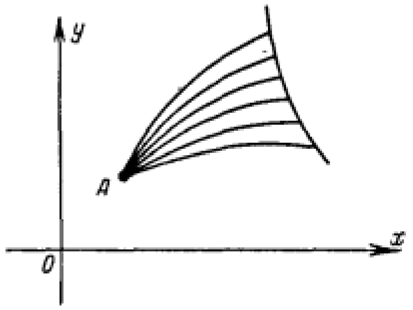
Сім'я кривих $y = y(x, C)$ утворює *власне поле* у заданій області D площини xOy, якщо через кожну точку (x, y) цієї області проходить одна і тільки одна крива сім'ї $y = y(x, C)$. Кутовий коефіцієнт $p(x, y)$ дотичної до кривої сім'ї $y = y(x, C)$, що проходить через точку (x, y), називається *нахилом поля* у точці (x, y).

Например, внутри круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$ параллельные прямые $y = x + C$ образуют поле (рис. 8.1), причем наклон этого поля $p(x, y) = 1$. Напротив, семейство парабол $y = (x - a)^2 - 1$ (рис. 8.2) внутри того же круга поля не образует, так как внутри этого круга параболы рассматриваемого семейства пересекаются.





Сім'я кривих $y = y(x, C)$ утворює *центральне поле* в області D площини xOy, якщо ці криві покривають без самоперетинів всю область D і виходять із однієї точки (x_0, y_0), що лежить поза областю D. Точка (x_0, y_0) називається *центром в'язки* кривих.



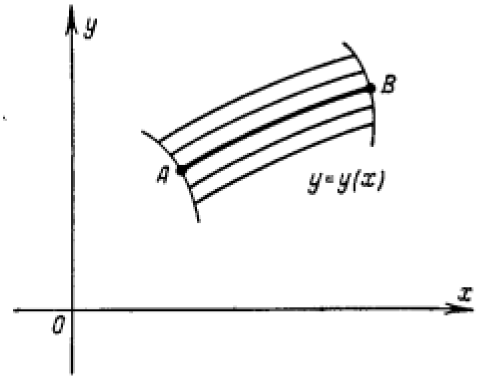
Якщо поле (власне або центральне) утворене сім'єю екстремалей деякої варіаційної задачі, то воно називається *полем екстремалей*.

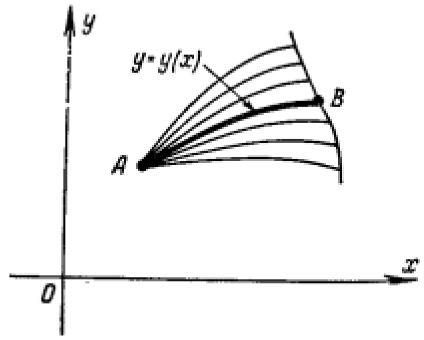
Нехай крива $y = y(x)$ є екстремаллю функціонала

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx,$$

що проходить через точки $A(x_0, y_0); B(x_1, y_1)$.

Кажуть, що екстремаль $y = y(x)$ включена у власне поле екстремалей, якщо знайдена сім'я екстремалей $y = y(x, C)$, яка утворює поле і містить при деякому значенні $C = C_0$ екстремаль $y = y(x)$, причому ця екстремаль $y = y(x)$ не лежить на границі області D, в якій сім'я $y = y(x, C)$ утворює поле.





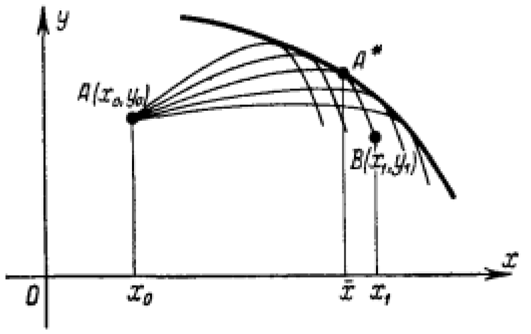
Якщо в'язка екстремалей з центром у точці (x_0, y_0) в околі екстремалі $y = y(x)$, що проходить через ту ж точку, утворює поле, то кажуть, що знайдено центральне поле, яке містить указану екстремаль $y = y(x)$. За параметр сім'ї $y = y(x, C)$ приймається кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в'язки у точці (x_0, y_0).

Нехай мають сім'ю $\Phi(x, y, C) = 0$ плоских кривих.

C-*дискримінантом* цієї сім'ї називається геометричне місце точок, що визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

У загальному випадкові до складу C-дискримінанта входять обвідна сім'ї, геометричне місце вузлових точок і геометричне місце точок загострення.



Обвідною сім'ї $\Phi(x,y,C)=0$ називається крива, яка у кожній своїй точці дотикається деякої кривої вказаної сім'ї та кожної ділянки якої дотикається нескінченна множина кривих сім'ї.

Якщо мають в'язку кривих із центром у точці $A(x_0,y_0)$, то центр в'язки належить C-дискримінанту.

Якщо дуга AB кривої $y=y(x)$ має відмінну від A спільну точку A^* з C-дискримінантом в'язки $y=y(x,C)$ із центром у точці A, що містить цю криву, то точка A^* називається точкою, *спряженою* із точкою A.

Для того, щоб дугу AB екстремалі можна було включити у центральне поле екстремалей з центром у точці $A(x_0,y_0)$, достатньо, щоб точка A^*, що є спряженою із точкою A, не лежала на дузі AB. Ця умова називається умовою Якобі.

Аналітична форма умови Якобі. Нехай мають найпростішу варіаційну задачу

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx\to extr, \qquad (4.2)$$

$$y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1. \qquad (4.3)$$

Якщо розв'язок $u=u(x)$ *рівняння Якобі*

$$\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u-\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}u'\right)=0, \qquad (4.4)$$

що задовольняє умові $u(x_0)=0$, перетворюється в нуль ще в будь-якій точці інтервалу $x_0<x<x_1$, то спряжена з $A(x_0,y_0)$ точка A^* лежить на дузі AB екстремалі (точка B має координати (x_1,y_1)).

Якщо існує розв'язок $u=u(x)$ рівняння Якобі, що задовольняє умові $u(x_0)=0$ і не перетворюється в нуль у жодній з точок півінтервалу $x_0<x\le x_1$, то на дузі AB немає точок, спряжених із A. У цьому випадку дугу AB екстремалі можна включити у центральне поле екстремалей із центром у точці $A(x_0,y_0)$.

У рівнянні (4.4) у функції $F_{yy}(x, y, y')$, $F_{yy'}(x, y, y')$ і $F_{y'y'}(x, y, y')$ замість $y(x)$ треба підставити праву частину рівняння екстремалі $y = y(x, C_0)$.