Тема 7. Прямі методи варіаційного числення

Мета: набуття навичок розв'язання варіаційних задач за допомогою прямих методів.

План:
1. Скінченно-різницевий метод Ейлера.
2. Метод Рітца.
3. Метод Канторовича.

Ключові поняття та терміни: наближений розв'язок, координатні функції, невизначені коефіцієнти, точність наближеного розв'язку.

Теоретичні відомості та методичні рекомендації до розв'язання задач

Скінченно-різницевий метод Ейлера.

Для наближеного пошуку екстремалі функціонала

$$J\left[y(x)\right]=\int_a^b F\left(x,y,y'\right)dx \to extr, \quad y(a)=y_a,\ y(b)=y_b. \tag{7.1}$$

функцію $y(x)$ замінюють ламаною, $n+1$ вершина якої має фіксовані абсциси

$$x_0=a,\ x_1,\ x_2,...,x_{n-1},x_n=b$$

$\left(x_{n+1}-x_n=\Delta x\right)$, її похідну $y'(x)$ – різницевим відношенням $\left(y_{i+1}-y_i\right)/\Delta x$, а інтеграл – сумою (за формулою прямокутників)

$$J[y]\approx\sum_{i=0}^{n-1}F\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x=\Phi\left(y_1,y_2,...,y_{n-1}\right)\to extr, \tag{7.2}$$

де

$$y_0=y_a,\ y_1,\ y_2,...,y_{n-1},y_n=y_b$$

– невідомі ординати вершини ламаної, на яких може досягатися екстремум.

Необхідними умовами існування екстремуму функції $\Phi\left(y_1,y_2,...,y_{n-1}\right)$ є рівності нулю частинних похідних першого порядку

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n-1.$$

(7.3)

Зауважимо, що у сумі (7.2) кожна змінна y_i входить до двох доданків, тому, після обчислення частинних похідних, система рівнянь (7.3) набуває вигляду:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x + F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right)\frac{1}{\Delta x}\Delta x +$$

$$+F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\left(-\frac{1}{\Delta x}\right)\Delta x = 0, \; i = 1, 2, ..., n-1.$$

(7.4)

Розв'язуючи систему (7.4), отримаємо наближені значення ординат екстремалі

$$y_1^*, y_2^*, ..., y_{n-1}^*.$$

Метод Рітца.

Ідея методу Рітца полягає у наступному: значення функціонала $J\left[y(x)\right]$ варіаційної задачі (7.1) розглядають не на довільних допустимих кривих, а лише на всіляких лінійних комбінаціях деяких функцій $\varphi_1(x), \; \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ з невизначеними коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$:

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x).$$

(7.5)

У (7.5) функція $\varphi_0(x)$ повинна задовольняти крайові умови задачі (7.1) $\varphi_0(a) = y_a$, $\varphi_0(b) = y_b$, а функції $\varphi_1(x), \; \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ – наступні співвідношення $\varphi_i(a) = 0$, $\varphi_i(b) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Функції

$$\varphi_1(x), \; \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$$

є лінійно незалежними, їх називають *координатними*.

Підставляючи вираз (7.5) у функціонал задачі (7.1), після інтегрування отримуємо задачу визначення екстремуму функції декількох змінних:

$$J[y_n]=\int_a^b F\left(x,\ \varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x),\ \varphi_0'(x)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i'(x)\right)dx=$$

$$=\Phi(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\to extr.$$

Для визначення екстремальних значень змінних прирівнюємо частинні похідні першого порядку до нуля і отримуємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_i}=0,\quad i=1,2,...,n.$$

З системи знаходимо значення $\alpha_1^*,\alpha_2^*,...,\alpha_n^*$, підставляємо їх у (7.5) та отримуємо наближення

$$y_n^*(x)=\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*\varphi_i(x).$$