

**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
для ВТУЗов**

А.С. Бортаковский А.В. Пантелеев

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ
ГЕОМЕТРИЯ
В ПРИМЕРАХ
И ЗАДАЧАХ**



**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
для ВТУЗов**

**А.С. Бортаковский
А.В. Пантелеев**

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

**Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области авиации, ракетостроения и космоса
в качестве учебного пособия для студентов высших
технических учебных заведений**



**Москва
«Высшая школа»
2005**

УДК 514
ББК 22.151.5
Б 83

Рецензенты:

кафедра «Прикладная математика»
Московского государственного технического университета гражданской авиации
(зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. В.Л. Кузнецов);

д-р физ.-мат. наук, проф. А.Н. Сиротин
Московский авиационный институт (государственный технический университет)

Бортаковский, А.С.

Б 83 Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учеб. пособие/А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. — М.: Высш. шк., 2005. — 496 с.: ил. — (Серия «Прикладная математика»).

ISBN 5-06-004761-X

Приведены основные понятия, теоремы и методы решения задач по всем разделам курса: векторной алгебре, системам координат, преобразованиям плоскости и пространства, уравнениям линий и поверхностей первого и второго порядков. Описаны некоторые приложения аналитической геометрии в механике, теории оптимизации и математическом анализе.

В каждом разделе кратко изложены основные теоретические сведения, приведены решения типовых примеров и задачи для самостоятельного решения с ответами.

Для студентов технических вузов и университетов

УДК 514
ББК 22.151.5

Учебное издание

Бортаковский Александр Сергеевич, Пантелеев Андрей Владимирович

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Редактор *Е.Н. Рожкова*

Художник *А.А. Салдатов*

Художественный редактор *А.Ю. Войткевич*. Технический редактор *Н.И. Тростянская*

Корректоры *Е.И. Борисова, Т.А. Вавилова*

Лицензия ИД № 06236 от 09.11.01.

Изд. № РЕНТ-325. Подп. в печать 25.05.05. Формат 60 × 88^{1/16}. Бум. офсетная. Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная. Объем 30,38 усл. печ. л., 31,13 усл. кр.-отт. Тираж 3000 экз. Заказ № 5150

ФГУП «Издательство «Высшая школа», 127994, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14.

Тел.: (095) 200-04-56, <http://www.v-shkola.ru>. E-mail: info@v-shkola.ru

Отдел реализации: (095) 200-07-69, 200-31-47, факс: (095) 200-34-86. E-mail: sales@v-shkola.ru

Отпечатано на ФГУП ордена «Знак Почета» Смоленская областная типография им. В.И. Смирнова
214000, г. Смоленск, пр-т им. Ю. Гагарина, 2.

ISBN 5-06-004761-X

© ФГУП «Издательство «Высшая школа», 2005

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	7
В.1. Основные метрические понятия	7
В.2. Равенство и подобие геометрических фигур	9
В.3. Бинарные отношения	11
Глава 1. Векторная алгебра	15
1.1. Векторы и линейные операции над векторами	15
1.1.1. Вектор, его направление и длина	15
1.1.2. Линейные операции над векторами	19
1.1.3. Линейная зависимость и линейная независимость векторов ...	24
1.2. Проекция векторов и их свойства	26
1.2.1. Отношение коллинеарных векторов	26
1.2.2. Проекция векторов на прямую и на плоскость	28
1.2.3. Ортогональные проекции. Угол между векторами	34
1.3. Базис и координаты векторов	40
1.3.1. Базис на прямой. Координата вектора на прямой	40
1.3.2. Базис на плоскости. Координаты вектора на плоскости	42
1.3.3. Базис в пространстве. Координаты вектора в пространстве ...	45
1.3.4. Линейные операции над векторами в координатной форме ...	47
1.3.5. Ортогональный и ортонормированный базисы	50
1.4. Скалярное произведение векторов	54
1.4.1. Определение скалярного произведения	54
1.4.2. Свойства скалярного произведения	56
1.4.3. Выражение скалярного произведения через координаты векторов	59
1.5. Векторное и смешанное произведения векторов	69
1.5.1. Векторное произведение и его свойства	69
1.5.2. Смешанное произведение и его свойства	74
1.5.3. Ориентированные площади и объемы	79
1.5.4. Двойное векторное произведение и его свойства	83
1.6. Типовые задачи векторной алгебры	86
1.6.1. Применение векторов в задачах на аффинные свойства фигур	86
1.6.2. Метрические приложения произведений векторов	96
1.6.3. Приложения векторной алгебры в механике	105
Глава 2. Системы координат	121
2.1. Аффинные системы координат	121
2.1.1. Аффинные системы координат на прямой, на плоскости, в пространстве	121
2.1.2. Прямоугольные системы координат	124

2.2.	Аффинные преобразования координат	128
2.2.1.	Преобразование координат вектора при замене базиса.....	128
2.2.2.	Преобразование координат точки при замене системы координат.....	132
2.2.3.	Преобразования прямоугольных координат на плоскости и в пространстве	135
2.2.4.	Аффинные преобразования плоскости и пространства.....	144
2.3.	Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат.....	163
2.3.1.	Полярная система координат	163
2.3.2.	Цилиндрическая система координат	169
2.3.3.	Сферическая система координат	171
2.4.	Координатное пространство R^n	174
2.4.1.	Точки, векторы и операции над ними	174
2.4.2.	Линейные и аффинные подпространства	179
2.4.3.	Скалярное произведение	183
2.4.4.	Преобразования систем координат	187
Глава 3.	Алгебраические линии на плоскости	198
3.1.	Способы задания геометрических мест точек на плоскости.....	199
3.1.1.	Общие уравнения геометрических мест точек.....	199
3.1.2.	Параметрические уравнения геометрических мест точек.....	204
3.1.3.	Алгебраические уравнения линий на плоскости.....	205
3.2.	Алгебраические линии первого порядка (прямые на плоскости)	209
3.2.1.	Уравнения прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору.....	209
3.2.2.	Уравнения прямой, проходящей через заданную точку коллинеарно заданному вектору.....	218
3.2.3.	Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.....	223
3.2.4.	Уравнения прямой, проходящей через заданную точку, с данным угловым коэффициентом.....	226
3.2.5.	Взаимное расположение прямых.....	227
3.2.6.	Типовые задачи с прямыми на плоскости.....	234
3.3.	Алгебраические линии второго порядка	254
3.3.1.	Канонические уравнения линий второго порядка.....	254
3.3.2.	Эллипс	268
3.3.3.	Гипербола	274
3.3.4.	Парабола	282
3.3.5.	Классификация линий второго порядка по инвариантам	289
3.3.6.	Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду.....	315

3.3.7. Применение линий первого и второго порядков в задачах на экстремум функций.....	326
Глава 4. Алгебраические поверхности в пространстве	335
4.1. Способы задания геометрических мест точек в пространстве.....	335
4.1.1. Общие уравнения геометрических мест точек.....	336
4.1.2. Параметрические уравнения геометрических мест точек.....	343
4.1.3. Алгебраические уравнения поверхностей	345
4.2. Алгебраические поверхности первого порядка (плоскости).....	348
4.2.1. Уравнения плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору.....	348
4.2.2. Уравнения плоскости, проходящей через заданную точку и компланарной двум неколлинеарным векторам	356
4.2.3. Уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки	360
4.2.4. Взаимное расположение плоскостей.....	363
4.2.5. Типовые задачи с плоскостями.....	369
4.3. Уравнения прямых в пространстве.....	375
4.3.1. Уравнение прямой как линии пересечения двух плоскостей	375
4.3.2. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку коллинеарно заданному вектору.....	376
4.3.3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.....	381
4.3.4. Взаимное расположение прямых в пространстве	383
4.3.5. Взаимное расположение прямой и плоскости.....	387
4.3.6. Типовые задачи с прямыми в пространстве	389
4.4. Алгебраические поверхности второго порядка	394
4.4.1. Канонические уравнения поверхностей второго порядка	394
4.4.2. Эллипсоиды	410
4.4.3. Гиперболоиды	413
4.4.4. Конусы	416
4.4.5. Параболоиды	420
4.4.6. Классификация поверхностей второго порядка по инвариантам	423
4.4.7. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.....	451
4.4.8. Применение поверхностей первого и второго порядков в задачах на экстремум функций	472
Приложение	483
Литература	495

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга включает теоретические основы и методы решения задач аналитической геометрии и охватывает основные разделы курса, читаемого на факультете "Прикладная математика и физика" Московского авиационного института.

Аналитическая геометрия, как правило, изучается во втузе совместно с линейной алгеброй [10] и традиционно содержит следующие разделы: векторную алгебру, системы координат, преобразования плоскости и пространства, уравнения линий и поверхностей первого и второго порядков. Объем и глубина излагаемого материала варьируется в зависимости от специальности: более полно для конструкторских специальностей и для специальности "Прикладная математика", в сокращенном варианте – для инженерных (но не конструкторских) специальностей, а также экономистов.

Несмотря на то что курс аналитической геометрии во всех технических университетах имеет примерно одинаковый объем и традиционное содержание, его изложение в разных вузах существенно отличается. Причина заключается в том, что курс имеет, условно говоря, три составляющие: метрическую, аффинную и проективную. Метрические свойства фигур изучаются при любом построении курса, аффинные и проективные – в зависимости от предпочтений преподавателя и от уровня подготовки студентов. Это обстоятельство учитывалось при написании пособия. Весь традиционный материал аналитической геометрии излагается с метрической и аффинной точек зрения, следуя замечательным учебникам [2,14]. Проективная геометрия в данном пособии не рассматривается, поскольку она практически исчезла из программ преподавания аналитической геометрии во втузах.

Процесс обучения геометрии невозможно представить без решения задач. В отличие от алгебры здесь, как правило, нет готовых алгоритмов решения. Поэтому особое внимание уделялось описанию методик решения основных задач. Авторы ставили перед собой цель написать доступное для широкой студенческой аудитории пособие, где все теоретические положения подкрепляются подробным разбором типовых примеров.

Изложение построено по единой схеме, включая описание элементов постановок задач, алгоритмы решения и подробный анализ типовых примеров. Предлагаются задачи для самостоятельного решения, в том числе зависящие от параметров m – номера учебной группы и n – номера студента по списку группы.

Данное пособие входит в серию книг "Прикладная математика в примерах и задачах", составляя с ними единый учебно-методический комплекс.

Авторы выражают сердечную признательность профессору, д.ф.-м.н. В.М. Закалюкину за ценные замечания и пожелания, способствовавшие улучшению рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

В школьном курсе элементарной геометрии изучаются метрические и аффинные свойства простых геометрических фигур и тел: многоугольников, многогранников, окружностей, цилиндров, конусов, сфер. Основная цель аналитической геометрии – описание тех же геометрических объектов средствами алгебры и математического анализа. Другими словами, изменяется метод исследования, а предмет изучения остается тем же самым. Поэтому первичные понятия, аксиомы и теоремы, составляющие содержание курса элементарной геометрии, используются в аналитической геометрии без изменений. Не обсуждая вопросов аксиоматики, относящихся, скорее, к математической логике и "основаниям геометрии", первичные геометрические понятия и отношения будут употребляться в том наивном смысле, в каком они употребляются в школьном курсе геометрии, зная, что под них можно подвести безупречное аксиоматическое обоснование [1,2]. Приводимые во введении сведения, определения и свойства часто имеют предварительный (ознакомительный) характер. Некоторые "тонкие" моменты и вопросы здесь не рассматриваются.

В.1. ОСНОВНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Любая система аксиом геометрии подводит к *основным метрическим понятиям* – длине отрезка и величине угла. Как правило, в школьных учебниках эти измеряемые величины определяются либо их свойствами, либо аксиомами меры, например, в аксиоматике А.В. Погорелова. В любом случае считаются известными понятие множества действительных чисел и их основные свойства.

Для любых двух точек A и B пространства однозначно определено неотрицательное действительное число $\rho(A, B)$, называемое *расстоянием между точками A и B* . Функция ρ расстояния удовлетворяет следующим условиям (аксиомам):

1. $\rho(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$, т.е. точки A и B совпадают;
2. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ для любых точек A и B (аксиома симметрии);
3. $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$ для любых точек A, B, C (неравенство треугольника), причем равенство $\rho(A, C) = \rho(A, B) + \rho(B, C)$ означает, что точка B принадлежит отрезку AC .

Длиной отрезка AB называется расстояние между его концами A и B . Обычно отрезок AB и его длину $\rho(A, B)$ обозначают одинаково: $AB = \rho(A, B)$. Расстояния между точками (или длины отрезков) измеряются по отношению к выбранной единице измерения, а именно предполагается,

что выбран некоторый *масштабный отрезок* A_1B_1 , длина которого принята за единицу: $A_1B_1 = 1$. Этот отрезок называют *единичным*.

Аналогично определяется мера углов. Для любого угла AOB однозначно определено положительное действительное число $\varphi(\angle AOB)$, называемое *мерой* (или *величиной*) *угла*. Функция φ меры угла удовлетворяет следующим условиям (аксиомам):

1. $\varphi(\angle AOB) = \varphi(\angle BOA)$ для любого угла AOB ;
2. $\varphi(\angle AOC) = \varphi(\angle AOB) + \varphi(\angle BOC)$ для любого угла AOC и любой точки B внутри него (рис.В.1,а).

В качестве "единичного" угла, выбирается развернутый угол, величина которого принимается за π (радиан) или за 180° (градусов).

В дальнейшем мы будем использовать следующие две теоремы, которые, так или иначе, доказываются при любой принятой системе аксиом [1].

Теорема В.1 (об откладывании отрезка). *На каждом луче от его начала можно отложить отрезок любой данной длины и притом только один.*

Теорема В.2 (об откладывании угла). *От каждого луча по данную сторону от него можно отложить угол заданной величины и притом только один.*

Вместе с определением расстояния теорема В.1 устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством неотрицательных действительных чисел и множеством точек луча. Если отрицательным действительным числам поставить в соответствие точки дополнительного луча (дополняющего данный луч до прямой), то получим числовую прямую (рис.В.1,б).

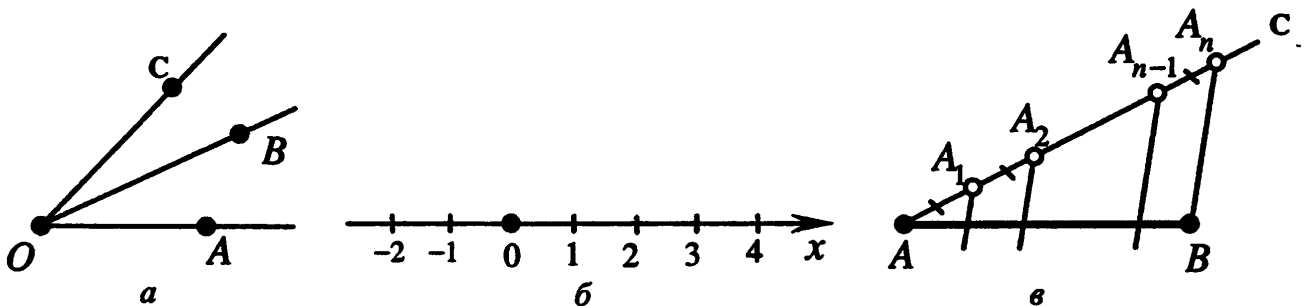


Рис.В.1

З а м е ч а н и я В.1.

1. Понятие непрерывности множества действительных чисел, т.е. взаимно однозначного соответствия действительных чисел и точек числовой прямой, вводится и обосновывается в курсе математического анализа [19]. В геометрии непрерывность прямой вводится, как правило, аксиоматически. Например, в аксиоматике Д. Гильберта непрерывность прямой следует из аксиомы о вложенных отрезках (аксиомы Архимеда) и аксиомы полноты.

2. Вопросы о соизмеримости отрезков, т.е. о возможности измерить отрезок при помощи заданного единичного отрезка, рассматривались еще

древнегреческими геометрами. Например, *задача о несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали*. Напомним, что два отрезка считаются соизмеримыми, если отношение их длин является рациональным числом. Процедура измерения, определяющая понятие соизмеримых отрезков, следующая. При помощи циркуля и линейки несложно, используя теорему Фалеса, разделить отрезок на любое натуральное число равных частей. Для этого достаточно на вспомогательном луче AC отложить n равных отрезков $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$, затем соединить конец A_n последнего отрезка с точкой B , и, наконец, через каждую из точек A_1, A_2, \dots, A_{n-1} провести прямую, параллельную прямой BA_n (рис. В.1, в). Поэтому, выбрав масштабный отрезок единичной длины, можно построить отрезок длиной $\frac{1}{n}$ для любого натурального числа n . Откладывая на прямой или от начала луча m раз такие отрезки последовательно (без наложения и без промежутков), можно получить отрезок длины $\frac{m}{n}$ (для любых натуральных m и n). Таким образом, при помощи циркуля и линейки в результате конечного числа операций можно построить такой отрезок, длина которого будет выражаться любым заданным положительным рациональным числом. Поскольку диагональ квадрата со стороной, равной единице, выражается иррациональным числом ($\sqrt{2}$), то она не является соизмеримой со стороной квадрата.

3. Из п.2 следует, что процедура измерения отрезков должна быть дополнена предельным переходом, позволяющим получать последовательности отрезков, рациональные длины которых образуют сходящиеся числовые последовательности. Пополняя множество рациональных чисел пределами таких последовательностей, приходим к понятиям действительного числа [19] и отрезка, имеющего длину, задаваемую положительным действительным числом.

В.2. РАВЕНСТВО И ПОДОБИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

РАВЕНСТВО ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Понятие равенства геометрических фигур в зависимости от принятой системы аксиом вводится по-разному. Обычно, равенства отрезков или углов определяются по их мере: два отрезка (угла) называются равными, если они имеют равные длины (величины). Затем определяются равенства треугольников, многоугольников, многогранников. Наконец, вводится понятие движения, при помощи которого понятие равенства определяется единообразно для любых геометрических фигур. В некоторых системах понятие движения (наложения, перемещения) вводится аксиоматически.

Говорят, что на плоскости (или в пространстве) определено *преобразование* f , если для каждой точки A плоскости (пространства) поставлена в

соответствие единственная точка $f(A)$ той же плоскости (пространства). Если преобразование f точке A ставит в соответствие точку A' , т.е. $A' = f(A)$, то точка A' называется *образом* точки A , а точка A – *прообразом* A' .

Движением (ортогональным преобразованием) называется преобразование плоскости (пространства), сохраняющее расстояние между точками, т.е. для любых двух точек A, B и их образов A', B' имеет место равенство $AB = A'B'$ – расстояние между образами равно расстоянию между прообразами. Другими словами, длина отрезка является инвариантом для ортогонального преобразования. Слово "инвариант" имеет смысл "остающийся неизменным".

Две фигуры F и F' называются *равными*, если существует движение, при котором фигура F преобразуется в фигуру F' , т.е. каждой точке фигуры F соответствует некоторая точка фигуры F' .

ПОДОБИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Подобием называется преобразование f плоскости (пространства), при котором все расстояния между точками изменяются в одном и том же отношении $k > 0$, т.е. для любых двух точек A, B и их образов A', B' имеет место равенство $A'B' = k \cdot AB$. Число $k > 0$ называется *коэффициентом подобия*.

Отношение длин отрезков является инвариантом для преобразования подобия. В самом деле, из определения следует, что

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{k \cdot AB}{k \cdot CD} = \frac{AB}{CD}.$$

Две фигуры F и F' называются *подобными*, если существует преобразование подобия, при котором фигура F преобразуется в фигуру F' , т.е. каждой точке фигуры F соответствует некоторая точка фигуры F' .

З а м е ч а н и я В.2.

1. Пусть на плоскости задана прямая l и пересекающая ее прямая m . *Проекцией точки A на прямую l параллельно прямой m (вдоль прямой m)* называется такая точка A' прямой l , что прямая AA' параллельна прямой m (рис.В.2,а).

Проекцией отрезка AB на прямую l параллельно прямой m является отрезок $A'B'$ (случай, когда отрезок AB и прямая m параллельны, не рассматривается). Отношение длин произвольных отрезков при этом преобразовании, разумеется, не сохраняется. Например, на рис.В.2,а равные отрезки ($AB = BC$) имеют разные по длине проекции ($A'B' \neq B'C'$), т.е. $\frac{AB}{BC} \neq \frac{A'B'}{B'C'}$.

Однако, по теореме Фалеса отношение длин отрезков, принадлежащих одной прямой, не изменяется при этом преобразовании. Например, $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ (рис.В.2,б). Отношение $\frac{AB}{BC}$ для точек A, B, C , принадлежащих одной прямой (причем точка B лежит между точками A и C), называется *простым отношением* [14]. Как видим, простое отношение является инвариантом для преобразования проекции.

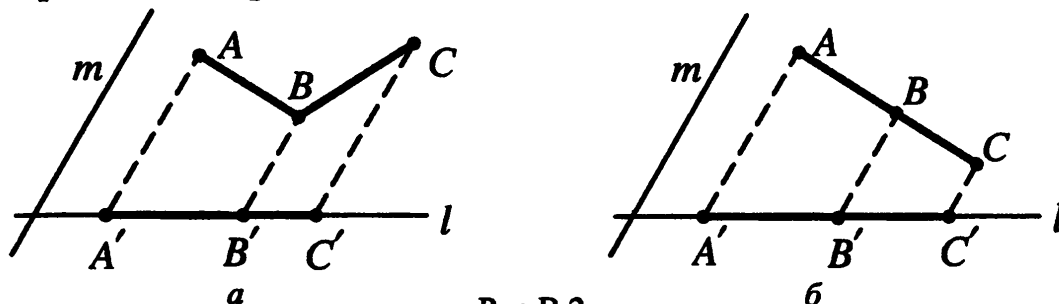


Рис.В.2

2. Преобразования подобия и проекции относятся к так называемым аффинным преобразованиям, которые рассматриваются в разд.2.

3. В школьном курсе геометрии изучаются метрические и аффинные свойства фигур. К метрическим относятся такие свойства, которые не изменяются при ортогональных преобразованиях – преобразованиях, сохраняющих расстояния между точками, например, признаки равенства треугольников, теорема Пифагора, метрическое свойство параллелограмма, теоремы синусов и косинусов и др. К аффинным относятся свойства, которые сохраняются при преобразовании подобия (которое является частным случаем аффинного преобразования (см. разд.2.2.4)), например, признаки подобия треугольников, свойство биссектрисы треугольника, теорема Фалеса и др.

В.3. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Рассмотрим важные логические понятия, связанные с отношениями, которые, в частности, используются в любой аксиоматике геометрии. Предполагается, что множества и операции над ними знакомы читателю из школьного курса математики.

ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Упорядоченной парой $\langle x, y \rangle$ называется совокупность, состоящая из двух элементов x и y , взятых в определенном порядке: элемент x считается в паре первым, а элемент y – вторым. Две упорядоченные пары $\langle x_1, y_1 \rangle$ и $\langle x_2, y_2 \rangle$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Прямым (декартовым) произведением множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар $\langle x, y \rangle$ таких, что $x \in X$ и $y \in Y$. Пря-

мое произведение обозначается $X \times Y$, а в случае $Y = X$ – просто X^2 , т.е. $X \times X = X^2$.

Аналогично определяются упорядоченные тройки, четверки и т.д., а также прямые произведения трех, четырех и т.д. множеств. Например, *прямым произведением* $\underbrace{R \times R \times \dots \times R}_n = R^n$ *n* *множеств R действительных чисел* называется множество всех упорядоченных наборов $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ из *n* действительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n .

Пример В.1. Для числовых множеств $X = \{1, 2\}$ и $Y = \{3, 4\}$ найти:

$X \times Y$; $Y \times X$; X^2 , Y^2 .

□ По определению находим: $X \times Y = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$;
 $Y \times X = \{\langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$; $X^2 = X \times X = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$;
 $Y^2 = Y \times Y = \{\langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$. Заметим, что $X \times Y \neq Y \times X$. ■

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Бинарным отношением ρ *на множестве* $X \times Y$ называется подмножество ρ этого множества упорядоченных пар $\langle x, y \rangle$, $x \in X$, $y \in Y$. Если пара $\langle x, y \rangle$ принадлежит отношению ρ , то пишут $\langle x, y \rangle \in \rho$ или $x \rho y$. Если $Y = X$, то отношение ρ , т.е. подмножество множества X^2 , называют *бинарным отношением на множестве X*.

Бинарное отношение ρ на множестве X называется:

- *рефлексивным*, если $x \rho x$ для любого $x \in X$;
- *симметричным*, если для любых $x, y \in X$ из $x \rho y$ следует, что $y \rho x$;
- *транзитивным*, если для любых $x, y, z \in X$ из $x \rho y$ и $y \rho z$ следует, что $x \rho z$.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на множестве X называется *отношением эквивалентности на множестве X* и обозначается символом \sim .

Пример В.2. Даны бинарные отношения:

а) отношение $=$ ($x = y$ – "x равен y") на множестве действительных чисел;

б) отношение $<$ ($x < y$ – "x меньше y") на множестве действительных чисел;

в) отношение \leq ($x \leq y$ – "x не больше y") на множестве действительных чисел;

г) отношение B ($x B y$ – " x брат y ") на множестве людей;

д) отношение \sim ($M \sim N$ – "многоугольник M подобен многоугольнику N ") на множестве правильных многоугольников;

е) отношение $m = n \pmod{p}$ на множестве целых чисел: "число m сравнимо с числом n по модулю p ", т.е. остатки от деления чисел m и n на натуральное число p равны.

Установить, являются ли заданные отношения рефлексивными, симметричными, транзитивными, отношениями эквивалентности.

□ а) Так как $x = x$ для любого действительного числа x , то отношение $=$ рефлексивное. Поскольку из $x = y$ следует, что $y = x$, то отношение симметричное. Так как из равенств $x = y$ и $y = z$ следует, что $x = z$, то отношение транзитивное. Таким образом, отношение равенства является отношением эквивалентности.

б) Отношение "меньше" не является рефлексивным (неравенство $x < x$ неверно) и симметричным (из $x < y$ не следует $y < x$), но является транзитивным (так как из неравенств $x < y$ и $y < z$ следует $x < z$). Это отношение не является отношением эквивалентности.

в) Отношение "не больше" является рефлексивным (неравенство $x \leq x$ справедливо для любых действительных чисел) и транзитивным (из неравенств $x \leq y$ и $y \leq z$ следует $x \leq z$), но не является симметричным (например, из $1 \leq 2$ не следует, что $2 \leq 1$). Это отношение не является отношением эквивалентности.

г) Отношение "братства" не является рефлексивным (любой человек не является братом для самого себя), симметричным (утверждение, если x брат y ($x B y$), то y брат x ($y B x$) неверно, поскольку y может оказаться сестрой для x), транзитивным (например, если для трех людей x , y , z имеем $x B y$ и $y B z$, то отсюда не следует, что $x B z$, поскольку z может оказаться сестрой для x). Это отношение не является отношением эквивалентности.

д) Каждый многоугольник подобен самому себе ($M \sim M$). Поэтому отношение подобия рефлексивное. Из подобия многоугольников $M \sim N$ следует, что $N \sim M$, значит отношение симметричное. Так как из подобия многоугольников $M \sim N$ и $N \sim K$ следует, что $M \sim K$, то отношение транзитивное. Таким образом, отношение подобия многоугольников является отношением эквивалентности.

е) Сравнение $m = n \pmod{p}$ равносильно условию: разность $m - n$ делится на p (без остатка). Так как число нуль ($m - m = 0$) делится без остатка на любое натуральное число p , то $m = m \pmod{p}$, значит отношение

рефлексивное. Если $m - n$ делится на p , то и $n - m$ делится на p , следовательно, отношение симметричное. Наконец, если числа $m - n$ и $n - k$ делятся на число p , то и их сумма $(m - n) + (n - k) = m - k$ делится на p , т.е. из $m = n \pmod{p}$ и $n = k \pmod{p}$ следует, что $m = k \pmod{p}$. Поэтому отношение транзитивное. Таким образом, отношение сравнения целых чисел по модулю p является отношением эквивалентности. ■

РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВА НА КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Говорят, что *множество X разбито на классы*, если оно представлено тем или иным способом в виде объединения своих попарно непересекающихся подмножеств. Например, множество всех студентов вуза разбивается на учебные группы (а множество учеников школы разбивается на классы). Любое разбиение множества X на классы определяет на X отношение: $x \sim y$ — " x находится в том же классе, что и y ". Покажем, что это отношение, обозначенное символом \sim , действительно является отношением эквивалентности. В самом деле, оно рефлексивное: $x \sim x$, симметричное: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (если x находится в том же классе, что и y , то и y находится в том же классе, что и x), транзитивное (из $x \sim y$ и $y \sim z$ следует, что все три элемента x, y, z принадлежат одному классу, тогда и $x \sim z$). Следовательно, рассматриваемое отношение является отношением эквивалентности.

Справедливо и обратное утверждение. Любое отношение эквивалентности \sim , заданное на множестве X , позволяет разбить это множество на непустые классы.

Классом эквивалентности, порожденным элементом x , называется подмножество K_x множества X , состоящее из тех элементов $y \in X$, для которых $x \sim y$. Любой класс K_x — непустое множество, так как, в силу рефлексивности $x \sim x$, он содержит по крайней мере один элемент x .

Таким образом, отношение эквивалентности на множестве X определяет разбиение множества X на непустые классы эквивалентности относительно этого отношения. Каждый класс эквивалентности однозначно определяется любым своим элементом. Совокупность классов эквивалентности называется *фактор-множеством* множества X .

Например, отношение подобия (см. п. "д" примера В.2) разбивает множество правильных многоугольников на классы эквивалентности: множество правильных треугольников, множество квадратов и т.д. Отношение сравнения целых чисел по модулю p (см. п. "е" примера В.2) разбивает множество целых чисел на p классов эквивалентности, поскольку при делении на p количество различных остатков $(0, 1, \dots, p - 1)$ равно p .

ГЛАВА 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. ВЕКТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1.1.1. Вектор, его направление и длина

Вектором называется упорядоченная пара точек. Первая точка называется **началом вектора**, вторая – **концом вектора**. Расстояние между началом и концом вектора называется его **длиной**. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым**, его длина равна нулю. Если длина вектора положительна, то его называют **ненулевым**. Ненулевой вектор можно определить также как **направленный отрезок**, т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек считается первой (началом вектора), а другая – второй (концом вектора). Направление нулевого вектора, естественно, не определено.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается \overline{AB} и изображается стрелкой, обращенной острием к концу вектора (рис.1.1,а). Начало вектора называют также его **точкой приложения**. Говорят, что вектор \overline{AB} **приложен к точке** A . Длина вектора \overline{AB} или \bar{a} равна длине отрезка AB или a и обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\bar{a}|$. Имея в виду это обозначение, длину вектора называют также **модулем**, **абсолютной величиной**. Нулевой вектор, например \overline{CC} , обозначается символом $\bar{0}$ и изображается одной точкой (точка C на рис.1.1,а). Вектор, длина которого равна единице или принята за единицу, называется **единичным вектором**.



Рис.1.1

Ненулевой вектор \overline{AB} кроме направленного отрезка определяет также **содержащие его луч** AB (с началом в точке A) и **прямую** AB (рис.1.1,б).

КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они принадлежат либо одной прямой, либо – двум параллельным прямым, в противном случае они называются **неколлинеарными**. Коллинеарность векторов обозначается знаком \parallel . Поскольку направление нулевого вектора не определено

но, он считается коллинеарным любому вектору. Каждый вектор коллинеарен самому себе.

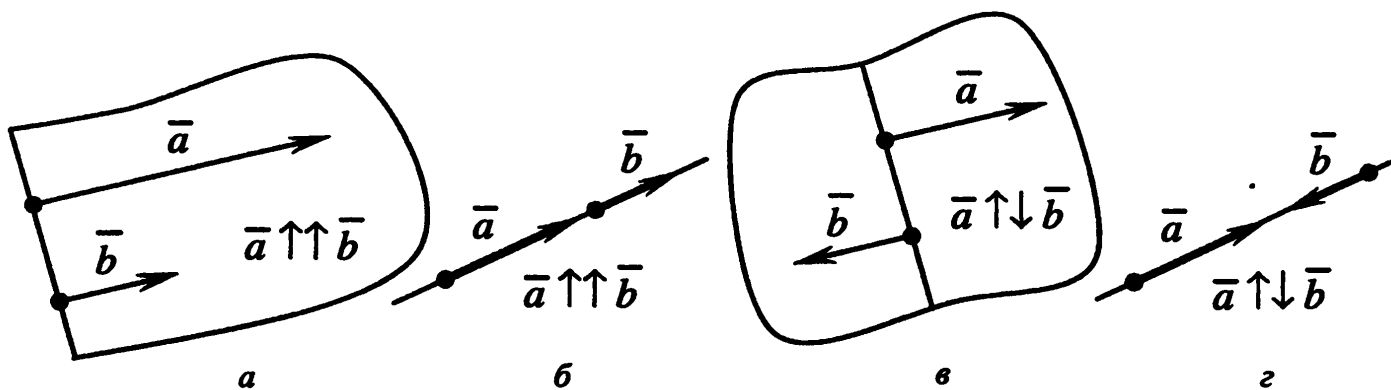


Рис 1.2

Два ненулевых коллинеарных вектора называются *одинаково направленными* (*сонаправленными*), если они принадлежат параллельным прямым и их концы лежат в одной полуплоскости от прямой, проходящей через их начала (рис.1.2,*а*); либо, если векторы принадлежат одной прямой, и луч, определяемый одним вектором, целиком принадлежит лучу, определяемому другим вектором (рис.1.2,*б*). В противном случае коллинеарные векторы называются *противоположно направленными* (рис.1.2,*в,г*). Одинаково направленные и противоположно направленные векторы обозначаются парами стрелок $\uparrow\uparrow$ и $\uparrow\downarrow$ соответственно. Понятия коллинеарных, одинаково направленных векторов распространяются на любое число векторов.

КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Три ненулевых вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях (рис.1.3,*а*), в противном случае они называются *некомпланарными* (рис.1.3,*б*). Так как направление нулевого вектора не определено, он считается компланарным с любыми двумя векторами. Понятие компланарных векторов распространяется на любое число векторов.

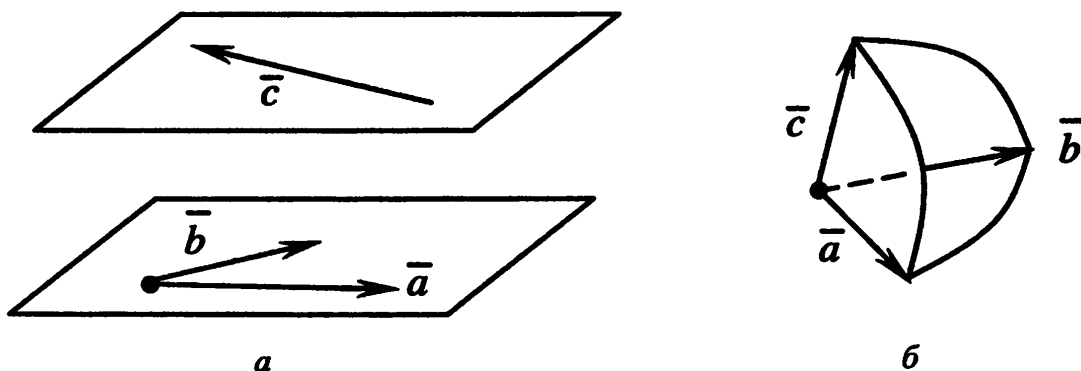


Рис.1.3

РАВНЫЕ ВЕКТОРЫ

Два вектора называются *равными*, если они:

- а) коллинеарны, одинаково направлены;
- б) имеют равные длины.

Все нулевые векторы считаются равными друг другу.

Это определение равенства векторов характеризует так называемые *свободные векторы*. Данный свободный вектор можно переносить, не меняя его направления и длины, в любую точку пространства (откладывать от любой точки), при этом будем получать векторы, равные данному. Таким образом, свободный вектор определяет целый класс равных ему векторов, отличающихся только точкой приложения. Далее будут рассматриваться, как правило, свободные векторы, при этом слово "свободные" будет опускаться.

З а м е ч а н и я 1.1.

1. Определение равенства векторов можно сформулировать, не используя понятия длины вектора [2,3]. Два вектора \overline{AB} и \overline{CD} , не лежащие на одной прямой, называются *равными*, если четырехугольник $ABDC$ является параллелограммом (рис.1.4,а). Векторы \overline{AB} и \overline{CD} , принадлежащие одной прямой, считаются *равными*, если существует равный им вектор \overline{EF} , не принадлежащий этой прямой (рис.1.4,б). Это определение эквивалентно следующему: два вектора \overline{AB} и \overline{CD} называются *равными*, если середины отрезков AD и BC совпадают (рис.1.4,в).

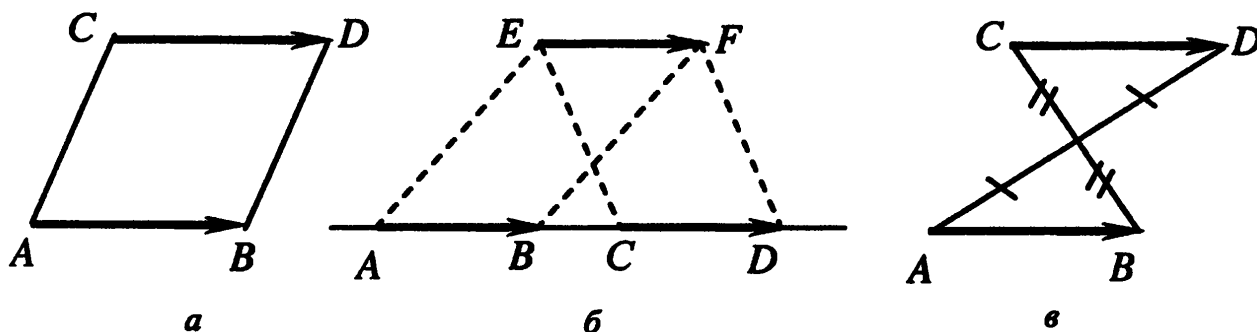


Рис.1.4

2. Отношение равенства векторов является отношением эквивалентности (см. разд.В.3). В самом деле, для отношения равенства $= (\bar{a} = \bar{b} - \text{"вектор } \bar{a} \text{ равен вектору } \bar{b} \text{"})$, определенного на множестве упорядоченных пар $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ векторов, выполняются следующие условия:

- а) каждый вектор равен самому себе (рефлексивность);
- б) если вектор \bar{a} равен вектору \bar{b} , то вектор \bar{b} равен вектору \bar{a} (симметричность);

в) если вектор \bar{a} равен вектору \bar{b} и вектор \bar{b} равен вектору \bar{c} , то вектор \bar{a} равен вектору \bar{c} (транзитивность).

Это означает, что множество векторов разбивается на непересекающиеся классы (см. разд.В.3), т.е. с каждым вектором связывается целый класс равных ему векторов, отличающихся только точками приложения. Поэтому говорят [37], что свободный вектор определяет класс равных ему векторов.

3. Для любой точки A и любого вектора \bar{a} существует единственная точка B , для которой $\overline{AB} = \bar{a}$.

В самом деле, если вектор \bar{a} ненулевой, то через точку A проходит единственная прямая, параллельная вектору \bar{a} (рис.1.5,а), либо его содержащая (рис.1.5,б). На этой прямой существуют две точки, удаленные от точки A на расстояние $|\bar{a}| > 0$. Из этих двух точек выберем такую точку B , для которой векторы \overline{AB} и \bar{a} оказываются одинаково направленными. По построению получаем $\overline{AB} = \bar{a}$. Если вектор \bar{a} нулевой, то искомая точка B совпадает с данной точкой A .

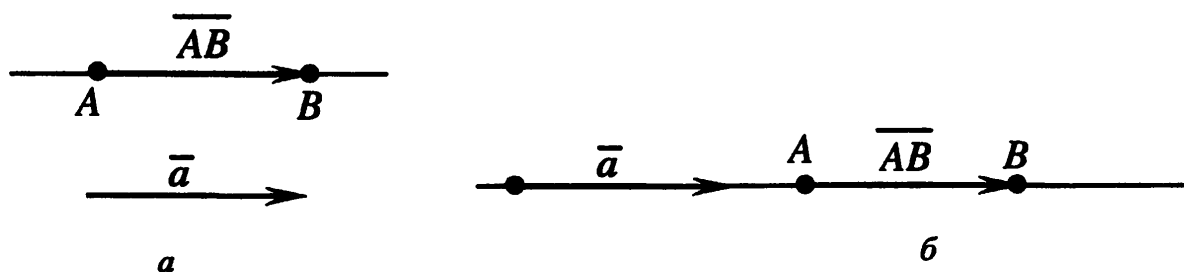


Рис.1.5.

Таким образом, любой вектор \bar{a} ставит в соответствие каждой точке A единственную точку B такую, что $\overline{AB} = \bar{a}$. Это соответствие называют **параллельным переносом**. Поэтому свободный вектор можно отождествить с параллельным переносом [2,3].

4. Построение, рассмотренное в п.3, называется **откладыванием вектора \bar{a} от точки A** или **приложением вектора \bar{a} к точке A** .

Используя это построение, можно дать эквивалентные определения коллинеарности и компланарности. Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если после приложения их к одной точке они лежат на одной прямой. Три ненулевых вектора называются **компланарными**, если после приложения их к одной точке они лежат в одной плоскости.

5. Кроме свободных векторов в приложениях векторной алгебры используются **скользящие векторы**, **связанные (приложенные) векторы** и др. [8], которые отличаются от свободных векторов определением равенства. Например, скользящие векторы называются равными, если они лежат на одной прямой, одинаково направлены и имеют равные длины. Другими словами, в отличие от свободного вектора, скользящий вектор можно переносить, не меняя направления и длины, только вдоль содержащей этот вектор прямой. Например, в механике сила, действующая на абсолютно твердое тело,

изображается скользящим вектором (см. разд.1.6.3), а угловая скорость – свободным вектором [6]. Сила, действующая на деформируемое тело, является примером так называемого приложенного вектора. Изменение точки приложения силы приведет к изменению ее воздействия на тело.

Пример 1.1. Дан треугольник ABC (рис.1.6), точки L, M, N – середины его сторон. Для векторов, изображенных на рис.1.6, указать коллинеарные, одинаково направленные, противоположно направленные, равные.

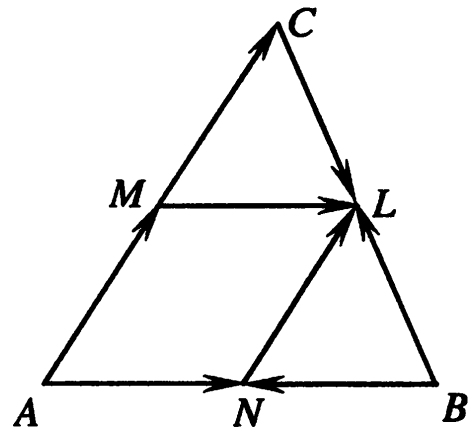


Рис.1.6

□ По теореме о средней линии треугольника заключаем, что $\overline{ML} \parallel \overline{AB}$, $\overline{LN} \parallel \overline{AC}$. Поэтому векторы \overline{AM} , \overline{MC} , \overline{NL} – коллинеарные (так как лежат на одной или параллельных прямых), одинаково направленные и имеют равные длины. Следовательно, это равные векторы: $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{NL}$. Аналогично, $\overline{AN} = \overline{ML}$, $\overline{AN} \uparrow \downarrow \overline{BN}$, $\overline{BN} \uparrow \downarrow \overline{ML}$, $\overline{CL} \uparrow \downarrow \overline{BL}$. ■

1.1.2. Линейные операции над векторами

СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пусть даны два вектора \overline{AB} и \overline{CD} . Приложим вектор \overline{CD} к точке B (концу вектора \overline{AB}) и получим вектор $\overline{BD_1} = \overline{CD}$ (рис.1.7,а; здесь и далее равные векторы отмечены одинаковыми засечками). Вектор $\overline{AD_1}$ называется **суммой векторов \overline{AB} и \overline{CD}** и обозначается $\overline{AD_1} = \overline{AB} + \overline{CD}$. Это нахождение суммы называется **правилом треугольника**.

Сумму двух неколлинеарных векторов \vec{a} и \vec{b} можно найти по **правилу параллелограмма**. Для этого откладываем от любой точки O векторы $\overline{OA} = \vec{a}$ и $\overline{OB} = \vec{b}$, а затем строим параллелограмм $OACB$ (рис.1.7,б). Диагональ OC параллелограмма определяет сумму: $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

Для нахождения суммы нескольких векторов можно построить ломаную из равных им векторов. Тогда **замыкающий** вектор, соединяющий начало первого вектора ломаной с концом последнего ее вектора, равен сумме всех векторов ломаной. На рис.1.7,в изображена сумма \vec{e} четырех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Таким способом (**правило ломаной**) можно сложить любое конечное число векторов. Заметим, что сумма векторов не зависит от точек приложения слагаемых и от порядка суммирования. Например, "выстраивая

цепочку" векторов для суммы в виде $\vec{b} + \vec{d} + \vec{c} + \vec{a}$, получим вектор, равный вектору $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$. Если ломаная получилась замкнутой, то сумма равна нулевому вектору.

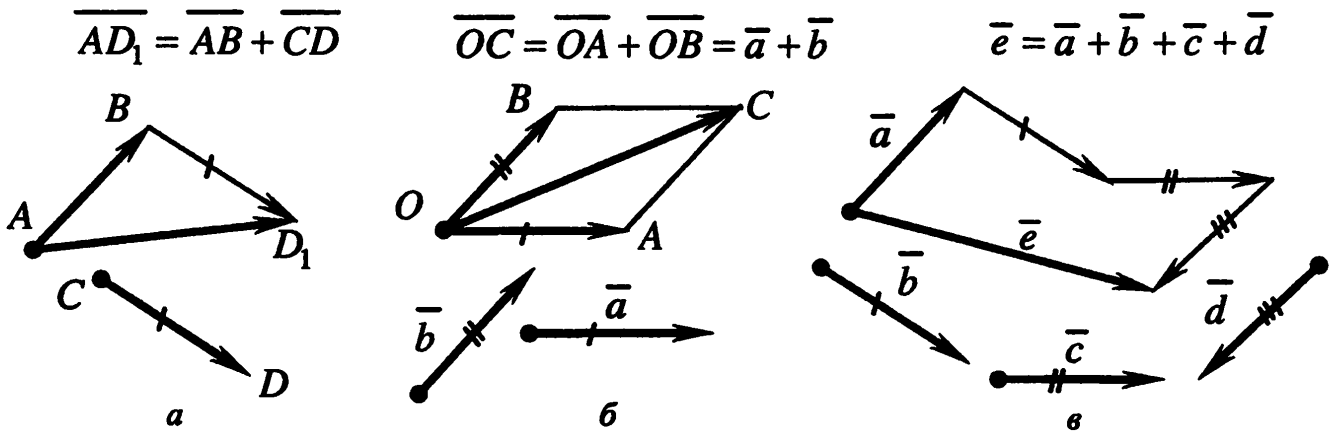


Рис.1.7

ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

Вектор $(-\vec{a})$ называется *противоположным* вектору \vec{a} , если их сумма равна нулевому вектору: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Противоположный вектор $(-\vec{a})$ имеет длину $|\vec{a}|$, коллинеарен и противоположно направлен вектору \vec{a} (рис.1.8,а,б). Нулевой вектор является противоположным самому себе.

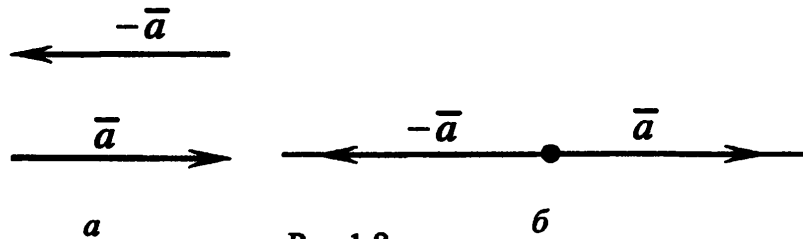


Рис.1.8

Разность векторов \vec{a} и \vec{b} называется сумма вектора \vec{a} с вектором $(-\vec{b})$, противоположным вектору \vec{b} :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Для нахождения разности векторов \vec{a} и \vec{b} приложим к произвольной точке O векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, а также вектор $\vec{OB}_1 = -\vec{OB} = -\vec{b}$, противоположный вектору \vec{b} (рис.1.9,а). Искомую разность находим по правилу параллелограмма: $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}_1 = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{a} - \vec{b}$.

Для нахождения разности проще использовать правило треугольника (рис.1.9,б). Для этого прикладываем к произвольной точке O векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$. Вектор \vec{BA} при этом равен искомой разности $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{a} - \vec{b}$.

Вычитание векторов – действие, обратное сложению – можно определить также следующим образом: *разностью* векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой вектор \vec{x} , который в сумме с вектором \vec{b} дает вектор \vec{a} (рис.1.9,в), т.е. разность $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ – это решение уравнения $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$.

$$\vec{OC} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{a} - \vec{b}$$

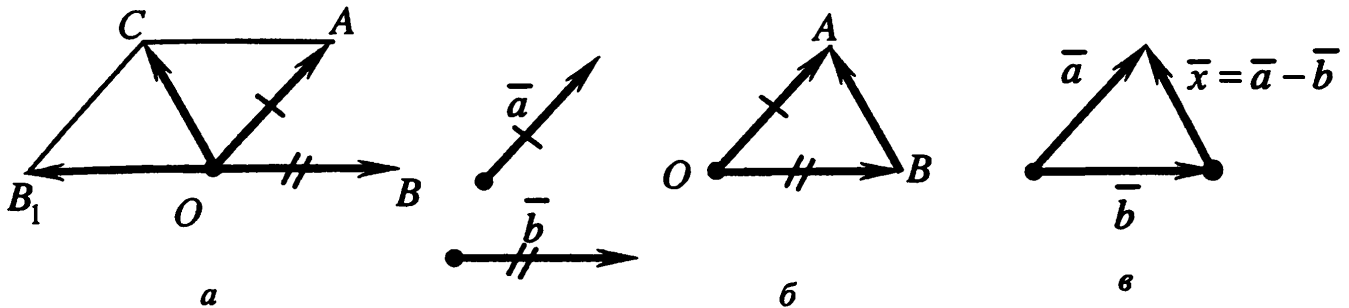


Рис.1.9

Пример 1.2. Для векторов на рис.1.6 найти следующие суммы и разности:

$$\vec{BN} + \vec{AM}; \quad \vec{AM} - \vec{BL}; \quad \vec{AN} + \vec{AM}; \quad \vec{BN} + \vec{AM} + \vec{CL}.$$

□ Учитывая равенство $\vec{AM} = \vec{NL}$, получаем по правилу треугольника $\vec{BN} + \vec{AM} = \vec{BN} + \vec{NL} = \vec{BL}$.

Поскольку $\vec{BL} = -\vec{CL}$ и $\vec{AM} = \vec{MC}$, то $\vec{AM} - \vec{BL} = \vec{MC} + \vec{CL} = \vec{ML}$.

По правилу параллелограмма $\vec{AN} + \vec{AM} = \vec{AL}$.

Так как $\vec{BN} + \vec{AM} = \vec{BL}$ и $\vec{CL} = -\vec{BL}$, находим

$$\vec{BN} + \vec{AM} + \vec{CL} = \underbrace{(\vec{BN} + \vec{AM})}_{\vec{BL}} + \underbrace{\vec{CL}}_{-\vec{BL}} = \vec{BL} - \vec{BL} = \vec{o}. \quad \blacksquare$$

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Произведением ненулевого вектора \vec{a} на действительное число λ ($\lambda \neq 0$) называется вектор $\lambda \cdot \vec{a}$, удовлетворяющий условиям:

- 1) длина вектора $\lambda \cdot \vec{a}$ равна $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, т.е. $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
- 2) векторы $\lambda \cdot \vec{a}$ и \vec{a} коллинеарные ($\lambda \cdot \vec{a} \parallel \vec{a}$);
- 3) векторы $\lambda \cdot \vec{a}$ и \vec{a} одинаково направлены, если $\lambda > 0$, и противоположно направлены, если $\lambda < 0$.

Произведение нулевого вектора на любое число λ считается (по определению) нулевым вектором: $\lambda \cdot \vec{o} = \vec{o}$; произведение любого вектора на число нуль также считается нулевым вектором: $0 \cdot \vec{a} = \vec{o}$.

Из определения произведения следует, что:

а) при умножении на единицу ($\lambda = 1$) вектор не изменяется: $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$;
 б) при умножении вектора на -1 получается противоположный вектор: $(-1) \cdot \bar{a} = -\bar{a}$;

в) деление вектора на отличное от нуля число μ сводится к его умножению на число $\lambda = \frac{1}{\mu}$, обратное μ : $\frac{\bar{a}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \bar{a}$;

г) при делении ненулевого вектора \bar{a} на его длину, т.е. при умножении \bar{a} на число $\frac{1}{|\bar{a}|}$, получаем единичный вектор, одинаково направленный с вектором \bar{a} . Действительно, длина вектора $\bar{e} = \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a}$ равна единице:

$$|\bar{e}| = \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot |\bar{a}| = 1.$$

Вектор \bar{e} коллинеарен и одинаково направлен с вектором \bar{a} , так как $\lambda = \frac{1}{|\bar{a}|} > 0$;

д) при умножении единичного вектора на число λ получаем коллинеарный ему вектор, длина которого равна $|\lambda|$.

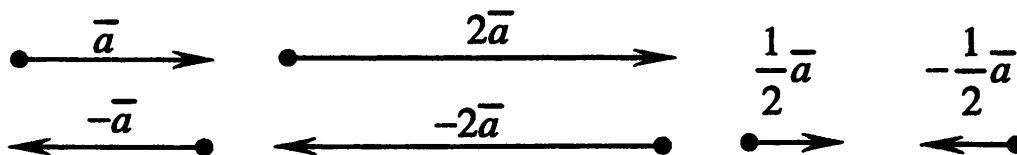


Рис.1.10

На рис.1.10 изображены векторы, получающиеся в результате умножения данного вектора \bar{a} на $\lambda = \pm 2$ и $\lambda = \pm \frac{1}{2}$, а также противоположный вектор $-\bar{a} = (-1) \cdot \bar{a}$.

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ НАД ВЕКТОРАМИ

Сложение векторов и умножение вектора на число называются *линейными операциями* над векторами.

Для любых векторов \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} и любых действительных чисел α , β справедливы равенства:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$;

3. $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$;
4. $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$;
5. $(\alpha\beta) \cdot \bar{a} = \alpha(\beta \cdot \bar{a})$;
6. $(\alpha + \beta) \cdot \bar{a} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{a}$;
7. $\alpha \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \alpha \cdot \bar{a} + \alpha \cdot \bar{b}$;
8. $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$.

Свойства 1, 2 выражают коммутативность и ассоциативность операции сложения векторов, свойство 5 – ассоциативность операции умножения на число, свойства 6, 7 – законы дистрибутивности, свойство 8 называется унитарностью [10].

Свойства линейных операций устанавливают такие же правила действия с векторами, как с алгебраическими выражениями.

ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ

Применяя линейные операции, можно составлять суммы векторов, умноженных на числа.

Вектор \bar{a} называется *линейной комбинацией* векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$, если он может быть представлен в виде

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k ,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – некоторые числа. В этом случае говорят, что *вектор \bar{a} разложен по векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$* , а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ называют *коэффициентами разложения*.

Линейная комбинация $0 \cdot \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2 + \dots + 0 \cdot \bar{a}_k$ с нулевыми коэффициентами называется *тривиальной*.

Отметим следующие свойства линейных комбинаций векторов.

1. *Если векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ – коллинеарны, то любая их линейная комбинация им коллинеарна.*

2. *Если векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ – компланарны, то любая их линейная комбинация им компланарна.*

Докажем, например, первое свойство. При умножении вектора на число получаем (по определению) вектор, коллинеарный данному. При сложении двух векторов, параллельных некоторой прямой, получаем (по определению) вектор, параллельный той же самой прямой. Поэтому линейная комбинация $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2$ двух коллинеарных векторов \bar{a}_1 и \bar{a}_2 коллинеарна им. По индукции свойство распространяется на любое конечное число коллинеарных векторов.

Аналогично доказывается второе свойство.

1.1.3. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Набор векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ называется *системой векторов*.

Система из k векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, что

$$\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \bar{a}_k = \bar{o}. \quad (1.1)$$

Система из k векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ называется *линейно независимой*, если равенство (1.1) возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, т.е. когда линейная комбинация в левой части (1.1) тривиальная.

Замечания 1.2.

1. Один вектор \bar{a}_1 тоже образует систему: при $\bar{a}_1 = \bar{o}$ – линейно зависимую, а при $\bar{a}_1 \neq \bar{o}$ – линейно независимую.

2. Любая часть системы векторов называется *подсистемой*.

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫХ И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ ВЕКТОРОВ

1. Если в систему векторов входит нулевой вектор, то она линейно зависима.

2. Если в системе векторов имеется два равных вектора, то она линейно зависима.

3. Если в системе векторов имеется два пропорциональных вектора ($\bar{a}_i = \lambda \bar{a}_j$), то она линейно зависима.

4. Система из $k > 1$ векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов есть линейная комбинация остальных.

5. Любые векторы, входящие в линейно независимую систему, образуют линейно независимую подсистему.

6. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

7. Если система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ линейно независима, а после присоединения к ней вектора \bar{a} оказывается линейно зависимой, то вектор \bar{a} можно разложить по векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$, и притом единственным образом, т.е. коэффициенты разложения находятся однозначно.

Докажем, например, последнее свойство. Так как система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k, \bar{a}$ линейно зависима, то существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha$, не все равные 0, что $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k + \alpha \bar{a} = \bar{o}$. В этом равенстве $\alpha \neq 0$. В самом деле, если $\alpha = 0$, то $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k = \bar{o}$. Значит, нетривиальная линейная комбинация векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ равна нулевому вектору.

ру, что противоречит линейной независимости системы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$. Сле-

довательно, $\alpha \neq 0$ и тогда $\bar{a} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\bar{a}_1 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha}\bar{a}_k$, т.е. вектор \bar{a} есть линей-

ная комбинация векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$. Осталось показать единственность

такого представления. Предположим противное. Пусть имеется два разло-

жения $\bar{a} = \alpha_1\bar{a}_1 + \dots + \alpha_k\bar{a}_k$ и $\bar{a} = \beta_1\bar{a}_1 + \dots + \beta_k\bar{a}_k$, причем не все коэффициен-

ты разложений соответственно равны между собой (например, $\alpha_1 \neq \beta_1$). То-

гда из равенства $\alpha_1\bar{a}_1 + \dots + \alpha_k\bar{a}_k = \beta_1\bar{a}_1 + \dots + \beta_k\bar{a}_k$ получаем

$$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot \bar{a}_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k) \cdot \bar{a}_k = \bar{o}.$$

Следовательно, линейная комбинация векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ равна нулево-

му вектору. Так как не все ее коэффициенты равны нулю (по крайней мере

$\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$), то эта комбинация нетривиальная, что противоречит условию

линейной независимости векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$. Полученное противоречие

подтверждает единственность разложения.

Пример 1.3. Параллелограмм $OACB$

построен на векторах \overline{OA} и \overline{OB} ; точки M и N – середины сторон AC и BC соот-

ветственно (рис.1.11). Требуется:

а) найти линейные комбинации

$$1 \cdot \overline{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}; \quad 1 \cdot \overline{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overline{OB}; \quad \frac{3}{2} \cdot \overline{OA} + 2 \cdot \overline{MN};$$

б) доказать, что векторы \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{MN} линейно зависимы.

□ а) Так как $\frac{1}{2} \cdot \overline{OA} = \overline{BN}$, то по правилу треугольника:

$$1 \cdot \overline{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} = \overline{OB} + \overline{BN} = \overline{ON}. \quad \text{Рассуждая аналогично, получаем:}$$

$$1 \cdot \overline{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OM}.$$

Построим вектор $\overline{OK} = \frac{3}{2} \cdot \overline{OA}$. Из равенства треугольников AKM и

CMN следует, что $\overline{KN} = 2 \cdot \overline{MN}$. Тогда $\frac{3}{2} \cdot \overline{OA} + 2 \cdot \overline{MN} = \overline{OK} + \overline{KN} = \overline{ON}$.

б) Учитывая, что $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{MN}$ и $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, получаем:

$$2 \cdot \overline{MN} = \overline{OB} - \overline{OA}. \quad \text{Переносим векторы в левую часть, приходим к равенству}$$

$$1 \cdot \overline{OA} + (-1) \cdot \overline{OB} + 2 \cdot \overline{MN} = \bar{o}, \quad \text{т.е. нетривиальная линейная комбинация век-$$

торов \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{MN} равна нулевому вектору. Следовательно, векторы \overline{OA} ,

\overline{OB} , \overline{MN} линейно зависимы, что и требовалось доказать. ■

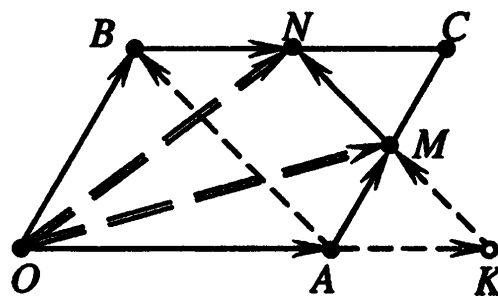


Рис.1.11

1.2. ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРОВ И ИХ СВОЙСТВА

1.2.1. Отношение коллинеарных векторов

В данном разделе рассматриваются векторы, *коллинеарные заданной прямой*, т.е. принадлежащие или параллельные ей.

Согласно определению (см. разд.1.1.2), при умножении данного вектора на число получаем вектор, коллинеарный данному. Можно определить и "обратную" операцию – "деление коллинеарных векторов".

Отношением коллинеарных векторов \vec{a} и $\vec{b} \neq \vec{o}$ называется действительное число, равное по модулю отношению длин этих векторов, положительное, если векторы \vec{a} и \vec{b} одинаково направленные, и отрицательное, если векторы \vec{a} и \vec{b} противоположно направленные:

$$\vec{a} : \vec{b} = \frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \begin{cases} |\vec{a}| : |\vec{b}|, & \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}, \\ -|\vec{a}| : |\vec{b}|, & \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}. \end{cases}$$

По определению равенство $\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \lambda$ эквивалентно равенству $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ для любых коллинеарных векторов \vec{a} и $\vec{b} \neq \vec{o}$.

Например, найдем отношения коллинеарных векторов, изображенных на рис.1.6:

$$\overline{AN} : \overline{ML} = 1; \quad \overline{AN} : \overline{BN} = -1; \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{NL}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}; \quad \overline{CL} : \overline{BL} = -1.$$

СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЙ КОЛЛИНЕАРНЫХ ВЕКТОРОВ

Для любых коллинеарных векторов справедливы следующие свойства.

1. *Отношение $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ любых коллинеарных векторов \vec{a} и $\vec{b} \neq \vec{o}$ определено однозначно.*

2. *Арифметические действия с отношениями коллинеарных векторов аналогичны действиям с числовыми дробями, а именно для любых коллинеарных векторов справедливы равенства:*

$$\text{а) } \frac{\vec{a} + \vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}} \quad (\vec{c} \neq \vec{o});$$

$$\text{б) } \frac{\lambda \cdot \vec{a}}{\vec{b}} = \lambda \cdot \frac{\vec{a}}{\vec{b}} \quad (\vec{b} \neq \vec{o});$$

$$\text{в) } \frac{\vec{a}}{\vec{c}} \cdot \frac{\vec{c}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a}}{\vec{b}} \quad (\vec{b} \neq \vec{o}, \vec{c} \neq \vec{o});$$

$$\text{г) } \frac{\frac{\vec{a}}{\vec{c}}}{\frac{\vec{c}}{\vec{b}}} = \frac{\vec{a}}{\vec{b}} \quad (\vec{b} \neq \vec{o}, \vec{c} \neq \vec{o}).$$

Докажем первое свойство. Предположим противное. Пусть $\bar{a}:\bar{b} = \lambda$ и $\bar{a}:\bar{b} = \mu$, причем $\lambda \neq \mu$. Тогда $\bar{a} = \lambda\bar{b}$ и $\bar{a} = \mu\bar{b}$, т.е. $\lambda\bar{b} = \mu\bar{b}$, и следовательно, $(\lambda - \mu) \cdot \bar{b} = \bar{o}$. Разделив обе части равенства на число $\lambda - \mu \neq 0$, получим $\bar{b} = \bar{o}$, что противоречит условию $\bar{b} \neq \bar{o}$.

Докажем, например, последнее равенство (свойство 2,г). Пусть $\frac{\bar{a}}{\bar{c}} = \lambda$ и $\frac{\bar{b}}{\bar{c}} = \mu$, тогда $\bar{a} = \lambda\bar{c}$ и $\bar{b} = \mu\bar{c}$. Надо доказать, что $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\lambda}{\mu}$. Найдем отношение

длин векторов $\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|} = \frac{|\lambda| \cdot |\bar{c}|}{|\mu| \cdot |\bar{c}|} = \left| \frac{\lambda}{\mu} \right|$. По определению получаем

$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \pm \frac{|\lambda|}{|\mu|}$, где знак плюс берется, если $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, а минус – при $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$. Если

все векторы одинаково направлены, то $\lambda > 0$, $\mu > 0$, поэтому $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\lambda}{\mu}$. Если

$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{c}$ и $\bar{b} \uparrow\downarrow \bar{c}$, то $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ и $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = +\frac{(-\lambda)}{(-\mu)} = \frac{\lambda}{\mu}$, так как $\lambda < 0$ и $\mu < 0$. Если

$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{c}$ и $\bar{b} \uparrow\downarrow \bar{c}$, то $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ и $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = -\frac{\lambda}{(-\mu)} = \frac{\lambda}{\mu}$. Если $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{c}$ и $\bar{b} \uparrow\uparrow \bar{c}$, то

$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ и $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = -\frac{(-\lambda)}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}$. Таким образом, во всех случаях получаем $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\lambda}{\mu}$,

что и требовалось доказать.

Пример 1.4. Диагонали трапеции $ABCD$ высекают на ее средней линии MN отрезок KL (рис.1.12). Найти отношения векторов $\overline{KL}:\overline{AB}$, $\overline{KL}:\overline{CD}$, $\overline{MN}:\overline{KL}$, если $\overline{CD}:\overline{AB} = \lambda$.

□ По свойствам средних линий треугольника и трапеции находим отношения коллинеарных векторов: $\overline{KN}:\overline{AB} = \frac{1}{2}$ (так как

$\overline{KN} \uparrow\uparrow \overline{AB}$); $\overline{LN}:\overline{CD} = -\frac{1}{2}$ (так как

$\overline{LN} \uparrow\downarrow \overline{CD}$); $\overline{MK}:\overline{CD} = -\frac{1}{2}$ (так как $\overline{MK} \uparrow\downarrow \overline{CD}$). Отсюда следуют соотно-

шения $\overline{MN} = \overline{MK} + \overline{KN} = -\frac{1}{2} \cdot \overline{CD} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$; $\overline{KL} = \overline{KN} - \overline{LN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overline{CD}$.

Теперь, используя свойства отношений коллинеарных векторов, получаем

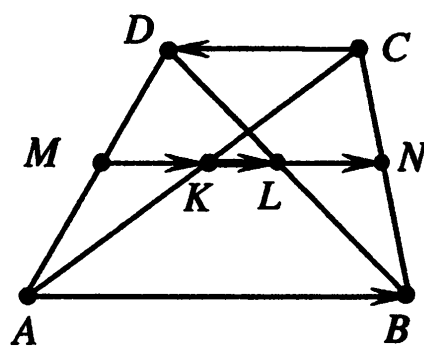


Рис.1.12

$$\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} \right) = \frac{1+\lambda}{2};$$

$$\frac{\overline{KL}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{1+\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1+\lambda}{2\lambda};$$

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{KL}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} - \frac{1}{2} \cdot \overline{CD}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overline{CD}} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{\overline{AB} + \overline{CD}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}}{\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}. \blacksquare$$

1.2.2. Проекции векторов на прямую и на плоскость

ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ПРЯМУЮ

Пусть на плоскости задана прямая l и пересекающая ее прямая m . **Проекцией вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ на прямую l параллельно прямой m (вдоль прямой m)** называется вектор $\vec{a}_l = \overline{A_1B_1}$, началом которого служит проекция A_1 начала A , а концом – проекция B_1 конца B вектора \overline{AB} (рис.1.13,а). Если прямая m перпендикулярна прямой l , то проекция называется **ортогональной**.

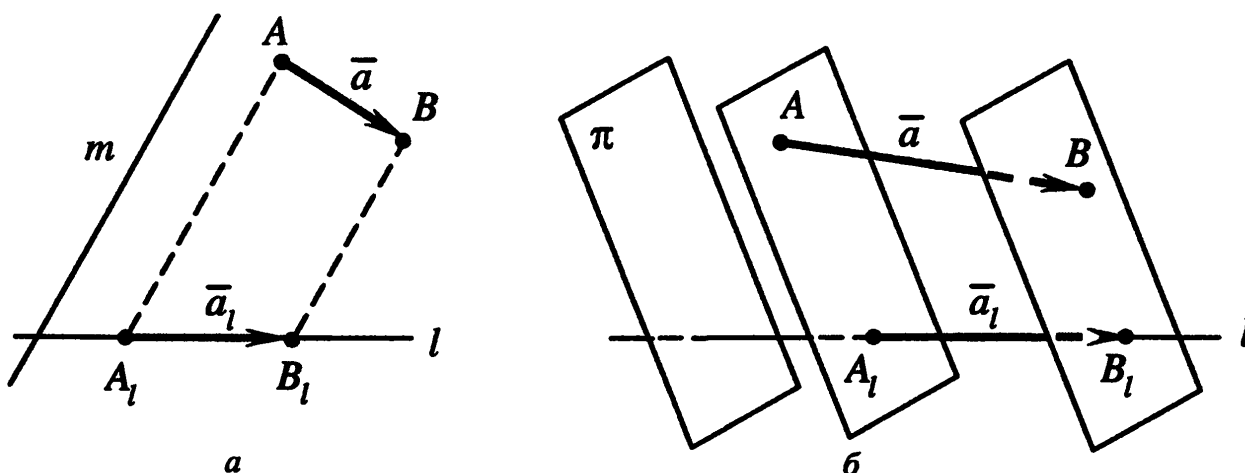


Рис.1.13

Пусть в пространстве дана прямая l и пересекающая ее плоскость π . **Проекцией вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ на прямую l параллельно плоскости π (вдоль плоскости π)** называется вектор $\vec{a}_l = \overline{A_1B_1}$, началом которого слу-

жит проекция A_l начала A , а концом – проекция B_l конца B вектора \overline{AB} (рис.1.13,б). Если плоскость π перпендикулярна прямой l , то проекция называется *ортогональной*.

ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ПЛОСКОСТЬ

Пусть в пространстве задана плоскость π и пересекающая ее прямая m . *Проекцией вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ на плоскость π параллельно прямой m (вдоль прямой m)* называется вектор $\overline{a}_\pi = \overline{A_\pi B_\pi}$, началом которого служит проекция A_π начала A , а концом – проекция B_π конца B вектора \overline{AB} (рис.1.14). Если прямая m перпендикулярна плоскости π , то проекция называется *ортогональной*.

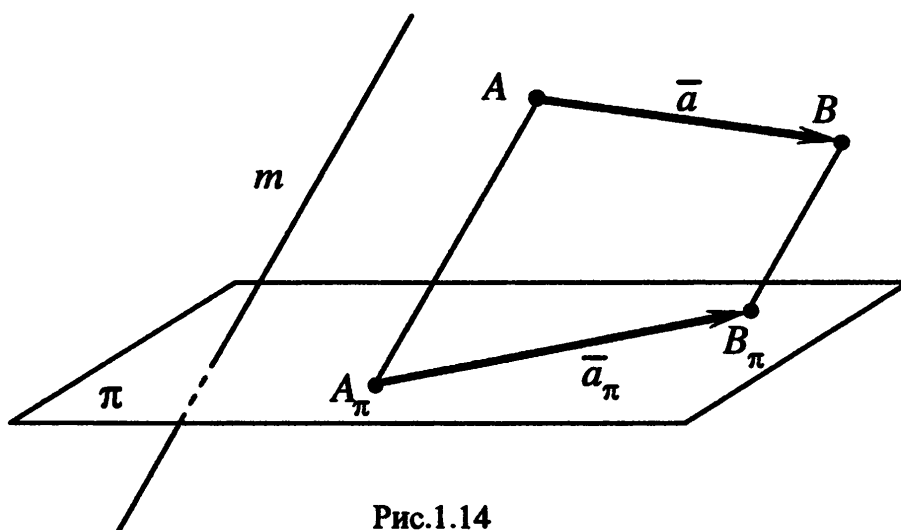


Рис.1.14

СВОЙСТВА ПРОЕКЦИЙ ВЕКТОРОВ

1. *Проекции вектора на параллельные прямые (или на параллельные плоскости) равны.*
2. *Проекции равных векторов равны.*
3. *Проекция суммы векторов равна сумме их проекций.*
4. *Проекция произведения вектора на число равна произведению этого числа на проекцию вектора, другими словами, отношение коллинеарных векторов равно отношению их проекций (если оно определено).*
5. *Проекция линейной комбинации векторов равна линейной комбинации проекций.*

Рассмотрим эти свойства для проекций векторов на прямую l параллельно прямой m . Для проекций векторов на плоскость или на прямую параллельно плоскости доказательства аналогичные.

Докажем первое свойство. Пусть \overline{a}_l – проекция вектора \overline{a} на прямую l вдоль прямой m , а \overline{a}'_l – проекция вектора \overline{a} на прямую l' вдоль той же

прямой m , причем прямые l и l' параллельные (рис.1.15). Четырехугольник, образованный пересечением пары параллельных прямых l и l' штриховыми линиями, параллельными прямой m , является параллелограммом. Следовательно, $\bar{a}_{l'} = \bar{a}_l$, т.е. проекции одного и того же вектора \bar{a} на параллельные прямые равны.

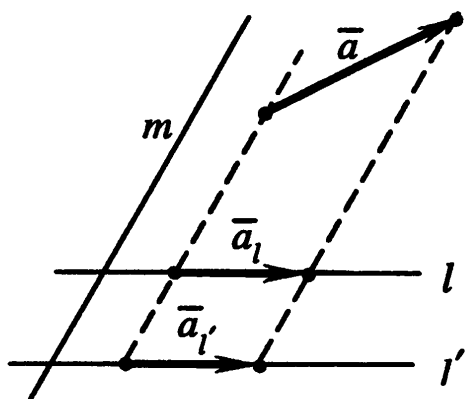


Рис.1.15

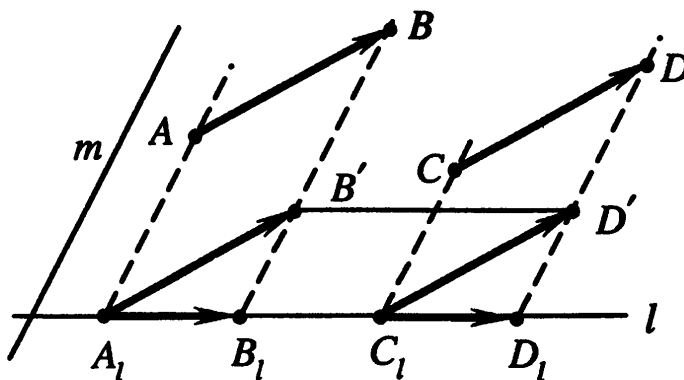


Рис.1.16

Докажем второе свойство. Пусть на плоскости даны равные векторы \overline{AB} и \overline{CD} , не параллельные прямой m (см. рис.1.16). Построим равные им векторы $\overline{A_1B'} = \overline{AB}$ и $\overline{C_1D'} = \overline{CD}$. Из равенства $\overline{A_1B'} = \overline{C_1D'}$ следует, что четырехугольник $A_1B'D'C_1$ – параллелограмм, а треугольники $A_1B'B_1$ и $C_1D'D_1$ равны по стороне и двум прилежащим углам ($A_1B' = C_1D'$, $\angle B'A_1B_1 = \angle D'C_1D_1$, $\angle A_1B'B_1 = \angle C_1D'D_1$ как углы с соответственно параллельными сторонами). Следовательно, $\overline{A_1B_1} = \overline{C_1D_1}$, т.е. равные векторы, не параллельные прямой m , имеют равные проекции. Если же векторы параллельны прямой m , то их проекции также равны, как нулевые векторы. Второе свойство доказано.

Доказательство третьего свойства очевидно для векторов \overline{AB} и \overline{BC} (рис.1.17): проекция $\overline{A_1C_1}$ вектора $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ равна сумме проекций $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{B_1C_1}$ векторов \overline{AB} и \overline{BC} , т.е. $\overline{A_1C_1} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1}$. Для произвольных векторов \bar{a} и \bar{b} (у которых конец вектора \bar{a} не совпадает с началом вектора \bar{b}) доказательство сводится к рассмотренному случаю для равных им векторов $\overline{AB} = \bar{a}$ и $\overline{BC} = \bar{b}$, так как равные векторы имеют равные проекции (по второму свойству).

Доказательство четвертого свойства следует из теоремы Фалеса (см. разд. В.2). На рис.1.18 изображены векторы \overline{AB} и $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{AB}$ ($\lambda > 0$), а

также их проекции $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_1C_1}$. По теореме Фалеса $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \lambda$, следовательно, $\overline{A_1C_1} = \lambda \cdot \overline{A_1B_1}$, что и требовалось доказать. В случае $\lambda < 0$ доказательство аналогичное.

Пятое свойство проекций следует из третьего и четвертого.

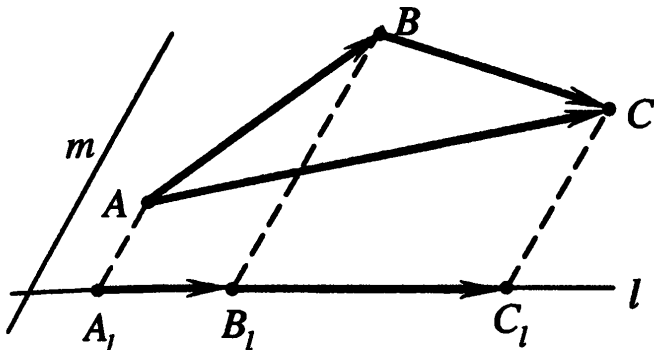


Рис.1.17

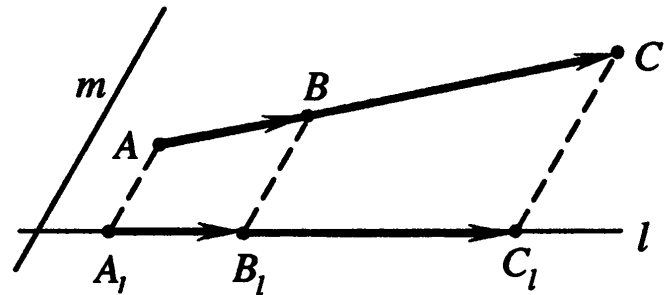


Рис.1.18

Теорема 1.1 (о проекциях вектора на пересекающиеся прямые).

1. Если на плоскости заданы две пересекающиеся прямые l_1 и l_2 , то любой вектор \bar{a} на плоскости можно однозначно представить в виде суммы своих проекций \bar{a}_1 и \bar{a}_2 на эти прямые (проекции на каждую прямую берутся вдоль другой прямой), т.е. $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$.

2. Если в пространстве заданы три прямые l_1 , l_2 и l_3 , пересекающиеся в одной точке и не лежащие в одной плоскости, то любой вектор \bar{a} в пространстве можно однозначно представить в виде суммы своих проекций \bar{a}_1 , \bar{a}_2 , \bar{a}_3 на эти прямые (проекции на каждую прямую берутся вдоль плоскости, содержащей две другие прямые), т.е. $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$.

В самом деле, пусть прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке O (рис.1.19,а). Приложим вектор \bar{a} к точке O , т.е. рассмотрим вектор $\overline{OA} = \bar{a}$. По правилу параллелограмма сложения векторов (см. разд.1.1.2) получаем равенство $\overline{OA} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$, которое равносильно доказываемому равенству $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$, так как равные векторы имеют равные проекции (см. свойство 2 проекций). Единственность представления следует из однозначности нахождения проекций вектора.

Если же вектор \bar{a} коллинеарен одной из прямых, например l_1 , то соответствующие проекции имеют вид: $\bar{a}_1 = \bar{a}$, $\bar{a}_2 = \bar{o}$ и равенство $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \bar{a} + \bar{o}$, очевидно, выполняется.

Аналогично доказывается второе утверждение.

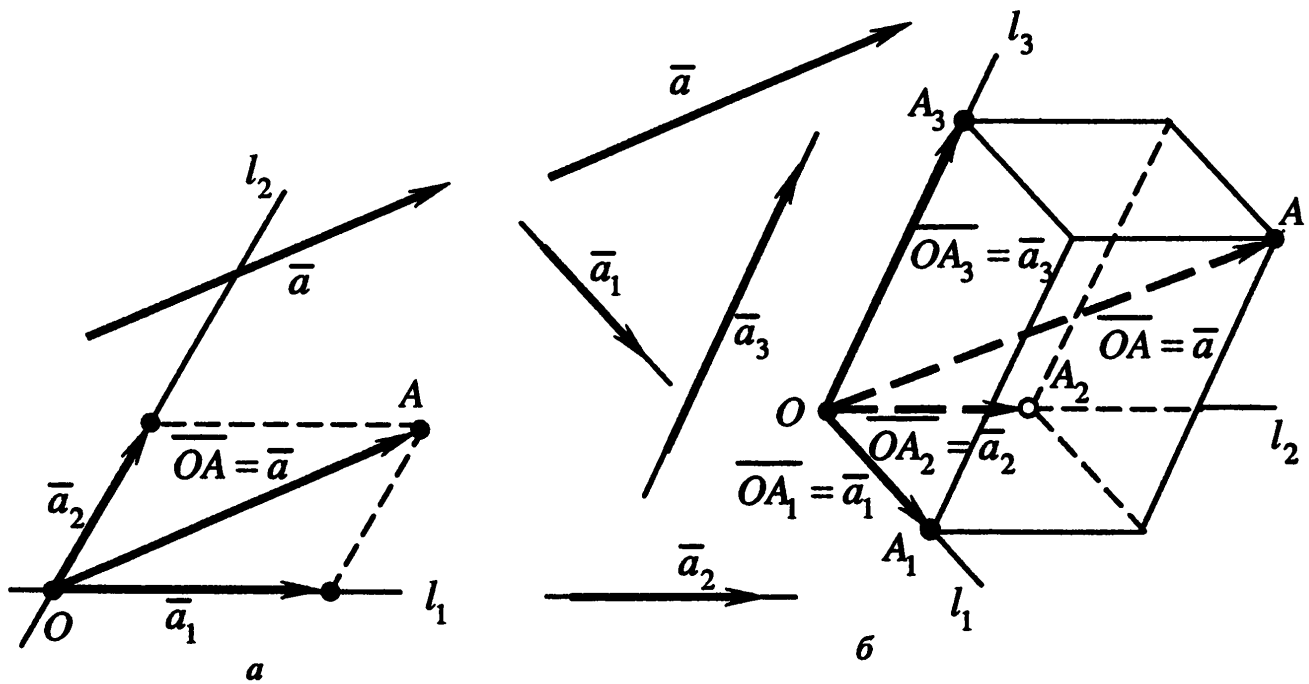


Рис.1.19

Замечание 1.3.

Справедливы утверждения, обратные к указанным в теореме 1.1.

Если вектор на плоскости равен сумме двух неколлинеарных векторов, т.е. $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$, то слагаемые \bar{a}_1 и \bar{a}_2 являются проекциями вектора \bar{a} на прямые, содержащие векторы \bar{a}_1 и \bar{a}_2 соответственно.

Если вектор в пространстве равен сумме трех некопланарных векторов, т.е. $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$, то слагаемые \bar{a}_1 , \bar{a}_2 и \bar{a}_3 являются проекциями вектора \bar{a} на прямые, содержащие векторы \bar{a}_1 , \bar{a}_2 , \bar{a}_3 соответственно.

В самом деле, отложим от произвольной точки O векторы $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OA}_1 = \bar{a}_1$, $\overline{OA}_2 = \bar{a}_2$, $\overline{OA}_3 = \bar{a}_3$ (рис.1.19,б). Тогда из равенства $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$ следует, что $\overline{OA} = \overline{OA}_1 + \overline{OA}_2 + \overline{OA}_3$, т.е. вектор \overline{OA} – является диагональю параллелепипеда, построенного на векторах \overline{OA}_1 , \overline{OA}_2 , \overline{OA}_3 (отсюда следует правило параллелепипеда сложения трех некопланарных векторов). Поэтому \overline{OA}_1 , \overline{OA}_2 , \overline{OA}_3 – проекции вектора \overline{OA} на прямые l_1 , l_2 , l_3 (проекция на каждую прямую берется вдоль плоскости, проходящей через две другие прямые). Так как равные векторы \bar{a} и \overline{OA} имеют равные проекции (свойство 2), заключаем, что проекции вектора \bar{a} на прямые l_1 , l_2 , l_3 равны \bar{a}_1 , \bar{a}_2 , \bar{a}_3 соответственно. Наконец, проекции на прямые l_1 , l_2 , l_3 равны проекциям на параллельные им прямые, содержащие векторы \bar{a}_1 , \bar{a}_2 , \bar{a}_3 соответственно.

Пример 1.5. Если прямая пересекает стороны AB, BC, CA треугольника ABC (или их продолжения) в точках C_1, A_1, B_1 соответственно, то

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = 1.$$

□ Найдем отношения проекций векторов на прямую AB вдоль прямой A_1C_1 (рис.1.20). Для этого через точку B проведем прямую BB_2 , параллельную прямой A_1C_1 . По свойству 4 проекций имеем:

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_2B_1}}; \quad \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{B_2B_1}}{\overline{CB_1}}.$$

Перемножая эти пропорции, получаем $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}}$, что равносильно

доказываемому равенству. Заметим, что доказанное утверждение является частью *теоремы Менелая* [4,25]. ■

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = 1$$

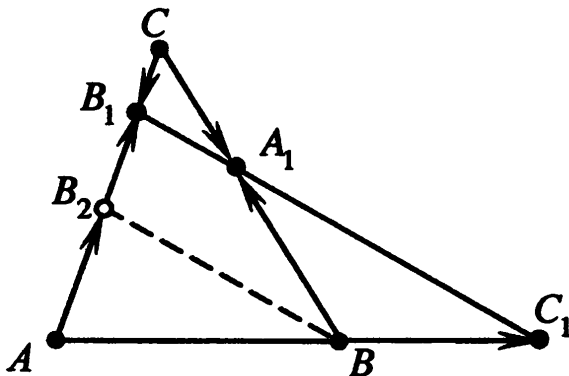


Рис.1.20

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = -1$$

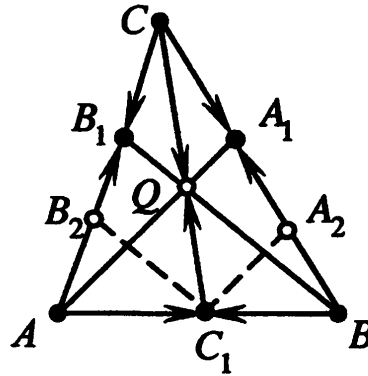


Рис.1.21

Пример 1.6. Если на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, то

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = -1.$$

□ Пусть прямые пересекаются в точке Q (рис.1.21). Через точку C_1 проведем прямые C_1B_2 и C_1A_2 параллельно BB_1 и AA_1 соответственно. По свойству проекций (свойство 4):

$$\frac{\overline{AB_1}}{B_2B_1} = -\frac{\overline{AB}}{BC_1}; \quad \frac{\overline{BA_1}}{A_2A_1} = \frac{\overline{AB}}{AC_1}; \quad \frac{\overline{CA_1}}{A_2A_1} = \frac{\overline{CQ}}{C_1Q} = \frac{\overline{CB_1}}{B_2B_1}.$$

Учитывая эти равенства и свойства отношений коллинеарных векторов (см. разд. 1.2.1), преобразуем левую и правую части последнего равенства:

$$\frac{\overline{CQ}}{C_1Q} = \frac{\overline{CA_1}}{A_2A_1} = \frac{\overline{CA_1}}{BA_1} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{A_2A_1} = \frac{\overline{CA_1}}{BA_1} \cdot \frac{\overline{AB}}{AC_1};$$

$$\frac{\overline{C_1Q}}{CQ} = \frac{\overline{B_2B_1}}{CB_1} = \frac{\overline{AB_1}}{CB_1} \cdot \frac{\overline{B_2B_1}}{AB_1} = \frac{\overline{AB_1}}{CB_1} \cdot \left(-\frac{\overline{BC_1}}{AB} \right).$$

Запишем произведение правых частей этих равенств, учитывая, что произведение левых частей равно единице:

$$\frac{\overline{CA_1}}{BA_1} \cdot \frac{\overline{AB}}{AC_1} \cdot \frac{\overline{AB_1}}{CB_1} \cdot \left(-\frac{\overline{BC_1}}{AB} \right) = -\frac{\overline{BC_1}}{AC_1} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{BA_1} \cdot \frac{\overline{AB_1}}{CB_1} \cdot \frac{\overline{AB}}{AB} = -\frac{\overline{BC_1}}{AC_1} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{BA_1} \cdot \frac{\overline{AB_1}}{CB_1} = 1.$$

Найдем обратное отношение $\frac{\overline{AC_1}}{BC_1} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{CA_1} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{AB_1} = -1$, что и требовалось доказать. Заметим, что доказанное утверждение является частью *теоремы Чевы* [4,25]. ■

1.2.3. Ортогональные проекции векторов. Угол между векторами

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

Углом между ненулевыми векторами называется угол между равными им векторами, имеющими общее начало, не превосходящий по величине π .

Пусть в пространстве даны два ненулевых вектора \vec{a} и \vec{b} (рис.1.22).

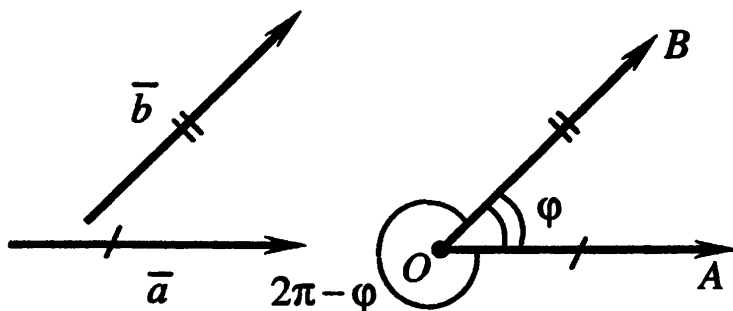


Рис.1.22

Построим равные им векторы \vec{OA} и \vec{OB} . На плоскости, содержащей лучи OA и OB , получим два угла AOB . Меньший из них, величина φ которого не превосходит π ($0 \leq \varphi \leq \pi$), принимается за угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

Поскольку направление нулевого вектора не определено, то не определен и угол между двумя векторами, если хотя бы один из них нулевой. Из определения следует, например, что угол между ненулевыми коллинеарными векторами либо равен нулю (если векторы одинаково направлены), либо равен π (если векторы противоположно направлены).

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРОВ

Движение по любой прямой может быть в двух направлениях. **Ориентированной прямой** называется прямая, на которой выбрано направление, т.е. одно из направлений считается положительным, а противоположное – отрицательным. Для измерения длин отрезков на прямой задается **масштабный отрезок**, который принимается за единицу.

Ориентированная прямая с заданным масштабным отрезком называется **осью**.

Любой ненулевой вектор \vec{e} , принадлежащий прямой, называется **направляющим** вектором для данной прямой, поскольку задает на ней ориентацию. Направление вектора \vec{e} принимается за положительное, а направление противоположного вектора $(-\vec{e})$ – за отрицательное. Кроме того, длину вектора $\vec{e} \neq \vec{0}$ можно принять за величину масштабного отрезка на этой прямой. Поэтому можно сказать, что **любой ненулевой вектор определяет ось** – прямую, содержащую этот вектор, задавая на ней направление и масштабный отрезок.

Ортогональной проекцией вектора \vec{a} на ось, задаваемую вектором $\vec{e} \neq \vec{0}$, называется его проекция на ось вдоль прямой (или вдоль плоскости), перпендикулярной данной оси. Ортогональную проекцию вектора \vec{a} на ось, задаваемую вектором $\vec{e} \neq \vec{0}$, будем обозначать $\overline{pr_{\vec{e}} \vec{a}}$.

Ортогональную проекцию вектора \vec{a} на прямую l (см. разд.1.2.2 и рис.1.13) будем обозначать $\overline{pr_l \vec{a}}$.

Ортогональную проекцию вектора \vec{a} на плоскость π (см. разд.1.2.2 и рис.1.14) будем обозначать $\overline{pr_{\pi} \vec{a}}$.

Разность между вектором \vec{a} и его ортогональной проекцией называют **ортогональной составляющей**:

$\vec{a}_{\perp \vec{e}} = \vec{a} - \overline{pr_{\vec{e}} \vec{a}}$ – ортогональная составляющая вектора \vec{a} относительно вектора \vec{e} ;

$\vec{a}_{\perp l} = \vec{a} - \overline{pr_l \vec{a}}$ – ортогональная составляющая вектора \vec{a} относительно прямой l ;

$\bar{a}_{\perp\pi} = \bar{a} - \overline{np_{\pi}} \bar{a}$ – ортогональная составляющая вектора \bar{a} относительно плоскости π .

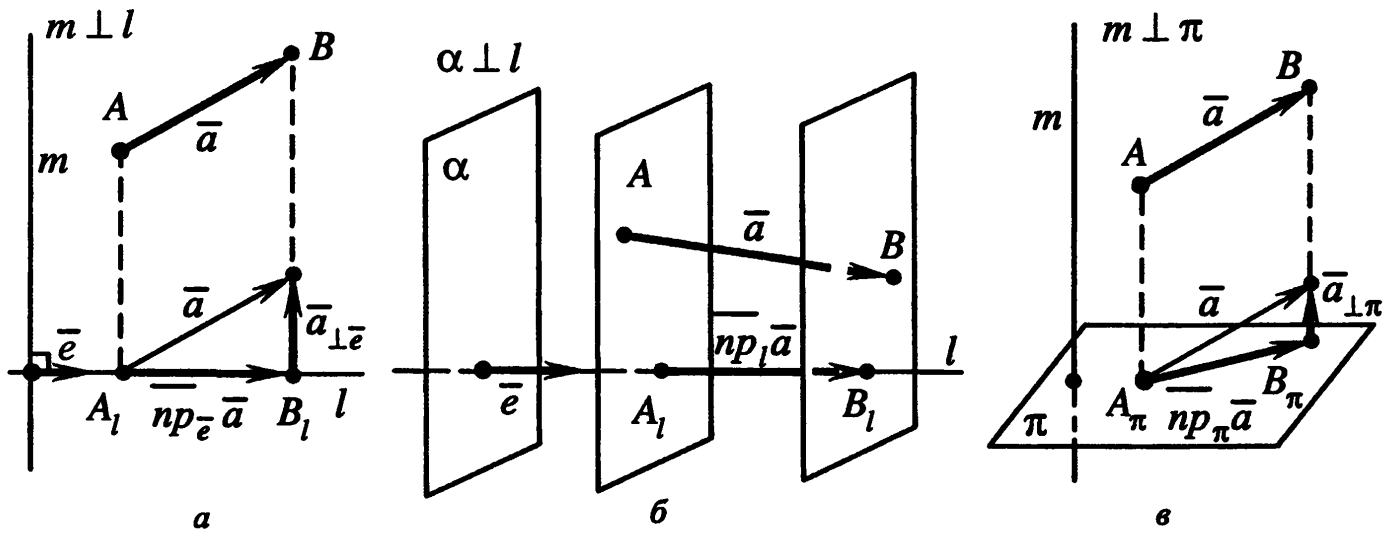


Рис.1.23

На рис.1.23 изображены ортогональные проекции вектора $\bar{a} = \overline{AB}$:
 – на прямую l (или на ось l , задаваемую вектором \bar{e}) вдоль прямой m : $\overline{A_1B_1} = \overline{np_l} \bar{a} = \overline{np_{\bar{e}}} \bar{a}$ (рис.1.23,а);
 – на прямую l (или на ось l , задаваемую вектором \bar{e}) вдоль плоскости α : $\overline{A_1B_1} = \overline{np_l} \bar{a} = \overline{np_{\bar{e}}} \bar{a}$ (рис.1.23,б);
 – на плоскость π вдоль прямой m : $\overline{A_{\pi}B_{\pi}} = \overline{np_{\pi}} \bar{a}$ (рис.1.23,в).

На рис.1.23 изображены ортогональные составляющие вектора \bar{a} :
 – относительно оси l (вектора \bar{e}) : $\bar{a}_{\perp l} = \bar{a}_{\perp \bar{e}}$ (рис.1.23,а);
 – относительно плоскости π : $\bar{a}_{\perp \pi}$ (рис.1.23,в).

Для ортогональных проекций справедлива следующая теорема (см. теорему 1.1 в разд.1.2.2).

Теорема 1.2 (об ортогональных проекциях вектора).

1. Если на плоскости заданы две взаимно перпендикулярные прямые l_1 и l_2 , то любой вектор \bar{a} на плоскости можно однозначно представить в виде суммы своих ортогональных проекций на эти прямые, т.е. $\bar{a} = \overline{np_{l_1}} \bar{a} + \overline{np_{l_2}} \bar{a}$ (рис.1.24,а).

2. Если в пространстве заданы три попарно перпендикулярные прямые l_1 , l_2 и l_3 , пересекающиеся в одной точке, то любой вектор \bar{a} в простран-

стве можно однозначно представить в виде суммы своих ортогональных проекций на эти прямые, т.е. $\bar{a} = \overline{np_{l_1} \bar{a}} + \overline{np_{l_2} \bar{a}} + \overline{np_{l_3} \bar{a}}$ (рис.1.24,б).

3. Квадрат длины вектора на плоскости или в пространстве равен сумме квадратов длин своих ортогональных проекций, т.е.

$$|\bar{a}|^2 = |\overline{np_{l_1} \bar{a}}|^2 + |\overline{np_{l_2} \bar{a}}|^2; \quad |\bar{a}|^2 = |\overline{np_{l_1} \bar{a}}|^2 + |\overline{np_{l_2} \bar{a}}|^2 + |\overline{np_{l_3} \bar{a}}|^2.$$

Первые два утверждения представляют собой частные случаи теоремы 1.1. Третье утверждение следует из теоремы Пифагора (для треугольника OA_1A (рис.1.24,а) или треугольников OA_1A_2 и OA_2A (рис.1.24,б)).

В формулировке теоремы 1.2 прямые можно заменить осями, задаваемыми попарно ортогональными векторами.

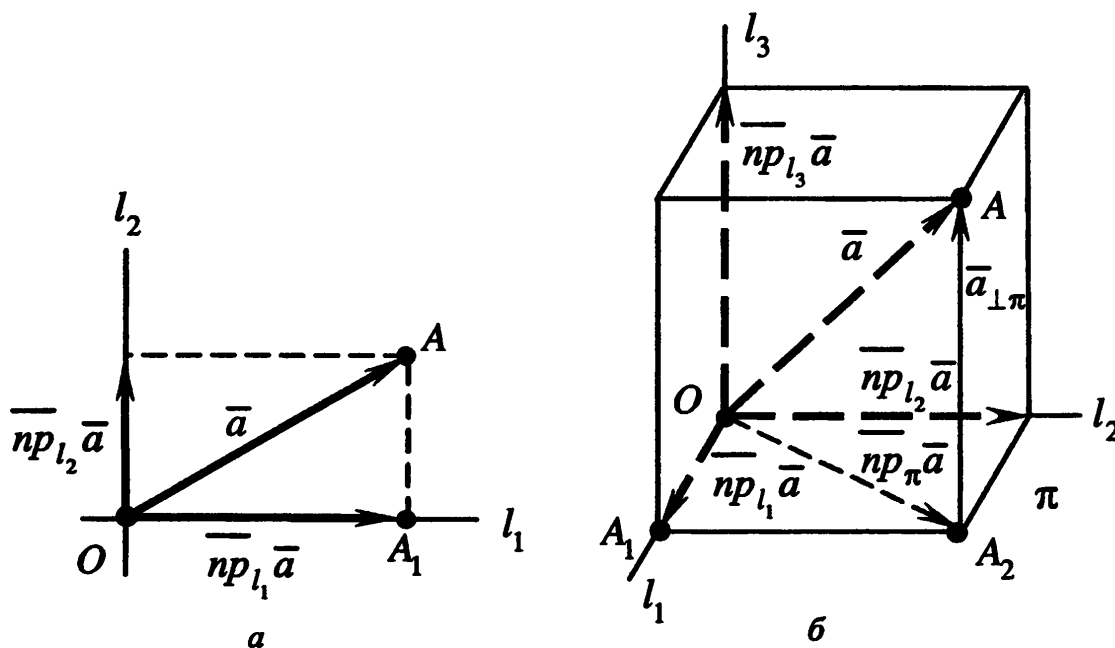


Рис.1.24

На рис.1.24,а проекции вектора \bar{a} на оси одновременно являются ортогональными составляющими: $\overline{np_{l_1} \bar{a}} = \bar{a}_{\perp l_2}$, $\overline{np_{l_2} \bar{a}} = \bar{a}_{\perp l_1}$. На рис.1.24,б вектор $\overline{OA_2}$ является проекцией вектора \bar{a} на плоскость π , содержащую прямые l_1 и l_2 : $\overline{OA_2} = \overline{np_{\pi} \bar{a}}$, а вектор $\overline{A_2A}$ является ортогональной составляющей вектора \bar{a} относительно плоскости π : $\overline{A_2A} = \bar{a}_{\perp \pi}$.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ДЛИНЫ ПРОЕКЦИИ

Пусть φ – угол между ненулевым вектором \bar{a} и осью, задаваемой вектором $\bar{e} \neq \bar{o}$, т.е. угол между ненулевыми векторами \bar{a} и \bar{e} .

Алгебраическим значением длины ортогональной проекции вектора \bar{a} на ось, задаваемую вектором $\bar{e} \neq \bar{o}$, называется длина его ортогональ-

ной проекции $\overline{np_{\bar{e}}\bar{a}}$, взятая с положительным знаком, если угол φ не превышает $\frac{\pi}{2}$, и с отрицательным знаком, если угол φ больше $\frac{\pi}{2}$, т.е.:

$$np_{\bar{e}}\bar{a} = \begin{cases} \left| \overline{np_{\bar{e}}\bar{a}} \right|, & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\left| \overline{np_{\bar{e}}\bar{a}} \right|, & \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

Например, для проекций, изображенных на рис.1.25, $np_{\bar{e}}\bar{a} > 0$, поскольку угол φ между векторами \bar{a} и \bar{e} острый, а $np_{\bar{e}}\bar{b} < 0$, так как угол ψ между векторами \bar{b} и \bar{e} тупой.

Некоторые свойства проекций векторов переносятся на алгебраические значения их длин, в частности:

1. $np_{\bar{e}}(\bar{a} + \bar{b}) = np_{\bar{e}}\bar{a} + np_{\bar{e}}\bar{b}$ – алгебраическое значение длины ортогональной проекции суммы векторов равно сумме алгебраических значений длин ортогональных проекций слагаемых;

2. $np_{\bar{e}}(\lambda \cdot \bar{a}) = \lambda \cdot np_{\bar{e}}\bar{a}$ – алгебраическое значение длины ортогональной проекции произведения вектора на число равно произведению этого числа на алгебраическое значение длины ортогональной проекции вектора.

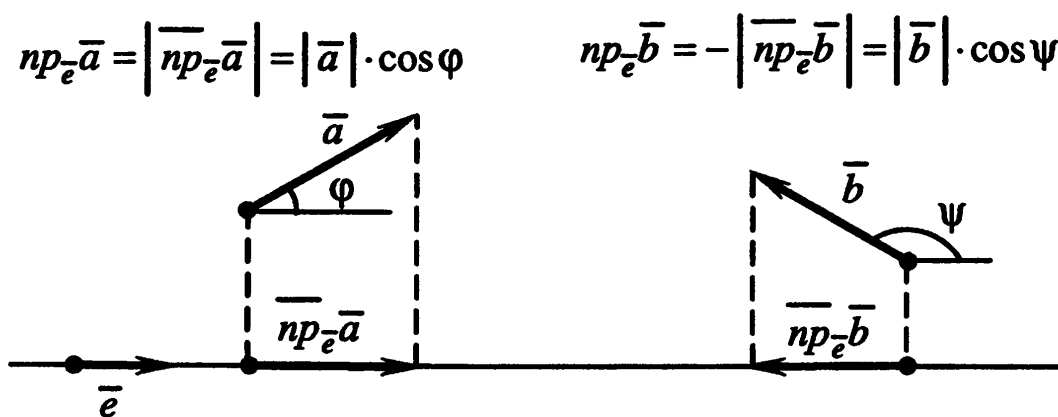


Рис.1.25

Замечания 1.4.

1. Из определения алгебраического значения длины ортогональной проекции следует (см. также рис.1.25), что

$$np_{\bar{e}}\bar{a} = \left| \bar{a} \right| \cdot \cos \varphi,$$

т.е. алгебраическое значение длины ортогональной проекции ненулевого вектора на ось равно произведению длины этого вектора на косинус угла между вектором и осью.

Ортогональную проекцию вектора \bar{a} на ось, задаваемую вектором $\bar{e} \neq \bar{o}$, можно представить в виде

$$\overline{np_{\vec{e}}\vec{a}} = np_{\vec{e}}\vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{e}|} \cdot \vec{e} = \frac{|\vec{a}| \cdot \cos \varphi}{|\vec{e}|} \cdot \vec{e}.$$

Если \vec{e} – единичный вектор, то $\overline{np_{\vec{e}}\vec{a}} = np_{\vec{e}}\vec{a} \cdot \vec{e} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}$.

2. Равенство $np_{\vec{e}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$ можно использовать как определение *косинуса угла между ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b}* (или, что то же самое, *косинуса угла между осями*, заданными ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} (рис.1.26)):

$$\cos \varphi = \frac{np_{\vec{b}}\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{np_{\vec{a}}\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

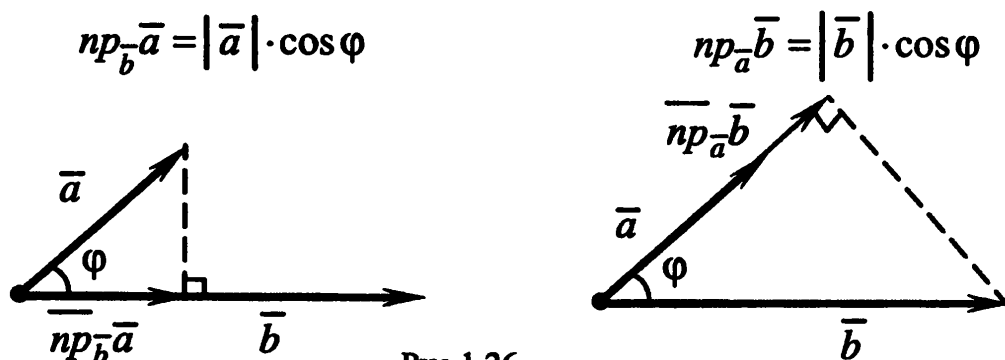


Рис.1 26

3. *Углом между ненулевым вектором \vec{a} и прямой l* называется угол φ между вектором \vec{a} и его ортогональной проекцией $\overline{np_l\vec{a}}$ на прямую l .

Величина угла φ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) может быть найдена по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|\overline{np_l\vec{a}}|}{|\vec{a}|}.$$

4. *Углом между ненулевым вектором \vec{a} и плоскостью α* называется угол ψ между вектором \vec{a} и его ортогональной проекцией $\overline{np_{\alpha}\vec{a}}$ на плоскость α . Величина угла ψ ($0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$) может быть найдена по формуле

$$\cos \psi = \frac{|\overline{np_{\alpha}\vec{a}}|}{|\vec{a}|}.$$

Пример 1.7. Основания AB и CD равнобокой трапеции $ABCD$ равны a и b соответственно; точка M – середина стороны BC (рис.1.27). Найти алгебраические значения длин ортогональных проекций векторов \overline{AM} и \overline{MD} на ось, задаваемую вектором \overline{AB} .

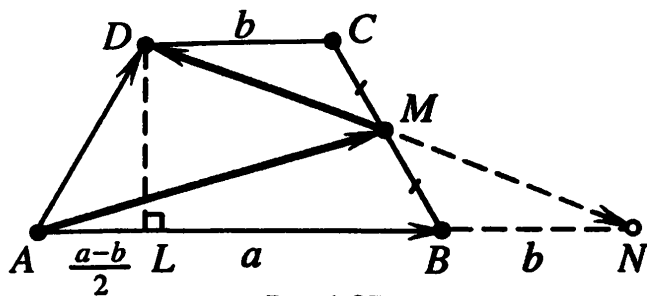


Рис.1.27

□ Пусть DL – высота трапеции, N – точка пересечения прямых AB и DM . По свойству равнобокой трапеции $AL = \frac{a-b}{2}$; из равенства треугольников CDM и BNM : $BN = CD = b$.

Обозначим через $x = \overline{np_{AB} AM}$,

$y = \overline{np_{AB} MD}$ искомые алгебраические значения длин ортогональных проекций.

Тогда из равенств $\overline{AM} + \overline{MD} = \overline{AD}$, $\overline{AM} - \overline{MD} = \overline{AM} + \overline{MN} = \overline{AN}$ и свойства 1 алгебраических значений длин проекций следует:

$$\overline{np_{AB} (AM + MD)} = \overline{np_{AB} AM} + \overline{np_{AB} MD} = \overline{np_{AB} AD}, \text{ т.е. } x + y = \frac{a-b}{2};$$

$$\overline{np_{AB} (AM - MD)} = \overline{np_{AB} AM} - \overline{np_{AB} MD} = \overline{np_{AB} AN}, \text{ т.е. } x - y = a + b.$$

Решая систему $\begin{cases} x + y = \frac{a-b}{2}, \\ x - y = a + b, \end{cases}$ находим $\begin{cases} x = \frac{3a+b}{4}, \\ y = -\frac{a+3b}{4}, \end{cases}$ т.е. $\overline{np_{AB} AM} = \frac{3a+b}{4}$,

$$\overline{np_{AB} MD} = -\frac{a+3b}{4}. \blacksquare$$

1.3. БАЗИС И КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ

1.3.1. Базис на прямой. Координата вектора на прямой

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор \bar{e} на этой прямой (рис.1.28). Этот вектор \bar{e} называется **базисным**.



Рис.1.28

Пусть на прямой l задан базис $\bar{e} \neq \bar{0}$. Для любого вектора \bar{a} , коллинеарного данной прямой, определено отношение $\bar{a} : \bar{e} = x$, причем число x определяется однозначно

(см. свойство 1 в разд.1.2.1). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3 (о разложении вектора по базису на прямой). *Любой вектор \bar{a} , коллинеарный прямой, может быть разложен по базису \bar{e} на этой прямой, т.е. представлен в виде*

$$\bar{a} = x \cdot \bar{e}, \tag{1.2}$$

где число x определяется однозначно.

Коэффициент x в разложении (1.2) называется *координатой вектора \bar{a} относительно базиса \bar{e}* . Поскольку векторы \bar{a} и $\bar{e} \neq \bar{o}$ коллинеарны, то координата x однозначно определяется их отношением (см. свойство 1 в разд.1.2.1): $x = \frac{\bar{a}}{\bar{e}}$. Например, если вектор \bar{a} представляется в виде

$\bar{a} = -2 \cdot \bar{e}$, то $x = -2$ – его координата относительно базиса \bar{e} .

Все ненулевые векторы, одинаково направленные с вектором \bar{e} , имеют положительные координаты, а противоположно направленные – отрицательные. Координата нулевого вектора равна нулю.

З а м е ч а н и я 1.5.

1. Базисный вектор на прямой задает направление на этой прямой, а его длина определяет масштабный отрезок. Таким образом, задав базис на прямой, получаем ось.

2. В формулировке теоремы 1.3 прямую можно рассматривать как ось, задаваемую вектором $\bar{e} \neq \bar{o}$.

КООРДИНАТЫ СУММЫ ВЕКТОРОВ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Нетрудно установить следующие свойства для векторов, коллинеарных данной оси.

1. *Равные векторы имеют равные координаты (в одном и том же базисе).*

2. *Координата суммы векторов равна сумме координат слагаемых.*

3. *Координата произведения вектора на число равна произведению этого числа на координату вектора.*

4. *Координата линейной комбинации векторов равна линейной комбинации координат векторов.*

5. *Отношение ненулевых векторов, коллинеарных прямой, равно отношению их координат, определенных относительно любого базиса на этой прямой.*

Первое свойство следует из первого свойства отношений коллинеарных векторов (см. разд.1.2.1).

Докажем второе свойство. Пусть векторы \bar{a} и \bar{b} – коллинеарны оси, задаваемой вектором $\bar{e} \neq \bar{o}$. Пусть $x_{\bar{a}} = \bar{a} : \bar{e}$, $x_{\bar{b}} = \bar{b} : \bar{e}$, $x_{\bar{a} + \bar{b}} = (\bar{a} + \bar{b}) : \bar{e}$ – координаты векторов \bar{a} , \bar{b} и $\bar{a} + \bar{b}$ соответственно. Тогда, складывая равенства $\bar{a} = x_{\bar{a}} \cdot \bar{e}$ и $\bar{b} = x_{\bar{b}} \cdot \bar{e}$, получаем

$$\bar{a} + \bar{b} = x_{\bar{a}} \cdot \bar{e} + x_{\bar{b}} \cdot \bar{e} = (x_{\bar{a}} + x_{\bar{b}}) \cdot \bar{e} \quad \Leftrightarrow \quad (\bar{a} + \bar{b}) : \bar{e} = x_{\bar{a}} + x_{\bar{b}},$$

что равносильно равенству $x_{\bar{a} + \bar{b}} = x_{\bar{a}} + x_{\bar{b}}$. Третье свойство доказывается аналогично.

Четвертое свойство, которое следует из второго и третьего, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k}{\bar{e}} = \alpha_1 \frac{\bar{a}_1}{\bar{e}} + \alpha_2 \frac{\bar{a}_2}{\bar{e}} + \dots + \alpha_k \frac{\bar{a}_k}{\bar{e}}.$$

Пятое свойство следует из свойства 2,г отношений коллинеарных векторов (см. разд.1.2.1). Действительно, пусть \bar{a} и \bar{b} – ненулевые векторы, коллинеарные оси, задаваемой вектором $\bar{e} \neq \bar{o}$. Тогда свойство 5 выражается равенством

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\frac{\bar{a}}{\bar{e}}}{\frac{\bar{b}}{\bar{e}}},$$

которое справедливо для любых коллинеарных ненулевых векторов (см. разд.1.2.1).

Пример 1.8. Даны векторы $\bar{a} = -2 \cdot \bar{e}$ и $\bar{b} = 4 \cdot \bar{e}$, параллельные оси, задаваемой вектором $\bar{e} \neq \bar{o}$. Требуется найти координаты векторов $\bar{a} + \bar{b}$; $-\bar{b}$; $\bar{a} - \bar{b}$; $3 \cdot \bar{a} + 2 \cdot \bar{b}$ относительно базиса \bar{e} , а также координату вектора $\bar{a} + \bar{b}$ относительно базиса \bar{b} .

□ Используя свойства коллинеарных векторов, находим разложения по базису \bar{e} :

$$\bar{a} + \bar{b} = -2 \cdot \bar{e} + 4 \cdot \bar{e} = (-2 + 4) \cdot \bar{e} = 2 \cdot \bar{e};$$

$$-\bar{b} = (-1) \cdot \bar{b} = (-1) \cdot 4 \cdot \bar{e} = -4 \cdot \bar{e};$$

$$\bar{a} - \bar{b} = -2 \cdot \bar{e} - 4 \cdot \bar{e} = (-2 - 4) \cdot \bar{e} = -6 \cdot \bar{e};$$

$$3 \cdot \bar{a} + 2 \cdot \bar{b} = 3 \cdot (-2 \cdot \bar{e}) + 2 \cdot (4 \cdot \bar{e}) = [3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4] \cdot \bar{e} = 2 \cdot \bar{e}.$$

По свойству 5 находим $\frac{\bar{a} + \bar{b}}{\bar{b}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Заметим, что относительно базиса \bar{e} вектор $\bar{a} + \bar{b}$ имеет координату 2, а относительно базиса \bar{b} – координату, равную $\frac{1}{2}$, т.е. вектор имеет неравные координаты относительно разных базисов. ■

1.3.2. Базис на плоскости. Координаты вектора на плоскости

Базисом на плоскости называются два неколлинеарных вектора \bar{e}_1, \bar{e}_2 на этой плоскости, взятые в определённом порядке (рис.1.29). Эти векторы \bar{e}_1, \bar{e}_2 называются **базисными**.

Пусть на плоскости задан базис \bar{e}_1, \bar{e}_2 . Построим прямые l_1 и l_2 , содержащие базисные векторы \bar{e}_1 и \bar{e}_2 соответственно. Эти прямые пересекаются, так как базисные векторы неколлинеарные. Согласно п.1 теоре-

мы 1.1, вектор \bar{a} можно представить в виде $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$, где \bar{a}_1 – проекция вектора \bar{a} на l_1 вдоль l_2 ; \bar{a}_2 – проекция вектора \bar{a} на l_2 вдоль l_1 , причем проекции определяются однозначно.

Вектор \bar{a}_1 , принадлежащий прямой l_1 , можно разложить по базису \bar{e}_1 на этой прямой (см. разд.1.3.1), т.е. представить в виде $\bar{a}_1 = x \cdot \bar{e}_1$, причем число x определяется однозначно. Вектор \bar{a}_2 , принадлежащий прямой l_2 , можно разложить по базису \bar{e}_2 на этой прямой (см. разд.1.3.1), т.е. представить в виде $\bar{a}_2 = x_2 \cdot \bar{e}_2$, причем число x_2 определяется однозначно. Подставляя эти разложения в равенство $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$, получаем

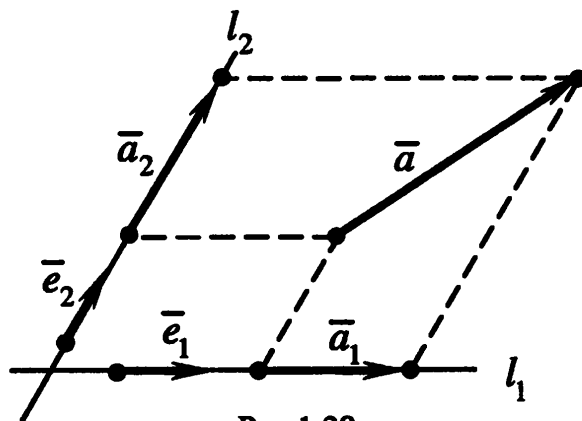


Рис.1.29

$$\bar{a} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2. \quad (1.3)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4 (о разложении вектора по базису на плоскости). *Любой вектор \bar{a} , принадлежащий плоскости, может быть разложен по базису \bar{e}_1, \bar{e}_2 на этой плоскости, т.е. представлен в виде (1.3), где числа x_1 и x_2 определяются однозначно.*

Коэффициенты x_1 и x_2 в разложении (1.3) называются **координатами вектора \bar{a} относительно базиса \bar{e}_1, \bar{e}_2** (число x_1 называют **абсциссой**, а x_2 – **ординатой** вектора \bar{a}). Например, числа 2 и -3 являются координатами вектора $\bar{a} = 2 \cdot \bar{e}_1 - 3 \cdot \bar{e}_2$ ($x_1 = 2$ – абсцисса, $x_2 = -3$ – ордината вектора $\bar{a} = 2 \cdot \bar{e}_1 - 3 \cdot \bar{e}_2$).

Базисные векторы \bar{e}_1, \bar{e}_2 , отложенные от одной (произвольной) точки плоскости, называются **репером на плоскости** [2,3,14].

ОРИЕНТАЦИИ БАЗИСОВ НА ПЛОСКОСТИ

Базис на плоскости называется **правым** (или, что то же самое, упорядоченная пара неколлинеарных векторов называется **правой парой**), если кратчайший поворот от первого вектора ко второму происходит против часовой стрелки (это направление поворота считается положительным). Базисные векторы \bar{e}_1, \bar{e}_2 (рис.1.30,а) правого базиса расположены соответственно как большой и указательный пальцы правой руки, если смотреть на ее ладонь.

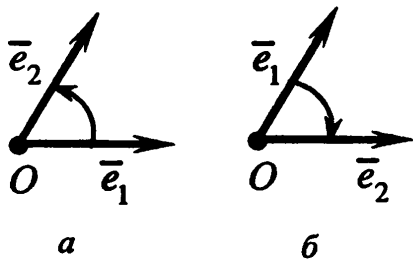


Рис 1.30

Левым базисом на плоскости (*левой парой*) называется такой базис, у которого кратчайший поворот от вектора \bar{e}_1 к вектору \bar{e}_2 происходит по часовой стрелке (такое направление вращения считается отрицательным). Базисные векторы \bar{e}_1, \bar{e}_2 (рис.1.30,б) левого базиса расположены соответственно как большой и указательный пальцы левой руки, если смотреть на ее ладонь.

Отметим следующее свойство: *если неколлинеарные векторы \bar{a}, \bar{b} образуют правую пару, то пары, получающиеся перестановкой векторов (пара \bar{b}, \bar{a}) или заменой одного вектора противоположным (например, $\bar{a}, (-\bar{b})$), образуют левую пару.*

Пример 1.9. В параллелограмме $OACB$: точка N делит сторону AC в отношении $AN:NC=2:1$; точка D – середина стороны BC ; M – точка пересечения медиан треугольника OAB (рис.1.31). Разложить векторы \overline{ND} и \overline{MN} по векторам $\bar{a} = \overline{OA}$ и $\bar{b} = \overline{OB}$.

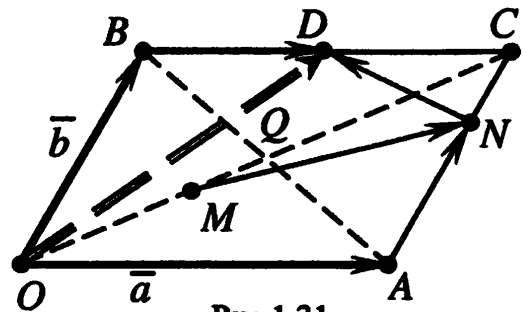


Рис.1.31

□ Чтобы разложить вектор \overline{ND} , применяем правило ломаной: вектор \overline{OD} замыкает ломаную OBD и ломаную $OAND$. Поэтому $\overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD}$ и $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AN} + \overline{ND}$, т.е. $\overline{OB} + \overline{BD} = \overline{OA} + \overline{AN} + \overline{ND}$. Выразим все векторы этого равенства, за исключением искомого вектора \overline{ND} , через векторы \bar{a} и \bar{b} . Учитывая, что $\overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot \bar{a}$; $\overline{AN} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AC} = \frac{2}{3} \cdot \bar{b}$, получаем $\bar{b} + \frac{1}{2} \cdot \bar{a} = \bar{a} + \frac{2}{3} \cdot \bar{b} + \overline{ND}$. Отсюда $\overline{ND} = \bar{b} + \frac{1}{2} \cdot \bar{a} - \bar{a} - \frac{2}{3} \cdot \bar{b}$. Приводя подобные члены, окончательно получаем $\overline{ND} = -\frac{1}{2} \cdot \bar{a} + \frac{1}{3} \cdot \bar{b}$.

Так как точка Q пересечения диагоналей параллелограмма делит каждую диагональ пополам, а точка M делит медиану OQ треугольника OAB в отношении $OM:MQ=2:1$, заключаем, что $OM:OC=1:3$, т.е. $\overline{OM} = \frac{1}{3} \cdot \overline{OC} = \frac{1}{3} \cdot (\overline{OA} + \overline{OB}) = \frac{1}{3} \cdot (\bar{a} + \bar{b})$. По правилу сложения векторов имеем $\overline{OM} + \overline{MN} = \overline{OA} + \overline{AN}$. Следовательно, $\frac{1}{3} \cdot (\bar{a} + \bar{b}) + \overline{MN} = \bar{a} + \frac{2}{3} \cdot \bar{b}$. Отсюда находим искомое разложение

$$\overline{MN} = \bar{a} + \frac{2}{3} \cdot \bar{b} - \frac{1}{3} \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \frac{2}{3} \cdot \bar{a} + \frac{1}{3} \cdot \bar{b}. \blacksquare$$

1.3.3. Базис в пространстве. Координаты вектора в пространстве

Базисом в пространстве называются три некопланарных вектора $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, взятые в определённом порядке (рис.1.32). Эти векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ называются **базисными**.

Пусть в пространстве задан базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Построим прямые l_1, l_2, l_3 , содержащие базисные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ соответственно. Без ограничения общности можно считать, что эти прямые пересекаются в одной точке (в противном случае можно было взять любые пересекающиеся в одной точке прямые l'_1, l'_2, l'_3 , параллельные прямым l_1, l_2, l_3 соответственно, поскольку проекции вектора на параллельные прямые равны (см. свойство 1 проекций в разд.1.2.2)). Тогда любой вектор \bar{a} можно однозначно представить в виде суммы своих проекций:

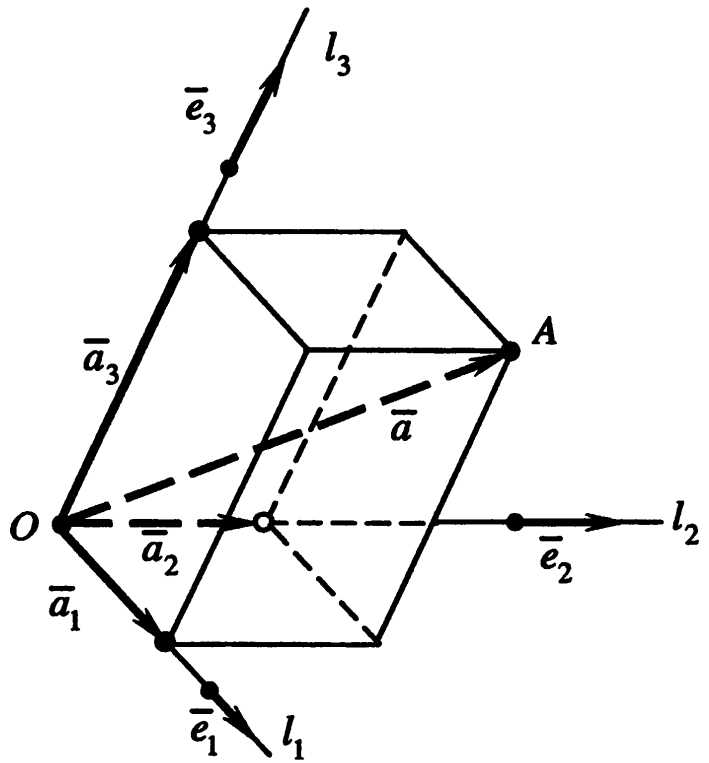


Рис.1.32

где $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$, где $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ – векторы, принадлежащие прямым l_1, l_2, l_3 соответственно (см. п.2 теоремы 1.1). Раскладывая проекции $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ по базисам на соответствующих прямых (см. разд.1.3.1), находим: $\bar{a}_1 = x_1 \cdot \bar{e}_1$, $\bar{a}_2 = x_2 \cdot \bar{e}_2$, $\bar{a}_3 = x_3 \cdot \bar{e}_3$. Подставляя эти разложения в равенство $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$, получаем

$$\bar{a} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + x_3 \cdot \bar{e}_3. \quad (1.4)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5 (о разложении вектора по базису в пространстве). Любой вектор \bar{a} может быть разложен по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в пространстве, т.е. представлен в виде (1.4), где числа x_1, x_2, x_3 определяются однозначно.

Коэффициенты x_1, x_2, x_3 в разложении (1.4) называются **координатами вектора \bar{a} относительно базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$** (число x_1 называют **абсциссой**, x_2 – **ординатой**, а x_3 – **апplikатой** вектора \bar{a}). Например, числа

3, 2, -1 являются координатами вектора $\bar{a} = 3 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2 - \bar{e}_3$ ($x_1 = 3$ – абсцисса, $x_2 = 2$ – ордината, $x_3 = -1$ – аппликата вектора $\bar{a} = 3 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2 - \bar{e}_3$).

Базисные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, отложенные от одной (произвольной) точки, называются *репером* [2,3,14].

З а м е ч а н и я 1.6.

1. Базис на прямой, на плоскости, в пространстве определяется неоднозначно. Например, если $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – базис в пространстве, то система векторов $\lambda \bar{e}_1, \lambda \bar{e}_2, \lambda \bar{e}_3$ при любом $\lambda \neq 0$ также является базисом.

2. Следующие свойства выражают геометрический смысл линейной зависимости и линейной независимости векторов:

а) *два (и более) коллинеарных вектора линейно зависимы, и наоборот, два линейно зависимых вектора коллинеарны; два линейно независимых вектора не коллинеарны;*

б) *три (и более) компланарных вектора линейно зависимы, и наоборот, три линейно зависимых вектора компланарны; три линейно независимых вектора не компланарны;*

в) *четыре (и более) вектора линейно зависимы.*

Докажем, например, последнее свойство. Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ – произвольные векторы. Если первые три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ линейно зависимы, то и вся система $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ – линейно зависима (см. свойство б в разд.1.1.3). Если же векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ линейно независимы, то согласно п.2, "б" они не компланарны и, следовательно, образуют базис в пространстве. Тогда вектор \bar{d} можно разложить по этому базису, т.е. представить в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. В этом случае система векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ также линейно зависима (см. свойство 4 в разд.1.1.3).

3. Понятие базиса непосредственно связано с понятием линейной независимости. Базис представляет собой упорядоченную совокупность линейно независимых векторов:

на прямой – это один линейно независимый вектор (см. п.1 замечаний 1.2);

на плоскости – это два линейно независимых вектора на этой плоскости, взятые в определённом порядке (см. п.2, "а");

в пространстве – это три линейно независимых вектора, взятые в определённом порядке (см. п.2, "б").

4. Теоремы 1.3–1.5 позволяют говорить, что базис – это *полная* система векторов (на прямой, на плоскости, в пространстве) в том смысле, что любой вектор (на прямой, на плоскости, в пространстве) линейно выражается через базисные векторы.

5. Теоремы 1.3–1.5 позволяют говорить, что базис – это *максимальная линейно независимая система векторов* (на прямой, на плоскости, в пространстве), так как базис – это линейно независимая система векторов, и ее нельзя дополнить каким-либо вектором без потери линейной независимости.

6. Базис – это *полная линейно независимая система векторов* (на прямой, на плоскости, в пространстве).

ОРИЕНТАЦИИ БАЗИСОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

Базис в пространстве называется *правым* (или, что то же самое, упорядоченная тройка некопланарных векторов называется *правой* тройкой), если, наблюдая из конца третьего вектора, кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден происходящим против часовой стрелки (рис.1.33,а). Если описанный поворот виден происходящим по часовой стрелке, то базис называется *левым* (упорядоченная тройка некопланарных векторов называется *левой* тройкой) (рис.1.33,б).

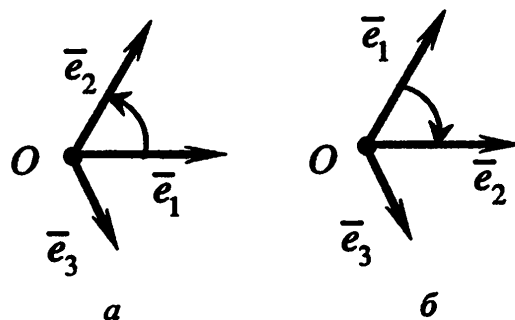


Рис.1.33

Отметим следующие свойства: *если тройка некопланарных векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая, то тройки, получающиеся "циклической" перестановкой трех векторов ($\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}$; $\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}$) – также правые, а тройки, получающиеся перестановкой двух векторов ($\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}$; $\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}$; $\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}$) или заменой одного вектора противоположным (например, $\bar{a}, (-\bar{b}), \bar{c}$) – левые.*

1.3.4. Линейные операции в координатной форме

Равенство векторов и линейные операции (сложение векторов и умножение вектора на число) удобно представлять в координатной форме. При этом справедливы следующие свойства.

1. *Равные векторы имеют равные координаты (в одном и том же базисе).*

2. *Каждая координата суммы векторов равна сумме соответствующих координат слагаемых.*

3. *Каждая координата произведения вектора на число равна произведению этого числа на соответствующую координату вектора.*

4. *Каждая координата линейной комбинации векторов равна линейной комбинации соответствующих координат векторов.*

Докажем, например, последнее свойство. Проекция линейной комбинации векторов на прямую, содержащую базисный вектор \bar{e}_1 , равна линейной комбинации проекций векторов (составляющих линейную комбинацию)

на эту прямую (см. свойство 5 проекций в разд.1.2.2). Поэтому абсцисса линейной комбинации векторов равна линейной комбинации абсцисс этих векторов. Аналогичное рассуждение справедливо для ординат и аппликат.

З а м е ч а н и я 1.7.

1. Основные теоремы 1.3–1.5 о разложении вектора по базису устанавливают взаимно однозначное соответствие между множеством векторов пространства и множеством их координат в данном базисе. А именно, между векторами на прямой и действительными числами, между векторами на плоскости и упорядоченными парами чисел, между векторами пространства и упорядоченными тройками чисел. Например, при фиксированном базисе $(\bar{e}) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ вектору $\bar{a} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + x_3 \cdot \bar{e}_3$ однозначно соответствует упорядоченная тройка чисел x_1, x_2, x_3 , и наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел x_1, x_2, x_3 соответствует вектор $\bar{a} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + x_3 \cdot \bar{e}_3$, т.е.

$$\bar{a} \underset{(\bar{e})}{\leftrightarrow} (x_1, x_2, x_3).$$

В частности, если вектор \bar{a} в базисе $(\bar{e}) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ имеет разложение $\bar{a} = 2 \cdot \bar{e}_1 - 3 \cdot \bar{e}_2 + 4 \cdot \bar{e}_3$, то этому вектору соответствует тройка $(2, -3, 4)$ и наоборот. Нулевому вектору в любом базисе в пространстве соответствует нулевая тройка $(0, 0, 0)$.

2. Взаимно однозначное соответствие

(вектор) \leftrightarrow (его координаты)

сохраняет линейные операции: сумме векторов соответствует сумма их одноименных координат, произведению вектора на число соответствует произведение его координат на это число. Такое взаимно однозначное соответствие называется *изоморфизмом* [10].

3. На практике координаты векторов удобно представлять в виде матриц-столбцов (или матриц-строк), которые называются *координатными столбцами* (*координатными строками*). В базисе $(\bar{e}) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ вектору

$\bar{a} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + x_3 \cdot \bar{e}_3$ соответствует координатный столбец $\underset{(\bar{e})}{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Обозначение базиса (\bar{e}) можно не указывать, если не может возникнуть неоднозначности. Линейным операциям над векторами соответствуют линейные операции над их координатными столбцами. Например, если в одном и том же базисе (\bar{e}) векторам \bar{a} и \bar{b} соответствуют координатные столбцы a и b , то их линейной комбинации $\bar{c} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b}$ соответствует координатный столбец $c = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, т.е. *координатный столбец линейной комбинации векторов равен линейной комбинации координатных столбцов*.

Пример 1.10. Векторы \bar{a} и \bar{b} относительно базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ имеют координаты: 2, 0, -3 и 4, 2, -1. Требуется найти координаты векторов $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} - \bar{b}$, $3 \cdot \bar{a} + 2 \cdot \bar{b}$ относительно того же базиса.

□ Запишем разложения по базису заданных векторов:

$$\bar{a} = 2 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 - 3 \cdot \bar{e}_3; \quad \bar{b} = 4 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2 - 1 \cdot \bar{e}_3.$$

Используя свойства линейных операций, находим разложения по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ искомых векторов:

$$\bar{a} + \bar{b} = (2+4) \cdot \bar{e}_1 + (0+2) \cdot \bar{e}_2 + (-3-1) \cdot \bar{e}_3 = 6 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2 - 4 \cdot \bar{e}_3;$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (2-4) \cdot \bar{e}_1 + (0-2) \cdot \bar{e}_2 + (-3+1) \cdot \bar{e}_3 = -2 \cdot \bar{e}_1 - 2 \cdot \bar{e}_2 - 2 \cdot \bar{e}_3;$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot \bar{a} + 2 \cdot \bar{b} &= 3 \cdot (2 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 - 3 \cdot \bar{e}_3) + 2 \cdot (4 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2 - 1 \cdot \bar{e}_3) = \\ &= (3 \cdot 2 + 2 \cdot 4) \cdot \bar{e}_1 + (3 \cdot 0 + 2 \cdot 2) \cdot \bar{e}_2 + [3 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1)] \cdot \bar{e}_3 = 14 \cdot \bar{e}_1 + 4 \cdot \bar{e}_2 - 11 \cdot \bar{e}_3. \end{aligned}$$

Следовательно, векторы $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} - \bar{b}$, $3 \cdot \bar{a} + 2 \cdot \bar{b}$ имеют координаты: 6, 2, -4; -2, -2, -2; 14, 4, -11 соответственно.

Вычислим искомые координаты, используя матричную форму записи (см. п.3 замечаний 1.7). Векторам \bar{a} и \bar{b} (в заданном базисе) соответствуют координатные столбцы

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Находим координатные столбцы векторов $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} - \bar{b}$, $3 \cdot \bar{a} + 2 \cdot \bar{b}$:

$$a + b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad a - b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$3 \cdot a + 2 \cdot b = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Результаты совпадают. ■

Пример 1.11. Известны разложения векторов $\bar{a} = 2 \cdot \bar{e}_1 - \bar{e}_2$; $\bar{b} = \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2$; $\bar{c} = -4 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2$; $\bar{d} = 7 \cdot \bar{e}_1 + 4 \cdot \bar{e}_2$ относительно базиса \bar{e}_1, \bar{e}_2 на плоскости. Разложить вектор \bar{d} :

а) по векторам \bar{a} и \bar{b} ; б) по векторам \bar{a} и \bar{c} .

□ а) Требуется представить вектор \bar{d} в виде линейной комбинации векторов \bar{a} и \bar{b} : $\bar{d} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b}$. Подставим в это равенство заданные раз-

ложения векторов: $7 \cdot \bar{e}_1 + 4 \cdot \bar{e}_2 = \alpha \cdot (2 \cdot \bar{e}_1 - \bar{e}_2) + \beta \cdot (\bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2)$. Приводя подобные члены в правой части, имеем $7 \cdot \bar{e}_1 + 4 \cdot \bar{e}_2 = (2 \cdot \alpha + \beta) \cdot \bar{e}_1 + (-\alpha + 2 \cdot \beta) \cdot \bar{e}_2$. Так как обе части равенства это разложения равных векторов по одному и тому же базису, то можно приравнять соответствующие координаты. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 7 = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 1, \\ 4 = \alpha \cdot (-1) + \beta \cdot 2. \end{cases}$$

Решая систему, находим $\alpha = 2$, $\beta = 3$, т.е. $\bar{d} = 2 \cdot \bar{a} + 3 \cdot \bar{b}$ – искомое разложение.

б) Требуется представить вектор \bar{d} в виде линейной комбинации векторов \bar{a} и \bar{c} : $\bar{d} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{c}$. Запишем это равенство в матричной форме $d = \alpha \cdot a + \beta \cdot c$, заменив векторы их координатными столбцами:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

которое равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 7 = 2 \cdot \alpha - 4 \cdot \beta, \\ 4 = -\alpha + 2 \cdot \beta. \end{cases}$$

Эта система не имеет решения (прибавив к первому уравнению удвоенное второе, получим неверное равенство $15 = 0$). Следовательно, вектор \bar{d} нельзя разложить по векторам \bar{a} и \bar{c} (заметим, что векторы \bar{a} и \bar{c} коллинеарны ($\bar{c} = -2 \cdot \bar{a}$), а вектор \bar{d} не коллинеарен им). ■

1.3.5. Ортогональный и ортонормированный базисы

Два вектора называются *ортогональными* (перпендикулярными), если угол между ними прямой (величина φ угла равна $\frac{\pi}{2}$).

Система векторов называется *ортогональной*, если все векторы, образующие ее, попарно ортогональны. Система векторов называется *ортонормированной*, если она ортогональная и длина каждого вектора равна единице.

СТАНДАРТНЫЕ БАЗИСЫ НА ПРЯМОЙ, НА ПЛОСКОСТИ, В ПРОСТРАНСТВЕ

Базисы на прямой, на плоскости и в пространстве определяются не однозначно. Некоторые из них, наиболее удобные в приложениях, принимаются в качестве стандартных.

Стандартный базис на прямой – это единичный вектор \bar{i} на данной прямой (рис.1.34,а). Согласно теореме 1.3, любой вектор \bar{a} , коллинеарный данной прямой, может быть разложен по стандартному базису на прямой ($\bar{e} = \bar{i}$), т.е. представлен в виде $\bar{a} = x \cdot \bar{i}$.

Стандартный базис на плоскости – это упорядоченная пара единичных и перпендикулярных векторов \bar{i}, \bar{j} на данной плоскости (рис.1.34,б). Согласно теореме 1.4, любой вектор \bar{a} , принадлежащий данной плоскости, может быть разложен по стандартному базису на плоскости ($\bar{e}_1 = \bar{i}, \bar{e}_2 = \bar{j}$), т.е. представлен в виде $\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}$.

Стандартный базис в пространстве – это упорядоченная тройка единичных и попарно перпендикулярных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (рис.1.34,в). Первый базисный вектор \bar{i} на рис.1.34,в направлен перпендикулярно плоскости рисунка (на читателя). Согласно теореме 1.5, любой вектор \bar{a} в пространстве может быть разложен по стандартному базису в пространстве ($\bar{e}_1 = \bar{i}, \bar{e}_2 = \bar{j}, \bar{e}_3 = \bar{k}$), т.е. представлен в виде $\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$.

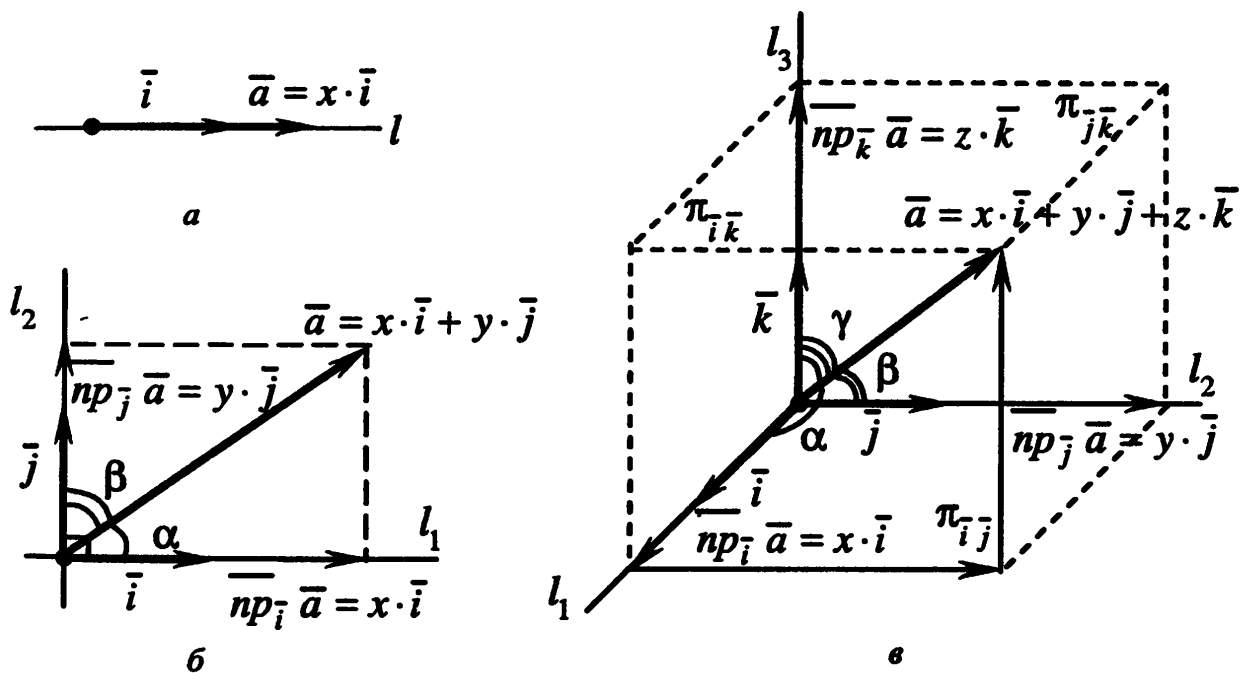


Рис.1.34

З а м е ч а н и я 1.8.

1. Стандартные базисы на плоскости и в пространстве ортонормированные, поэтому во всех приведенных разложениях вектор \bar{a} представляется в виде суммы своих ортогональных проекций на соответствующие прямые или оси, задаваемые базисными векторами (см. теорему 1.2 в разд.1.2.3), т.е.

$$\bar{a}_1 = \overline{np}_{l_1} \bar{a} = \overline{np}_{\bar{i}} \bar{a} = x \cdot \bar{i}; \quad \bar{a}_2 = \overline{np}_{l_2} \bar{a} = \overline{np}_{\bar{j}} \bar{a} = y \cdot \bar{j}; \quad \bar{a}_3 = \overline{np}_{l_3} \bar{a} = \overline{np}_{\bar{k}} \bar{a} = z \cdot \bar{k}.$$

2. Вектор \bar{a} в пространстве является замыкающей ломаной (см. правило сложения векторов в разд.1.1.2), образованной его проекциями (рис.1.34,б):

$$\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} = \overline{np_i} \bar{a} + \overline{np_j} \bar{a} + \overline{np_k} \bar{a}.$$

3. Вектор \bar{a} в пространстве является суммой своих ортогональных составляющих относительно плоскостей $\pi_{\bar{i}\bar{j}}, \pi_{\bar{i}\bar{k}}, \pi_{\bar{j}\bar{k}}$ (рис.1.34,б):

$$\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} = \bar{a}_{\perp \pi_{\bar{j}\bar{k}}} + \bar{a}_{\perp \pi_{\bar{i}\bar{k}}} + \bar{a}_{\perp \pi_{\bar{i}\bar{j}}}.$$

4. Стандартные базисы на плоскости и в пространстве являются правыми.

5. Координаты вектора \bar{a} в стандартном базисе равны алгебраическим значениям длин его ортогональных проекций на координатные оси (рис.1.34,б):

$$x = np_i \bar{a}; \quad y = np_j \bar{a}; \quad z = np_k \bar{a}.$$

6. В ортонормированном базисе длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{на плоскости}); \quad |\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{в пространстве}).$$

НАПРАВЛЯЮЩИЕ КОСИНУСЫ

В стандартных базисах на плоскости и в пространстве направление ненулевого вектора \bar{a} удобно характеризовать углами, которые он образует с базисными векторами: α – угол между вектором \bar{a} и первым базисным вектором \bar{i} , β – со вторым базисным вектором \bar{j} (рис.1.34,б), γ – с третьим базисным вектором \bar{k} (рис.1.34,в). При этом достаточно знать косинусы этих углов, которые называются *направляющими косинусами вектора \bar{a}* (в стандартном базисе).

На плоскости вектор \bar{a} можно представить в виде суммы ортогональных проекций (см. п.1 теоремы 1.2): $\bar{a} = \overline{np_i} \bar{a} + \overline{np_j} \bar{a}$. Тогда, учитывая п.1 замечаний 1.4 (при $\bar{e} = \bar{i}$, $\varphi = \alpha$ и при $\bar{e} = \bar{j}$, $\varphi = \beta$), получаем

$$\bar{a} = \overline{np_i} \bar{a} + \overline{np_j} \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \alpha \cdot \bar{i} + |\bar{a}| \cdot \cos \beta \cdot \bar{j}.$$

Разделив это равенство на длину вектора \bar{a} , в левой части получим единичный вектор \bar{e} , одинаково направленный с вектором \bar{a} (см. разд.1.1.2):

$$\bar{e} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \cos \alpha \cdot \bar{i} + \cos \beta \cdot \bar{j}. \quad (1.5)$$

Таким образом, координаты единичного вектора \bar{e} , одинаково направленного с вектором \bar{a} , равны направляющим косинусам вектора \bar{a} :

$$x = \cos \alpha, \quad y = \cos \beta.$$

Разумеется, что величины направляющих косинусов связаны условием (см. п.3 теоремы 1.2): $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$.

В пространстве получаем аналогичные равенства:

$$\vec{a} = \overline{np_i} \vec{a} + \overline{np_j} \vec{a} + \overline{np_k} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + |\vec{a}| \cdot \cos \beta \cdot \vec{j} + |\vec{a}| \cdot \cos \gamma \cdot \vec{k};$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}, \quad (1.6)$$

т.е. координаты единичного вектора \vec{e} , одинаково направленного с вектором \vec{a} , равны направляющим косинусам вектора \vec{a} :

$$x = \cos \alpha, \quad y = \cos \beta, \quad z = \cos \gamma.$$

При этом $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ (см. п.3 теоремы 1.2).

Пример 1.12. Прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ построен на векторах $\vec{AB} = 4 \cdot \vec{i}$, $\vec{AD} = 5 \cdot \vec{j}$, $\vec{AA}_1 = 4 \cdot \vec{k}$ (см. рис.1.35). Точка P – центр грани $ABB_1 A_1$, точка Q делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 Q : Q D_1 = 4 : 1$. Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора \vec{PQ} .

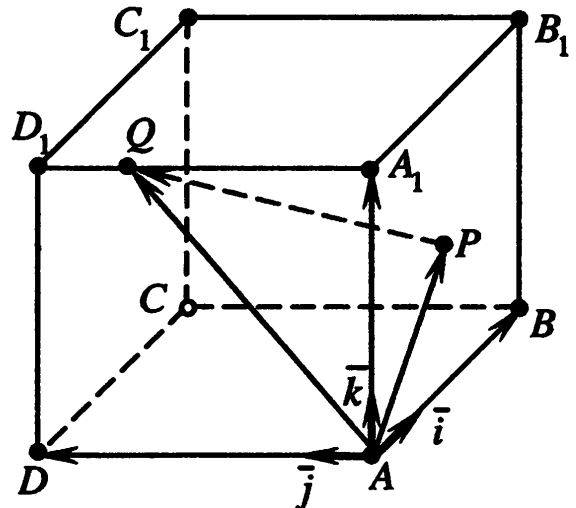


Рис.1.35

□ Запишем правило треугольника сложения векторов: $\vec{AQ} = \vec{AP} + \vec{PQ}$. Подставляя в это равенство разложения векторов

$$\vec{AP} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AB}_1 = \frac{1}{2} \cdot (\vec{AB} + \vec{AA}_1) = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{k}) = 2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{AQ} = \frac{4}{5} \cdot \vec{AD} + \vec{AA}_1 = \frac{4}{5} \cdot 5 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k} = 4 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k};$$

получаем $\underbrace{4 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}}_{\vec{AQ}} = \underbrace{2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{k}}_{\vec{AP}} + \vec{PQ}$. Отсюда $\vec{PQ} = -2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$, т.е.

координаты вектора \vec{PQ} : $x = -2$; $y = 4$, $z = 2$. Согласно п.6 замечаний 1.8,

находим длину вектора $|\vec{PQ}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$. Разделив вектор \vec{PQ}

на его длину, находим единичный вектор:

$$\frac{\overline{PQ}}{|\overline{PQ}|} = \frac{-2}{2\sqrt{6}} \cdot \bar{i} + \frac{4}{2\sqrt{6}} \cdot \bar{j} + \frac{2}{2\sqrt{6}} \cdot \bar{k} = \frac{-1}{\sqrt{6}} \cdot \bar{i} + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \bar{j} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \bar{k}.$$

Согласно (1.6), его координатами служат направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{6}}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}. \quad \blacksquare$$

1.4. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1.4.1. Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из двух векторов нулевой, то угол между ними не определён, а скалярное произведение считается равным нулю. Скалярное произведение векторов \bar{a} и \bar{b} обозначается

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (1.7)$$

где φ – величина угла между векторами \bar{a} и \bar{b} (см. рис.1.22 в разд.1.2.3).

Скалярное произведение $(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2$ называется *скалярным квадратом*.

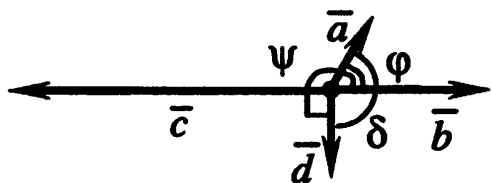


Рис.1.36

Пример 1.13. Найти скалярные произведения (\bar{a}, \bar{b}) , (\bar{b}, \bar{a}) , (\bar{a}, \bar{c}) , (\bar{b}, \bar{c}) , (\bar{a}, \bar{d}) , (\bar{b}, \bar{d}) , (\bar{c}, \bar{d}) , если известно, что $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=4$, $|\bar{d}|=1$, угол φ между векторами \bar{a} и

\bar{b} равен $\frac{\pi}{3}$, $\bar{c} \updownarrow \bar{b}$, а вектор \bar{d} образует с вектором \bar{a} угол $\delta = \frac{5\pi}{6}$ (рис.1.36).

□ По определению находим

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi = 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1; \quad (\bar{b}, \bar{a}) = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos \varphi = 2 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1.$$

Так как векторы \bar{b} и \bar{c} противоположно направленные, то угол ψ между векторами \bar{a} и \bar{c} равен $\frac{2\pi}{3}$. Поэтому

$$(\bar{a}, \bar{c}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos \psi = 1 \cdot 4 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = -2.$$

Угол между противоположно направленными векторами \bar{b} и \bar{c} равен π , поэтому $(\bar{b}, \bar{c}) = |\bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos \pi = 2 \cdot 4 \cdot \cos \pi = -8$.

Вектор \bar{d} ортогонален вектору \bar{b} (и вектору \bar{c}), так как величина угла между ними равна $\frac{5 \cdot \pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, а $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Поэтому $(\bar{b}, \bar{d}) = (\bar{c}, \bar{d}) = 0$.

Угол δ между векторами \bar{a} и \bar{d} равен $\frac{5\pi}{6}$, поэтому

$$(\bar{a}, \bar{d}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \blacksquare$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Рассмотрим ортогональную проекцию $\overline{pr_{\bar{b}}\bar{a}}$ ненулевого вектора \bar{a} на ось, задаваемую вектором $\bar{b} \neq \bar{o}$ (рис.1.37). Согласно п.1 замечаний 1.4 (см. разд.1.2.3), алгебраическое значение $pr_{\bar{b}}\bar{a}$ длины проекции равно произведению длины вектора \bar{a} на косинус угла между векторами \bar{a} и \bar{b} :

$$pr_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \varphi.$$

Умножив обе части этого равенства на $|\bar{b}|$, получим $|\bar{b}| \cdot pr_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi$. Сравнивая с (1.7), делаем вывод: *скалярное произведение ненулевых векторов \bar{a} и \bar{b} равно произведению длины вектора \bar{b} на алгебраическое значение длины ортогональной проекции вектора \bar{a} на ось, задаваемую вектором \bar{b} :*

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{b}| \cdot pr_{\bar{b}}\bar{a}. \quad (1.8)$$

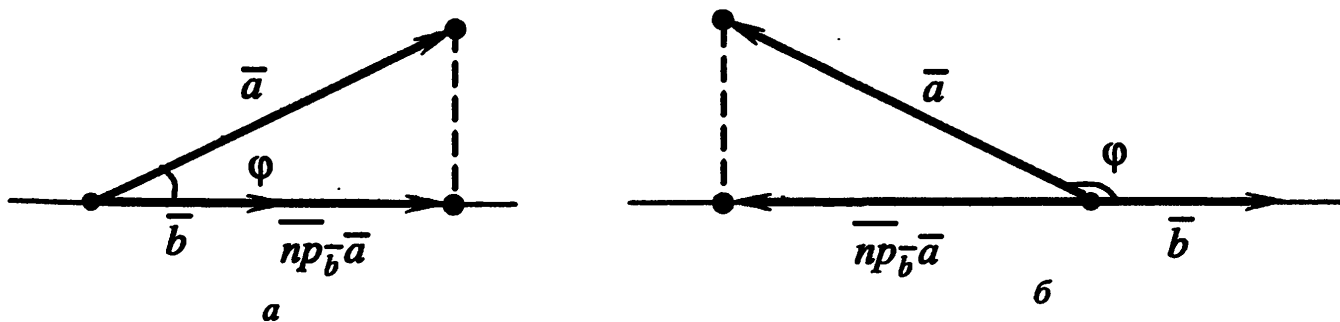


Рис.1.37

Эта формула остается справедливой и в случае $\bar{a} = \bar{o}$, так как $pr_{\bar{b}}\bar{o} = 0$.

Аналогично (см. п.2 замечаний 1.4) доказывается формула

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot pr_{\bar{a}}\bar{b}$$

и делается вывод о том, что *скалярное произведение ненулевых векторов \bar{a} и \bar{b} равно произведению длины вектора \bar{a} на алгебраическое значение длины ортогональной проекции вектора \bar{b} на ось, задаваемую вектором \bar{a} .*

1.4.2. Свойства скалярного произведения

Скалярное произведение векторов обладает следующими алгебраическими свойствами.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Для любых векторов \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} и любого действительного числа λ :

1. $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$;
2. $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$;
3. $(\lambda \cdot \bar{a}, \bar{b}) = \lambda \cdot (\bar{a}, \bar{b})$;
4. $(\bar{a}, \bar{a}) \geq 0$, причем из равенства $(\bar{a}, \bar{a}) = 0$ следует, что $\bar{a} = \bar{o}$.

Первое свойство определяет *симметричность* скалярного произведения, второе и третье – *аддитивность* и *однородность по первому множителю*, четвертое свойство – *неотрицательность скалярного квадрата*. Эти свойства аналогичны свойствам произведения чисел [10]: первое свойство соответствует закону *коммутативности* умножения чисел, второе – закону *дистрибутивности* умножения по отношению к сложению, третье – закону *ассоциативности* умножения. Поэтому рассматриваемая операция и называется произведением векторов. Поскольку ее результатом является число (скаляр), то такое произведение векторов называется скалярным.

Свойства 1 и 4 следуют непосредственно из определения. Докажем, например, аддитивность скалярного произведения по первому множителю (свойство 2): $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$. Если вектор \bar{c} – нулевой, то все скалярные произведения равны нулю по определению, т.е. для $\bar{c} = \bar{o}$ имеем верное равенство. Пусть $\bar{c} \neq \bar{o}$. Учитывая, что проекция суммы векторов равна сумме проекций (см. разд.1.2.2) (то же относится и к алгебраическим значениям длин ортогональных проекций (см. разд.1.2.3)), можно записать

$$np_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = np_{\bar{c}}\bar{a} + np_{\bar{c}}\bar{b}.$$

Умножая обе части на $|\bar{c}| \neq 0$, получаем

$$|\bar{c}| \cdot np_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = |\bar{c}| \cdot np_{\bar{c}}\bar{a} + |\bar{c}| \cdot np_{\bar{c}}\bar{b}.$$

Учитывая (1.8), последнее равенство равносильно $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$, что и требовалось доказать. Однородность скалярного произведения по первому множителю (свойство 3) доказывается аналогично, используя соответствующее свойство ортогональных проекций векторов (см. разд.1.2.3).

З а м е ч а н и я 1.9.

1. Свойства аддитивности и однородности скалярного произведения означают *линейность скалярного произведения по первому множителю*:

$$(\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b}, \bar{c}) = \alpha \cdot (\bar{a}, \bar{c}) + \beta \cdot (\bar{b}, \bar{c})$$

для любых векторов \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} и любых действительных чисел α и β .

2. В силу коммутативности скалярное произведение линейно и по второму множителю, т.е. *линейно по любому множителю*.

3. Для любых векторов \bar{a} , \bar{b} справедливо *неравенство Коши – Буняковского*

$$(\bar{a}, \bar{b})^2 \leq (\bar{a}, \bar{a}) \cdot (\bar{b}, \bar{b}).$$

Это неравенство выражает условие ограниченности косинуса угла между ненулевыми векторами. В самом деле, поскольку $|\cos \varphi| \leq 1$, то из (1.7)

$$\cos^2 \varphi = \left(\frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} \right)^2 = \frac{(\bar{a}, \bar{b})^2}{|\bar{a}|^2 \cdot |\bar{b}|^2} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})^2}{(\bar{a}, \bar{a}) \cdot (\bar{b}, \bar{b})} \leq 1$$

и, следовательно, справедливо доказываемое неравенство. Заметим, что неравенство Коши – Буняковского выполняется как равенство только для коллинеарных векторов, т.е. при $\cos \varphi = \pm 1$.

4. Из неравенства Коши – Буняковского следует *неравенство треугольника* (длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон и больше модуля их разности):

$$||\bar{a}| - |\bar{b}|| \leq |\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|.$$

Докажем последнее неравенство $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$. Используя неравенство $|(\bar{a}, \bar{b})| \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$, которое следует из неравенства Коши – Буняковского, оценим скалярный квадрат суммы векторов:

$$\begin{aligned} |\bar{a} + \bar{b}|^2 &= (\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{a}) + 2 \cdot (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{b}) \leq \\ &\leq |\bar{a}|^2 + 2 \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| + |\bar{b}|^2 = (|\bar{a}| + |\bar{b}|)^2, \end{aligned}$$

т.е. $|\bar{a} + \bar{b}| \leq (|\bar{a}| + |\bar{b}|)$, что равносильно доказываемому неравенству.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

С помощью скалярного произведения можно находить основные метрические величины: длины отрезков (или, что то же самое, длины векторов) и величины углов (см. разд.В.1).

1. Длина вектора \bar{a} находится по формуле:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}.$$

2. Величина φ угла между ненулевыми векторами находится по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{\sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} \cdot \sqrt{(\bar{b}, \bar{b})}}.$$

Отсюда заключаем, что:

– ненулевые векторы \bar{a} и \bar{b} перпендикулярны ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = 0;$$

– угол между ненулевыми векторами \bar{a} и \bar{b} острый ($\varphi < \frac{\pi}{2}$) тогда и только тогда, когда их скалярное произведение положительно;

– угол между ненулевыми векторами \bar{a} и \bar{b} тупой ($\varphi > \frac{\pi}{2}$) тогда и только тогда, когда их скалярное произведение отрицательно.

3. Алгебраическое значение длины ортогональной проекции вектора \bar{a} на ось, задаваемую вектором $\bar{b} \neq \bar{0}$:

$$pr_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{b}|}.$$

4. Ортогональная проекция вектора \bar{a} на ось, задаваемую вектором $\bar{b} \neq \bar{0}$:

$$\overline{pr_{\bar{b}} \bar{a}} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{(\bar{b}, \bar{b})} \cdot \bar{b}.$$

Если ось задается единичным вектором \bar{e} , то $\overline{pr_{\bar{e}} \bar{a}} = (\bar{a}, \bar{e}) \cdot \bar{e}$.

Свойства 1 и 2 следуют непосредственно из определения скалярного произведения. Третье и четвертое свойства вытекают из геометрического смысла скалярного произведения (см. (1.8)) и п.1 замечаний 1.4.

Пример 1.14. Доказать тождества

$$a) (\bar{a}, \bar{b}) = \frac{1}{4} \cdot (|\bar{a} + \bar{b}|^2 - |\bar{a} - \bar{b}|^2); \quad б) |\bar{a} + \bar{b}|^2 + |\bar{a} - \bar{b}|^2 = 2 \cdot |\bar{a}|^2 + 2 \cdot |\bar{b}|^2.$$

□ Используя коммутативность и линейность скалярного произведения, запишем равенства

$$(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{a}) + 2 \cdot (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{b}); \quad (\bar{a} - \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{a}) - 2 \cdot (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{b}).$$

Заменяя скалярные квадраты векторов квадратами их длин (см. геометрическое свойство 1), получаем

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + 2 \cdot (\bar{a}, \bar{b}) + |\bar{b}|^2; \quad |\bar{a} - \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 - 2 \cdot (\bar{a}, \bar{b}) + |\bar{b}|^2.$$

Если из первого равенства вычесть второе, то придем к тождеству (а). Если же сложить оба равенства, то получим тождество (б).

Доказанные равенства выражают следующие свойства параллелограмма, построенного на векторах \bar{a} и \bar{b} ($\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$ – его диагонали):

а) скалярное произведение векторов равно одной четвертой от разности квадратов диагоналей параллелограмма, построенного на множителях;

б) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. ■

1.4.3. Выражение скалярного произведения через координаты векторов

Разумеется, что величина скалярного произведения любых векторов \bar{a} и \bar{b} не зависит от базиса. Однако формулы, выражающие скалярное произведение (\bar{a}, \bar{b}) через координаты множителей, зависят от базиса, относительно которого определены координаты. Рассмотрим сначала случай стандартного базиса в пространстве (см. разд. 1.3.5), а затем – произвольного.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ В ОРТОНОРМИРОВАННОМ БАЗИСЕ

Теорема 1.6 (формула вычисления скалярного произведения в ортонормированном базисе). *В ортонормированном базисе скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат векторов:*

если векторы \bar{a} и \bar{b} относительно ортонормированного базиса на плоскости имеют координаты x_a, y_a и x_b, y_b соответственно, то скалярное произведение этих векторов вычисляется по формуле

$$(\bar{a}, \bar{b}) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b; \quad (1.9)$$

если векторы \bar{a} и \bar{b} относительно ортонормированного базиса в пространстве имеют координаты x_a, y_a, z_a и x_b, y_b, z_b соответственно, то скалярное произведение этих векторов вычисляется по формуле

$$(\bar{a}, \bar{b}) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b. \quad (1.10)$$

Докажем формулу (1.10). Пусть в пространстве задан ортонормированный (стандартный) базис $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Скалярные произведения базисных векторов находятся по определению:

$$\begin{aligned} (\bar{i}, \bar{i}) &= 1, & (\bar{i}, \bar{j}) &= 0, & (\bar{i}, \bar{k}) &= 0, \\ (\bar{j}, \bar{i}) &= 0, & (\bar{j}, \bar{j}) &= 1, & (\bar{j}, \bar{k}) &= 0, \\ (\bar{k}, \bar{i}) &= 0, & (\bar{k}, \bar{j}) &= 0, & (\bar{k}, \bar{k}) &= 1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Используя линейность скалярного произведения по любому множителю, для векторов $\bar{a} = x_a \cdot \bar{i} + y_a \cdot \bar{j} + z_a \cdot \bar{k}$ и $\bar{b} = x_b \cdot \bar{i} + y_b \cdot \bar{j} + z_b \cdot \bar{k}$ получаем:

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{b}) &= (x_a \cdot \bar{i} + y_a \cdot \bar{j} + z_a \cdot \bar{k}, x_b \cdot \bar{i} + y_b \cdot \bar{j} + z_b \cdot \bar{k}) = \\ &= x_a \cdot x_b (\bar{i}, \bar{i}) + x_a \cdot y_b (\bar{i}, \bar{j}) + x_a \cdot z_b (\bar{i}, \bar{k}) + y_a \cdot x_b (\bar{j}, \bar{i}) + y_a \cdot y_b (\bar{j}, \bar{j}) + y_a \cdot z_b (\bar{j}, \bar{k}) + \\ &\quad + z_a \cdot x_b (\bar{k}, \bar{i}) + z_a \cdot y_b (\bar{k}, \bar{j}) + z_a \cdot z_b (\bar{k}, \bar{k}). \end{aligned}$$

Учитывая (1.11), из девяти слагаемых только три отличны от нуля, поэтому

$$(\bar{a}, \bar{b}) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b,$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и я 1.10.

1. Для доказательства формулы (1.9) можно использовать следующее соображение. Множество векторов на плоскости со стандартным базисом \bar{i}, \bar{j} можно рассматривать как множество таких векторов в пространстве с базисом $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, у которых аппликата равна нулю. Поэтому формулу вычисления скалярного произведения векторов $\bar{a} = x_a \cdot \bar{i} + y_a \cdot \bar{j}$ и $\bar{b} = x_b \cdot \bar{i} + y_b \cdot \bar{j}$ можно получить из (1.10), полагая $z_a = z_b = 0$.

2. Скалярное произведение можно записать в матричном виде: если $a = (x_a \quad y_a \quad z_a)^T$ и $b = (x_b \quad y_b \quad z_b)^T$ – координатные столбцы векторов \bar{a} и \bar{b} в стандартном базисе, то их скалярное произведение находится по формуле:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a^T \cdot b = (x_a \quad y_a \quad z_a) \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}.$$

Для векторов на плоскости соответственно получаем

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a^T \cdot b = (x_a \quad y_a) \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}.$$

3. Координаты вектора \bar{a} в ортонормированном базисе равны его скалярным произведениям на соответствующие базисные векторы:

$$x_a = (\bar{a}, \bar{i}), \quad y_a = (\bar{a}, \bar{j}), \quad z_a = (\bar{a}, \bar{k}).$$

В самом деле, подставляя в (1.10) координаты 1, 0, 0 базисного вектора \bar{i} , приходим к первому равенству (остальные равенства получаются аналогично).

4. Формулы (1.9) и (1.10) совместно с геометрическими свойствами скалярного произведения имеют многочисленные приложения (см. разд.1.6.2).

Пример 1.15. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$, $\bar{b} = 2 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$, $\bar{c} = \bar{j} - \bar{k}$. Найти скалярные произведения (\bar{a}, \bar{b}) , (\bar{a}, \bar{c}) , (\bar{b}, \bar{c}) , (\bar{a}, \bar{i}) , (\bar{a}, \bar{j}) , (\bar{a}, \bar{k}) .

□ По формуле (1.10) вычисляем

$$\begin{aligned}(\bar{a}, \bar{b}) &= (1 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}, 2 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 0; \\(\bar{a}, \bar{c}) &= (1 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}, 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} - 1 \cdot \bar{k}) = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -4; \\(\bar{b}, \bar{c}) &= (2 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}, 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} - 1 \cdot \bar{k}) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1; \\(\bar{a}, \bar{i}) &= (1 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}, 1 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}) = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 1; \\(\bar{a}, \bar{j}) &= (1 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}, 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}) = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = -2; \\(\bar{a}, \bar{k}) &= (1 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}, 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 1 \cdot \bar{k}) = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2.\end{aligned}$$

Сравнивая вектор $\bar{a} = \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$ со скалярными произведениями $(\bar{a}, \bar{i}) = 1$, $(\bar{a}, \bar{j}) = -2$, $(\bar{a}, \bar{k}) = 2$ обнаруживаем, что при умножении вектора на базисный вектор получается соответствующая координата данного вектора. Этот результат иллюстрирует п.3 замечаний 1.10.

Для нахождения скалярного произведения можно использовать матричную запись (см. п.2 замечаний 1.10). Например, векторам \bar{a} , \bar{b} , \bar{i} соответствуют координатные столбцы

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(\bar{a}, \bar{b}) &= a^T \cdot b = (1 \quad -2 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 0; \\(\bar{a}, \bar{i}) &= a^T \cdot i = (1 \quad -2 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 1,\end{aligned}$$

что совпадает с полученными ранее результатами. ■

Пример 1.16. Прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ построен на векторах $\overline{AB} = 4 \cdot \bar{i}$, $\overline{AD} = 5 \cdot \bar{j}$, $\overline{AA_1} = 4 \cdot \bar{k}$ (см. рис.1.38). Точка P — центр грани $AB B_1 A_1$, точка Q делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 Q : Q D_1 = 4 : 1$. Требуется найти:

а) величину φ угла между векторами $\overline{AC_1}$ и \overline{PQ} ;

б) длину ортогональной проекции вектора \overline{PQ} на прямую AC .

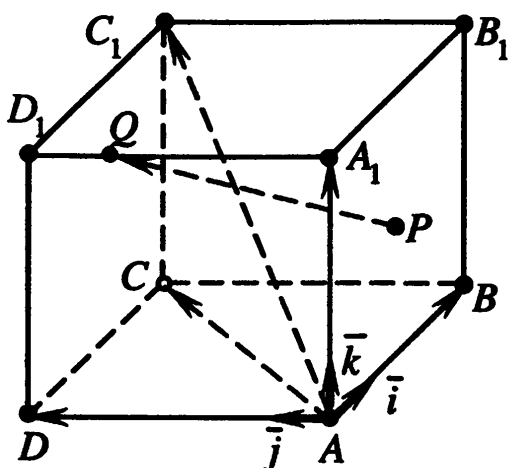


Рис.1.38

□ Находим координаты векторов в стандартном базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1} = 4 \cdot \bar{i} + 5 \cdot \bar{j} + 4 \cdot \bar{k};$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = 4 \cdot \bar{i} + 5 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k};$$

$\overline{PQ} = -2 \cdot \bar{i} + 4 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$ (см. решение примера 1.12).

По формуле (1.10) находим скалярные произведения:

$$(\overline{AC_1}, \overline{PQ}) = 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 20;$$

$$(\overline{AC}, \overline{PQ}) = 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 12;$$

а также длины векторов (см. геометрическое свойство 1 скалярного произведения):

$$|\overline{AC_1}| = \sqrt{(\overline{AC_1}, \overline{AC_1})} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{57}; \quad |\overline{AC}| = \sqrt{(\overline{AC}, \overline{AC})} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}.$$

Длина $|\overline{PQ}| = 2\sqrt{6}$ была найдена в примере 1.12.

Теперь по геометрическому свойству 2 находим косинус искомого угла

$$\cos \varphi = \frac{(\overline{AC_1}, \overline{PQ})}{|\overline{AC_1}| \cdot |\overline{PQ}|} = \frac{20}{\sqrt{57} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{10}{3\sqrt{38}}, \text{ т.е. } \varphi = \arccos \frac{10}{3\sqrt{38}}.$$

Алгебраическое значение длины ортогональной проекции находим по геометрическому свойству 3:

$$\text{пр}_{AC} \overline{PQ} = \frac{(\overline{PQ}, \overline{AC})}{|\overline{AC}|} = \frac{12}{\sqrt{41}}. \blacksquare$$

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ В ПРОИЗВОЛЬНОМ БАЗИСЕ

Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – произвольный базис в пространстве. Найдем скалярное произведение векторов $\bar{a} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2 + a_3 \cdot \bar{e}_3$ и $\bar{b} = b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2 + b_3 \cdot \bar{e}_3$:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2 + a_3 \cdot \bar{e}_3, b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2 + b_3 \cdot \bar{e}_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i \cdot b_j \cdot (\bar{e}_i, \bar{e}_j).$$

Запишем полученную формулу в матричном виде. Для этого из чисел (\bar{e}_i, \bar{e}_j) , называемых *метрическими коэффициентами базиса*, составим *матрицу Грама системы векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$* :

$$G(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = \begin{pmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}_1) & (\bar{e}_1, \bar{e}_2) & (\bar{e}_1, \bar{e}_3) \\ (\bar{e}_2, \bar{e}_1) & (\bar{e}_2, \bar{e}_2) & (\bar{e}_2, \bar{e}_3) \\ (\bar{e}_3, \bar{e}_1) & (\bar{e}_3, \bar{e}_2) & (\bar{e}_3, \bar{e}_3) \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Координаты каждого из векторов \bar{a} и \bar{b} представим в виде столбцов

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

соответственно. Тогда для скалярного произведения получим

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i \cdot b_j (\bar{e}_i, \bar{e}_j) = (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \cdot \begin{pmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}_1) & (\bar{e}_1, \bar{e}_2) & (\bar{e}_1, \bar{e}_3) \\ (\bar{e}_2, \bar{e}_1) & (\bar{e}_2, \bar{e}_2) & (\bar{e}_2, \bar{e}_3) \\ (\bar{e}_3, \bar{e}_1) & (\bar{e}_3, \bar{e}_2) & (\bar{e}_3, \bar{e}_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

или, короче,

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a^T \cdot G(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \cdot b. \quad (1.13)$$

Теорема 1.7 (формула вычисления скалярного произведения в произвольном базисе). В произвольном базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ скалярное произведение векторов \bar{a} и \bar{b} вычисляется по формуле (1.13), где a, b – координатные столбцы векторов \bar{a} и \bar{b} соответственно, а $G(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ – матрица Грама (1.12) базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

З а м е ч а н и я 1.11.

1. Для ортонормированного базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ матрица Грама имеет вид

$$G(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) = \begin{pmatrix} (\bar{i}, \bar{i}) & (\bar{i}, \bar{j}) & (\bar{i}, \bar{k}) \\ (\bar{j}, \bar{i}) & (\bar{j}, \bar{j}) & (\bar{j}, \bar{k}) \\ (\bar{k}, \bar{i}) & (\bar{k}, \bar{j}) & (\bar{k}, \bar{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. является единичной. В этом случае по формуле (1.13) получаем

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{b}) &= (x_a \cdot \bar{i} + y_a \cdot \bar{j} + z_a \cdot \bar{k}, x_b \cdot \bar{i} + y_b \cdot \bar{j} + z_b \cdot \bar{k}) = \\ &= (x_a \quad y_a \quad z_a) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b, \end{aligned}$$

что совпадает с (1.10).

2. Для произвольного базиса \bar{e}_1, \bar{e}_2 на плоскости скалярное произведение векторов $\bar{a} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2$ и $\bar{b} = b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2$ находится по формуле:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a^T \cdot G(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \cdot b,$$

где $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ – координатные столбцы векторов \bar{a} и \bar{b} соответственно, а $G(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \begin{pmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}_1) & (\bar{e}_1, \bar{e}_2) \\ (\bar{e}_2, \bar{e}_1) & (\bar{e}_2, \bar{e}_2) \end{pmatrix}$ – матрица Грама базиса \bar{e}_1, \bar{e}_2 .

В частности, для ортонормированного базиса \bar{i}, \bar{j} матрица Грама является единичной: $G(\bar{i}, \bar{j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, поэтому скалярное произведение векторов $\bar{a} = x_a \cdot \bar{i} + y_a \cdot \bar{j}$ и $\bar{b} = x_b \cdot \bar{i} + y_b \cdot \bar{j}$ находится по формуле

$$(\bar{a}, \bar{b}) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b,$$

что совпадает с (1.9). Заметим, что эта формула также следует из полученной в п.1 при $z_a = z_b = 0$.

Пример 1.17. Найти матрицы Грама для следующих базисов:

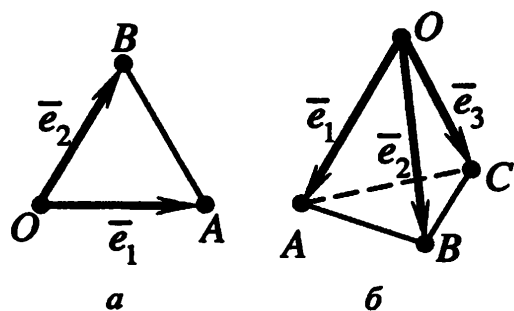


Рис.1.39

а) два единичных вектора $\bar{e}_1 = \overline{OA}$, $\bar{e}_2 = \overline{OB}$, служащие сторонами правильного треугольника OAB (рис.1.39,а);

б) три единичных вектора $\bar{e}_1 = \overline{OA}$, $\bar{e}_2 = \overline{OB}$, $\bar{e}_3 = \overline{OC}$, служащие ребрами правильного тетраэдра (рис.1.39,б).

Найти длины векторов, имеющих в данных базисах следующие разложения:

$$\bar{a} = 1 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2; \quad \bar{b} = 1 \cdot \bar{e}_1 - 2 \cdot \bar{e}_2 + 3 \cdot \bar{e}_3.$$

□ а) Учитывая, что длины базисных векторов равны единице, а угол между ними равен $\frac{\pi}{3}$, получаем $(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 1$, $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = (\bar{e}_2, \bar{e}_1) = \frac{1}{2}$, $(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = 1$.

Записываем матрицу Грама $G(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \begin{pmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}_1) & (\bar{e}_1, \bar{e}_2) \\ (\bar{e}_2, \bar{e}_1) & (\bar{e}_2, \bar{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем теперь длину вектора $\bar{a} = 1 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2$. Составляем координатный столбец этого вектора $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Учитывая формулу (1.13), находим ска-

лярный квадрат: $(\bar{a}, \bar{a}) = a^T \cdot G(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \cdot a = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$. Следова-

тельно, $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{7}$.

б) Учитывая, что длины базисных векторов равны единице, а угол между любыми двумя из них равен $\frac{\pi}{3}$, получаем

$$\begin{aligned} (\bar{e}_1, \bar{e}_1) &= (\bar{e}_2, \bar{e}_2) = (\bar{e}_3, \bar{e}_3) = 1; \\ (\bar{e}_1, \bar{e}_2) &= (\bar{e}_2, \bar{e}_1) = (\bar{e}_1, \bar{e}_3) = (\bar{e}_3, \bar{e}_1) = (\bar{e}_2, \bar{e}_3) = (\bar{e}_3, \bar{e}_2) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Записываем матрицу Грама (1.12): $G(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем теперь длину вектора $\bar{b} = 1 \cdot \bar{e}_1 - 2 \cdot \bar{e}_2 + 3 \cdot \bar{e}_3$. Составляем координатный столбец этого вектора $b = (1 \ -2 \ 3)^T$. Учитывая формулу (1.13), находим скалярный квадрат:

$$(\bar{b}, \bar{b}) = b^T \cdot G(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \cdot b = (1 \ -2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 9.$$

Следовательно, $|\bar{b}| = \sqrt{(\bar{b}, \bar{b})} = 3$. ■

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ ВО ВЗАИМНЫХ БАЗИСАХ

Пусть на плоскости задан базис \bar{e}_1, \bar{e}_2 . Базис \bar{e}_1^*, \bar{e}_2^* называется **взаимным по отношению к базису \bar{e}_1, \bar{e}_2** , если

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_1^*) = 1, \quad (\bar{e}_1, \bar{e}_2^*) = 0, \quad (\bar{e}_2, \bar{e}_1^*) = 0, \quad (\bar{e}_2, \bar{e}_2^*) = 1.$$

Пусть в пространстве задан базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Базис $\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*$ называется **взаимным по отношению к базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$** , если

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j^*) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3.$$

Взаимные базисы обладают следующими основными свойствами.

1. **Свойство взаимности базисов симметричное: если второй базис взаимен по отношению к первому, то первый взаимен ко второму.**

2. **Для каждого базиса (на плоскости или в пространстве) существует единственный взаимный базис.**

3. Пусть векторы \bar{a} и \bar{b} заданы своими координатами относительно взаимных базисов:

$$\bar{a} = a_1^* \cdot \bar{e}_1^* + a_2^* \cdot \bar{e}_2^* + a_3^* \cdot \bar{e}_3^*, \quad \bar{b} = b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2 + b_3 \cdot \bar{e}_3.$$

Тогда их скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1^* \cdot b_1 + a_2^* \cdot b_2 + a_3^* \cdot b_3,$$

т.е. равно сумме произведений одноименных координат векторов, как и в случае ортонормированного базиса.

4. Если $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и $\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*$ взаимные базисы, то координаты a_1, a_2, a_3 любого вектора \bar{a} относительно базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ находятся по формулам

$$a_1 = (\bar{a}, \bar{e}_1^*), \quad a_2 = (\bar{a}, \bar{e}_2^*), \quad a_3 = (\bar{a}, \bar{e}_3^*).$$

Докажем свойство 2. Пусть на плоскости задан базис \bar{e}_1, \bar{e}_2 (рис.1.40,а). Вектор \bar{e}_1^* взаимного базиса перпендикулярен вектору \bar{e}_2 , так как $(\bar{e}_2, \bar{e}_1^*) = 0$ (см. второе геометрическое свойство скалярного произведения). Из двух возможных направлений для вектора \bar{e}_1^* выбираем то, которое образует острый угол $\varphi < \frac{\pi}{2}$ с вектором \bar{e}_1 , так как $(\bar{e}_1, \bar{e}_1^*) = 1 > 0$. Следовательно, направление вектора \bar{e}_1^* определено однозначно. Осталось выбрать его длину, используя (1.7): $|\bar{e}_1^*| = \frac{1}{|\bar{e}_1| \cdot \cos \varphi}$, так как $(\bar{e}_1, \bar{e}_1^*) = 1$. Таким образом, направление и длина первого вектора взаимного базиса определяются однозначно. То же можно сказать и в отношении выбора вектора \bar{e}_2^* . Доказательство существования и единственности взаимного базиса в пространстве

(рис.1.40,б) проводится аналогично [14].

Заметим, что для стандартного базиса \bar{i}, \bar{j} на плоскости (или базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ в пространстве) взаимный базис совпадает с самим базисом \bar{i}, \bar{j} (соответственно $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$).

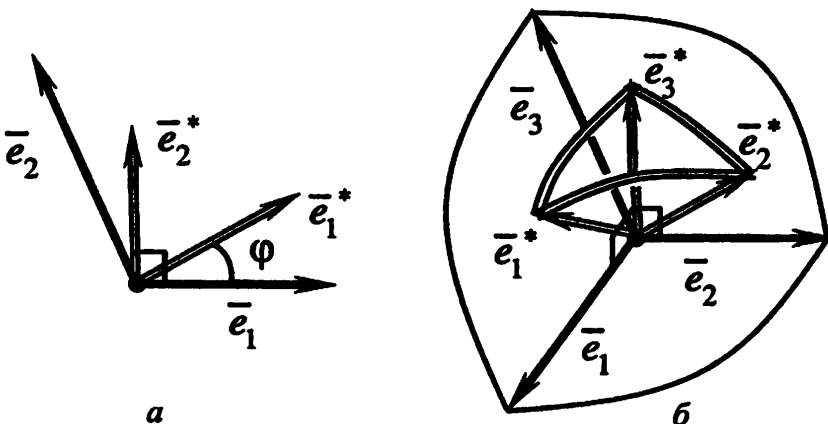


Рис.1.40

Докажем свойство 3. Находим скалярное произведение, используя свойства коммутативности и линейности, а также определение взаимных базисов:

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{b}) &= (a_1^* \cdot \bar{e}_1^* + a_2^* \cdot \bar{e}_2^* + a_3^* \cdot \bar{e}_3^*, b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2 + b_3 \cdot \bar{e}_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i^* \cdot b_j (\bar{e}_i^*, \bar{e}_j) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i^* \cdot b_j (\bar{e}_j, \bar{e}_i^*) = a_1^* \cdot b_1 + a_2^* \cdot b_2 + a_3^* \cdot b_3, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 4 следует из формулы, приведенной в п.3. В самом деле, $(\bar{a}, \bar{e}_1^*) = (a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2 + a_3 \cdot \bar{e}_3, \bar{e}_1^*) = a_1$. Аналогично доказываются остальные формулы в п.4.

Пример 1.18. а) Найти базис, взаимный базису, заданному в примере 1.17, а (рис.1.39,а).

б) Внутри угла AOB величиной $\frac{\pi}{3}$ взята точка C , удаленная от сторон OA и OB на расстояния 11 и 2 соответственно. Найти длину отрезка OC (рис.1.41,б).

□ а) Так как базисный вектор \bar{e}_1 единичный, то, учитывая геометрический смысл скалярного произведения (см. разд.1.4.1), вектор \bar{e}_1^* можно построить следующим образом. Через начало вектора $\bar{e}_2 = \overline{OB}$ (точку O) и конец вектора $\bar{e}_1 = \overline{OA}$ (точку A) проводим прямые, перпендикулярные векторам \bar{e}_2 и \bar{e}_1 соответственно (штриховые линии на рис.1.41,а). Точка пересечения этих прямых – конец вектора \bar{e}_1^* (его начало совпадает с точкой O). Аналогично строится вектор \bar{e}_2^* (построение изображено штрихпунктирными линиями на рис.1.41,а). Тогда по построению справедливо $\bar{e}_1^* \perp \bar{e}_2$, $\bar{e}_2^* \perp \bar{e}_1$, а также $np_{\bar{e}_1} \bar{e}_1^* = |\bar{e}_1| = 1$, $np_{\bar{e}_2} \bar{e}_2^* = |\bar{e}_2| = 1$. Следовательно, учитывая геометрическое свойство 2 и формулу (1.8): $(\bar{e}_2, \bar{e}_1^*) = 0$, $(\bar{e}_1, \bar{e}_2^*) = 0$, $(\bar{e}_1, \bar{e}_1^*) = 1$, $(\bar{e}_2, \bar{e}_2^*) = 1$, т.е. выполняются условия взаимности базисов. Найдем длины векторов взаимного базиса. Поскольку угол между векторами \bar{e}_1 и \bar{e}_1^* равен $\frac{\pi}{6}$ (напомним, что $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$), то из прямоугольного треугольника с катетом OA : $|\bar{e}_1^*| = \frac{|\bar{e}_1|}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Длина вектора \bar{e}_2^* та-
кая же.

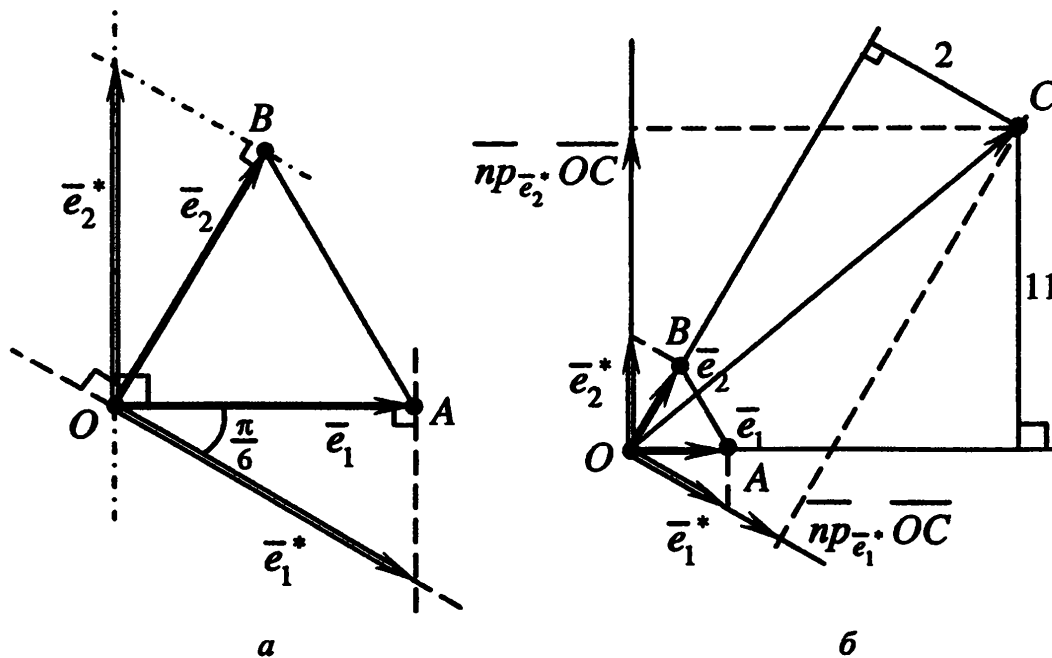


Рис.1.41

б) Зададим на плоскости базис из единичных векторов $\bar{e}_1 = \overline{OA}$, $\bar{e}_2 = \overline{OB}$, который совпадает с базисом, рассмотренным в п."а". По условию задачи известны длины ортогональных проекций вектора \overline{OC} на оси, определяемые векторами взаимного базиса: $np_{\bar{e}_1^*} \overline{OC} = 2$, $np_{\bar{e}_2^*} \overline{OC} = 11$. По третьему геометрическому свойству скалярного произведения с учетом свойства 4 взаимных базисов, получаем

$$np_{\bar{e}_1^*} \overline{OC} = \frac{(\overline{OC}, \bar{e}_1^*)}{|\bar{e}_1^*|} = \frac{x_1}{|\bar{e}_1^*|} = 2; \quad np_{\bar{e}_2^*} \overline{OC} = \frac{(\overline{OC}, \bar{e}_2^*)}{|\bar{e}_2^*|} = \frac{x_2}{|\bar{e}_2^*|} = 11,$$

где x_1, x_2 – координаты вектора \overline{OC} в базисе \bar{e}_1, \bar{e}_2 . Так как $|\bar{e}_1^*| = |\bar{e}_2^*| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (см. п."а"), то $x_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{22}{\sqrt{3}}$. Длину вектора \overline{OC} вычисляем по формуле, следующей из п.2 замечаний 1.10 при $\bar{a} = \bar{b}$, используя матрицу Грама для базиса \bar{e}_1, \bar{e}_2 , найденную в примере 1.17 п."а":

$$(\overline{OC}, \overline{OC}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{22}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{22}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = 196.$$

Следовательно, $|\overline{OC}| = \sqrt{(\overline{OC}, \overline{OC})} = \sqrt{196} = 14$. ■

1.5. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1.5.1. Векторное произведение и его свойства

Вектор \vec{c} называется *векторным произведением неколлинеарных векторов \vec{a} и \vec{b}* , если:

1) его длина равна произведению длин векторов \vec{a} и \vec{b} на синус угла между ними: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ (рис.1.42);

2) вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} ;

3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (в указанном порядке) образуют правую тройку.

Векторное произведение коллинеарных векторов (в частности, если хотя бы один из множителей – нулевой вектор) считается равным нулевому вектору.

Векторное произведение обозначается $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ (или $\vec{a} \times \vec{b}$).

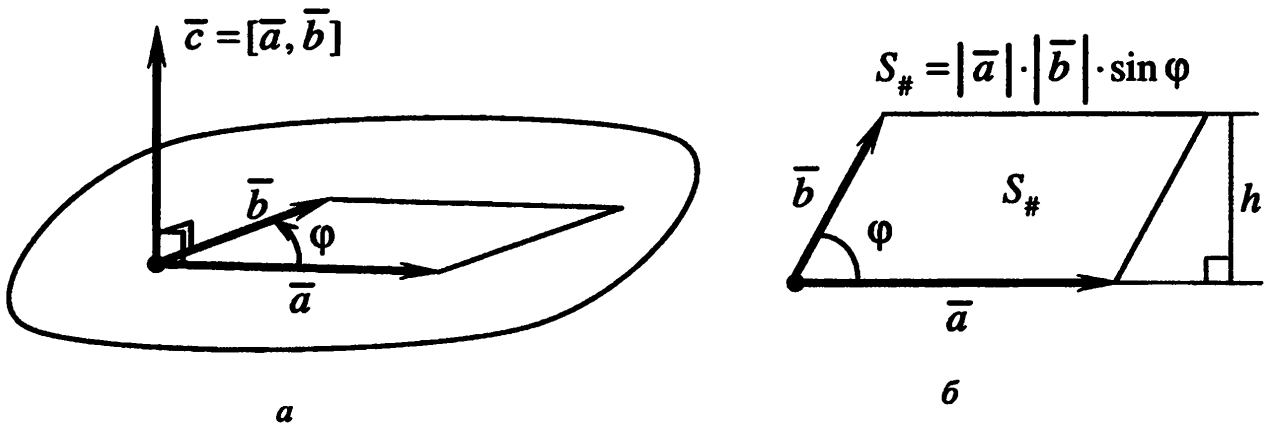


Рис.1.42

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого действительного числа λ :

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$;
2. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$;
3. $[\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}] = \lambda \cdot [\vec{a}, \vec{b}]$.

Первое свойство определяет *антисимметричность* векторного произведения, второе и третье – *аддитивность* и *однородность по первому множителю*. Эти свойства аналогичны свойствам произведения чисел [10]: первое свойство "противоположно" закону *коммутативности* умножения чисел (закон *антикоммутативности*), второе свойство соответствует закону *дистрибутивности* умножения чисел по отношению к сложению, третье – закону *ассоциативности* умножения. Поэтому рассматриваемая операция

и называется произведением векторов. Поскольку ее результатом является вектор, то такое произведение векторов называется векторным.

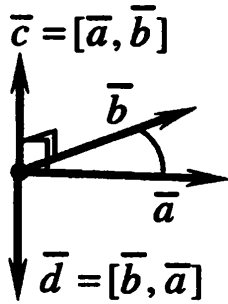


Рис.1.43

Докажем первое свойство, предполагая, что векторы \bar{a} и \bar{b} не коллинеарны (в противном случае обе части доказываемого равенства равны нулевому вектору). По определению векторы $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ и $\bar{d} = [\bar{b}, \bar{a}]$ имеют равные длины ($|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \varphi = |\bar{d}|$) и коллинеарны (так как оба вектора перпендикулярны одной плоскости). По определению тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и $\bar{b}, \bar{a}, \bar{d}$ – правые, т.е.

вектор \bar{c} направлен так, что кратчайший поворот от \bar{a} к \bar{b} происходит в положительном направлении (против часовой стрелки), если смотреть из конца вектора \bar{c} , а вектор \bar{d} направлен так, что кратчайший поворот от \bar{b} к \bar{a} происходит в положительном направлении, если смотреть из конца вектора \bar{d} (рис.1.43). Это означает, что векторы \bar{c} и \bar{d} противоположно направлены. Следовательно, $\bar{c} = -\bar{d}$, что и требовалось доказать. Доказательство остальных свойств приведено ниже (см. п.1 замечаний 1.13).

З а м е ч а н и я 1.12.

1. Свойства аддитивности и однородности векторного произведения означают *линейность векторного произведения по первому множителю*:

$$(\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b}, \bar{c}) = \alpha \cdot (\bar{a}, \bar{c}) + \beta \cdot (\bar{b}, \bar{c})$$

для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и любых действительных чисел α и β .

2. В силу антисимметричности векторное произведение линейно и по второму множителю, т.е. *линейно по любому множителю*.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. *Модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на множителях* (рис.1.42,б).

2. *Векторное произведение равняется нулевому вектору тогда и только тогда, когда множители коллинеарны, т.е.*

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{o} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b},$$

в частности, $[\bar{a}, \bar{a}] = \bar{o}$.

Первое свойство следует из определения. Докажем второе свойство. Равенство $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \varphi = 0$ возможно в трех случаях: $\bar{a} = \bar{o}$, или $\bar{b} = \bar{o}$, или $\sin \varphi = 0$. В каждом из этих случаев векторы \bar{a} и \bar{b} коллинеарны (см. разд.1.1.1).

Пример 1.19. Вычислить площади параллелограмма и треугольника, построенных на векторах $\vec{p} = \vec{m} + 2 \cdot \vec{n}$, $\vec{q} = \vec{m} - 3 \cdot \vec{n}$, где $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$, угол между векторами \vec{m} и \vec{n} равен $\frac{\pi}{6}$ (рис.1.44).

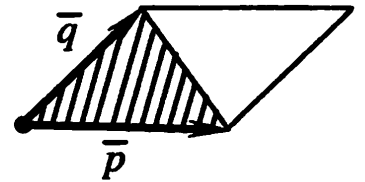


Рис.1.44

□ Используя алгебраические свойства, найдем сначала векторное произведение

$$\begin{aligned} [\vec{p}, \vec{q}] &= [\vec{m} + 2 \cdot \vec{n}, \vec{m} - 3 \cdot \vec{n}] = [\vec{m}, \vec{m} - 3 \cdot \vec{n}] + [2 \cdot \vec{n}, \vec{m} - 3 \cdot \vec{n}] = \\ &= [\vec{m}, \vec{m} - 3 \cdot \vec{n}] + 2 \cdot [\vec{n}, \vec{m} - 3 \cdot \vec{n}] = [\vec{m}, \vec{m}] - 3 \cdot [\vec{m}, \vec{n}] + 2 \cdot ([\vec{n}, \vec{m}] - 3 \cdot [\vec{n}, \vec{n}]) = \\ &= \underbrace{[\vec{m}, \vec{m}]}_{\vec{0}} - 3 \cdot [\vec{m}, \vec{n}] + 2 \cdot \underbrace{[\vec{n}, \vec{m}]}_{-[\vec{m}, \vec{n}]} - 6 \cdot \underbrace{[\vec{n}, \vec{n}]}_{\vec{0}} = -5 \cdot [\vec{m}, \vec{n}], \end{aligned}$$

а затем его модуль $|\vec{p}, \vec{q}| = |-5| \cdot |[\vec{m}, \vec{n}]| = 5 \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 15$.

По первому геометрическому свойству векторного произведения искомая площадь параллелограмма равна $S_{\#} = 15$, а площадь треугольника в 2 раза

меньше: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot S_{\#} = \frac{15}{2}$. ■

ВЫРАЖЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ

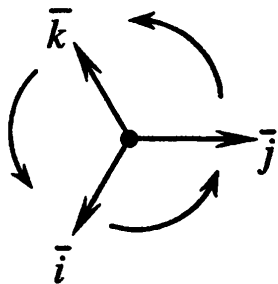


Рис.1.45

Пусть в пространстве задан ортонормированный (стандартный) базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Векторные произведения базисных векторов находятся по определению:

$$\begin{aligned} [\vec{i}, \vec{j}] &= \vec{k}; \quad [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}; \quad [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}; \\ [\vec{j}, \vec{i}] &= -\vec{k}; \quad [\vec{k}, \vec{j}] = -\vec{i}; \quad [\vec{i}, \vec{k}] = -\vec{j}; \\ [\vec{i}, \vec{i}] &= [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = \vec{0}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Формулы (1.14) можно получить, используя диаграмму (рис.1.45): если на этой схеме кратчайший поворот от первого множителя ко второму совершается в положительном направлении (указанном стрелкой), то произведение равно третьему вектору, а если – в отрицательном направлении, то произведение равно третьему вектору, взятому со знаком минус (противоположному вектору).

Найдем выражение векторного произведения через координаты множителей. Пусть в стандартном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторы \vec{a} и \vec{b} имеют координаты x_a, y_a, z_a и x_b, y_b, z_b соответственно. Тогда, используя линейность векторного произведения по любому множителю (см. п.2 замечаний 1.12) и формулы (1.14), получаем

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} + z_a \cdot \vec{k}, x_b \cdot \vec{i} + y_b \cdot \vec{j} + z_b \cdot \vec{k}] =$$

$$\begin{aligned}
&= x_a x_b \cdot [\bar{i}, \bar{i}] + x_a y_b \cdot [\bar{i}, \bar{j}] + x_a z_b \cdot [\bar{i}, \bar{k}] + y_a x_b \cdot [\bar{j}, \bar{i}] + y_a y_b \cdot [\bar{j}, \bar{j}] + \\
&\quad + y_a z_b \cdot [\bar{j}, \bar{k}] + z_a x_b \cdot [\bar{k}, \bar{i}] + z_a y_b \cdot [\bar{k}, \bar{j}] + z_a z_b \cdot [\bar{k}, \bar{k}] = \\
&= \bar{i} \cdot (y_a z_b - y_b z_a) - \bar{j} \cdot (x_a z_b - x_b z_a) + \bar{k} \cdot (x_a y_b - x_b y_a).
\end{aligned}$$

Запишем это равенство при помощи определителей второго порядка:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

Правую часть (1.15) можно представить как результат разложения символического определителя третьего порядка по первой строке

$$\bar{i} \cdot \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Теорема 1.8 (формула вычисления векторного произведения). Если векторы \bar{a} и \bar{b} в правом ортонормированном базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ имеют координаты x_a, y_a, z_a и x_b, y_b, z_b соответственно, то векторное произведение этих векторов находится по формуле (1.15), которую принято записывать в виде

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}. \quad (1.16)$$

Если $\bar{a} = (x_a \ y_a \ z_a)^T$ и $\bar{b} = (x_b \ y_b \ z_b)^T$ – координатные столбцы векторов \bar{a} и \bar{b} в стандартном базисе, то координатный столбец $\bar{c} = (x_c \ y_c \ z_c)^T$ векторного произведения $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ находится по формуле

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -z_a & y_a \\ z_a & 0 & -x_a \\ -y_a & x_a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}.$$

В самом деле, выполняя умножение матрицы на столбец, получаем

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a \cdot z_b - y_b \cdot z_a \\ x_b z_a - x_a \cdot z_b \\ x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a \end{pmatrix}.$$

Тогда $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}] = (y_a \cdot z_b - y_b \cdot z_a) \cdot \bar{i} + (x_b z_a - x_a \cdot z_b) \cdot \bar{j} + (x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a) \cdot \bar{k}$, что совпадает с (1.15).

Пример 1.20. Параллелограмм $ABCD$ построен на векторах $\overline{AB} = \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$, $\overline{AD} = 3 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ (рис.1.46). Найти:

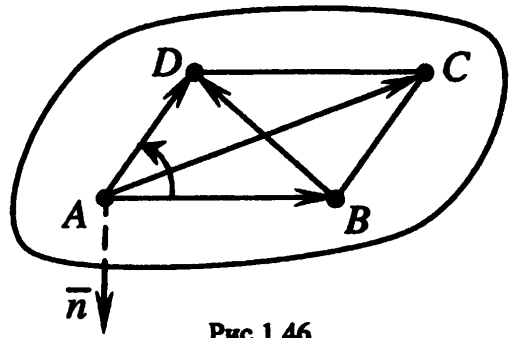


Рис.1.46

а) векторные произведения $[\overline{AB}, \overline{AD}]$ и $[\overline{AC}, \overline{BD}]$;

б) площадь параллелограмма $ABCD$;

в) направляющие косинусы такого вектора \vec{n} , перпендикулярного плоскости параллелограмма $ABCD$, для которого тройка $\overline{AB}, \overline{AD}, \vec{n}$ – левая.

□ а) Векторное произведение $[\overline{AB}, \overline{AD}]$ находим по формуле (1.16):

$$[\overline{AB}, \overline{AD}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{j} - 8 \cdot \vec{k}.$$

Для нахождения векторного произведения можно использовать матричную запись формулы (1.15) (см. теорему 1.8). Векторам $\vec{a} = \overline{AB}$ и $\vec{b} = \overline{AD}$ соответствуют координатные столбцы

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По указанной формуле получаем координатный столбец \vec{c} вектора $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$:

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix},$$

т.е. $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = 6 \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{j} - 8 \cdot \vec{k}$. Результаты совпадают.

Векторное произведение $[\overline{AC}, \overline{BD}]$ находим, используя алгебраические свойства:

$$\begin{aligned} [\overline{AC}, \overline{BD}] &= [\overline{AB} + \overline{AD}, \overline{AD} - \overline{AB}] = [\overline{AB}, \overline{AD}] - \underbrace{[\overline{AB}, \overline{AB}]}_{\vec{0}} + \underbrace{[\overline{AD}, \overline{AD}]}_{\vec{0}} - \underbrace{[\overline{AD}, \overline{AB}]}_{-[\overline{AB}, \overline{AD}]} = \\ &= [\overline{AB}, \overline{AD}] + [\overline{AB}, \overline{AD}] = 2 \cdot [\overline{AB}, \overline{AD}]. \end{aligned}$$

Следовательно, $[\overline{AC}, \overline{BD}] = 2 \cdot (6 \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{j} - 8 \cdot \vec{k}) = 12 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j} - 16 \cdot \vec{k}$.

б) Площадь параллелограмма $ABCD$ находим как модуль векторного произведения $[\overline{AB}, \overline{AD}]$:

$$S_{\#} = |[\overline{AB}, \overline{AD}]| = |6 \cdot \bar{i} + 5 \cdot \bar{j} - 8 \cdot \bar{k}| = \sqrt{6^2 + 5^2 + (-8)^2} = 5\sqrt{5}.$$

в) Вектор, противоположный вектору $[\overline{AB}, \overline{AD}]$, удовлетворяет перечисленным в условии требованиям, поэтому

$$\bar{n} = -[\overline{AB}, \overline{AD}] = -(6 \cdot \bar{i} + 5 \cdot \bar{j} - 8 \cdot \bar{k}) = -6 \cdot \bar{i} - 5 \cdot \bar{j} + 8 \cdot \bar{k}.$$

Разделив этот вектор на его длину $|\bar{n}| = |[\overline{AB}, \overline{AD}]| = 5\sqrt{5}$, получим единичный вектор:

$$\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{-6 \cdot \bar{i} - 5 \cdot \bar{j} + 8 \cdot \bar{k}}{5\sqrt{5}} = -\frac{6}{5\sqrt{5}} \cdot \bar{i} - \frac{5}{5\sqrt{5}} \cdot \bar{j} + \frac{8}{5\sqrt{5}} \cdot \bar{k}.$$

(1.6), его координатами служат направляющие косинусы: $\cos \alpha = \frac{-6}{5\sqrt{5}}$,

$$\cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \gamma = \frac{8}{5\sqrt{5}}. \quad \blacksquare$$

1.5.2. Смешанное произведение и его свойства

Смешанным произведением векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется число $(\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}])$, равное скалярному произведению вектора \bar{a} на векторное произведение векторов \bar{b} и \bar{c} . Смешанное произведение обозначается $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. *Модуль смешанного произведения некопланарных векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ равен объему $V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}}$ параллелепипеда, построенного на этих векторах. Произведение $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ положительно, если тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая, и отрицательно, если тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая, и наоборот.*

2. *Смешанное произведение $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны:*

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0 \Leftrightarrow \text{векторы } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ компланарны.}$$

Докажем первое свойство. Найдем по определению смешанное произведение: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = |\bar{a}| \cdot |[\bar{b}, \bar{c}]| \cdot \cos \psi$, где ψ – угол между векторами \bar{a} и $[\bar{b}, \bar{c}]$. Модуль векторного произведения (по геометрическому свойству 1) равен площади $S_{\# \bar{b}, \bar{c}}$ параллелограмма, построенного на векторах \bar{b} и \bar{c} :

$|\vec{b}, \vec{c}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin \varphi = S_{\vec{b}\vec{c}}$. Поэтому $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = S_{\vec{b}\vec{c}} \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \psi$. Алгебраическое значение $|\vec{a}| \cdot \cos \psi$ длины проекции вектора \vec{a} на ось, задаваемую вектором $[\vec{b}, \vec{c}]$, равно по модулю высоте $h = |\vec{a}| \cdot |\cos \psi|$ параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис.1.47). Поэтому модуль смешанного произведения равен объему $V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}$ этого параллелепипеда:

$$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = S_{\vec{b}\vec{c}} \cdot |\vec{a}| \cdot |\cos \psi| = S_{\vec{b}\vec{c}} \cdot h = V_{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}.$$

Знак смешанного произведения определяется знаком косинуса угла ψ . Если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, то $\psi < \frac{\pi}{2}$ и смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ положительно. Если же тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая, то $\psi > \frac{\pi}{2}$ и смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ отрицательно.

Докажем второе свойство. Равенство $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}, \vec{c}| \cdot \cos \psi = 0$ возможно в

трех случаях: $\vec{a} = \vec{0}$, или $[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{0}$ (т.е. $\vec{b} \parallel \vec{c}$), или $\cos \psi = 0$ (т.е. вектор \vec{a} принадлежит плоскости векторов \vec{b} и \vec{c}). В каждом случае векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны (см. разд.1.1.1).

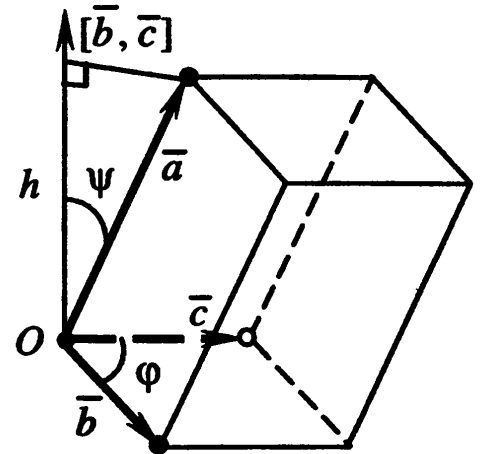


Рис.1.47

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. При перестановке двух множителей смешанное произведение изменяет знак на противоположный:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}), \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}), \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b});$$

при циклической (круговой) перестановке множителей смешанное произведение не изменяется:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}).$$

2. Смешанное произведение линейно по любому множителю.

Первое свойство следует из геометрического свойства 1 и свойств ориентации троек векторов (см. разд.1.3.3), поскольку от перестановки двух множителей модуль смешанного произведения не изменяется, а меняется только ориентация тройки. При циклической перестановке векторов ориентация тройки не изменяется.

Второе свойство следует из линейности скалярного произведения и свойства 1.

Пример 1.21. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, равен V . Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \bar{q} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}, \bar{r} = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$.

□ Используя алгебраические и геометрические свойства, найдем смешанное произведение

$$\begin{aligned}
 (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) &= (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) = \\
 &= (\bar{a}, \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) + (\bar{c}, \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) = \\
 &= \underbrace{(\bar{a}, \bar{a}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{c})}_0 + (\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) - (\bar{a}, \bar{c}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) + \\
 &\quad + (\bar{b}, \bar{a}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) + \underbrace{(\bar{b}, \bar{b}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{c})}_0 - (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) + \\
 &\quad + (\bar{c}, \bar{a}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) + (\bar{c}, \bar{b}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) - \underbrace{(\bar{c}, \bar{c}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{c})}_0 = \\
 &= \underbrace{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a})}_0 - \underbrace{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{b})}_0 + (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) - \underbrace{(\bar{a}, \bar{c}, \bar{a})}_0 + (\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}) - \underbrace{(\bar{a}, \bar{c}, \bar{c})}_0 + \\
 &\quad + \underbrace{(\bar{b}, \bar{a}, \bar{a})}_0 - \underbrace{(\bar{b}, \bar{a}, \bar{b})}_0 + (\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) - (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) + \underbrace{(\bar{b}, \bar{c}, \bar{b})}_0 - \underbrace{(\bar{b}, \bar{c}, \bar{c})}_0 + \\
 &\quad + \underbrace{(\bar{c}, \bar{a}, \bar{a})}_0 - (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) + \underbrace{(\bar{c}, \bar{a}, \bar{c})}_0 + (\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}) - \underbrace{(\bar{c}, \bar{b}, \bar{b})}_0 + \underbrace{(\bar{c}, \bar{b}, \bar{c})}_0 = \\
 &= (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) + \underbrace{(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b})}_{-(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} + \underbrace{(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c})}_{-(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} - \underbrace{(\bar{b}, \bar{c}, \bar{a})}_{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} - \underbrace{(\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})}_{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} + \underbrace{(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a})}_{-(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} = -4 \cdot (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}),
 \end{aligned}$$

а затем его модуль $|(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})| = |-4| \cdot |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})| = 4 \cdot V$. По первому геометрическому свойству смешанного произведения искомый объем равен $4 \cdot V$. ■

Теорема 1.9 (формула вычисления смешанного произведения). Если векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ в правом ортонормированном базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ имеют координаты $x_a, y_a, z_a; x_b, y_b, z_b; x_c, y_c, z_c$ соответственно, то смешанное произведение этих векторов находится по формуле

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}. \quad (1.17)$$

В самом деле, учитывая (1.10) и (1.15), по определению находим:

$$\left(x_a \cdot \bar{i} + y_a \cdot \bar{j} + z_a \cdot \bar{k}, \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix} \right) =$$

$$= x_a \cdot \begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix} - y_a \cdot \begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix} + z_a \cdot \begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и я 1.13.

1. Используя свойства смешанного произведения, можно доказать линейность векторного произведения по первому множителю (см. п.1 замечаний 1.12 в разд.1.5.1):

$$[\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b}, \bar{c}] = \alpha \cdot [\bar{a}, \bar{c}] + \beta \cdot [\bar{b}, \bar{c}].$$

Для этого найдем скалярное произведение вектора в левой части равенства и единичного вектора \bar{i} стандартного базиса. Учитывая линейность смешанного произведения по второму множителю, получаем

$$\begin{aligned} (\bar{i}, [\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b}, \bar{c}]) &= (\bar{i}, \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b}, \bar{c}) = \alpha \cdot (\bar{i}, \bar{a}, \bar{c}) + \beta \cdot (\bar{i}, \bar{b}, \bar{c}) = \\ &= \alpha \cdot (\bar{i}, [\bar{a}, \bar{c}]) + \beta \cdot (\bar{i}, [\bar{b}, \bar{c}]) = (\bar{i}, \alpha \cdot [\bar{a}, \bar{c}] + \beta \cdot [\bar{b}, \bar{c}]), \end{aligned}$$

т.е. абсцисса вектора, стоящего в левой части доказываемого равенства равна абсциссе вектора в правой его части (см. п.3 замечаний 1.10). Аналогично доказываем, что ординаты, а также и аппликаты, векторов в обеих частях равенства соответственно равны. Следовательно, это равные векторы, так как их координаты относительно стандартного базиса совпадают.

2. Из первого алгебраического свойства смешанного произведения и коммутативности скалярного произведения следует, что

$$(\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}]) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}),$$

т.е. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$. Последнее равенство можно взять в качестве эквивалентного определения смешанного произведения.

3. Если тройка векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ является базисом пространства, то тройка векторов

$$\bar{e}_1^* = \frac{[\bar{e}_2, \bar{e}_3]}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}; \quad \bar{e}_2^* = \frac{[\bar{e}_3, \bar{e}_1]}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}; \quad \bar{e}_3^* = \frac{[\bar{e}_1, \bar{e}_2]}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}$$

образует взаимный базис.

В самом деле, указанный вектор \bar{e}_1^* по определению векторного произведения ортогонален векторам \bar{e}_2 и \bar{e}_3 , т.е. $(\bar{e}_2, \bar{e}_1^*) = 0$ и $(\bar{e}_3, \bar{e}_1^*) = 0$, а скалярное произведение (\bar{e}_1, \bar{e}_1^*) равно единице, так как $(\bar{e}_1, \bar{e}_1^*) = \frac{(\bar{e}_1, [\bar{e}_2, \bar{e}_3])}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} = \frac{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} = 1$. Поэтому вектор \bar{e}_1^* содержится во взаимном

базисе. Аналогичные рассуждения проводятся относительно векторов \bar{e}_2^* и \bar{e}_3^* . Поэтому базисы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и $\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*$ взаимные.

4. Если $a = (x_a \ y_a \ z_a)^T$, $b = (x_b \ y_b \ z_b)^T$, $c = (x_c \ y_c \ z_c)^T$ – координатные столбцы векторов \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} в стандартном базисе, то их смешанное произведение находится по формуле

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (x_a \ y_a \ z_a) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -z_b & y_b \\ z_b & 0 & -x_b \\ -y_b & x_b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}.$$

Пример 1.22. Параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ построен на векторах $\overline{AB} = \bar{i} + 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$; $\overline{AD} = 3 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + \bar{k}$; $\overline{AA_1} = 2 \cdot \bar{i} - 1 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k}$ (рис.1.48).

Требуется найти:

а) смешанное произведение $(\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1})$, а также ориентацию тройки $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1}$;

б) объем треугольной пирамиды $ABDA_1$;

в) высоту h параллелепипеда (расстояние между плоскостями оснований $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$).

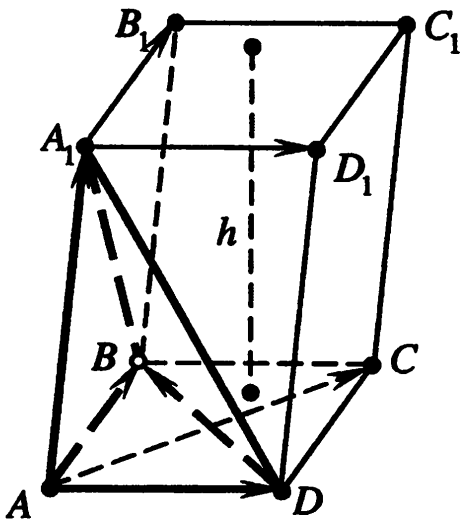


Рис.1.48

□ а) Смешанное произведение $(\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1})$ находим по формуле (1.17):

$$(\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -17.$$

Поскольку произведение отрицательно, то тройка векторов $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1}$ – левая (см. первое геометрическое свойство смешанного произведения).

Для нахождения смешанного произведения можно использовать матричную запись формулы (1.17) (см. п.4 замечаний 1.13). Векторам $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AD}$, $\bar{c} = \overline{AA_1}$ соответствуют координатные столбцы

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

По формуле п.4 замечаний 1.13 получаем

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (1 \ 2 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = -17.$$

Результаты совпадают.

б) Объем V треугольной пирамиды $ABDA_1$ составляет шестую часть объема $V_{\#}$ параллелепипеда. Действительно, их высоты совпадают, а площадь $S_{осн}$ основания пирамиды составляет половину площади $S_{\#}$ параллелограмма $ABCD$. Поэтому $V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{\#} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot V_{\#}$. Поскольку

$$V_{\#} = \left| \overline{(AB, AD, AA_1)} \right| = 17, \text{ то } V = \frac{1}{6} \cdot V_{\#} = \frac{17}{6}.$$

в) Высоту h параллелепипеда найдем по формуле $h = \frac{V_{\#}}{S_{\#}}$, где $S_{\#}$ – площадь параллелограмма $ABCD$. Поскольку $V_{\#} = 17$ и $S_{\#} = 5\sqrt{5}$ (см. пример 1.20), то $h = \frac{17}{5\sqrt{5}}$. ■

1.5.3. Ориентированные площади и объемы

ОРИЕНТИРОВАННАЯ ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Ориентированной площадью $S_{\# \bar{a}, \bar{b}}$ параллелограмма, построенного на неколлинеарных векторах \bar{a} и \bar{b} , называется его площадь $S_{\# \bar{a}, \bar{b}}$, взятая со знаком плюс, если ориентация пары векторов \bar{a} и \bar{b} правая ($S_{\# \bar{a}, \bar{b}}^{\wedge} = S_{\# \bar{a}, \bar{b}}$), и со знаком минус, если ориентация – левая ($S_{\# \bar{a}, \bar{b}}^{\wedge} = -S_{\# \bar{a}, \bar{b}}$).

Внешним (косым) произведением неколлинеарных векторов \bar{a} и \bar{b} на плоскости называется число, равное ориентированной площади $S_{\# \bar{a}, \bar{b}}^{\wedge}$ параллелограмма, построенного на этих векторах. Если векторы \bar{a} и \bar{b} коллинеарны, то их внешнее произведение считается равным нулю. Внешнее произведение обозначается $S_{\# \bar{a}, \bar{b}}^{\wedge} = \bar{a} \wedge \bar{b}$. Его свойства повторяют алгебраические свойства векторного произведения, т.е. для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ на плоскости и любого числа λ справедливы равенства:

- 1) $\bar{a} \wedge \bar{b} = -\bar{b} \wedge \bar{a}$;
- 2) $(\bar{a} + \bar{b}) \wedge \bar{c} = \bar{a} \wedge \bar{c} + \bar{b} \wedge \bar{c}$;
- 3) $(\lambda \cdot \bar{a}) \wedge \bar{b} = \lambda \cdot (\bar{a} \wedge \bar{b})$.

4) Если векторы \bar{a} и \bar{b} в правом ортонормированном базисе \bar{i}, \bar{j} имеют координаты x_a, y_a и x_b, y_b соответственно, то внешнее произведение этих векторов находится по формуле

$$S_{\#\bar{a}, \bar{b}}^{\wedge} = \bar{a} \wedge \bar{b} = \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} = x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b. \quad (1.18)$$

Если $a = (x_a \ y_a)^T$, $b = (x_b \ y_b)^T$ – координатные столбцы векторов \bar{a} , \bar{b} в стандартном базисе на плоскости, то их внешнее произведение находится по формуле

$$S_{\#\bar{a}, \bar{b}}^{\wedge} = \bar{a} \wedge \bar{b} = (x_a \ y_a) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}.$$

Приведенные свойства внешнего произведения следуют из алгебраических свойств векторного произведения, если векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ на плоскости рассматривать как векторы в пространстве с нулевыми аппликатами.

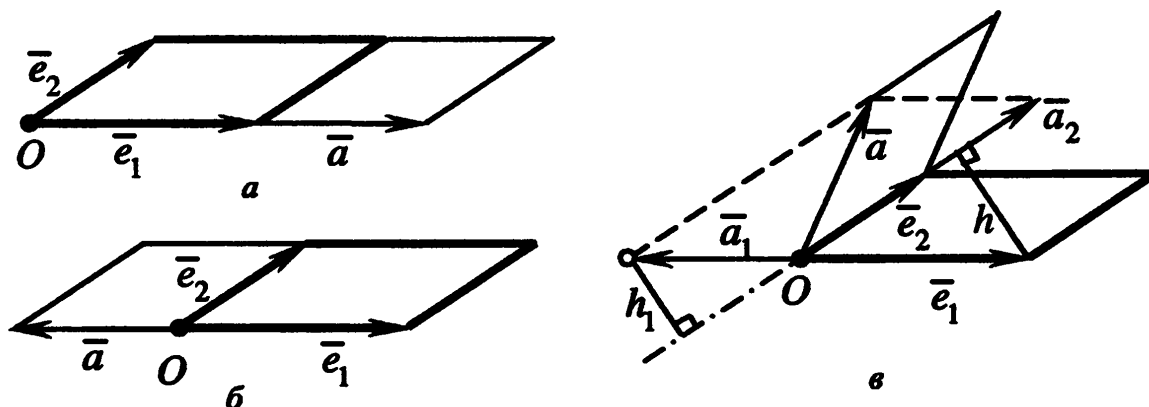


Рис.1.49

Рассмотрим задачу разложения вектора \bar{a} по базису \bar{e}_1, \bar{e}_2 на плоскости. Отложим все векторы от произвольной точки O . Сначала разберем случаи, когда векторы \bar{a} и \bar{e}_1 коллинеарны: одинаково направлены (рис.1.49,а) или противоположно направлены (рис.1.49,б). В этих случаях ордината x_2 вектора \bar{a} равна нулю, а абсцисса находится как отношение

$$x_1 = \frac{\bar{a}}{\bar{e}_1} = \frac{S_{\#\bar{a}, \bar{e}_2}}{S_{\#\bar{e}_1, \bar{e}_2}} = \frac{\bar{a} \wedge \bar{e}_2}{\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2} \quad \text{при } \bar{a} \uparrow \uparrow \bar{e}_1 \text{ (рис.1.49,а);}$$

$$x_1 = \frac{\bar{a}}{\bar{e}_1} = -\frac{S_{\#\bar{a}, \bar{e}_2}}{S_{\#\bar{e}_1, \bar{e}_2}} = \frac{\bar{a} \wedge \bar{e}_2}{\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2} \quad \text{при } \bar{a} \uparrow \downarrow \bar{e}_1 \text{ (рис.1.49,б),}$$

так как пара \bar{a}, \bar{e}_2 в первом случае правая (рис.1.49,а), а во втором случае – левая (рис.1.49,б).

Пусть теперь векторы \bar{a} и \bar{e}_1 не коллинеарны (рис.1.49,в). Построим проекции \bar{a}_1 и \bar{a}_2 на прямые, содержащие базисные векторы: $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$. Из концов векторов \bar{a}_1 и \bar{e}_1 опустим перпендикуляры h_1 и h соответственно на прямую, содержащую вектор \bar{e}_2 . Учитывая, что векторы \bar{a}_1 и \bar{e}_1 противоположно направлены, а также подобие прямоугольных треугольников с гипотенузами \bar{a}_1 и \bar{e}_1 , находим абсциссу x_1 вектора \bar{a} :

$$x_1 = \frac{\bar{a}_1}{\bar{e}_1} = -\frac{h_1}{h} = -\frac{S_{\#\bar{a}, \bar{e}_2}}{S_{\#\bar{e}_1, \bar{e}_2}} = \frac{\bar{a} \wedge \bar{e}_2}{\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2},$$

так как пара \bar{e}_1, \bar{e}_2 – правая, а пара \bar{a}, \bar{e}_2 – левая. Аналогично находится ордината (векторы \bar{a}_2 и \bar{e}_2 одинаково направлены)

$$x_2 = \frac{\bar{a}_2}{\bar{e}_2} = \frac{S_{\#\bar{a}, \bar{e}_1}}{S_{\#\bar{e}_1, \bar{e}_2}} = \frac{\bar{e}_1 \wedge \bar{a}}{\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2}.$$

Таким образом, вектор \bar{a} имеет следующее разложение по базису \bar{e}_1, \bar{e}_2 на плоскости:

$$\bar{a} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2, \quad (1.19)$$

где $x_1 = \frac{\bar{a} \wedge \bar{e}_2}{\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2}; x_2 = \frac{\bar{e}_1 \wedge \bar{a}}{\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2}.$

Рассмотрим применение формулы (1.19) для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot x_2 = c_1, \\ a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 = c_2. \end{cases}$$

Эту систему можно записать в виде $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Рассматривая

полученные столбцы как координатные столбцы векторов $\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}$ в стандартном базисе на плоскости, получаем разложение

$$\bar{c} = x_1 \cdot \bar{a} + x_2 \cdot \bar{b}.$$

Таким образом, нахождение решения системы уравнений свелось к задаче разложения вектора \bar{c} по векторам \bar{a} и \bar{b} . Предполагая, что коэффициенты при неизвестных не пропорциональны, т.е. $a_1 : b_1 \neq a_2 : b_2$ (векторы \bar{a} и \bar{b} не коллинеарны), по формуле (1.19), полагая $\bar{a} = \bar{c}, \bar{e}_1 = \bar{a}, \bar{e}_2 = \bar{b}$, получаем:

$$x_1 = \frac{\bar{c} \wedge \bar{b}}{\bar{a} \wedge \bar{b}} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\bar{a} \wedge \bar{c}}{\bar{a} \wedge \bar{b}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

что совпадает с правилом Крамера (см. разд. П.10, а также [8,10]).

ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ОБЪЕМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Ориентированным объемом $V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}}^{\wedge}$ **параллелепипеда**, построенного на некопланарных векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, называется его объем $V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}}$, взятый со знаком плюс, если ориентация тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ правая ($V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}}^{\wedge} = V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}}$), и со знаком минус, если ориентация – левая ($V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}}^{\wedge} = -V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}}$).

Внешним (косым) произведением некопланарных векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется число, равное ориентированному объему $V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}}^{\wedge}$ параллелепипеда, построенного на этих векторах. Если векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны, то их внешнее произведение считается равным нулю. Внешнее произведение обозначается $V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}}^{\wedge} = \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}$ [5].

Внешнее произведение трех векторов совпадает с их смешанным произведением (в силу первого геометрического свойства смешанного произведения), т.е. $V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}}^{\wedge} = \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$. В ортонормированном базисе

$$V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}}^{\wedge} = \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} = \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}), \quad (1.20)$$

так как определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы (см. разд. П.6).

При помощи ориентированных объемов задача разложения вектора \bar{a} по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в пространстве решается так же как и на плоскости с использованием ориентированных площадей. В результате получаем

$$\bar{a} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + x_3 \cdot \bar{e}_3, \quad (1.21)$$

$$\text{где } x_1 = \frac{(\bar{a}, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}; \quad x_2 = \frac{(\bar{e}_1, \bar{a}, \bar{e}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}; \quad x_3 = \frac{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{a})}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}.$$

Формула (1.21) соответствует правилу Крамера (см. разд.П.10, а также [8,10]) решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 1.23. Заданы координатные столбцы

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ в стандартном базисе. Разложить вектор \bar{d} по векторам $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

□ По формуле (1.20) находим смешанные произведения

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; & (\bar{d}, \bar{b}, \bar{c}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \\ (\bar{a}, \bar{d}, \bar{c}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; & (\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Коэффициенты разложения определяем по формуле (1.21):

$$x_1 = \frac{(\bar{d}, \bar{b}, \bar{c})}{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} = \frac{2}{1} = 2; \quad x_2 = \frac{(\bar{a}, \bar{d}, \bar{c})}{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} = \frac{-1}{1} = -1; \quad x_3 = \frac{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d})}{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} = \frac{3}{1} = 3.$$

Следовательно, $\bar{d} = 2 \cdot \bar{a} - 1 \cdot \bar{b} + 3 \cdot \bar{c}$. ■

1.5.4. Двойное векторное произведение и его свойства

Двойным векторным произведением векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется вектор $[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]]$, равный векторному произведению вектора \bar{a} на векторное произведение векторов \bar{b} и \bar{c} . Произведение $[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]]$ обозначается также $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$.

Двойное векторное произведение обладает следующими свойствами, справедливыми для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

1. $[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]] = (\bar{a}, \bar{c}) \cdot \bar{b} - (\bar{a}, \bar{b}) \cdot \bar{c}$;
2. $[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]] + [\bar{b}, [\bar{c}, \bar{a}]] + [\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}]] = \bar{o}$;
3. $\bar{b} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}|^2} \cdot \bar{a} + \frac{1}{|\bar{a}|^2} \cdot [\bar{a}, [\bar{b}, \bar{a}]], \quad \bar{a} \neq \bar{o}$.

4. Если $a = (x_a \ y_a \ z_a)^T$, $b = (x_b \ y_b \ z_b)^T$, $c = (x_c \ y_c \ z_c)^T$ – координатные столбцы векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ в стандартном базисе, то координаты

натный столбец $d = (x_d \ y_d \ z_d)^T$ двойного векторного произведения $\bar{d} = [\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]]$ находится по формуле

$$\bar{d} = b \cdot a^T \cdot c - c \cdot a^T \cdot b$$

(мнемоническое правило: "бац" минус "цаб").

Первое свойство доказывается, применяя формулы вычисления скалярного и векторного произведений в ортонормированном базисе [8,14].

Второе свойство следует из первого, если сделать циклическую перестановку векторов: $[\bar{b}, [\bar{c}, \bar{a}]] = (\bar{b}, \bar{a}) \cdot \bar{c} - (\bar{b}, \bar{c}) \cdot \bar{a}$, $[\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}]] = (\bar{c}, \bar{b}) \cdot \bar{a} - (\bar{c}, \bar{a}) \cdot \bar{b}$, а затем сложить эти равенства вместе с исходным (учитывая коммутативность скалярного произведения).

Третье свойство следует из первого (если положить $\bar{c} = \bar{a}$). Это равенство дает разложение произвольного вектора \bar{b} в виде суммы ортогональной проекции $\overline{pr}_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}|^2} \cdot \bar{a}$ и ортогональной составляющей

$\bar{b}_{\perp \bar{a}} = \frac{1}{|\bar{a}|^2} \cdot [\bar{a}, [\bar{b}, \bar{a}]]$ вектора \bar{b} относительно оси, задаваемой вектором \bar{a}

(см. разд.1.2.3).

Последнее свойство следует из первого с учетом п.2 замечаний 1.10. Заметим, что все произведения строк и столбцов согласованы, поэтому умножения можно производить в любом порядке, разумеется, не переставляя матрицы.

Пример 1.24. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} + 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$, $\bar{b} = 3 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + \bar{k}$; $\bar{c} = 2 \cdot \bar{i} - 1 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k}$. Требуется:

а) показать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис, и найти векторы $\bar{a}^*, \bar{b}^*, \bar{c}^*$ взаимного базиса;

б) найти двойное векторное произведение $[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]]$;

в) найти ортогональную проекцию вектора \bar{b} на ось, заданную вектором \bar{a} , и ортогональную составляющую вектора \bar{b} относительно этой оси.

□ а) Поскольку смешанное произведение $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -17$, найденное в примере 1.22, отлично от нуля, то векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ не компланарны (согласно второму геометрическому свойству смешанного произведения), т.е. образуют базис пространства. Найдем векторы взаимного базиса по формулам п.3 замечаний 1.13:

$$\bar{a}^* = \frac{[\bar{b}, \bar{c}]}{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} = \frac{1}{-17} \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{17} (-5 \cdot \bar{i} - 7 \cdot \bar{j} + 1 \cdot \bar{k});$$

$$\bar{b}^* = \frac{[\bar{c}, \bar{a}]}{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} = \frac{1}{-17} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{17}(-8 \cdot \bar{i} - 1 \cdot \bar{j} + 5 \cdot \bar{k});$$

$$\bar{c}^* = \frac{[\bar{a}, \bar{b}]}{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} = \frac{1}{-17} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{17}(6 \cdot \bar{i} + 5 \cdot \bar{j} - 8 \cdot \bar{k}).$$

б) По свойству 1 находим

$$\begin{aligned} [\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]] &= (\bar{a}, \bar{c}) \cdot \bar{b} - (\bar{a}, \bar{b}) \cdot \bar{c} = (1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 1 \cdot \bar{k}) - \\ &- (1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot \bar{i} - 1 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k}) = (16 \cdot \bar{i} - 11 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k}). \end{aligned}$$

Для нахождения двойного векторного произведения можно использовать матричную форму записи (см. четвертое свойство). Векторам \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} соответствуют координатные столбцы

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

По свойству 4 получаем координатный столбец d двойного векторного произведения $\bar{d} = [\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]]$:

$$\begin{aligned} d &= \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{pmatrix} = b \cdot a^T \cdot c - c \cdot a^T \cdot b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3) - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

т.е. $\bar{d} = 16 \cdot \bar{i} - 11 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k}$.

в) Учитывая, что $|\bar{a}|^2 = (\bar{a}, \bar{a}) = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$, $(\bar{a}, \bar{b}) = 1$ и

$$\begin{aligned} [\bar{a}, [\bar{b}, \bar{a}]] &= (\bar{a}, \bar{a}) \cdot \bar{b} - (\bar{a}, \bar{b}) \cdot \bar{a} = 9 \cdot \bar{b} - 1 \cdot \bar{a} = \\ &= 9 \cdot (3 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 1 \cdot \bar{k}) - 1 \cdot (1 \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}) = 26 \cdot \bar{i} - 20 \cdot \bar{j} + 7 \cdot \bar{k}, \end{aligned}$$

по свойству 3 находим

$$\begin{aligned} \bar{b} &= \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}|^2} \cdot \bar{a} + \frac{1}{|\bar{a}|^2} \cdot [\bar{a}, [\bar{b}, \bar{a}]] = \frac{1}{9} \cdot \bar{a} + \frac{1}{9} \cdot (9 \cdot \bar{b} - 1 \cdot \bar{a}) = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (1 \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}) + \frac{1}{9} \cdot (26 \cdot \bar{i} - 20 \cdot \bar{j} + 7 \cdot \bar{k}), \end{aligned}$$

т.е. ортогональная проекция $\overline{np_a b} = \frac{1}{9} \cdot \overline{a} = \frac{1}{9} \cdot \overline{i} + \frac{2}{9} \cdot \overline{j} + \frac{2}{9} \cdot \overline{k}$, а ортогональная составляющая равна

$$\overline{b_{\perp a}} = \overline{b} - \overline{np_a b} = \overline{b} - \frac{1}{9} \cdot \overline{a} = \frac{26}{9} \cdot \overline{i} - \frac{20}{9} \cdot \overline{j} + \frac{7}{9} \cdot \overline{k}. \blacksquare$$

1.6. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.6.1. Применение векторов в задачах на аффинные свойства фигур

В данном разделе рассматривается применение векторной алгебры для решения задач аффинной геометрии. В этих задачах, как правило, требуется искать отношения длин отрезков, площадей фигур или объемов тел.

Наряду со свободными векторами будем использовать *радиус-векторы*, т.е. векторы, приложенные к одной (произвольной) точке O пространства.

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ КОМБИНАЦИИ РАДИУС-ВЕКТОРОВ

Множество линейных комбинаций радиус-вектора \overline{OA} называется его *линейной оболочкой* и обозначается

$$Lin(\overline{OA}) = \{ \overline{OM} : \overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA}; \alpha \in R \}.$$

Линейная оболочка $Lin(\overline{OA})$ ненулевого радиус-вектора \overline{OA} представляет собой множество радиус-векторов, концы которых принадлежат прямой OA (рис.1.50,а).



Рис.1.50

В самом деле, ненулевой вектор \overline{OA} образует базис на прямой OA (см. разд. 1.3.1). Поэтому вектор \overline{OM} можно разложить по этому базису (см. теорему 1.3 в разд.1.3.1), т.е. представить в виде $\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA}$, где α – координата вектора \overline{OM} .

Линейная комбинация $\alpha \cdot \overline{OA}$ радиус-вектора \overline{OA} называется *неотрицательной*, если ее коэффициент – неотрицательное число: $\alpha \geq 0$. Множество неотрицательных линейных комбинаций вектора \overline{OA} называется его *конической оболочкой* и обозначается:

$$\text{Con}(\overline{OA}) = \{ \overline{OM} : \overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA}; \alpha \geq 0, \alpha \in R \}.$$

Коническая оболочка $\text{Con}(\overline{OA})$ ненулевого радиус-вектора \overline{OA} представляет собой множество всех радиус-векторов, концы которых принадлежат лучу OA (рис.1.50,б). Действительно, учитывая, что неотрицательная комбинация является линейной, приходим к равенству $\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA}$, где $\alpha \geq 0$. При $\alpha > 0$ векторы \overline{OM} и \overline{OA} одинаково направлены, т.е. точка M принадлежит лучу OA . Если $\alpha = 0$, радиус-вектор \overline{OM} нулевой, т.е. точка M совпадает с точкой O (с началом луча OA).

Множество линейных комбинаций радиус-векторов \overline{OA} и \overline{OB} называется их **линейной оболочкой** и обозначается

$$\text{Lin}(\overline{OA}, \overline{OB}) = \{ \overline{OM} : \overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB}; \alpha \in R, \beta \in R \}.$$

Покажем, что линейная оболочка $\text{Lin}(\overline{OA}, \overline{OB})$ двух неколлинеарных радиус-векторов представляет собой множество таких радиус-векторов, концы которых (и сами векторы) принадлежат плоскости, проходящей через точки O, A, B (рис.1.51,а).

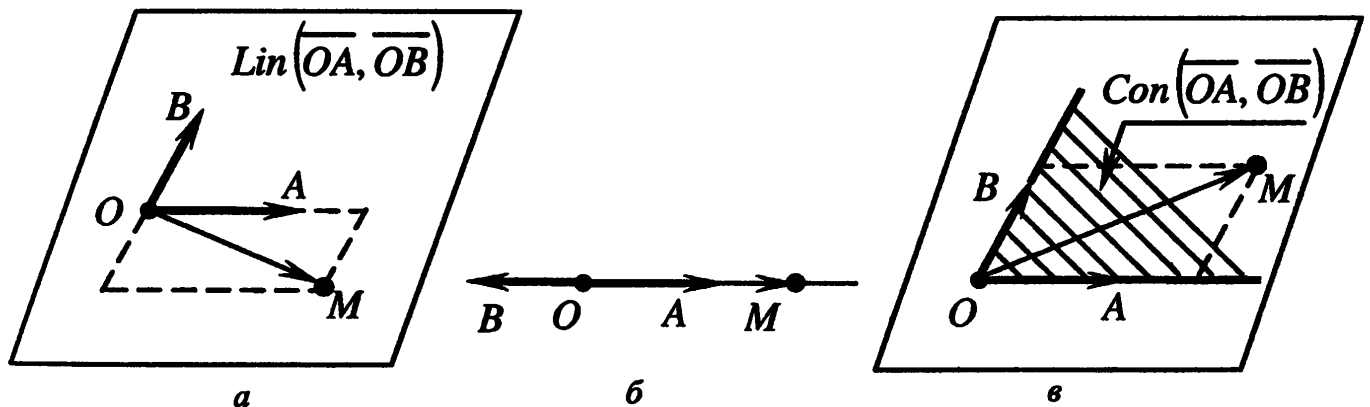


Рис.1.51

Действительно, неколлинеарные векторы \overline{OA} и \overline{OB} образуют базис на плоскости, проходящей через точки O, A, B (см. разд.1.3.2). Поэтому для любой точки M этой плоскости радиус-вектор \overline{OM} можно разложить по базису (см. теорему 1.4 в разд.1.3.2), т.е. представить в виде $\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB}$, где α, β – координаты вектора \overline{OM} . И наоборот, для любых чисел α, β радиус-вектор $\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB}$, а следовательно, и точка M , принадлежат указанной плоскости.

Если векторы \overline{OA} и \overline{OB} коллинеарны, то любая их линейная комбинация принадлежит прямой AB (рис.1.51,б).

Линейная комбинация $\alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB}$ радиус-векторов \overline{OA} и \overline{OB} называется **неотрицательной**, если ее коэффициенты – неотрицательные числа:

$\alpha \geq 0, \beta \geq 0$. Множество неотрицательных линейных комбинаций векторов \overline{OA} и \overline{OB} называется их *конической оболочкой* и обозначается:

$$\text{Con}(\overline{OA}, \overline{OB}) = \{ \overline{OM} : \overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB}; \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha \in R, \beta \in R \}.$$

Коническая оболочка $\text{Con}(\overline{OA}, \overline{OB})$ представляет собой множество всех радиус-векторов, концы которых принадлежат плоскому углу AOB (заштрихованное множество на рис.1.51,в).

Множество линейных комбинаций радиус-векторов $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ называется их *линейной оболочкой* и обозначается

$$\text{Lin}(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}) = \{ \overline{OM} : \overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC}; \alpha \in R, \beta \in R, \gamma \in R \}.$$

Любой радиус-вектор \overline{OM} принадлежит линейной оболочке $\text{Lin}(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})$ трех некопланарных радиус-векторов $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$.

В самом деле, векторы $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ (рис.1.52,а) образуют базис в пространстве (см. разд.1.3.3). Поэтому (см. теорему 1.5 в разд.1.3.3) любой радиус-вектор \overline{OM} можно разложить по этому базису, т.е. представить в виде $\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC}$, где α, β, γ – координаты вектора \overline{OM} .

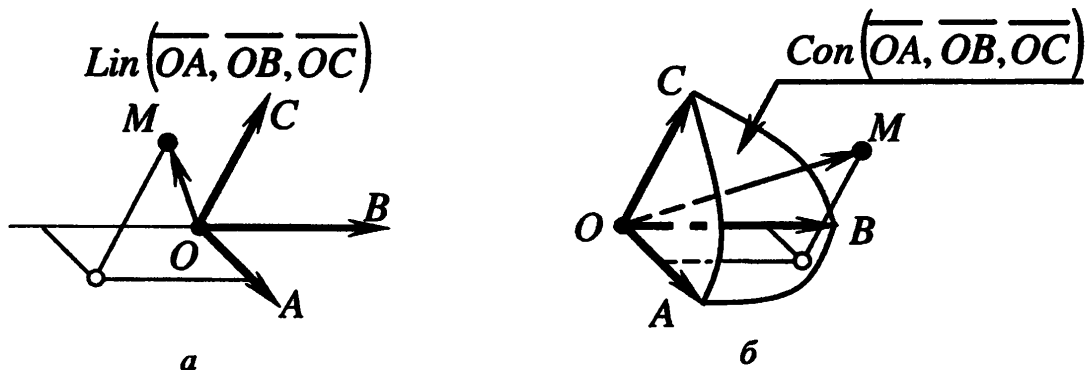


Рис.1.52

Линейная комбинация $\alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC}$ радиус-векторов $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ называется *неотрицательной*, если ее коэффициенты – неотрицательные числа: $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$. Множество неотрицательных линейных комбинаций векторов $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ называется их *конической оболочкой* и обозначается:

$$\text{Con}(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}) = \{ \overline{OM} : \overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC}; \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \alpha \in R, \beta \in R, \gamma \in R \}.$$

Коническая оболочка $\text{Con}(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})$ трех некопланарных векторов представляет собой множество всех радиус-векторов, концы которых принадлежат трехгранному углу $OABC$ (рис.1.52,б).

Понятия линейной или неотрицательной комбинаций векторов распространяются на любое конечное число векторов.

Векторы $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$ называются *образующими* линейной оболочки $Lin(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k})$ и, соответственно, конической оболочки $Con(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k})$.

АФФИННЫЕ И ВЫПУКЛЫЕ КОМБИНАЦИИ РАДИУС-ВЕКТОРОВ

Линейная комбинация $\alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB}$ радиус-векторов \overline{OA} и \overline{OB} называется *аффинной*, если сумма ее коэффициентов равна единице: $\alpha + \beta = 1$.

Множество аффинных комбинаций векторов \overline{OA} и \overline{OB} называется их *аффинной оболочкой* и обозначается:

$$Aff(\overline{OA}, \overline{OB}) = \{ \overline{OM} : \overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB}; \alpha + \beta = 1, \alpha \in R, \beta \in R \}.$$

Покажем, что аффинная оболочка $Aff(\overline{OA}, \overline{OB})$ представляет собой множество всех радиус-векторов, концы которых принадлежат прямой AB . Действительно, равенство $\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB}$ при $\alpha + \beta = 1$ можно представить в виде $\overline{OM} = (1 - \beta) \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} = \overline{OA} + \beta \cdot (\overline{OB} - \overline{OA})$. Отсюда следует, что $\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA} = \beta \cdot \overline{AB}$, т.е. векторы \overline{AM} и \overline{AB} коллинеарны (рис.1.53,а). Следовательно, точка M принадлежит прямой AB . Проводя рассуждения в обратном порядке, заключаем, что для любой точки M , принадлежащей прямой AB , найдутся такие числа α и β , что

$$\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} \text{ и } \alpha + \beta = 1.$$

Линейная комбинация $\alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB}$ радиус-векторов \overline{OA} и \overline{OB} называется *выпуклой*, если все ее коэффициенты – неотрицательные числа, а их сумма равна единице: $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$. Множество выпуклых комбинаций векторов \overline{OA} и \overline{OB} называется их *выпуклой оболочкой* и обозначается:

$$Conv(\overline{OA}, \overline{OB}) = \{ \overline{OM} : \overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB}; \alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha \in R, \beta \in R \}.$$

Покажем, что выпуклая оболочка $Conv(\overline{OA}, \overline{OB})$ представляет собой множество всех радиус-векторов, концы которых принадлежат отрезку AB (рис.1.53,б). Действительно, учитывая, что выпуклая комбинация является аффинной, приходим к равенству $\overline{AM} = \beta \cdot \overline{AB}$, где $0 \leq \beta \leq 1$. Это равенство означает, что точка M принадлежит отрезку AB (включая его концы: M совпадает с точкой B при $\beta = 1$ и с точкой A при $\beta = 0$). Поскольку

$$\overline{MB} = \overline{AB} - \overline{AM} = \overline{AB} - \beta \cdot \overline{AB} = (1 - \beta) \cdot \overline{AB} = \alpha \cdot \overline{AB}, \text{ то } \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\beta \cdot \overline{AB}}{\alpha \cdot \overline{AB}} = \frac{\beta}{\alpha}. \text{ При}$$

этом говорят, что точка M делит отрезок AB в отношении $AM : MB = \beta : \alpha$ ($\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$).

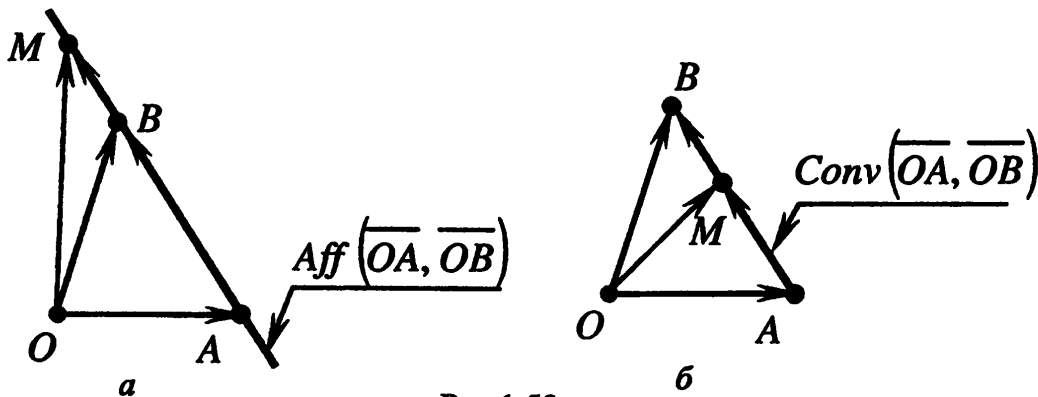


Рис.1.53

Рассмотрим аффинные и выпуклые комбинации трех радиус-векторов. Линейная комбинация $\alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC}$ радиус-векторов \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} называется **аффинной**, если сумма ее коэффициентов равна единице: $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Множество аффинных комбинаций векторов \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} называется их **аффинной оболочкой** и обозначается:

$$\text{Aff}(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}) = \left\{ \overline{OM} : \overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC}; \right. \\ \left. \alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha \in R, \beta \in R, \gamma \in R \right\}.$$

Покажем, что аффинная оболочка $\text{Aff}(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})$ представляет собой множество всех радиус-векторов, концы которых принадлежат плоскости, проходящей через точки A, B, C (рис.1.54,а). Действительно, исключая в равенстве $\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC}$ коэффициент $\alpha = 1 - \beta - \gamma$, получаем

$$\overline{OM} = (1 - \beta - \gamma) \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC} = \overline{OA} + \beta \cdot (\overline{OB} - \overline{OA}) + \gamma \cdot (\overline{OC} - \overline{OA}).$$

Отсюда следует, что $\overline{OM} - \overline{OA} = \beta \cdot (\overline{OB} - \overline{OA}) + \gamma \cdot (\overline{OC} - \overline{OA})$, т.е. $\overline{AM} = \beta \cdot \overline{AB} + \gamma \cdot \overline{AC}$. Если векторы \overline{AB} , \overline{AC} коллинеарны (точки A, B, C принадлежат одной прямой), то и точка M принадлежит той же прямой, а также любой плоскости, проходящей через точки A, B, C . Если же векторы \overline{AB} , \overline{AC} не коллинеарные (точки A, B, C не принадлежат одной прямой), то точка M принадлежит плоскости, проходящей через точки A, B, C , так как вектор \overline{AM} разлагается по векторам \overline{AB} , \overline{AC} , принадлежащим этой плоскости.

Проводя рассуждения в обратном порядке, приходим к выводу, что для любой точки M , принадлежащей плоскости, проходящей через точки A, B, C , найдутся числа α, β, γ такие, что

$$\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Линейная комбинация $\alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC}$ радиус-векторов \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} называется **выпуклой**, если все ее коэффициенты – неотрицательные числа, а их сумма равна единице: $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Множество выпуклых комбинаций векторов \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} называется их **выпуклой оболочкой** и обозначается:

$$\text{Conv}(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}) = \left\{ \overline{OM} : \overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC}; \right. \\ \left. \alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0 \right\}.$$

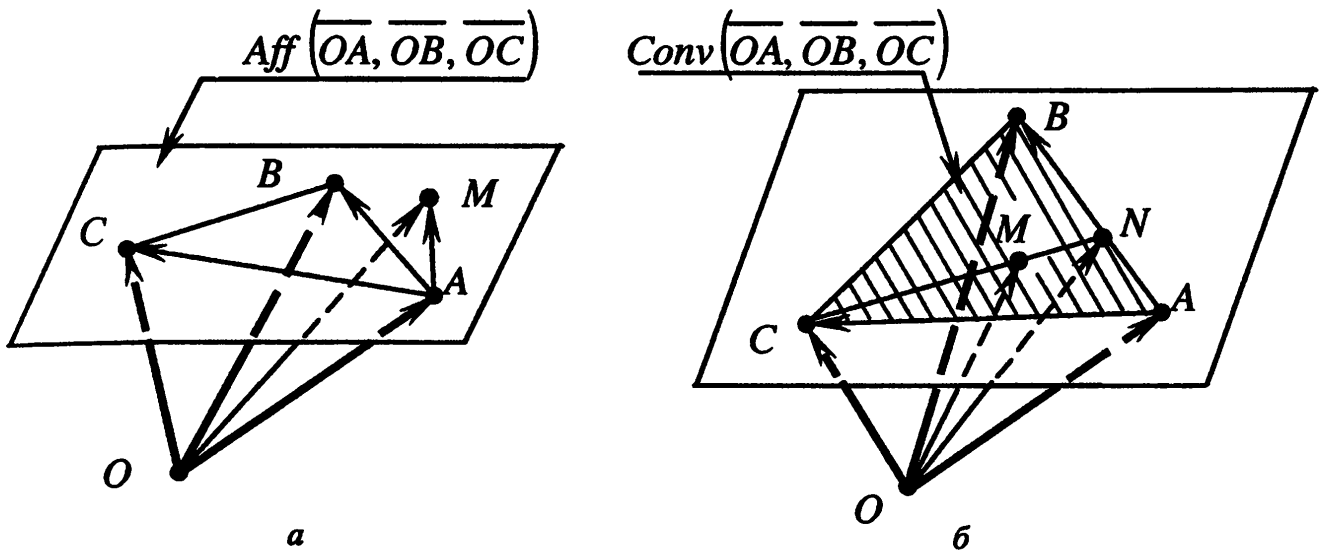


Рис.1.54

Покажем, что выпуклая оболочка $\text{Conv}(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})$ представляет собой множество всех радиус-векторов, концы которых принадлежат плоскому треугольнику ABC (предполагаем, что точки A , B , C не лежат на одной прямой). Действительно, если $\gamma = 1$, то $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и

$$\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC} = \overline{OC},$$

т.е. точка M совпадает с вершиной C треугольника ABC . Пусть $0 \leq \gamma < 1$, тогда $\alpha + \beta = 1 - \gamma$ и

$$\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC} = (1 - \gamma) \cdot \underbrace{\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \overline{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overline{OB} \right)}_{\overline{ON}} + \gamma \cdot \overline{OC} = \\ = (1 - \gamma) \cdot \overline{ON} + \gamma \cdot \overline{OC}.$$

Здесь $\overline{ON} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \overline{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overline{OB}$ – выпуклая комбинация векторов \overline{OA} и \overline{OB} , поскольку ее коэффициенты – неотрицательные числа, а их сумма равна единице. Следовательно, точка N принадлежит стороне AB треугольни-

ка ABC и делит ее в отношении $AN : NB = \beta : \alpha$ (рис.1.54,б). В свою очередь, точка M принадлежит отрезку CN , так как $\overline{OM} = (1-\gamma) \cdot \overline{ON} + \gamma \cdot \overline{OC}$ – выпуклая оболочка векторов \overline{ON} и \overline{OC} . Поэтому точка M принадлежит плоскому треугольнику ABC (включая его внутренность). Заметим, что точка M делит отрезок CN в отношении $MN : CM = \gamma : (1-\gamma)$. Тогда $MN - \gamma \cdot MN = \gamma \cdot CM$, т.е. $MN = \gamma \cdot (CM + MN) = \gamma \cdot CN$. Отсюда $CN : MN = 1 : \gamma$. Это отношение равно отношению площадей треугольников ABC и MAB (поскольку у них общее основание AB , а высоты, опущенные на это основание относятся как $CN : MN$). Следовательно, $CN : MN = 1 : \gamma = S_{ABC} : S_{MAB}$. Аналогично можно показать, что $1 : \alpha = S_{ABC} : S_{MBC}$ и $1 : \beta = S_{ABC} : S_{MCA}$. Таким образом, коэффициенты α , β , γ выпуклой комбинации равны отношениям площадей соответствующих треугольников:

$$\alpha = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}; \quad \beta = \frac{S_{MCA}}{S_{ABC}}; \quad \gamma = \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}.$$

Говорят, что точка M "делит" площадь треугольника ABC в отношении $S_{MBC} : S_{MCA} : S_{MAB} = \alpha : \beta : \gamma$.

Понятия аффинной и выпуклой комбинаций векторов распространяются на любое конечное число векторов.

Векторы $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$ называются *образующими* аффинной оболочки $Aff(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k})$ и, соответственно, выпуклой оболочки $Conv(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k})$.

СВОЙСТВА АФФИННЫХ И ВЫПУКЛЫХ КОМБИНАЦИЙ РАДИУС-ВЕКТОРОВ

Сформулируем полученные результаты в виде свойств.

1. Точка M , удовлетворяющая равенству

$$\overline{OM} = t \cdot \overline{OA} + (1-t) \cdot \overline{OB}, \quad t \in R, \quad (1.22)$$

принадлежит прямой AB , и наоборот, для любой точки M , принадлежащей прямой AB , найдется единственное действительное значение параметра t , при котором справедливо разложение (1.22). Другими словами: геометрическим местом точек M , удовлетворяющим условию (1.22), является прямая AB .

2. Геометрическим местом точек M , удовлетворяющим условию

$$\overline{OM} = t \cdot \overline{OA} + (1-t) \cdot \overline{OB}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

является отрезок AB . При $t=0$ точка M совпадает с точкой B , при $t=1$ — с точкой A , при $0 < t < 1$ точка M делит отрезок AB в отношении (рис.1.55,а):

$$AM : MB = (1-t) : t.$$

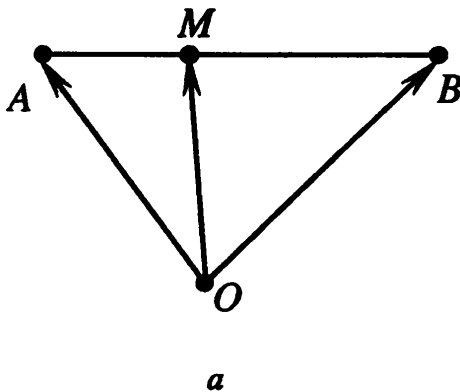
И наоборот, если точка M делит отрезок AB в отношении $\frac{AM}{MB} = \frac{\beta}{\alpha}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), то

$$\overline{OM} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \overline{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overline{OB}.$$

В частности, точка M является серединой отрезка AB ($\frac{AM}{MB} = \frac{\beta}{\alpha} = 1$) тогда и только тогда, когда

$$\overline{OM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overline{OB}.$$

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= t \cdot \overline{OA} + (1-t) \cdot \overline{OB}; \\ \overline{AM} : \overline{MB} &= (1-t) : t \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \overline{OM} &= a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB} + c \cdot \overline{OC}; \\ S_{MBC} : S_{MCA} : S_{MAB} &= a : b : c \end{aligned}$$

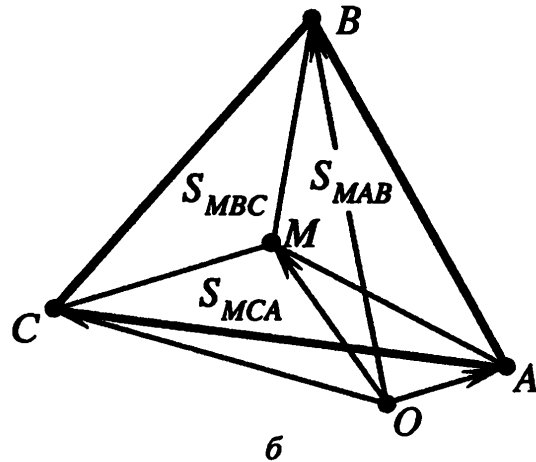


Рис.1.55

3. Точка M , удовлетворяющая равенству

$$\overline{OM} = t \cdot \overline{OA} + s \cdot \overline{OB} + (1-t-s) \cdot \overline{OC}, \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}, \quad (1.23)$$

принадлежит плоскости, проходящей через точки A, B, C , и наоборот, для любой точки M , принадлежащей плоскости, проходящей через точки A, B, C , не лежащие на одной прямой, найдутся единственные действительные значения параметров t и s , при которых справедливо разложение (1.23). Другими словами: геометрическим местом точек M , удовлетворяющим условию (1.23), является плоскость, проходящая через точки A, B, C , не лежащие на одной прямой.

4. Пусть A, B, C — точки не лежащие на одной прямой. Геометрическим местом точек M , удовлетворяющим условию

$$\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC},$$

где все коэффициенты α, β, γ – неотрицательные числа, сумма которых равна единице, является плоский треугольник ABC . Если коэффициенты α, β, γ положительные и $\alpha + \beta + \gamma = 1$, то точка M "делит" площадь треугольника ABC в отношении (рис.1.55,б):

$$S_{MBC} : S_{MCA} : S_{MAB} = \alpha : \beta : \gamma.$$

И наоборот, если точка M "делит" площадь треугольника ABC в отношении $S_{MBC} : S_{MCA} : S_{MAB} = \alpha : \beta : \gamma$ ($\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$), то

$$\overline{OM} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \cdot \overline{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \cdot \overline{OB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \cdot \overline{OC}.$$

В частности, точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC тогда и только тогда, когда

$$\overline{OM} = \frac{1}{3} \cdot \overline{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overline{OB} + \frac{1}{3} \cdot \overline{OC}.$$

5. Пусть A, B, C, D – точки, не лежащие в одной плоскости. Геометрическим местом точек M , удовлетворяющим условию

$$\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} + \gamma \cdot \overline{OC} + \delta \cdot \overline{OD},$$

где все коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – неотрицательные числа, сумма которых равна единице, является треугольная пирамида (тетраэдр) $ABCD$, включая внутренние ее точки. Если коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ положительные и $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$, то точка M "делит" объем тетраэдра $ABCD$ в отношении:

$$V_{MBCD} : V_{MCDA} : V_{MDAB} : V_{MABC} = \alpha : \beta : \gamma : \delta.$$

6. В свойствах 1–5 точка O приложения радиус-векторов произвольная.

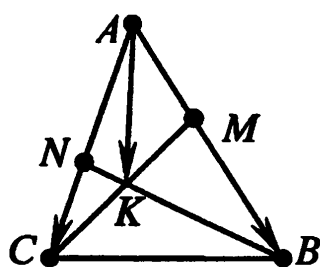


Рис.1.56

Пример 1.25. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 2 : 3$ и $AN : NC = 3 : 5$. В каком отношении делится каждый из отрезков BN и CM точкой K их пересечения?

□ Поскольку векторы \overline{AB} и \overline{AC} неколлинеарные, выберем их в качестве базиса на плоскости.

С одной стороны, точка K принадлежит прямой BN (рис.1.56), поэтому существует такое значение t , при котором $\overline{AK} = t \cdot \overline{AN} + (1-t) \cdot \overline{AB}$. С другой стороны, точка K принадлежит прямой CM , поэтому найдется такое значение s , при котором $\overline{AK} = s \cdot \overline{AM} + (1-s) \cdot \overline{AC}$. Учитывая, что $\overline{AN} = \frac{3}{8} \cdot \overline{AC}$

и $\overline{AM} = \frac{2}{5} \cdot \overline{AB}$, получаем: $\overline{AK} = t \cdot \frac{3}{8} \cdot \overline{AC} + (1-t) \cdot \overline{AB} = s \cdot \frac{2}{5} \cdot \overline{AB} + (1-s) \cdot \overline{AC}$.

В силу единственности разложения вектора \overline{AK} по базису на плоскости, приравниваем соответствующие координаты:

$$\begin{cases} \frac{3}{8} \cdot t = 1 - s, \\ 1 - t = \frac{2}{5} \cdot s, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 8 - 8s, \\ 5 - 5t = 2 \cdot s, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{12}{17}, \\ s = \frac{25}{34}. \end{cases}$$

Таким образом, $\overline{AK} = t \cdot \overline{AN} + (1-t) \cdot \overline{AB} \Big|_{t=\frac{12}{17}} = \frac{12}{17} \cdot \overline{AN} + \frac{5}{17} \cdot \overline{AB}$, т.е. точка K

делит отрезок BN в отношении $BK:KN = 12:5$. Из равенства

$$\overline{AK} = s \cdot \overline{AM} + (1-s) \cdot \overline{AC} \Big|_{s=\frac{25}{34}} = \frac{25}{34} \cdot \overline{AM} + \frac{9}{34} \cdot \overline{AC} \quad \text{делаем вывод:}$$

$$CK:KM = 25:9. \blacksquare$$

Пример 1.26. В треугольной пирамиде $OABC$ найти сумму векторов, соединяющих каждую из вершин с точкой пересечения медиан противоположной грани.

□ Пусть A_1, B_1, C_1, O_1 – точки пересечения медиан граней OBC, OAC, OAB, ABC соответственно. Требуется найти сумму $\overline{OO_1} + \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}$.

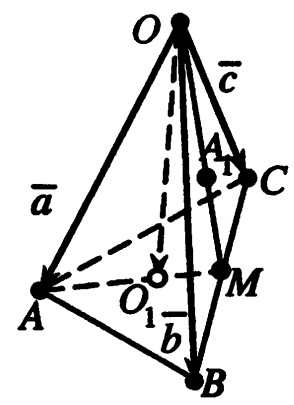


Рис.1.57

Возьмем некопланарные векторы $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$, $\overline{c} = \overline{OC}$ в качестве базисных и разложим все слагаемые искомой суммы по этому базису. Пусть M – середина ребра BC (рис.1.57). Применяя свойство медиан ($AO_1:O_1M = 2:1$) и свойство 2 аффинных и выпуклых комбинаций при $\alpha = 1$, $\beta = 2$, находим:

$$\begin{aligned} \overline{OO_1} &= \frac{1}{3} \cdot \overline{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overline{OM} = \frac{1}{3} \cdot \overline{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overline{b} + \overline{c}) = \frac{1}{3} \cdot (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}); \\ \overline{AA_1} &= \overline{OA_1} - \overline{OA} = \frac{2}{3} \cdot \overline{OM} - \overline{OA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overline{b} + \overline{c}) - \overline{a} = \frac{1}{3} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) - \overline{a}. \end{aligned}$$

Аналогично (меняя циклически буквы) получаем

$$\overline{BB_1} = \frac{1}{3} \cdot (\overline{a} + \overline{c}) - \overline{b}; \quad \overline{CC_1} = \frac{1}{3} \cdot (\overline{a} + \overline{b}) - \overline{c}.$$

Складывая все разложения, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \overline{OO_1} + \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} &= \\ &= \underbrace{\frac{1}{3} \cdot (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})}_{\overline{OO_1}} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) - \overline{a}}_{\overline{AA_1}} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot (\overline{a} + \overline{c}) - \overline{b}}_{\overline{BB_1}} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot (\overline{a} + \overline{b}) - \overline{c}}_{\overline{CC_1}} = \overline{0}, \end{aligned}$$

т.е. искомая сумма равна нулевому вектору. ■

Пример 1.27. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. На боковых ребрах SB и SC взяты соответственно точки B_1 и C_1 так, что $SB_1:B_1B = 5:2$ и $SC_1:C_1C = 4:3$. В каком

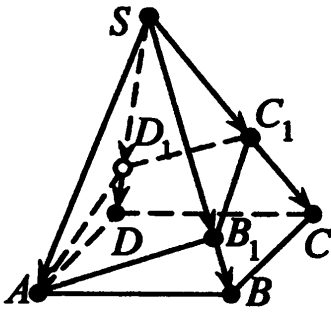


Рис.1.58

отношении делит ребро SD плоскость π , проходящая через точки A, B_1, C_1 ?

□ Пусть D_1 точка пересечения плоскости с ребром SD (рис.1.58). Найдем отношение $\frac{\overline{SD_1}}{\overline{SD}} = \lambda$.

Для этого разложим векторы $\overline{SD_1}$ и \overline{SD} по базису $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}$. Так как точка D_1 принадлежит плоско-

сти π , то по формуле (1.23)

$$\overline{SD_1} = t \cdot \overline{SA} + s \cdot \overline{SB_1} + (1-t-s) \cdot \overline{SC_1} = t \cdot \overline{SA} + s \cdot \frac{5}{7} \cdot \overline{SB} + (1-t-s) \cdot \frac{4}{7} \cdot \overline{SC};$$

$$\overline{SD} = \overline{SA} + \overline{AD} = \overline{SA} + \overline{BC} = \overline{SA} + \overline{SC} - \overline{SB}.$$

Подставляя в равенство $\overline{SD_1} = \lambda \cdot \overline{SD}$ полученные разложения, находим

$$t \cdot \overline{SA} + s \cdot \frac{5}{7} \cdot \overline{SB} + (1-t-s) \cdot \frac{4}{7} \cdot \overline{SC} = \lambda \cdot \overline{SA} - \lambda \cdot \overline{SB} + \lambda \cdot \overline{SC}.$$

Записываем равенства соответствующих координат равных векторов:

$$\begin{cases} t = \lambda, \\ \frac{5}{7}s = -\lambda, \\ \frac{4}{7}(1-t-s) = \lambda. \end{cases}$$

Подставляя $t = \lambda$ и $s = -\frac{7}{5}\lambda$ в последнее уравнение системы, получаем

$$\frac{4}{7}(1 - \lambda + \frac{7}{5}\lambda) = \lambda. \text{ Отсюда } \lambda = \frac{20}{27}, \text{ т.е. } \frac{\overline{SD_1}}{\overline{SD}} = \frac{20}{27}. \text{ Следовательно, плоскость}$$

делит ребро в отношении $20:7$ (считая от вершины пирамиды). ■

1.6.2. Метрические приложения произведений векторов

Перечислим свойства скалярного, векторного и смешанного произведений (см. разд.1.4,1.5), применяемые при решении геометрических задач.

Предполагается, что координаты векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, указанные в формулах, найдены относительно стандартного базиса $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ в пространстве:

$$\overline{a} = x_a \cdot \overline{i} + y_a \cdot \overline{j} + z_a \cdot \overline{k}, \quad \overline{b} = x_b \cdot \overline{i} + y_b \cdot \overline{j} + z_b \cdot \overline{k}, \quad \overline{c} = x_c \cdot \overline{i} + y_c \cdot \overline{j} + z_c \cdot \overline{k}.$$

Напомним, что в стандартном базисе скалярное, векторное, смешанное произведения векторов вычисляются по формулам (1.10),(1.16),(1.17):

$$(\overline{a}, \overline{b}) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b;$$

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}; \quad (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

1. Вектор $\bar{a} = \bar{0}$ тогда и только тогда, когда

$$(\bar{a}, \bar{a}) = 0 \Leftrightarrow x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 = 0 \Leftrightarrow x_a = y_a = z_a = 0.$$

2. Ненулевые векторы \bar{a} и \bar{b} ортогональны тогда и только тогда, когда

$$(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b = 0.$$

3. Векторы \bar{a} и \bar{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \bar{0} \Leftrightarrow \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}.$$

4. Векторы \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} компланарны тогда и только тогда, когда

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = 0.$$

5. Длина вектора \bar{a} вычисляется по формуле:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}.$$

6. Угол φ между ненулевыми векторами \bar{a} и \bar{b} вычисляется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{\sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} \cdot \sqrt{(\bar{b}, \bar{b})}} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

7. Алгебраическое значение длины ортогональной проекции вектора \bar{a} на ось, задаваемую вектором $\bar{b} \neq \bar{0}$, находится по формуле:

$$\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

8. Ортогональная проекция вектора \bar{a} на ось, задаваемую вектором $\bar{b} \neq \bar{0}$:

$$\overline{\text{пр}}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{(\bar{b}, \bar{b})} \cdot \bar{b} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b}{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2} \cdot (x_b \cdot \bar{i} + y_b \cdot \bar{j} + z_b \cdot \bar{k}).$$

9. Направляющие косинусы вектора \bar{a} находятся по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{(\bar{a}, \bar{i})}{|\bar{a}|} = \frac{x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}; \quad \cos \beta = \frac{(\bar{a}, \bar{j})}{|\bar{a}|} = \frac{y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{(\bar{a}, \bar{k})}{|\bar{a}|} = \frac{z_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}.$$

10. Единичный вектор \bar{e} , одинаково направленный с вектором \bar{a} , находится по формуле:

$$\bar{e} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \bar{i} \cdot \cos \alpha + \bar{j} \cdot \cos \beta + \bar{k} \cdot \cos \gamma.$$

11. Площадь $S_{\# \bar{a}, \bar{b}}$ параллелограмма, построенного на векторах \bar{a} и \bar{b} , вычисляется по формуле: $S_{\# \bar{a}, \bar{b}} = |[\bar{a}, \bar{b}]|$.

12. Объём $V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}}$ параллелепипеда, построенного на векторах \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , вычисляется по формуле: $V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$.

13. Тройка некопланарных векторов \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} – правая (левая) тогда и только тогда, когда $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) > 0$ (соответственно, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) < 0$).

14. Высота h параллелограмма, построенного на векторах \bar{a} , \bar{b} , вычисляется по формуле (см. рис.1.42,б):

$$h = \frac{S_{\# \bar{a}, \bar{b}}}{|\bar{a}|} = \frac{|[\bar{a}, \bar{b}]|}{\sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}}.$$

15. Высота h параллелепипеда, построенного на векторах \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , находится по формуле (см. рис.1.47):

$$h = \frac{V_{\# \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}}}{S_{\# \bar{b}, \bar{c}}} = \frac{|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|}{|[\bar{b}, \bar{c}]|}.$$

16. Угол ψ между вектором \bar{a} и плоскостью, содержащей векторы \bar{b} и \bar{c} , дополняет до прямого угла угол φ между вектором \bar{a} и вектором $\bar{n} = [\bar{b}, \bar{c}]$, перпендикулярным плоскости (рис.1.59,а), и вычисляется по формуле:

$$\sin \psi = |\cos \varphi| = \frac{|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|}{|\bar{a}| \cdot |[\bar{b}, \bar{c}]|}.$$

17. Угол δ между плоскостями, содержащими векторы \bar{a}, \bar{b} и \bar{c}, \bar{d} соответственно, вычисляется как угол между векторами $\bar{m} = [\bar{a}, \bar{b}]$, $\bar{n} = [\bar{c}, \bar{d}]$, перпендикулярными данным плоскостям, по формуле (рис.1.59,б):

$$\cos \delta = \frac{|([\bar{a}, \bar{b}], [\bar{c}, \bar{d}])|}{|[\bar{a}, \bar{b}]| \cdot |[\bar{c}, \bar{d}]|}.$$

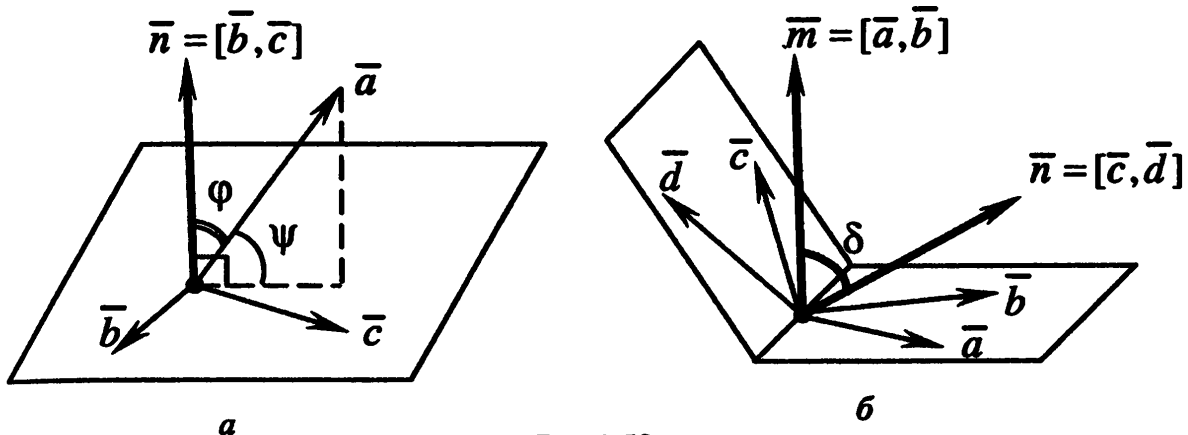


Рис.1.59

З а м е ч а н и я 1.14.

1. Указанные формулы применяются также для векторов на плоскости, полагая, что их аппликаты равны нулю.

2. Площадь S_{ABC} треугольника ABC можно найти как половину площади $S_{\#AB, AC}$ параллелограмма, построенного на векторах \overline{AB} и \overline{AC} , т.е.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot S_{\#AB, AC}.$$

3. Объем V_{ABCD} треугольной пирамиды $ABCD$ можно найти как одну шестую объема $V_{\#AB, AC, AD}$ параллелепипеда, построенного на векторах \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , т.е. $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot V_{\#AB, AC, AD}$, поскольку объем треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту, а площадь треугольника (основания пирамиды) в два раза меньше площади параллелограмма (основания параллелепипеда).

Пример 1.28. На векторах $\overline{OA} = 4 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j}$ и $\overline{OB} = 12 \cdot \bar{i} - 5 \cdot \bar{j}$ построен треугольник OAB (рис.1.60). Требуется найти:

- длины сторон треугольника;
- длину медианы OM ;
- длину биссектрисы OL ;
- величину угла AOB ;
- площадь треугольника;

е) координаты вектора \overline{BH} (в стандартном базисе), где отрезок BH – высота треугольника.

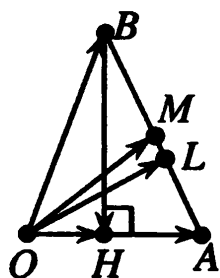


Рис.1.60

□ Для решения поставленной задачи используем приведенные в данном разделе свойства с учетом п.1 замечаний 1.14.

а) Длины сторон OA и OB находим по свойству 5:

$$|\overline{OA}| = \sqrt{(\overline{OA}, \overline{OA})} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5;$$

$$|\overline{OB}| = \sqrt{(\overline{OB}, \overline{OB})} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13.$$

Чтобы найти длину стороны AB , определим сначала координаты вектора $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 12 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} - (4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}) = 8 \cdot \vec{i} - 8 \cdot \vec{j}$, а затем – его длину

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(\overline{AB}, \overline{AB})} = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}.$$

б) Найдем координаты вектора \overline{OM} , учитывая, что M – середина отрезка AB (по свойству 2 аффинных и выпуклых комбинаций (см. разд.1.6.1)):

$$\overline{OM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}) + \frac{1}{2} \cdot (12 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}) = 8 \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j},$$

а затем его длину $|\overline{OM}| = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$.

в) По свойству биссектрисы точка L делит отрезок AB в отношении $AL : LB = OA : OB = 5 : 13$. Поэтому для вектора \overline{OL} справедливы разложения

$$\overline{OL} = \frac{5}{18} \cdot \overline{OB} + \frac{13}{18} \cdot \overline{OA} = \frac{5}{18} \cdot (12 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}) + \frac{13}{18} \cdot (4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}) = \frac{112}{18} \cdot \vec{i} + \frac{14}{18} \cdot \vec{j}.$$

Теперь находим длину этого вектора $|\overline{OL}| = \sqrt{\left(\frac{112}{18}\right)^2 + \left(\frac{14}{18}\right)^2} = \frac{\sqrt{3185}}{9}$.

г) Величину φ угла AOB находим по формуле п.6:

$$\cos \varphi = \frac{(\overline{OA}, \overline{OB})}{\sqrt{(\overline{OA}, \overline{OA})} \cdot \sqrt{(\overline{OB}, \overline{OB})}} = \frac{4 \cdot 12 + 3 \cdot (-5)}{5 \cdot 13} = \frac{33}{65}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos \frac{33}{65}$.

д) Площадь S треугольника OAB равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах \overline{OA} и \overline{OB} : $S = \frac{1}{2} S_{\# \overline{OA}, \overline{OB}}$ (см. п.2 замечаний 1.14). Чтобы найти площадь параллелограмма, воспользуемся формулой п.11. Добавляя к векторам \overline{OA} и \overline{OB} нулевые аппликаты: $\overline{OA} = 4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$; $\overline{OB} = 12 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$, вычисляем их векторное произведение:

$$\begin{aligned} [\overline{OA}, \overline{OB}] &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 12 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 12 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= 0 \cdot \bar{i} - 0 \cdot \bar{j} + (-56) \cdot \bar{k}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$S_{\#OA,OB} = |[\overline{OA}, \overline{OB}]| = |0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + (-56) \cdot \bar{k}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-56)^2} = 56.$$

Значит, площадь треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 56 = 28$.

е) Найдем вектор $\overline{BH} = \overline{OH} - \overline{OB}$. Проекцию \overline{OH} вектора \overline{OB} на ось, задаваемую вектором \overline{OA} , находим по формуле п.8:

$$\overline{OH} = \frac{(\overline{OB}, \overline{OA})}{(\overline{OA}, \overline{OA})} \cdot \overline{OA} = \frac{12 \cdot 4 + (-5) \cdot 3}{25} \cdot (4 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j}) = \frac{132}{25} \cdot \bar{i} + \frac{99}{25} \cdot \bar{j}.$$

Отсюда $\overline{BH} = \frac{132}{25} \cdot \bar{i} + \frac{99}{25} \cdot \bar{j} - (12 \cdot \bar{i} - 5 \cdot \bar{j}) = -\frac{168}{25} \cdot \bar{i} + \frac{224}{25} \cdot \bar{j}$, следовательно, его координаты $-\frac{168}{25}$, $\frac{224}{25}$. Вычислим длину этого вектора, т.е. высоту тре-

угольника: $|\overline{BH}| = \sqrt{\left(-\frac{168}{25}\right)^2 + \left(\frac{224}{25}\right)^2} = \frac{56}{5}$. Заметим, что площадь треугольника $S = 28$, поэтому высоту можно вычислить по формуле $BH = \frac{2 \cdot S}{OA} = \frac{2 \cdot 28}{5} = \frac{56}{5}$. Результаты совпадают. ■

Пример 1.29. На векторах $\overline{OA} = 1 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} - 1 \cdot \bar{k}$, $\overline{OB} = 2 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} - 2 \cdot \bar{k}$, $\overline{OC} = 3 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 4 \cdot \bar{k}$ построена треугольная пирамида $OABC$ (рис.1.61). Требуется найти:

- длины ребер OA , OB , OC ;
- величину φ угла AOC ;
- площадь S_{OAC} треугольника OAC ;
- объем пирамиды $OABC$;
- высоту пирамиды h_B , опущенную из вершины B ;
- высоту h_a треугольника OAC , опущенную из вершины A ;
- угол ψ между ребром OA и плоскостью грани OBC ;
- величину δ угла между плоскостями граней OAC и OBC ;
- радиус-вектор \overline{OM} , где M – точка пересечения медиан треугольника ABC ;

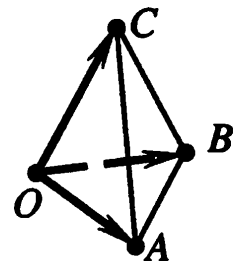


Рис.1.61

к) радиус-вектор \overline{ON} , где точка N делит отрезок AM в отношении $AN:NM = 3:4$;

л) направляющие косинусы вектора \overline{OB} ;

м) алгебраическое значение ортогональной проекции вектора \overline{OA} на направление вектора \overline{OB} ;

н) ортогональную проекцию вектора \overline{OA} на прямую, перпендикулярную грани OBC ;

о) единичный вектор \bar{e} (орт), имеющий направление вектора \overline{AB} ;

п) вектор \bar{a} , имеющий длину вектора \overline{AB} и направление вектора \overline{AC} .

□ а) Длины ребер OA , OB и OC находим по формуле п.5:

$$|\overline{OA}| = \sqrt{(\overline{OA}, \overline{OA})} = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11};$$

$$|\overline{OB}| = \sqrt{(\overline{OB}, \overline{OB})} = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3;$$

$$|\overline{OC}| = \sqrt{(\overline{OC}, \overline{OC})} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{29}.$$

б) Величину φ угла AOC находим как угол между векторами \overline{OA} и \overline{OC} по формуле п.6:

$$\cos \varphi = \frac{(\overline{OA}, \overline{OC})}{|\overline{OA}| \cdot |\overline{OC}|} = \frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{29}} = -\frac{7}{\sqrt{319}},$$

т.е. $\varphi = \pi - \arccos \frac{7}{\sqrt{319}}$.

в) Сначала вычислим площадь параллелограмма, построенного на векторах \overline{OA} и \overline{OC} по формуле п.11. Для этого найдем векторное произведение

$$[\overline{OA}, \overline{OC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \cdot \bar{i} - 7 \cdot \bar{j} - 11 \cdot \bar{k},$$

а затем его модуль: $S_{\#OA, OC} = |[\overline{OA}, \overline{OC}]| = \sqrt{10^2 + (-7)^2 + (-11)^2} = \sqrt{270}$.

Искомая площадь треугольника в 2 раза меньше: $S_{OAC} = \frac{1}{2} \cdot S_{\#OA, OC} = \frac{\sqrt{270}}{2}$

(см. п.2 замечаний 1.14).

г) По формуле п.12 найдем объем $V_{\#OA, OB, OC}$ параллелепипеда, построенного на векторах \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} :

$$\begin{aligned} (\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -35 \Rightarrow \\ \Rightarrow V_{\# \overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}} &= |(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})| = |-35| = 35. \end{aligned}$$

Искомый объем пирамиды в 6 раз меньше: $V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot V_{\# \overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}} = \frac{35}{6}$ (см. п.3 замечаний 1.14).

д) Высоту пирамиды h_B находим по формуле п.15:

$$\Rightarrow h_B = \frac{V_{\# \overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}}}{S_{\# \overline{OA}, \overline{OC}}} = \frac{35}{\sqrt{270}}.$$

е) Высоту h_a треугольника OAC , опущенную из вершины A , находим по формуле п.14:

$$h_a = \frac{S_{\# \overline{OA}, \overline{OC}}}{|\overline{OC}|} = \frac{\sqrt{270}}{\sqrt{29}}.$$

ж) Сначала найдем вектор \bar{n} , перпендикулярный грани OBC :

$$\bar{n} = [\overline{OB}, \overline{OC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{i} - 14 \cdot \bar{j} - 7 \cdot \bar{k}.$$

Затем вычислим угол ψ между вектором \overline{OA} и плоскостью грани OBC по формуле п.16:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{|(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})|}{|\overline{OA}| \cdot |[\overline{OB}, \overline{OC}]|} = \frac{|(\overline{OA}, \bar{n})|}{|\overline{OA}| \cdot |\bar{n}|} = \\ &= \frac{|1 \cdot 0 + 3 \cdot (-14) + (-1) \cdot (-7)|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{(-14)^2 + (-7)^2}} = \frac{35}{\sqrt{11} \cdot 7 \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, \end{aligned}$$

т.е. $\psi = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}.$

з) Найдем вектор \bar{m} , перпендикулярный плоскости грани OAC :

$$\bar{m} = [\overline{OA}, \overline{OC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \cdot \bar{i} - 7 \cdot \bar{j} - 11 \cdot \bar{k}.$$

Вектор \bar{n} , перпендикулярный грани OBC , найден в п."ж". Искомый угол δ вычисляем по формуле п.17:

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \frac{|([\overline{OA}, \overline{OC}], [\overline{OB}, \overline{OC}])|}{|[\overline{OA}, \overline{OC}]| \cdot |[\overline{OB}, \overline{OC}]|} = \frac{|(\bar{m}, \bar{n})|}{|\bar{m}| \cdot |\bar{n}|} = \\ &= \frac{|10 \cdot 0 + (-7) \cdot (-14) + (-11) \cdot (-7)|}{\sqrt{10^2 + (-7)^2 + (-11)^2} \cdot 7 \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{3\sqrt{6}}, \end{aligned}$$

т.е. $\delta = \arccos \frac{5}{3\sqrt{6}}$.

и) Радиус-вектор \overline{OM} находим по свойству 4 аффинных и выпуклых комбинаций (см. разд.1.6.1):

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \frac{1}{3} \cdot \overline{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overline{OB} + \frac{1}{3} \cdot \overline{OC} = \frac{1}{3} \cdot (1 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} - 1 \cdot \bar{k}) + \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} - 2 \cdot \bar{k}) + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 4 \cdot \bar{k}) = 2 \cdot \bar{i} + \frac{2}{3} \cdot \bar{j} + \frac{1}{3} \cdot \bar{k}. \end{aligned}$$

к) Радиус-вектор \overline{ON} находим по свойству 2 аффинных и выпуклых комбинаций (см. разд.1.6.1):

$$\begin{aligned} \overline{ON} &= \frac{4}{7} \cdot \overline{OA} + \frac{3}{7} \cdot \overline{OM} = \frac{4}{7} \cdot (1 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} - 1 \cdot \bar{k}) + \frac{3}{7} \cdot \left(2 \cdot \bar{i} + \frac{2}{3} \cdot \bar{j} + \frac{1}{3} \cdot \bar{k} \right) = \\ &= \frac{10}{7} \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j} - \frac{3}{7} \cdot \bar{k}. \end{aligned}$$

л) Направляющие косинусы вектора \overline{OB} находим по формулам п.9:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(\overline{OB}, \bar{i})}{|\overline{OB}|} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}; \\ \cos \beta &= \frac{(\overline{OB}, \bar{j})}{|\overline{OB}|} = \frac{1}{3}; \quad \cos \gamma = \frac{(\overline{OB}, \bar{k})}{|\overline{OB}|} = \frac{-2}{3}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$ (см. разд.1.3.5).

м) Алгебраическое значение $np_{\overline{OB}} \overline{OA}$ длины проекции находим по формуле п.7 ($\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \overline{OB}$):

$$np_{\overline{OB}} \overline{OA} = \frac{(\overline{OA}, \overline{OB})}{|\overline{OB}|} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2)}{3} = \frac{7}{3}.$$

н) Искомую ортогональную проекцию $\overline{np_{\bar{n}} OA}$ найдем по формуле п.8 ($\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \bar{n}$), используя вектор \bar{n} , найденный в п. "ж":

$$\begin{aligned} \overline{np_{\bar{n}} OA} &= \frac{(\overline{OA}, \bar{n})}{(\bar{n}, \bar{n})} \cdot \bar{n} = \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot (-14) + (-1) \cdot (-7)}{0^2 + (-14)^2 + (-7)^2} \cdot (0 \cdot \bar{i} + (-14) \cdot \bar{j} + (-7) \cdot \bar{k}) = \\ &= 2 \cdot \bar{j} + \bar{k}. \end{aligned}$$

о) Найдем координаты вектора \overline{AB} и его длину:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (2 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} - 2 \cdot \bar{k}) - (1 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} - 1 \cdot \bar{k}) = 1 \cdot \bar{i} + 4 \cdot \bar{j} - 1 \cdot \bar{k};$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2},$$

а затем искомый вектор $\bar{e} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \bar{i} + \frac{4}{3\sqrt{2}} \cdot \bar{j} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \bar{k}$.

п) Найдем координаты вектора \overline{AC} и его длину

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (3 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 4 \cdot \bar{k}) - (1 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} - 1 \cdot \bar{k}) = 2 \cdot \bar{i} - 5 \cdot \bar{j} + 5 \cdot \bar{k};$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 5^2} = 3\sqrt{6},$$

а затем искомый вектор

$$\bar{a} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} \cdot \overline{AC} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} \cdot (2 \cdot \bar{i} - 5 \cdot \bar{j} + 5 \cdot \bar{k}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \bar{i} - \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \bar{j} + \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \bar{k}. \blacksquare$$

1.6.3. Приложения векторной алгебры в механике

Опишем применение векторной алгебры в механике для решения задачи приведения системы сил. Будем использовать элементарные механические понятия, опираясь на их физический смысл, не придерживаясь формального изложения теории. В частности, силы будем рассматривать как скользящие векторы (см. п.5 замечаний 1.1), не определяя их свойства аксиомами, как это принято в теоретической механике.

Положение точки A твердого тела будем задавать ее радиус-вектором $\bar{r} = \overline{OA}$ с началом в некоторой заданной точке O пространства. Силы, действующие на тело, будем обозначать прописными буквами (например, сила \bar{F}). Напомним, что сила является не свободным, а скользящим вектором (см. п.5 замечаний 1.1). Силу можно переносить, не изменяя длины и направления, только вдоль содержащей ее прямой (вдоль *линии действия* силы), при этом механическое воздействие силы на тело остается неизменным

[6]. Поэтому, задавая силу \vec{F} , указывают точку ее приложения (либо линию ее действия).

Моментом силы \vec{F} , приложенной в точке A , относительно центра O называется векторное произведение $[\vec{r}, \vec{F}]$ радиус-вектора $\vec{r} = \vec{OA}$ на силу \vec{F} (рис.1.62,а) и обозначается $\vec{m}_O(\vec{F}) = [\vec{r}, \vec{F}]$. Из определения векторного произведения следует, что модуль момента силы равен произведению модуля силы на расстояние OP от точки O до линии действия этой силы, называемое **плечом** (рис.1.62,а):

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = |[\vec{r}, \vec{F}]| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \varphi = OP \cdot |\vec{F}|.$$

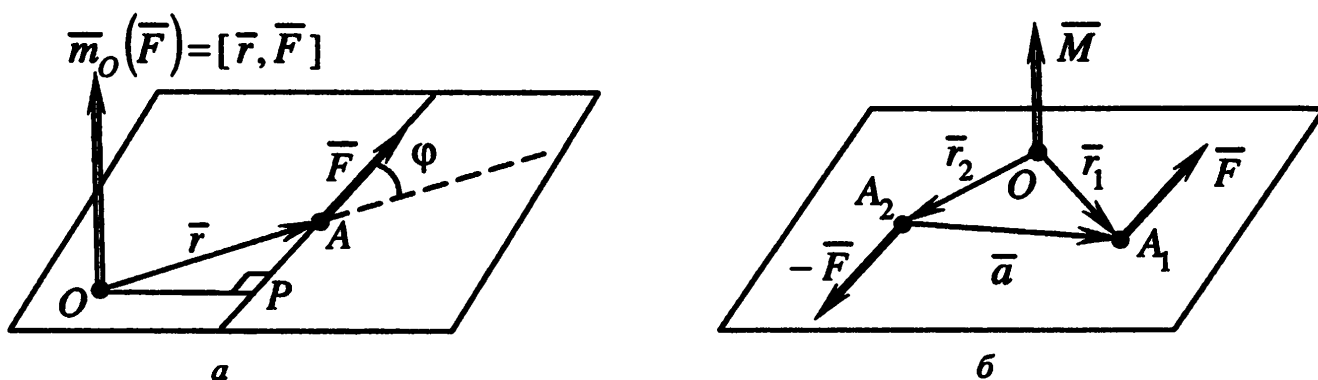


Рис.1.62

Система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, приложенных к твердому телу, характеризуется **главным вектором**:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad (1.24)$$

и **главным моментом относительно точки O** :

$$\vec{M}_O = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}_n) = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2] + \dots + [\vec{r}_n, \vec{F}_n], \quad (1.25)$$

где $\vec{r}_1 = \vec{OA}_1, \dots, \vec{r}_n = \vec{OA}_n$ – радиус-векторы точек A_1, A_2, \dots, A_n приложения сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. В (1.24) сложение сил выполняется как сложение свободных векторов (см. разд.1.1.2).

Парой сил (рис.1.62,б) называется система двух параллельных сил \vec{F} и $-\vec{F}$ (линии действия которых параллельны). Главный вектор пары сил, разумеется, нулевой. Найдем главный момент. По формуле (1.25), учитывая свойства векторного произведения, получаем

$$\vec{M} = [\vec{r}_1, \vec{F}] + [\vec{r}_2, -\vec{F}] = [\vec{r}_1, \vec{F}] - [\vec{r}_2, \vec{F}] = [\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{F}] = [\vec{a}, \vec{F}], \quad (1.26)$$

где $\vec{a} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{A_2A_1}$. Как видим, главный момент пары сил не зависит от точки O (поэтому она и не указана в (1.26)). Следовательно, момент пары сил – свободный вектор, который может быть приложен к любой точке. Механическое воздействие на тело различных пар сил с одинаковым главным моментом одно и то же [6].

ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ТВЕРДОМУ ТЕЛУ

Рассмотрим задачу *приведения системы сил*, которая формулируется следующим образом. Пусть к твердому телу в точках A_1, A_2, \dots, A_n , определяемых радиус-векторами $\vec{r}_1 = \overline{OA_1}, \vec{r}_2 = \overline{OA_2}, \dots, \vec{r}_n = \overline{OA_n}$, приложены силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ соответственно. Требуется упростить эту систему сил, т.е. заменить ее минимальным количеством сил так, чтобы их механическое воздействие на тело совпадало бы с действием заданной системы сил.

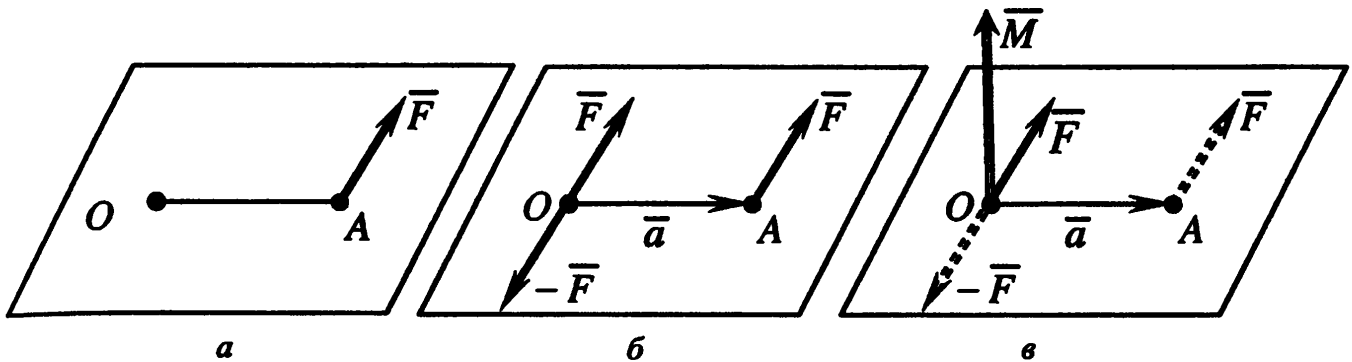


Рис.1.63

З а м е ч а н и я 1.15.

1. С точки зрения векторной алгебры задачу приведения системы сил можно рассматривать как задачу нахождения "суммы" заданных скользящих векторов. Если бы речь шла о свободных векторах, то их можно было бы приложить к любой точке пространства и сложить по правилу параллелограмма (в случае двух векторов) или по правилу ломаной (см. разд.1.1.2). Для скользящих векторов так делать нельзя.

2. Для решения задачи приведения системы сил используется операция "переноса" силы в точку вне линии ее действия. Пусть в точке A приложена сила \vec{F} (рис.1.63,а). Приложим к произвольной точке O две противоположные силы \vec{F} и $-\vec{F}$, воздействия которых на твердое тело, разумеется, компенсируются (рис.1.63,б). При этом получим пару сил \vec{F} и $-\vec{F}$, приложенных к точкам A и O соответственно. Пара сил характеризуется моментом (1.26): $\vec{M} = [\vec{a}, \vec{F}]$. Таким образом, силу можно перенести в любую точку, добавив при этом соответствующую пару сил (рис.1.63,в).

Решение задачи приведения системы сил содержит два этапа.

Первый этап. Силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, приложенные к твердому телу в точках A_1, A_2, \dots, A_n , "переносятся" в одну точку (см. п.2 замечаний 1.15). "Перенесем" все силы в точку O и сложим их. Получим главный вектор (1.24), приложенный к точке O , и главный момент (1.25) заданной системы сил. Таким образом, исходная система сил приводится к главному вектору

\bar{F} , приложенному в точке O , и свободному главному моменту \bar{M}_O . Главный вектор \bar{F} называют *первым инвариантом* системы сил, так как его величина и направление не зависят от выбора точки O .

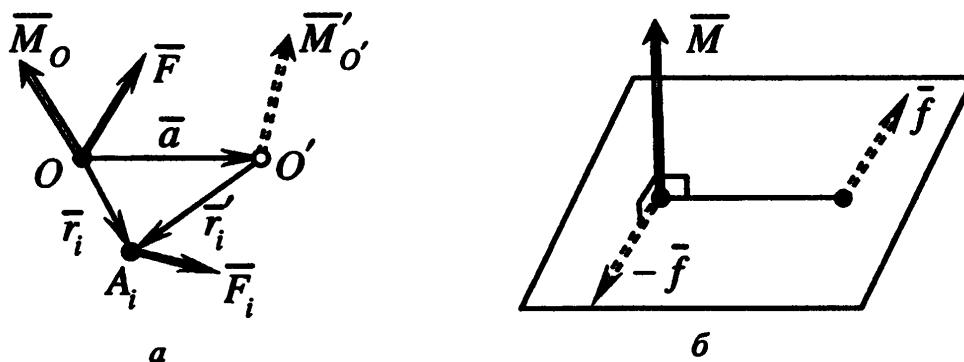


Рис.1.64

Второй этап. Упрощение системы сил посредством выбора точки O . Пусть известны: главный вектор \bar{F} системы сил и главный момент \bar{M}_O относительно точки O . Найдем главный момент $\bar{M}'_{O'}$ той же системы сил относительно другой точки O' . Поскольку для всякой точки $A_i, i=1, \dots, n$: $\bar{r}_i = \bar{a} + \bar{r}'_i$, где $\bar{r}_i = \overline{OA_i}$, $\bar{r}'_i = \overline{O'A_i}$, $\bar{a} = \overline{OO'}$ (рис.1.64,а), то

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n [\bar{r}_i, \bar{F}_i] = \sum_{i=1}^n [\bar{r}'_i + \bar{a}, \bar{F}_i] = \sum_{i=1}^n [\bar{r}'_i, \bar{F}_i] + \left[\bar{a}, \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \right] = \bar{M}'_{O'} + [\bar{a}, \bar{F}].$$

Значит, главные моменты связаны следующим образом

$$\bar{M}_O = \bar{M}'_{O'} + [\bar{a}, \bar{F}]. \quad (1.27)$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Если главный вектор сил нулевой ($\bar{F} = \bar{0}$), то из формулы (1.27) следует равенство моментов ($\bar{M}_O = \bar{M}'_{O'}$), т.е. главный момент не зависит от центра O , а система сил эквивалентна паре. В этом случае говорят, что *система сил приводится к паре сил с моментом \bar{M}* (рис.1.64,б). Если $\bar{F} = \bar{0}$ и $\bar{M}_O = \bar{0}$, то механические воздействия всех сил взаимно уничтожаются (случай *уравновешенной системы сил*).

2. Если главный вектор сил ненулевой ($\bar{F} \neq \bar{0}$), то можно найти ортогональную проекцию главного момента на линию действия главного вектора (см. разд.1.5.4):

$$\text{np}_{\bar{F}} \bar{M}_O = \frac{(\bar{M}_O, \bar{F})}{|\bar{F}|^2} \cdot \bar{F}.$$

Найдем проекции векторов в левой и правой частях (1.27) на линию действия главного вектора \vec{F} . Поскольку скалярное произведение векторов \vec{F} и $[\vec{a}, \vec{F}]$ равняется нулю, так как эти векторы ортогональны, то

$$\overline{np_{\vec{F}} \vec{M}_O} = \overline{np_{\vec{F}} \vec{M}'_{O'}} ,$$

т.е. ортогональная проекция главного момента на линию действия главного вектора системы сил не зависит от точки O (проекцию $\overline{np_{\vec{F}} \vec{M}_O}$ называют *вторым инвариантом* системы сил). Выберем теперь точку O' (т.е. вектор $\vec{a} = \vec{OO}'$) так, чтобы ортогональная составляющая $\vec{M}_{\perp} = \vec{M}_O - \overline{np_{\vec{F}} \vec{M}_O}$ равнялась нулевому вектору (рис.1.65,а). Для этого от точки O отложим вектор \vec{a} перпендикулярно плоскости, содержащей векторы \vec{F} и \vec{M}_O , так, чтобы выполнялось равенство $[\vec{a}, \vec{F}] = -\vec{M}_{\perp}$. Найденную точку O' можно перенести параллельно прямой, содержащей вектор \vec{F} , при этом равенство $[\vec{a}, \vec{F}] = -\vec{M}_{\perp}$ будет выполняться, так как не изменяется плечо для \vec{F} .

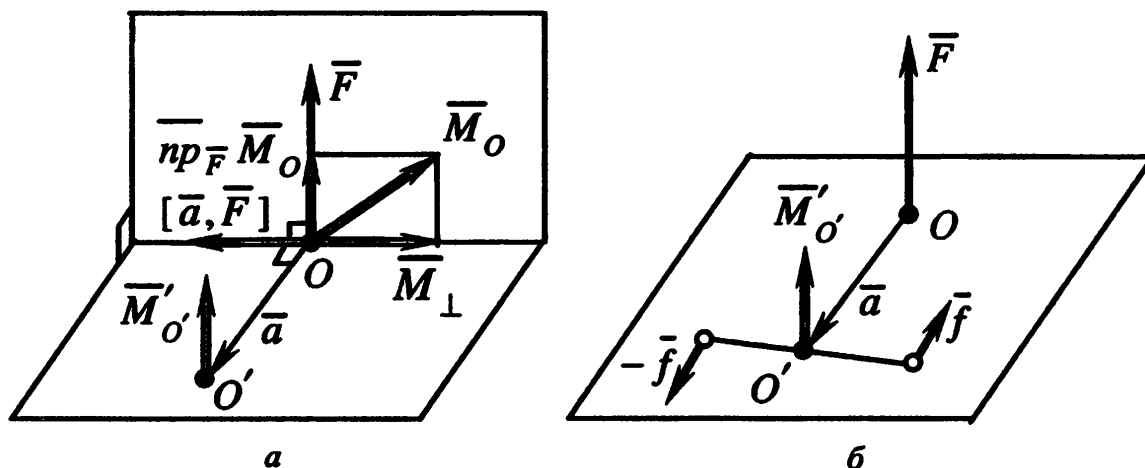


Рис.1.65

Таким образом, любая система сил приводится к главному вектору \vec{F} и паре сил с моментом $\vec{M}'_{O'}$, коллинеарным главному вектору (так называемому *динамическому винту* (рис.1.65,б)).

Если второй инвариант системы сил равен нулевому вектору ($\overline{np_{\vec{F}} \vec{M}_O} = \vec{0}$), то система сил сводится к одной силе \vec{F} , называемой *равнодействующей*, механическое воздействие которой эквивалентно воздействию исходной системы сил. Равнодействующая системы сил совпадает с главным вектором: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$.

Далее рассмотрим задачи приведения систем сходящихся и систем параллельных сил к равнодействующей силе.

СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ И СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется системой *сходящихся сил*.

Пусть задана система сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ с главным вектором $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$. Поскольку линии действия всех сил проходят через одну точку A , то главный момент относительно этой точки равен нулевому вектору: $\vec{M}_A = \vec{0}$. Тогда второй инвариант $\overline{pr}_{\vec{F}} \vec{M}_A = \vec{0}$. Такая система приводится к равнодействующей $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$. Требуется определить точку A (ее радиус-вектор \vec{r}) приложения равнодействующей силы.

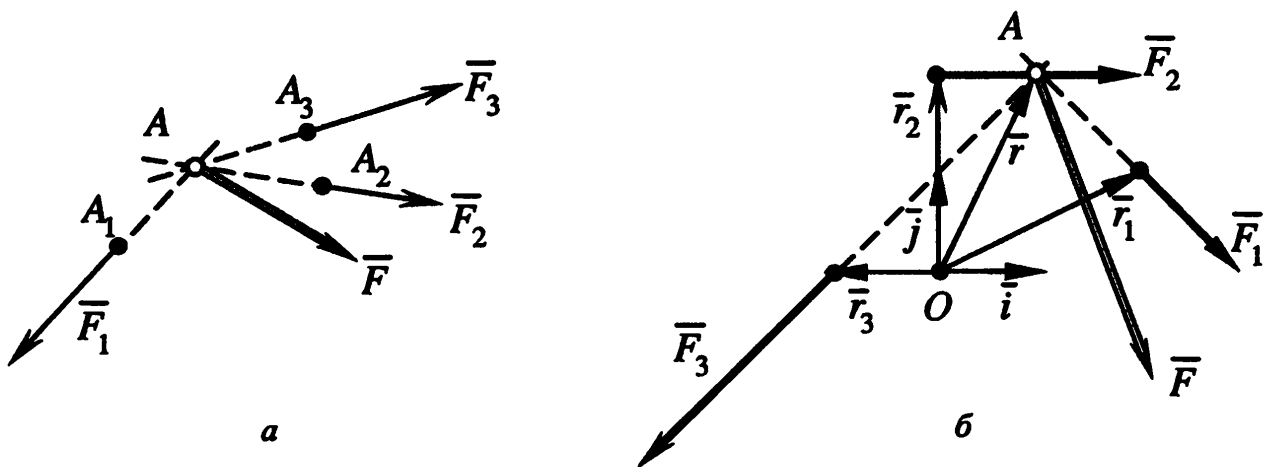


Рис.1.66

Если все силы принадлежат одной прямой, то и равнодействующая лежит на этой прямой (любую точку прямой можно считать точкой A приложения равнодействующей). Если не все силы коллинеарны и линии действия пересекаются в точке A , то эта точка является точкой приложения равнодействующей (1.66,а). Например, в системе $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ (рис.1.66,б) силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 не коллинеарны, поэтому точку A (точнее ее радиус-вектор $\vec{r} = \vec{OA}$) можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_1 + x_1 \cdot \vec{F}_1, \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - x_2 \cdot \vec{F}_2, \end{cases}$$

которая выражает условия коллинеарности векторов: $(\vec{r} - \vec{r}_1) \parallel \vec{F}_1$ и $(\vec{r}_2 - \vec{r}) \parallel \vec{F}_2$, т.е. $\frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{F_1} = x_1$ и $\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}}{F_2} = x_2$. Вычитая из первого уравнения сис-

темы второе, приходим к равенству $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 + x_1 \cdot \vec{F}_1 + x_2 \cdot \vec{F}_2 = \vec{0}$, которое можно представить в виде

$$\Delta \bar{r} = x_1 \cdot \bar{F}_1 + x_2 \cdot \bar{F}_2,$$

где $\Delta \bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$. Таким образом, неизвестные x_1, x_2 (достаточно найти одну неизвестную, например, x_1) можно найти как коэффициенты разложения вектора $\Delta \bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ по базису \bar{F}_1, \bar{F}_2 , а затем получить искомый радиус-вектор:

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + x_1 \cdot \bar{F}_1.$$

Он определяет точку A равнодействующей силы $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$.

Пример 1.30. В стандартном базисе на плоскости заданы координатные столбцы системы трех сходящихся сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ и точек (радиус-векторов $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$) их приложения (рис.1.66,б):

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad f_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad r_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти:

а) равнодействующую \bar{F} и точку A (радиус-вектор \bar{r}) ее приложения;

б) моменты каждой силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$, момент равнодействующей \bar{F} , а также главный момент \bar{M}_O заданной системы сил относительно точки O .

□ а) Находим координатный столбец f равнодействующей всех сил (см. разд.1.3.4):

$$f = f_1 + f_2 + f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\bar{F} = \bar{i} - 3 \cdot \bar{j}$.

Поскольку силы \bar{F}_1, \bar{F}_2 не коллинеарны, то задача сводится к разложению вектора $\Delta \bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ по векторам \bar{F}_1, \bar{F}_2 : $\Delta \bar{r} = x_1 \cdot \bar{F}_1 + x_2 \cdot \bar{F}_2$. Находим координатный столбец Δr вектора $\Delta \bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ (см. разд.1.3.4):

$$\Delta r = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По формулам (1.19) получаем (см. разд.1.5.3)

$$x_1 = \frac{\Delta \bar{r} \wedge \bar{F}_2}{\bar{F}_1 \wedge \bar{F}_2} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Следовательно, $r = r_1 + x_1 \cdot f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, т.е. $\bar{r} = \bar{i} + 2 \cdot \bar{j}$.

Заметим, что линия действия силы \bar{F}_3 проходит через найденную точку A , так как векторы $(\bar{r} - \bar{r}_3)$ и \bar{F}_3 коллинеарны:
 $r - r_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -f$, т.е. заданная система сил является системой сходящихся сил.

б) Найдем по определению моменты сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}$ относительно точки O :

$$\bar{m}_O(\bar{F}_1) = [\bar{r}_1, \bar{F}_1] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \bar{k};$$

$$\bar{m}_O(\bar{F}_2) = [\bar{r}_2, \bar{F}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \bar{k};$$

$$\bar{m}_O(\bar{F}_3) = [\bar{r}_3, \bar{F}_3] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \bar{k};$$

$$\bar{m}_O(\bar{F}) = [\bar{r}, \bar{F}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot \bar{k}.$$

Главный момент \bar{M}_O системы сил находим по формуле (1.25)

$$\bar{M}_O = -3 \cdot \bar{k} - 4 \cdot \bar{k} + 2 \cdot \bar{k} = -5 \cdot \bar{k}.$$

Главный момент \bar{M}_O можно найти по формуле (1.27): $\bar{M}_O = \bar{M}_A + [\bar{r}, \bar{F}]$, где $\bar{r} = \overline{OA}$. Поскольку главный момент \bar{M}_A системы сил относительно точки A нулевой ($\bar{M}_A = \bar{o}$), то $\bar{M}_O = [\bar{r}, \bar{F}] = \bar{m}_O(\bar{F}) = -5 \cdot \bar{k}$. Результаты вычислений совпадают. ■

Система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ называется системой *параллельных сил*, если векторы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ коллинеарны.

Пусть задана система параллельных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ с главным вектором $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$, отличным от нулевого вектора. Поскольку момент каждой силы перпендикулярен линии ее действия, то и главный момент \vec{M}_O системы параллельных сил перпендикулярен главному вектору \vec{F} . Тогда второй инвариант $\overline{np_{\vec{F}}} \vec{M}_O = \vec{o}$. Такая система сил приводится к равнодействующей $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$. Требуется определить точку A (ее радиус-вектор \vec{r}) приложения равнодействующей силы.

Разберем сначала случай системы двух параллельных сил (рис.1.67,а). Поскольку векторы \vec{F}_1, \vec{F}_2 коллинеарны, то точка A (отмеченная треугольником на рис.1.67,а) приложения равнодействующей $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ делит отрезок A_1A_2 обратно пропорционально силам (правило Архимеда): $\overline{A_1A} : \overline{AA_2} = \vec{F}_2 : \vec{F}_1$. Поэтому согласно свойству 2 аффинных и выпуклых комбинаций:

$$\vec{r} = \frac{\vec{F}_1}{F} \cdot \vec{r}_1 + \frac{\vec{F}_2}{F} \cdot \vec{r}_2.$$

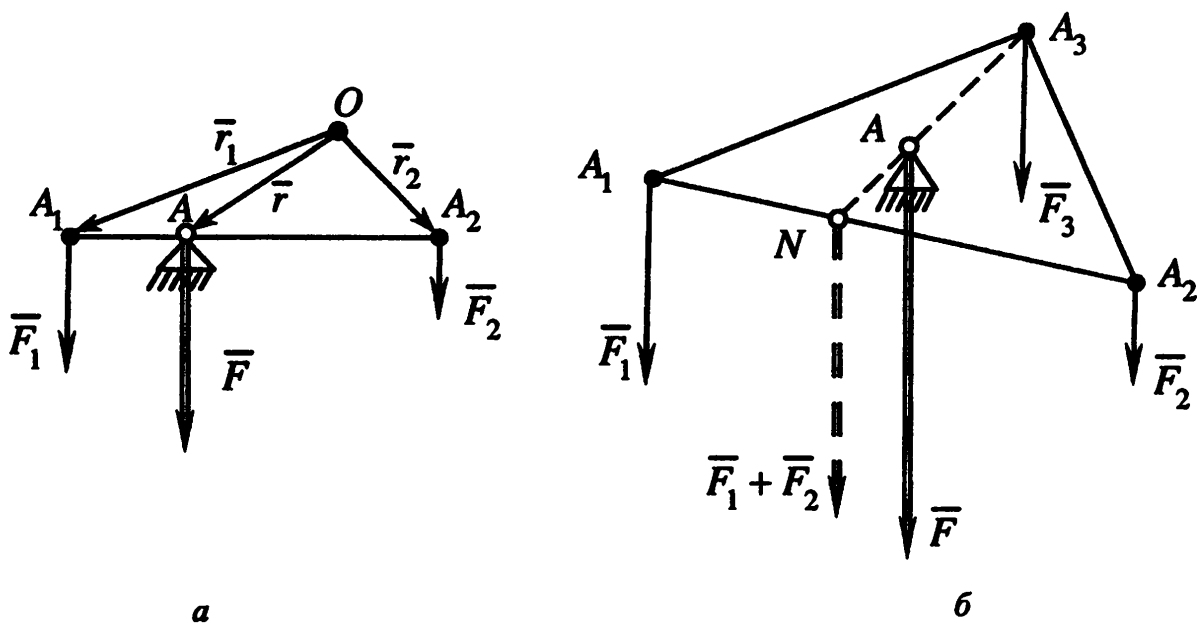


Рис.1.67

Точку приложения равнодействующей $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ системы трех параллельных сил (рис.1.67,б) можно найти последовательно: сначала равнодействующую $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ и точку N ее приложения (радиус-вектор \vec{r}_N):

$$\vec{r}_N = \frac{\vec{F}_1}{F_1 + F_2} \cdot \vec{r}_1 + \frac{\vec{F}_2}{F_1 + F_2} \cdot \vec{r}_2,$$

а затем – искомую точку A (отмеченную треугольником на рис.1.67,б):

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{\bar{F}_1 + \bar{F}_2}{(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + \bar{F}_3} \cdot \bar{r}_N + \frac{\bar{F}_3}{(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + \bar{F}_3} \cdot \bar{r}_3 = \\ &= \frac{\bar{F}_1 + \bar{F}_2}{(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + \bar{F}_3} \cdot \left(\frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_1 + \bar{F}_2} \cdot \bar{r}_1 + \frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1 + \bar{F}_2} \cdot \bar{r}_2 \right) + \frac{\bar{F}_3}{(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + \bar{F}_3} \cdot \bar{r}_3 = \\ &= \frac{\bar{F}_1}{F} \cdot \bar{r}_1 + \frac{\bar{F}_2}{F} \cdot \bar{r}_2 + \frac{\bar{F}_3}{F} \cdot \bar{r}_3.\end{aligned}$$

По индукции заключаем, что точка приложения равнодействующей системы n параллельных сил находится по формуле

$$\bar{r} = \frac{\bar{F}_1}{F} \cdot \bar{r}_1 + \frac{\bar{F}_2}{F} \cdot \bar{r}_2 + \dots + \frac{\bar{F}_n}{F} \cdot \bar{r}_n.$$

ЦЕНТР МАСС И БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Под *материальной точкой* понимается тело, размерами которого можно пренебречь при описании его движения. Такое тело рассматривается как геометрическая точка (считается, что вся масса тела сосредоточена в одной точке). Если в точке A сосредоточена масса m , то эту материальную точку будем обозначать mA . Положение материальной точки A задается ее радиус-вектором $\bar{r} = \overline{OA}$, приложенным к некоторой заданной точке O .

Любая совокупность материальных точек называется *системой материальных точек*. Например, систему образуют n материальных точек $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$ с массами m_1, m_2, \dots, m_n , положение которых определяется радиус-векторами $\bar{r}_1 = \overline{OA_1}, \bar{r}_2 = \overline{OA_2}, \dots, \bar{r}_n = \overline{OA_n}$ соответственно. Предполагаем, что любые две материальные точки соединены жестким "невесомым" стержнем. Любая часть системы материальных точек называется *подсистемой*.

В поле силы тяжести на каждую материальную точку из системы $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$ действует сила $\bar{F}_i = m_i \cdot \bar{g}$, $i = 1, \dots, n$, где \bar{g} – ускорение свободного падения. Эта система параллельных сил, согласно предыдущему разделу, может быть заменена равнодействующей $\bar{F} = m \cdot \bar{g}$, где $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ – масса всей системы. Точка Z (ее радиус-вектор $\bar{r} = \overline{OZ}$) приложения равнодействующей находится по формуле

$$\bar{r} = \frac{m_1}{m} \cdot \bar{r}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \bar{r}_2 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot \bar{r}_n$$

и называется **центром масс** (или **барицентром**) системы материальных точек. Если во всех точках сосредоточены одинаковые массы, центр масс системы называется **геометрическим**.

Эта формула применима и в случае, когда некоторые (или все) силы противоположны силе тяжести, например, $\vec{F}_1 = -m_1 \cdot \vec{g}$. В этом случае будем считать, что масса, сосредоточенная в точке A_1 , отрицательная ($-m_1$).

Перечислим основные свойства центра масс.

1. Каждая система материальных точек с ненулевой суммарной массой имеет однозначно определенный центр масс

$$\vec{OZ} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{OA}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{OA}_2 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot \vec{OA}_n. \quad (1.28)$$

2. Положение центра масс системы $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$ (с ненулевой суммарной массой, т.е. $m_1 + \dots + m_n \neq 0$) не изменится, если суммарную массу подсистемы $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_kA_k$, $k < n$ (с ненулевой суммарной массой, т.е. $m_1 + \dots + m_k \neq 0$) перенести в ее центр масс.

З а м е ч а н и е 1.16. Учитывая свойство 6 аффинных и выпуклых комбинаций (см. разд.1.6.1), положение центра масс Z не зависит от точки O приложения радиус-векторов. Поэтому формулу (1.28) можно использовать в виде [5]

$$Z = \frac{m_1}{m} \cdot A_1 + \frac{m_2}{m} \cdot A_2 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot A_n,$$

не указывая точку приложения радиус-векторов.

Пример 1.31. В трех вершинах A, B, C параллелограмма $ABCD$ сосредоточены массы $m, (-m), m$ соответственно. Найти центр масс этой системы.

□ На рис.1.68 изображена система сил, отвечающая условиям задачи (сила \vec{F}_B , соответствующая "отрицательной" массе, направлена вверх). Суммарная масса всех точек равна m (отлична от нуля). По свойству 1 для произвольной точки O имеем

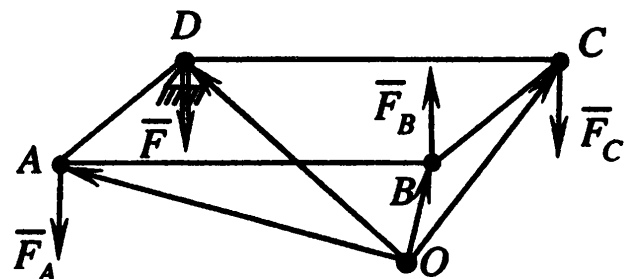


Рис.1.68

$$\vec{OZ} = \frac{m}{m} \cdot \vec{OA} + \frac{-m}{m} \cdot \vec{OB} + \frac{m}{m} \cdot \vec{OC} = \underbrace{\vec{OA} - \vec{OB}}_{\vec{BA} = \vec{CD}} + \vec{OC} = \vec{CD} + \vec{OC} = \vec{OD},$$

т.е. центр масс совпадает с вершиной D параллелограмма. ■

Пусть в вершинах треугольника $A_1A_2A_3$ сосредоточены массы m_1, m_2, m_3 .

Для любой тройки чисел m_1, m_2, m_3 (с отличной от нуля суммой) существует единственная точка Z (центр масс системы)

$$\overline{OZ} = m_1 \cdot \overline{OA_1} + m_2 \cdot \overline{OA_2} + m_3 \cdot \overline{OA_3},$$

и наоборот, для любой точки Z в плоскости треугольника $A_1A_2A_3$ существует единственная тройка чисел m_1, m_2, m_3 ($m_1 + m_2 + m_3 = 1$) такая, что точка Z является центром масс системы.

Тройка чисел m_1, m_2, m_3 называется **барицентрическими координатами** точки Z относительно треугольника $A_1A_2A_3$.

Аналогично определяются барицентрические координаты в пространстве.

Пример 1.32. Найти барицентрические координаты центра вписанной в треугольник ABC окружности.

□ По условию задачи требуется найти массы m_A, m_B, m_C , которые нужно сосредоточить в соответствующих вершинах треугольника ABC , чтобы центр масс трех материальных точек $m_A A, m_B B, m_C C$ совпал с центром вписанной в треугольник окружности. Учитывая свойство 4 аффинных и выпуклых комбинаций векторов (см. разд.1.6.1), получаем (рис.1.69):

$$\begin{aligned} \overline{OZ} &= \frac{S_{ZBC}}{S} \cdot \overline{OA} + \frac{S_{ZCA}}{S} \cdot \overline{OB} + \frac{S_{ZAB}}{S} \cdot \overline{OC} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot r \cdot a}{p \cdot r} \cdot \overline{OA} + \frac{\frac{1}{2} \cdot r \cdot b}{p \cdot r} \cdot \overline{OB} + \frac{\frac{1}{2} \cdot r \cdot c}{p \cdot r} \cdot \overline{OC} = \frac{a}{2p} \cdot \overline{OA} + \frac{b}{2p} \cdot \overline{OB} + \frac{c}{2p} \cdot \overline{OC}, \end{aligned}$$

где S – площадь треугольника ABC , r – радиус вписанной окружности, а p – полупериметр. Таким образом, барицентрические координаты центра вписанной окружности

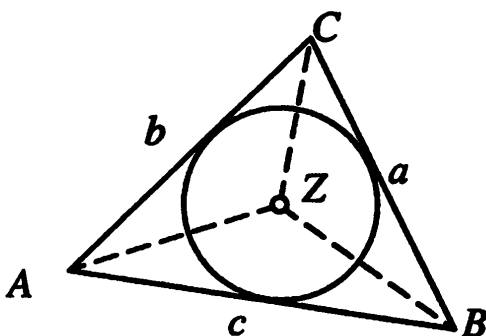


Рис.1.69

$$m_A = \frac{a}{a+b+c}; \quad m_B = \frac{b}{a+b+c};$$

$$m_C = \frac{c}{a+b+c}. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Какие ненулевые векторы \bar{a} и \bar{b} удовлетворяют условиям:

а) $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$; б) $\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$; в) $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$;

г) $|\bar{a} - \bar{b}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$; д) $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a}| - |\bar{b}|$?

Ответ: а) ортогональные; б,в) одинаково направленные; г) противоположно направленные; д) противоположно направленные и $|\bar{a}| \geq |\bar{b}|$.

1.2. Найти геометрическое место точек M плоскости, для каждой из которых $|\overline{AB} + \overline{AM}| = |\overline{AB}|$, где A и B заданные точки плоскости.

Ответ: окружность с центром O на прямой AB и радиусом $OA = AB$.

1.3. Найти величину острого угла равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD , если известно, что $|\overline{AB} + \overline{CD}| = |\overline{AD}|$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

1.4. Разложить вектор $\bar{p} = 2 \cdot \bar{a} - 3 \cdot \bar{b}$ по векторам $\bar{q} = \bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{r} = \bar{a} - \bar{b}$.

Ответ: $\bar{p} = -\frac{1}{2} \cdot \bar{q} + \frac{5}{2} \cdot \bar{r}$.

1.5. Разложить вектор $\bar{p} = 2 \cdot \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$ по векторам \bar{a} и \bar{b} , если известны разложения векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ по базису \bar{e}_1, \bar{e}_2 : $\bar{a} = 2 \cdot \bar{e}_1 - 2 \cdot \bar{e}_2$, $\bar{b} = 2 \cdot \bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\bar{c} = 2 \cdot \bar{e}_1 + 4 \cdot \bar{e}_2$.

Ответ: $\bar{p} = -3 \cdot \bar{a} + 5 \cdot \bar{b}$.

1.6. Векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и \bar{a} заданы своими координатными столбцами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

в некотором базисе. Показать, что векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ сами образуют базис пространства и найти координаты вектора \bar{a} в этом базисе.

Ответ: $\bar{a} = 1 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2 + 3 \cdot \bar{e}_3$.

1.7. Определить, при каких α и β векторы $\bar{a} = -2 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} + \alpha \cdot \bar{k}$, $\bar{b} = \beta \cdot \bar{i} - 6 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$ коллинеарны.

Ответ: $\alpha = -1$; $\beta = 4$.

1.8. Доказать, что для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и любых чисел α, β, γ три вектора $\alpha \cdot \bar{a} - \beta \cdot \bar{b}$, $\gamma \cdot \bar{b} - \alpha \cdot \bar{c}$, $\beta \cdot \bar{c} - \gamma \cdot \bar{a}$ линейно зависимы.

Указание: коэффициенты разложения векторов записать в столбцы $(\alpha \ -\beta \ 0)^T$, $(0 \ \gamma \ -\alpha)^T$, $(-\gamma \ 0 \ \beta)^T$, из которых составить матрицу и определить ее ранг.

1.9. В параллелограмме $ABCD$: $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AD} = \vec{d}$, K – середина стороны BC , L – середина стороны CD , M – точка пересечения медиан треугольника ABD , точка N делит отрезок BD в отношении $BN:ND = 1:3$. Разложить векторы \overline{AC} , \overline{BD} , \overline{AK} , \overline{BL} , \overline{KL} , \overline{MN} по векторам \vec{b} и \vec{d} .

Ответ: $\overline{AC} = \vec{b} + \vec{d}$; $\overline{BD} = \vec{d} - \vec{b}$; $\overline{AK} = \vec{b} + \frac{1}{2} \cdot \vec{d}$; $\overline{BL} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \vec{d}$; $\overline{KL} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2} \cdot \vec{d}$; $\overline{MN} = \frac{5}{12} \cdot \vec{b} - \frac{1}{12} \cdot \vec{d}$.

1.10. В каком отношении медиана AM треугольника ABC делит биссектрису BL , если известно, что $AB = 3 \cdot BC$?

Ответ: $4:3$, считая от вершины B .

1.11. Точки M и N – середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ соответственно. Доказать, что $\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overline{BD}$.

1.12. Доказать, что $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$, если M – точка пересечения медиан треугольника ABC .

1.13. Доказать, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH}$, если H – точка пересечения высот треугольника ABC , а точка O – центр описанной около треугольника окружности.

1.14. В треугольной пирамиде $OABC$ на боковых ребрах OA , OB , OC взяты точки A_1 , B_1 , C_1 так, что $OA = 3 \cdot OA_1$, $OB = 4 \cdot OB_1$, $OC = 5 \cdot OC_1$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки A_1 , B_1 , C_1 , делит отрезок, соединяющий вершину O с точкой пересечения медиан треугольника ABC ?

Ответ: $1:3$, считая от вершины O .

1.15. Используя скалярное произведение векторов, доказать метрическое свойство параллелепипеда: *сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов его ребер.*

Указание: использовать метрическое свойство параллелограмма (см. пример 1.14).

1.16. Доказать, что векторы $\vec{d} = \vec{a} \cdot (\vec{b}, \vec{c}) - \vec{b} \cdot (\vec{a}, \vec{c})$ и \vec{c} ортогональны.

1.17. Вычислить $(\vec{a}, \vec{a}) - 3 \cdot (\vec{a}, \vec{b}) - 2 \cdot (\vec{b}, \vec{c})$, если известно, что $\vec{a} = 4 \cdot \vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2 \cdot \vec{n}$, $\vec{c} = 2 \cdot \vec{m} - 3 \cdot \vec{n}$, где \vec{m} и \vec{n} – взаимно перпендикулярные векторы, причем $|\vec{n}| = 1$.

Ответ: 19 .

1.18. Найти единичный вектор \bar{e} , коллинеарный вектору $\bar{a} = 6 \cdot \bar{i} - 7 \cdot \bar{j} - 6 \cdot \bar{k}$.

Ответ: $\bar{e} = \frac{6}{11} \cdot \bar{i} - \frac{7}{11} \cdot \bar{j} - \frac{6}{11} \cdot \bar{k}$.

1.19. Вычислить модуль и направляющие косинусы вектора $\bar{a} = 12 \cdot \bar{i} - 15 \cdot \bar{j} - 16 \cdot \bar{k}$.

Ответ: $|\bar{a}| = 25$; $\cos \alpha = \frac{12}{25}$; $\cos \beta = -\frac{15}{25}$; $\cos \gamma = -\frac{16}{25}$.

1.20. Вычислить угол между векторами $\bar{a} = 3 \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j}$; $\bar{b} = \bar{i} + 5 \cdot \bar{j}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

1.21. Какой угол образуют единичные векторы \bar{e}_1, \bar{e}_2 , если известно, что векторы $\bar{a} = \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2$ и $\bar{b} = 5 \cdot \bar{e}_1 - 4 \cdot \bar{e}_2$ взаимно перпендикулярны?

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

1.22. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} - 3 \cdot \bar{j} + 4 \cdot \bar{k}$; $\bar{b} = 2 \cdot \bar{i} - 3 \cdot \bar{j} + 6 \cdot \bar{k}$. Найти ортогональную проекцию $\overline{pr}_{\bar{b}} \bar{a}$ вектора \bar{a} на ось, заданную вектором \bar{b} , и ортогональную составляющую $\bar{a}_{\perp \bar{b}}$ вектора \bar{a} относительно этой оси, а также алгебраическое значение $pr_{\bar{b}} \bar{a}$ длины проекции вектора \bar{a} .

Ответ: $\overline{pr}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{10}{7} \cdot \bar{i} - \frac{15}{7} \cdot \bar{j} + \frac{30}{7} \cdot \bar{k}$; $\bar{a}_{\perp \bar{b}} = -\frac{3}{7} \cdot \bar{i} - \frac{6}{7} \cdot \bar{j} - \frac{2}{7} \cdot \bar{k}$; $pr_{\bar{b}} \bar{a} = 5$.

1.23. Вычислить $([\bar{a}, \bar{b}], [\bar{a}, \bar{b}]) + (\bar{a}, \bar{b})^2$, если известно, что $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$. Ответ: 36.

1.24. Силы $\bar{F}_1 = 2 \cdot \bar{i} - \bar{j} - 3 \cdot \bar{k}$; $\bar{F}_2 = 3 \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j} - \bar{k}$; $\bar{F}_3 = -4 \cdot \bar{i} + \bar{j} + 3 \cdot \bar{k}$ приложены к одной точке A . Найти равнодействующую \bar{F} этих сил и момент $\bar{m}_O(\bar{F})$ равнодействующей относительно центра O , если известно, что $\overline{OA} = -3 \cdot \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$.

Ответ: $\bar{F} = \bar{i} + 2 \cdot \bar{j} - \bar{k}$; $\bar{m}_O(\bar{F}) = \bar{i} - 4 \cdot \bar{j} - 7 \cdot \bar{k}$.

1.25. Найти положения центра масс Z однородных пластинок, изображенных на рис.1.70:

а) из квадрата $ABCD$ вырезана "четверть" (рис.1.70,а);

б) трапеция $ABCD$, основания которой относятся, как $AD : BC = 2 : 1$ (рис.1.70,б);

в) из круга с диаметром AB вырезан круг диаметра OB , где точка O — центр большего круга (рис.1.70,в).

Ответ: а) точка Z делит отрезок AO в отношении $5:1$, считая от точки A (рис.1.70,а); б) точка Z делит отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, в отношении $4:5$, считая от большего основания; в) точка Z делит отрезок AO в отношении $5:1$, считая от точки A .

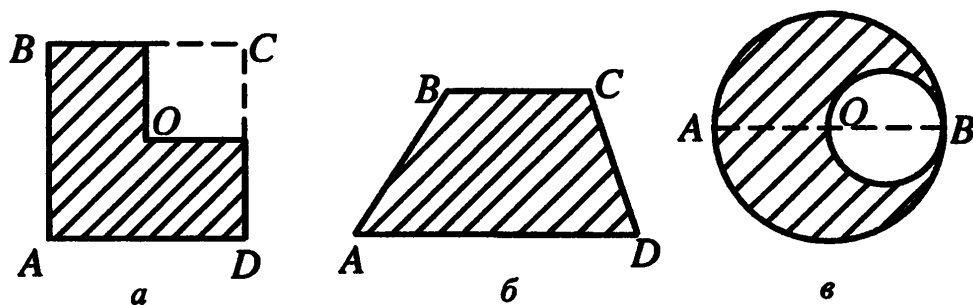


Рис.1.70

1.26. На векторах $\overline{OA} = m \cdot \bar{i} + n \cdot \bar{j} - 1 \cdot \bar{k}$, $\overline{OB} = n \cdot \bar{i} - m \cdot \bar{j} + 1 \cdot \bar{k}$, $\overline{OC} = 1 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} + 1 \cdot \bar{k}$ построена треугольная пирамида $OABC$ (рис.1.71).

Требуется найти:

а) длины ребер OA , OB , OC ;

б) величину угла AOC ;

в) площадь треугольника OAC ;

г) объем пирамиды $OABC$;

д) высоту пирамиды, опущенную из вершины B ;

е) высоту треугольника OAC , опущенную из вершины

A ;

ж) угол между ребром OA и плоскостью грани OBC ;

з) величину угла между плоскостями граней OAC и OBC ;

и) радиус-вектор \overline{OM} , где M – точка пересечения медиан треугольника ABC ;

к) радиус-вектор \overline{ON} , где точка N делит отрезок AM в отношении $AN:NM = 3:4$;

л) направляющие косинусы вектора \overline{OB} ;

м) алгебраическое значение ортогональной проекции вектора \overline{OA} на направление вектора \overline{OB} ;

н) ортогональную проекцию вектора \overline{OA} на прямую, перпендикулярную грани OBC ;

о) единичный вектор \bar{e} (орт), имеющий направление вектора \overline{AB} ;

п) вектор \bar{a} , имеющий длину вектора \overline{AB} и направление вектора \overline{AC} .

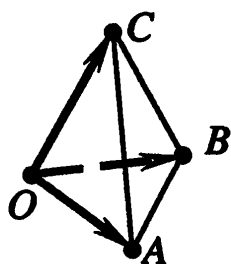


Рис.1.71

ГЛАВА 2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

2.1. АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

2.1.1. Аффинные системы координат на прямой, на плоскости, в пространстве

Пусть в пространстве фиксирована точка O . Совокупность точки O и базиса называется **аффинной (декартовой) системой координат**:

– **аффинная система координат на прямой** (рис.2.1,а) – это точка O и ненулевой вектор \bar{e} на прямой (базис на прямой);

– **аффинная система координат на плоскости** (рис.2.1,б) – это точка O и два неколлинеарных вектора \bar{e}_1, \bar{e}_2 , взятые в определенном порядке (базис на плоскости);

– **аффинная система координат в пространстве** (рис.2.1,в) – это точка O и три некопланарных вектора $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, взятые в определенном порядке (базис в пространстве).

Точка O называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются **коорди-**

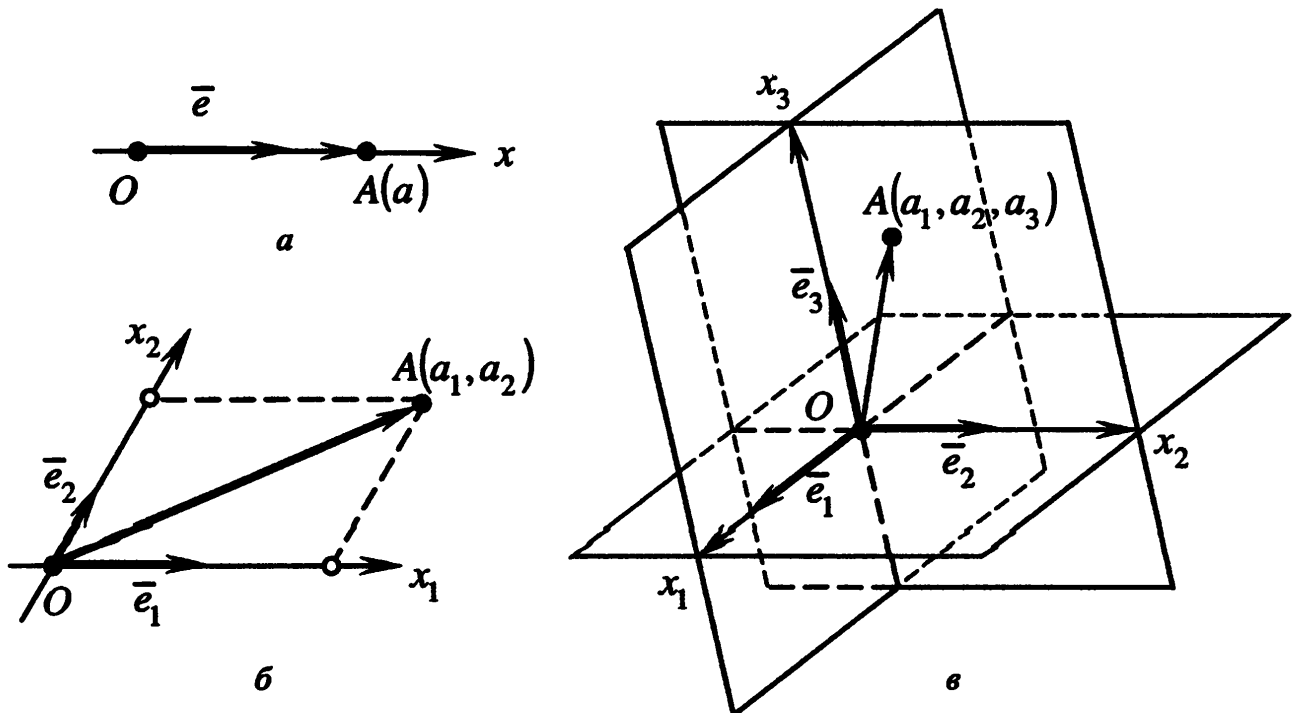


Рис.2.1

натными осями: Ox_1 – ось абсцисс, Ox_2 – ось ординат, Ox_3 – ось аппликат. Плоскости, проходящие через две координатные оси, называются **координатными плоскостями**.

Аффинная система координат в пространстве (или на плоскости) называется **правой**, если ее базис является правым, и **левой**, если ее базис – левый.

Координатами вектора в заданной системе координат называются, как и ранее, коэффициенты в разложении вектора по базису (см. разд.1.3.1; 1.3.2; 1.3.3).

Для любой точки A в заданной аффинной системе координат можно рассмотреть вектор \overline{OA} , начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой A (рис.2.1,а,б,в). Этот вектор называется **радиус-вектором** точки A .

Координатами точки A в заданной системе координат называются координаты радиус-вектора этой точки относительно заданного базиса. В пространстве это координаты вектора \overline{OA} в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, т.е. коэффициенты a_1, a_2, a_3 в разложении $\overline{OA} = a_1 \cdot \overline{e}_1 + a_2 \cdot \overline{e}_2 + a_3 \cdot \overline{e}_3$ (рис.2.1,в). Координаты точки записывают в виде $A(a_1, a_2, a_3)$. Первая координата называется **абсциссой**, вторая – **ординатой**, третья – **апplikатой**. На плоскости и на прямой координаты записывают в виде $A(a_1, a_2)$ и $A(a)$ согласно разложениям $\overline{OA} = a_1 \cdot \overline{e}_1 + a_2 \cdot \overline{e}_2$ (рис.2.1,б), $\overline{OA} = a \cdot \overline{e}$ (рис.2.1,а). Координаты точки

A , или, что то же самое, координаты ее радиус-вектора \overline{OA} представляют в виде координатного столбца (матрицы-столбца):

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ в пространстве,} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ на плоскости.}$$

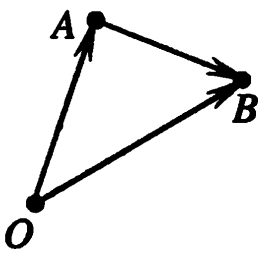


Рис.2.2

Найдем координаты вектора \overline{AB} с началом в точке $A(a_1, a_2, a_3)$ и концом в точке $B(b_1, b_2, b_3)$. Рассмотрим треугольник OAB (рис.2.2). Радиус-векторы \overline{OA} и \overline{OB} представляются в виде $\overline{OA} = a_1 \cdot \overline{e}_1 + a_2 \cdot \overline{e}_2 + a_3 \cdot \overline{e}_3$, $\overline{OB} = b_1 \cdot \overline{e}_1 + b_2 \cdot \overline{e}_2 + b_3 \cdot \overline{e}_3$. По правилу треугольника (см. разд.1.1.2) вычитания векторов получаем

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (b_1 - a_1) \cdot \overline{e}_1 + (b_2 - a_2) \cdot \overline{e}_2 + (b_3 - a_3) \cdot \overline{e}_3$, т.е. вектор \overline{AB} имеет координаты $b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3$. Этим доказано следующее правило: *чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты его начала.* Это же правило справедливо для аффинных систем координат на плоскости и на прямой.

З а м е ч а н и я 2.1.

1. В заданной системе координат каждой точке можно поставить в соответствие ее координаты, причем это соответствие взаимно однозначное:

(точка) \leftrightarrow (ее координаты).

В частности, разным точкам соответствуют разные наборы координат.

2. Если вектор \vec{v} с координатами v_1, v_2, v_3 отложить от точки $A(a_1, a_2, a_3)$, то конец вектора $\overline{AB} = \vec{v}$ будет иметь координаты $B(a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3)$.

3. Координаты точки M , которая делит отрезок AB в отношении $\frac{AM}{MB} = \frac{\beta}{\alpha}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), находятся по координатам его концов $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$:

$$M\left(\frac{\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha \cdot a_3 + \beta \cdot b_3}{\alpha + \beta}\right).$$

В частности, координаты середины M отрезка AB равны среднему арифметическому соответствующих координат концов отрезка ($\alpha = \beta$):

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right).$$

Координаты точки M , которая "делит" площадь треугольника ABC в отношении $S_{MBC} : S_{MCA} : S_{MAB} = \alpha : \beta : \gamma$ ($\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$), находятся по координатам его вершин $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$:

$$M\left(\frac{\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha \cdot a_3 + \beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3}{\alpha + \beta + \gamma}\right).$$

В частности, координаты точки M пересечения медиан треугольника ABC равны среднему арифметическому соответствующих координат вершин треугольника ($\alpha = \beta = \gamma$):

$$M\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}, \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}\right).$$

Эти формулы следуют из свойств 2,4 аффинных и выпуклых комбинаций (см. разд.1.6.1). Они остаются справедливыми и на координатной плоскости, если аппликаты всех точек положить равными нулю. Например, координаты середины M отрезка AB : $M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$, или координаты точки M пересечения медиан треугольника ABC : $M\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$.

Пример 2.1. В некоторой аффинной системе координат известны координаты вершин треугольной пирамиды $ABCD$ (см. рис.2.3): $A(1, 1, 3)$,

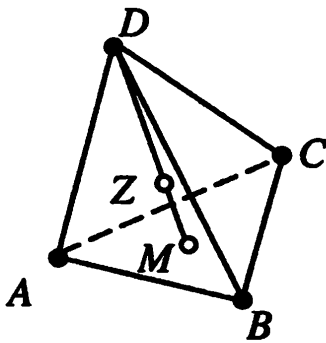


Рис.2.3

$B(3,5,4)$, $C(-1,3,2)$, $D(5,3,-1)$. Найти координаты (в той же системе координат):

а) точки M пересечения медиан треугольника ABC ;

б) точки Z , которая делит отрезок DM в отношении $DZ:ZM = 3:1$ ($\beta=3$; $\alpha=1$).

□ Учитывая п.3 замечаний 2.1, получаем:

а) $M\left(\frac{1+3+(-1)}{3}, \frac{1+5+3}{3}, \frac{3+4+2}{3}\right)$, т.е. $M(1, 3, 3)$;

б) $Z\left(\frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 1}{1+3}, \frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{1+3}, \frac{1 \cdot (-1) + 3 \cdot 3}{1+3}\right)$, т.е. $Z(2, 3, 2)$. ■

2.1.2. Прямоугольные системы координат

Аффинная система координат называется *прямоугольной*, если ее базис ортонормированный. Выбирая стандартные базисы (см. разд.1.3.5), получаем:

$O\bar{i}$ – *прямоугольную систему координат на прямой* – это точка O и единичный вектор \bar{i} на прямой. Точки O и A (рис.2.4) на координатной оси Ox обозначаются $O(0)$ и $A(1)$;

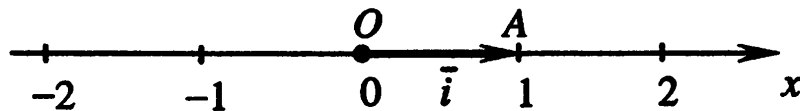


Рис.2.4

$O\bar{i}\bar{j}$ – *прямоугольную систему координат на плоскости* – это точка O и два взаимно перпендикулярных единичных вектора \bar{i} и \bar{j} на плоскости (вектор \bar{i} – первый базисный вектор, а \bar{j} – второй; пара векторов \bar{i}, \bar{j} – правая). Координатные оси Ox (абсцисс) и Oy (ординат) разбивают плоскость на 4 части, называемые *четвертями* (рис.2.5). Точка $A(1,1)$, например, принадлежит I четверти;

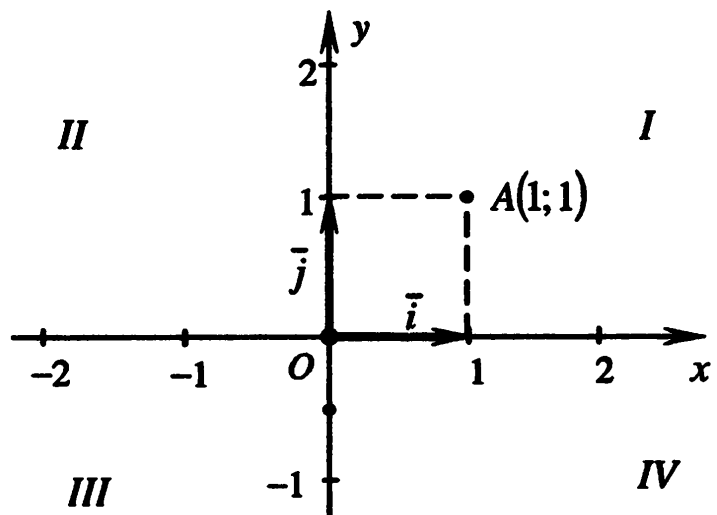


Рис.2.5

$O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ – прямоугольную систему координат в пространстве – это точка O и три попарно перпендикулярных единичных вектора $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (вектор \bar{i} – первый базисный вектор, \bar{j} – второй, а \bar{k} – третий; тройка векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – правая). Координатные оси обозначаются: Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат. Координатные плоскости Oxy, Oxz, Oyz , проходящие через пары координатных осей, разбивают пространство на 8 **октантов** (рис.2.6). Точка $A(1, 2, 2)$, например, принадлежит I октанту.

Прямоугольные системы координат обозначают также указанием начала координат и координатных осей, например, $Ox, Oxy, Oxuz$.

Координаты векторов и точек в прямоугольной системе координат называются **прямоугольными координатами**.

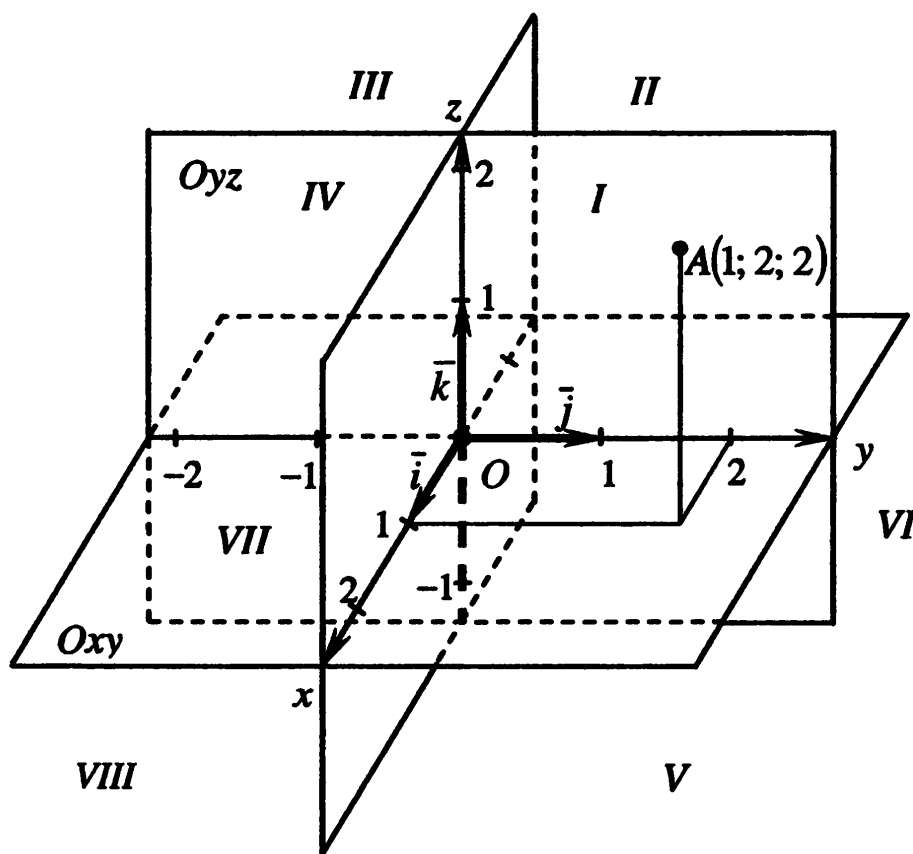


Рис.2.6

Координатами вектора в прямоугольной системе координат называются коэффициенты в разложении вектора по стандартному базису (см. разд. 1.3.5).

Координатами точки A в прямоугольной системе координат называются координаты ее радиус-вектора \overline{OA} в стандартном базисе. В пространстве это коэффициенты x, y, z в разложении $\overline{OA} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$, на плоскости – коэффициенты x, y в разложении $\overline{OA} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}$, на прямой –

коэффициент x в разложении $\overline{OA} = x \cdot \vec{i}$. Прямоугольные координаты точки (или ее радиус-вектора) можно представить координатным столбцом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ в пространстве,} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ на плоскости.}$$

Замечания 2.2.

1. В прямоугольной системе координат расстояние AB между точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ находится по формуле

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Для координатной плоскости и координатной прямой соответственно получаем

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}; \quad AB = |x_B - x_A|.$$

2. Ориентированной площадью S_{ABC}^{\wedge} треугольника ABC называется его площадь S_{ABC} , взятая со знаком плюс, если ориентация пары векторов \overline{AB} , \overline{AC} правая, и со знаком минус, если ориентация – левая. Если на плоскости известны прямоугольные координаты вершин $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ треугольника ABC , то его ориентированная площадь вычисляется по формуле

$$S_{ABC}^{\wedge} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Действительно, по свойствам определителя (см. разд. П.6) получаем половину ориентированной площади параллелограмма, построенного на векторах \overline{AB} и \overline{AC} (см. разд. 1.5.3):

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}).$$

3. Ориентированным объемом V_{ABCD}^{\wedge} тетраэдра (треугольной пирамиды) $ABCD$ называется ее объем, взятый со знаком плюс, если ориентация тройки векторов \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} правая, и со знаком минус, если ориентация – левая. Если известны прямоугольные координаты вершин $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, $D(x_D, y_D, z_D)$ тетраэдра $ABCD$, то его ориентированный объем вычисляется по формуле

$$V_{ABCD}^{\wedge} = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix}.$$

Действительно, вычитая первую строку определителя из остальных строк и раскладывая затем определитель по последнему столбцу, получаем $\frac{1}{6} \cdot (\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$, т.е. одну шестую ориентированного объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ (см. разд.1.5.3).

Пример 2.2. Известны прямоугольные координаты вершин $A(1,1), B(4,5), C(13,6)$ треугольника ABC (рис.2.7). Требуется найти:

- длину медианы AM ;
- длину биссектрисы AL ;
- высоту h_a , опущенную из вершины A .

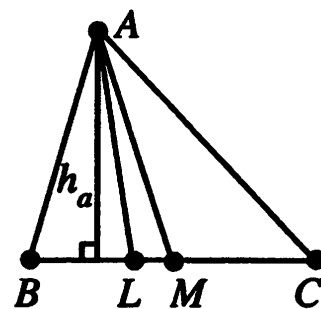


Рис.2.7

□ а) Учитывая п.3. замечаний 2.1, находим координаты точки M – середины стороны BC :

$M\left(\frac{4+13}{2}, \frac{5+6}{2}\right)$, т.е. $M\left(\frac{17}{2}, \frac{11}{2}\right)$. Учитывая п.1 замечаний 2.2, получаем:

$$AM = \sqrt{\left(\frac{17}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{11}{2}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{306}}{2}.$$

б) Найдем координаты точки L , которая делит сторону BC в отношении $BL:LC = AB:AC$ (свойство биссектрисы треугольника). Так как

$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = 5$ и $AC = \sqrt{(13-1)^2 + (6-1)^2} = 13$, то, учитывая п.2

замечаний 2.1 ($BL:LC = 5:13 \Rightarrow \alpha = 13, \beta = 5$), находим $L\left(\frac{13 \cdot 4 + 5 \cdot 13}{13+5}, \frac{13 \cdot 5 + 5 \cdot 6}{13+5}\right)$,

т.е. $L\left(\frac{13}{2}, \frac{95}{18}\right)$. Следовательно, $AL = \sqrt{\left(\frac{13}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{95}{18}-1\right)^2} = \frac{11\sqrt{130}}{18}$.

в) Учитывая п.2 замечаний 2.2, находим ориентированную площадь треугольника ABC :

$$S_{ABC}^{\wedge} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 13 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{33}{2}.$$

Следовательно, площадь этого треугольника $S_{ABC} = \frac{33}{2}$, тогда

$h_a = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{BC} = \frac{33}{\sqrt{82}}$, поскольку $BC = \sqrt{(13-4)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{82}$. ■

Пример 2.3. Известны прямоугольные координаты вершин $A(1,1,3)$, $B(3,5,4)$, $C(-1,3,2)$, $D(5,3,-1)$ треугольной пирамиды $ABCD$. Требуется найти:

а) длину отрезка DM , соединяющего вершину D пирамиды с точкой M пересечения медиан грани ABC (см. рис.2.3);

б) объем V_{ABCD} пирамиды.

□ а) Координаты точки M найдены в примере 2.1: $M(1, 3, 3)$. Поэтому

$$DM = \sqrt{(1-5)^2 + (3-3)^2 + (3+1)^2} = 4\sqrt{2}.$$

б) Найдем ориентированный объем пирамиды по формуле п.3 замечаний 2.2. Вычитая первую строку из остальных строк и раскладывая определитель по последнему столбцу, получаем

$$\begin{aligned} V_{ABCD}^{\wedge} &= \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot (-16 - 16 - 4 - 8 - 32 + 4) = 12. \end{aligned}$$

Следовательно, $V_{ABCD} = 12$. ■

2.2. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

Рассмотрим преобразование системы координат в пространстве.

Пусть в пространстве заданы две системы координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ и $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3$. Первую систему координат будем условно называть "старой", а вторую – "новой". Тогда базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – "старый", а базис $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ – "новый". Старый и новый базисы представим в виде символических матриц-строк: $(\bar{e}) = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \bar{e}_3)$, $(\bar{e}') = (\bar{e}'_1 \ \bar{e}'_2 \ \bar{e}'_3)$. Поставим следующие задачи:

1) нахождения координат вектора в новом базисе по координатам того же вектора в старом базисе;

2) нахождения координат точки в новой системе координат по координатам той же точки в старой системе координат.

2.2.1. Преобразование координат вектора при замене базиса

Пусть известны координаты векторов нового базиса относительно старого базиса:

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= s_{11} \cdot \vec{e}_1 + s_{21} \cdot \vec{e}_2 + s_{31} \cdot \vec{e}_3, \\ \vec{e}'_2 &= s_{12} \cdot \vec{e}_1 + s_{22} \cdot \vec{e}_2 + s_{32} \cdot \vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 &= s_{13} \cdot \vec{e}_1 + s_{23} \cdot \vec{e}_2 + s_{33} \cdot \vec{e}_3.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Записывая по столбцам координаты векторов $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, составляем матрицу:

$${}_{(\vec{e}) \rightarrow (\vec{e}')} S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Квадратная матрица ${}_{(\vec{e}) \rightarrow (\vec{e}')} S$, составленная из координатных столбцов векторов нового базиса (\vec{e}') в старом базисе (\vec{e}) , называется *матрицей перехода от старого базиса к новому (матрицей преобразования базиса)*.

При помощи матрицы перехода (2.2) формулы (2.1) можно записать в виде:

$$(\vec{e}'_1 \quad \vec{e}'_2 \quad \vec{e}'_3) = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3) \cdot {}_{(\vec{e}) \rightarrow (\vec{e}')} S \quad \text{или, короче,} \quad (\vec{e}') = (\vec{e}) \cdot {}_{(\vec{e}) \rightarrow (\vec{e}')} S. \quad (2.3)$$

Умножение символической матрицы-строки (\vec{e}) на матрицу перехода ${}_{(\vec{e}) \rightarrow (\vec{e}')} S$ в (2.3) производится по правилам умножения матриц (см. разд. П.3).

Пусть в базисе (\vec{e}) вектор \vec{v} имеет координаты v_1, v_2, v_3 , а в базисе (\vec{e}') – координаты v'_1, v'_2, v'_3 , т.е.

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3 = v'_1 \cdot \vec{e}'_1 + v'_2 \cdot \vec{e}'_2 + v'_3 \cdot \vec{e}'_3 \quad \text{или, короче,} \quad \vec{v} = (\vec{e}) \underset{(\vec{e})}{v} = (\vec{e}') \underset{(\vec{e}')}{v'},$$

где $\underset{(\vec{e})}{v} = (v_1 \quad v_2 \quad v_3)^T$, $\underset{(\vec{e}')}{v'} = (v'_1 \quad v'_2 \quad v'_3)^T$ – координатные столбцы вектора

\vec{v} . Подставляя в правую часть последнего равенства выражение (2.3), получаем $\vec{v} = (\vec{e}) \cdot \underset{(\vec{e})}{v} = (\vec{e}) \cdot {}_{(\vec{e}) \rightarrow (\vec{e}')} S \cdot \underset{(\vec{e}')}{v'}$ – два разложения вектора \vec{v} в одном и том же базисе (\vec{e}) . Коэффициенты этих разложений совпадают (по теореме 1.5), так как это координаты одного и того же вектора в одном базисе. Поэтому

$$\underset{(\vec{e})}{v} = {}_{(\vec{e}) \rightarrow (\vec{e}')} S \cdot \underset{(\vec{e}')}{v'} \quad \text{или, что то же самое,} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Формула (2.4) устанавливает связь координат вектора в разных базисах: *координатный столбец вектора в старом базисе получается в результате умножения матрицы перехода на координатный столбец вектора в новом базисе.*

Аналогично находится связь координат вектора на плоскости при замене базиса:

$$\begin{pmatrix} v \\ \bar{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{e}') \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v' \\ \bar{e}' \end{pmatrix} \quad \text{или, что то же самое,} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$ – координатные столбцы вектора \bar{v} относительно базисов $(\bar{e}) = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2)$ и $(\bar{e}') = (\bar{e}'_1 \ \bar{e}'_2)$ на плоскости соответственно, а $\begin{pmatrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{e}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса (\bar{e}) к базису (\bar{e}') .

Матрица перехода от одного базиса к другому обладает следующими свойствами.

1. Пусть в пространстве имеются три базиса $(\bar{e}), (\bar{f}), (\bar{g})$ и известны матрицы перехода: $\begin{pmatrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{f}) \end{pmatrix}$ от базиса (\bar{e}) к базису (\bar{f}) ; $\begin{pmatrix} S \\ (\bar{f}) \rightarrow (\bar{g}) \end{pmatrix}$ от (\bar{f}) к (\bar{g}) ; $\begin{pmatrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{g}) \end{pmatrix}$ от (\bar{e}) к (\bar{g}) . Тогда матрица $\begin{pmatrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{g}) \end{pmatrix}$ композиции преобразований базисов $(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})$ и $(\bar{f}) \rightarrow (\bar{g})$ равна произведению матриц преобразований базисов:

$$\begin{pmatrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{g}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{f}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ (\bar{f}) \rightarrow (\bar{g}) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

2. Если $\begin{pmatrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{f}) \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса (\bar{e}) к базису (\bar{f}) , то матрица $\begin{pmatrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{f}) \end{pmatrix}$ обратимая (невырожденная) и обратная матрица является матрицей перехода от базиса (\bar{f}) к базису (\bar{e}) : $\begin{pmatrix} S^{-1} \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{f}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ (\bar{f}) \rightarrow (\bar{e}) \end{pmatrix}$. Координаты вектора \bar{v} в базисах (\bar{e}) и (\bar{f}) связаны формулами:

$$\begin{pmatrix} v \\ \bar{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{f}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ \bar{f} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v \\ \bar{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{-1} \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{f}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ \bar{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ (\bar{f}) \rightarrow (\bar{e}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ \bar{e} \end{pmatrix}.$$

3. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} S \\ (\bar{f}) \rightarrow (\bar{g}) \end{pmatrix}$ перехода от базиса $(\bar{f}) = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2 \ \bar{f}_3)$ к базису $(\bar{g}) = (\bar{g}_1 \ \bar{g}_2 \ \bar{g}_3)$ равен отношению ориенти-

рованных объемов параллелепипедов, построенных на базисных векторах (рис.2.8,а):

$$\det_{(\bar{f}) \rightarrow (\bar{g})} S = \frac{(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)}.$$

Определитель матрицы $S_{(\bar{f}) \rightarrow (\bar{g})}$ перехода от базиса $(\bar{f}) = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2)$ на плоскости к базису $(\bar{g}) = (\bar{g}_1 \ \bar{g}_2)$ равен отношению ориентированных площадей параллелограммов, построенных на базисных векторах (рис.2.8,б):

$$\det_{(\bar{f}) \rightarrow (\bar{g})} S = \frac{\bar{g}_1 \wedge \bar{g}_2}{\bar{f}_1 \wedge \bar{f}_2}.$$

Определитель матрицы перехода положительный, если эти базисы одноименные (оба правых или оба левых), и отрицательный, если базисы разноименные (один правый, а другой левый).

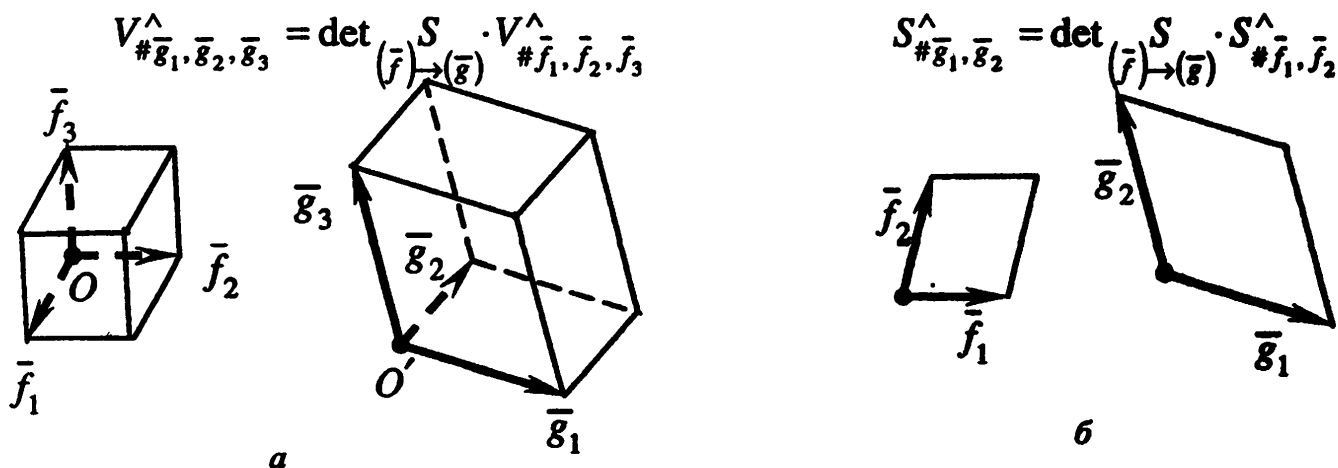


Рис.2.8

4. Любая невырожденная квадратная матрица (2-го или 3-го порядков) может служить матрицей перехода от базиса к базису (на плоскости или в пространстве соответственно).

Докажем первое свойство. Запишем связь (2.4) для данных базисов:

$$(\bar{f}) = (\bar{e}) \cdot S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})}; \quad (\bar{g}) = (\bar{f}) \cdot S_{(\bar{f}) \rightarrow (\bar{g})}; \quad (\bar{g}) = (\bar{e}) \cdot S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{g})}.$$

Подставляя первое выражение во второе равенство, получаем $(\bar{g}) = (\bar{e}) \cdot S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})} \cdot S_{(\bar{f}) \rightarrow (\bar{g})}$. Сравнивая с третьим равенством, приходим к (2.6).

Докажем второе свойство. Пусть $S_{(\bar{f}) \rightarrow (\bar{e})}$ – матрица перехода от базиса

(\bar{f}) к базису (\bar{e}) . Учитывая, что матрица перехода от базиса (\bar{e}) к базису (\bar{e}) – единичная, применяем свойство 1 к трем базисам $(\bar{e}), (\bar{f}), (\bar{e})$:

$E = S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})} \cdot S_{(\bar{f}) \rightarrow (\bar{e})}$. Для трех базисов $(\bar{f}), (\bar{e}), (\bar{f})$ аналогично получаем:

$$E = S_{(\bar{f}) \rightarrow (\bar{e})} \cdot S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})}. \text{ Следовательно, } S_{(\bar{f}) \rightarrow (\bar{e})} = S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})}^{-1} \text{ (см. разд. П.9).}$$

Докажем третье свойство для базисов в пространстве. Пусть

$$S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})}^F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} - \text{ матрица перехода от стандартного базиса}$$

$(\bar{e}) = (\bar{i} \ \bar{j} \ \bar{k})$ к базису $(\bar{f}) = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2 \ \bar{f}_3)$, где $\bar{f}_1 = f_{11} \cdot \bar{i} + f_{21} \cdot \bar{j} + f_{31} \cdot \bar{k}$,

$\bar{f}_2 = f_{12} \cdot \bar{i} + f_{22} \cdot \bar{j} + f_{32} \cdot \bar{k}$, $\bar{f}_3 = f_{13} \cdot \bar{i} + f_{23} \cdot \bar{j} + f_{33} \cdot \bar{k}$. По формуле (1.20)

ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$, равен смешанному произведению $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$ или, что то же самое, определителю $\det S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})}^F$. Аналогично, если

$S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{g})}^G$ – матрица перехода от стандартного базиса к базису $(\bar{g}) = (\bar{g}_1 \ \bar{g}_2 \ \bar{g}_3)$, то $\det S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{g})}^G =$

$(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3)$. Из первых двух свойств матрицы перехода следует, что

$$S_{(\bar{f}) \rightarrow (\bar{g})} = S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})}^{-1} \cdot S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{g})}^G. \text{ По свойствам определителя (см. разд. П.9)}$$

$$\det S_{(\bar{f}) \rightarrow (\bar{g})} = \det S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})}^{-1} \cdot \det S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{g})}^G = \frac{\det S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{g})}^G}{\det S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})}^F} = \frac{(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)}, \text{ что и требовалось}$$

доказать.

2.2.2. Преобразование координат точки при замене системы координат

Пусть в пространстве заданы две системы координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ (старая) и $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3$ (новая), известна матрица (2.2) перехода от базиса (\bar{e}) к базису (\bar{e}') , а также координаты **вектора переноса начала координат** $\bar{s} = \overline{OO'}$ в старом базисе (\bar{e}) :

$$\bar{s} = \overline{OO'} = s_1 \cdot \bar{e}_1 + s_2 \cdot \bar{e}_2 + s_3 \cdot \bar{e}_3.$$

Пусть $X(x_1, x_2, x_3)$ и $X(x'_1, x'_2, x'_3)$ – координаты точки X относительно старой и новой систем координат. Требуется найти формулы, связывающие старые и новые координаты точки X (рис.2.9).

Запишем векторное равенство $\overline{OX} = \overline{OO'} + \overline{O'X}$ в координатной форме (в старом базисе (\bar{e})), учитывая, что координаты радиус-вектора совпадают

с координатами точки, а старые и новые координаты вектора \overline{OX} связаны формулой (2.4). Получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ (\bar{e}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ (\bar{e}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{e}') \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ (\bar{e}') \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) устанавливает связь координат одной и той же точки в разных системах координат в пространстве, выражая старые координаты через новые.

Аналогичная формула

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ (\bar{e}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ (\bar{e}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{e}') \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ (\bar{e}') \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

устанавливает связь координат одной и той же точки в разных системах координат на плоскости, выражая старые координаты через новые.

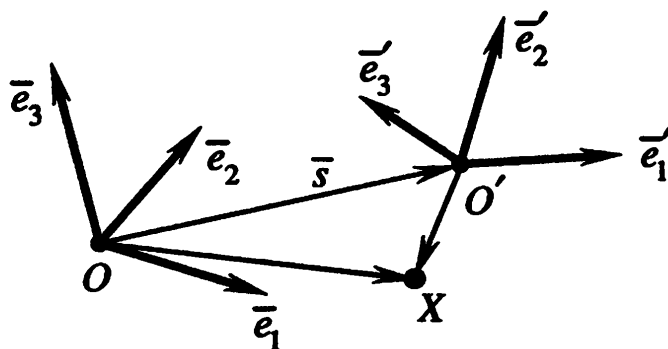


Рис.2.9

Формулы вида (2.7) или (2.8):

$$x = s + S \cdot x'$$

с любой невырожденной матрицей S задают **аффинное преобразование координат** на плоскости или в пространстве. По этим формулам можно для любой старой системы координат установить новую систему координат, поскольку известен вектор $\bar{s} = \overline{OO'}$ переноса начала координат (координатный столбец s) и координаты новых базисных векторов в старом базисе (координатные столбцы являются столбцами матрицы S), и наоборот, по новой системе координат восстановить старую.

Пример 2.4. В прямоугольной системе координат $O\bar{i}\bar{j}$ на плоскости заданы векторы $\bar{f}_1 = 2\cdot\bar{i} + \bar{j}$, $\bar{f}_2 = -\bar{i} + 2\cdot\bar{j}$ и точки $O'(3,1)$, $A(-1,3)$ (рис.2.10). Требуется найти:

а) матрицу перехода $\begin{pmatrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{f}) \end{pmatrix}$ от стандартного базиса $(\bar{e}) = (\bar{i} \quad \bar{j})$ к базису $(\bar{f}) = (\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2)$;

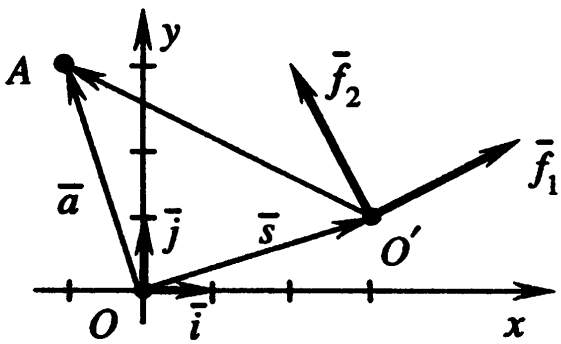


Рис.2.10

- б) ориентацию базиса $(\bar{f}) = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2)$;
 в) матрицу перехода $(\bar{e}) \xrightarrow{S} (\bar{f}')$ от стандартного базиса $(\bar{e}) = (\bar{i} \ \bar{j})$ к базису $(\bar{f}') = (\bar{f}_2 \ \bar{f}_1)$;
 г) матрицу перехода $(\bar{f}) \xrightarrow{S} (\bar{e})$ от ба-

зиса $(\bar{f}) = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2)$ к базису $(\bar{e}) = (\bar{i} \ \bar{j})$;

д) координаты вектора $\bar{a} = \overline{OA}$ в базисе $(\bar{f}) = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2)$;

е) координаты точки A в системе координат $O' \bar{f}_1 \bar{f}_2$.

□ а) Составляем искомую матрицу $(\bar{e}) \xrightarrow{S} (\bar{f})$, записывая координаты век-

торов \bar{f}_1, \bar{f}_2 по столбцам: $(\bar{e}) \xrightarrow{S} (\bar{f}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

б) Определитель найденной матрицы $(\bar{e}) \xrightarrow{S} (\bar{f})$ положительный:

$\det_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})} S = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, поэтому базис $(\bar{f}) = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2)$ ориентирован также

как стандартный (см. свойство 3 матрицы перехода), т.е. является правым.

в) Составляем искомую матрицу $(\bar{e}) \xrightarrow{S} (\bar{f}')$, записывая координаты векто-

ров \bar{f}_2, \bar{f}_1 (в указанном порядке) по столбцам: $(\bar{e}) \xrightarrow{S} (\bar{f}') = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

г) Учитывая свойство 2, матрицей перехода от базиса $(\bar{f}) = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2)$ к базису $(\bar{e}) = (\bar{i} \ \bar{j})$ служит матрица, обратная для $(\bar{e}) \xrightarrow{S} (\bar{f})$:

$$(\bar{f}) \xrightarrow{S} (\bar{e}) = S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ -0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

д) Вектор $\bar{a} = \overline{OA}$ является радиус-вектором точки A, поэтому известны его координаты $-1, 3$ в стандартном базисе $(\bar{e}) = (\bar{i} \ \bar{j})$. Составим координатный столбец $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ вектора \bar{a} в стандартном базисе. Координатный столбец a' этого вектора относительно базиса $(\bar{f}) = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2)$ связан с

его координатным столбцом a формулой $a' = S^{-1}_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})} \cdot a$, следующей из свойства 2 матрицы перехода. Учитывая п. "г", вычисляем

$$a' = S^{-1}_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{f})} \cdot a = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ -0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 1,4 \end{pmatrix},$$

т.е. $\bar{a} = 0,2 \cdot \bar{f}_1 + 1,4 \cdot \bar{f}_2$.

е) Составляем координатный столбец $s = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ вектора $\bar{s} = \overline{OO'}$ (радиус-вектор точки O') и записываем связь (2.8):

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x'_1 - x'_2 = -4, \\ x'_1 + 2 \cdot x'_2 = 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим координаты $x'_1 = -1,2$; $x'_2 = 1,6$ точки A в системе координат $O' \bar{f}_1 \bar{f}_2$. ■

2.2.3. Преобразования прямоугольных координат на плоскости и в пространстве

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Получим формулы, связывающие координаты точки при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат. Рассмотрим три типа преобразований:

- а) *параллельный перенос*;
- б) *поворот*;
- в) *зеркальное отражение в оси абсцисс* (изменение направления оси ординат на противоположное).

В каждом случае координаты точки в старой $O\bar{i}\bar{j}$ и новой $O'\bar{i}'\bar{j}'$ системах координат связаны формулой (2.8). Поэтому достаточно найти вектор \bar{s} переноса начала координат и матрицу S перехода от базиса \bar{i}, \bar{j} к базису \bar{i}', \bar{j}' .

а) *При параллельном переносе системы координат* (рис.2.11,а) базис не изменяется, поэтому матрица перехода является единичной: $S = E$. Находим координаты вектора переноса начала координат: $\bar{s} = \overline{OO'} = x_s \cdot \bar{i} + y_s \cdot \bar{j}$. Тогда формулу (2.8) можно записать в виде

$$\begin{cases} x = x_s + x', \\ y = y_s + y'. \end{cases}$$

б) При повороте системы координат на угол φ (рис.2.11,б) начало O' новой системы координат совпадает с началом O старой, поэтому вектор переноса нулевой: $\vec{s} = \overline{OO'} = \vec{0}$. Разлагая новые базисные векторы \vec{i}', \vec{j}' по старому базису, получаем $\vec{i}' = \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}$, $\vec{j}' = -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}$. Составим матрицу перехода, записывая координаты векторов \vec{i}', \vec{j}' по столбцам: $S = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Тогда формулу (2.8) можно записать в виде

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi, \\ y = x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi. \end{cases}$$

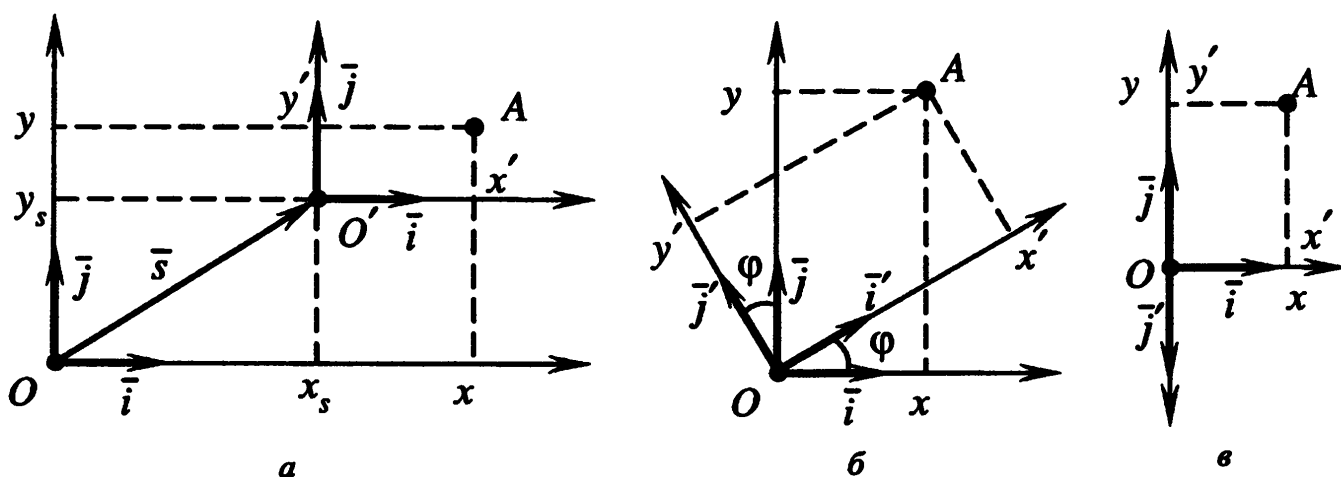


Рис.2.11

в) При зеркальном отражении в оси абсцисс (изменении направления оси ординат на противоположное) (рис.2.11,в) начало O' новой системы координат совпадает с началом O старой, поэтому вектор переноса нулевой: $\vec{s} = \overline{OO'} = \vec{0}$. Разлагая новые базисные векторы \vec{i}', \vec{j}' по старому базису, получаем $\vec{i}' = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$ (так как $\vec{i}' = \vec{i}$), $\vec{j}' = 0 \cdot \vec{i} + (-1) \cdot \vec{j}$. Составим матрицу перехода, записывая координаты векторов \vec{i}', \vec{j}' по столбцам:

$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда формулу (2.8) можно записать в виде

$$\begin{cases} x = x', \\ y = -y'. \end{cases}$$

Аналогично определяется зеркальное отражение в оси ординат (изменение направления оси абсцисс на противоположное).

Покажем, что любое преобразование прямоугольной системы координат сводится к последовательному применению рассмотренных преобразований, т.е. к **композиции преобразований систем координат**. Действительно, пусть на плоскости заданы две прямоугольные системы координат

$O\bar{i}\bar{j}$ и $O'\bar{i}'\bar{j}'$. Сначала, если точки O и O' не совпадают, выполним параллельный перенос старой системы координат на вектор $\bar{s} = \overline{OO'}$, при этом получим систему координат $O'\bar{i}\bar{j}$. Затем при помощи поворота на угол φ совместим вектор \bar{i} с вектором \bar{i}' , при этом получим систему координат $O'\bar{i}'\bar{j}''$, где вектор \bar{j}'' либо совпадает с вектором \bar{j}' ($\bar{j}'' = \bar{j}'$), либо противоположен ему ($\bar{j}'' = -\bar{j}'$). В первом случае, когда обе системы $O\bar{i}\bar{j}$ и $O'\bar{i}'\bar{j}'$ одноименные, никаких преобразований делать уже не надо, так как полученная система координат $O'\bar{i}'\bar{j}''$ совпадает с заданной $O'\bar{i}'\bar{j}'$ (рис.2.12,а). Во втором случае, когда системы $O\bar{i}\bar{j}$ и $O'\bar{i}'\bar{j}'$ разноименные, для получения системы $O'\bar{i}'\bar{j}'$ достаточно изменить направление оси ординат на противоположное, т.е. выполнить зеркальное отражение $O'\bar{i}'\bar{j}''$ в оси $O'\bar{i}'$ (рис.2.12,б). Формулы, связывающие старые и новые координаты точки, имеют вид:

– при одноименных системах координат (рис.2.12,а):

$$\begin{cases} x = x_s + x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi, \\ y = y_s + x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi, \end{cases} \quad (2.9)$$

– при разноименных системах координат (рис.2.12,б):

$$\begin{cases} x = x_s + x' \cdot \cos \varphi + y' \cdot \sin \varphi, \\ y = y_s + x' \cdot \sin \varphi - y' \cdot \cos \varphi. \end{cases} \quad (2.10)$$

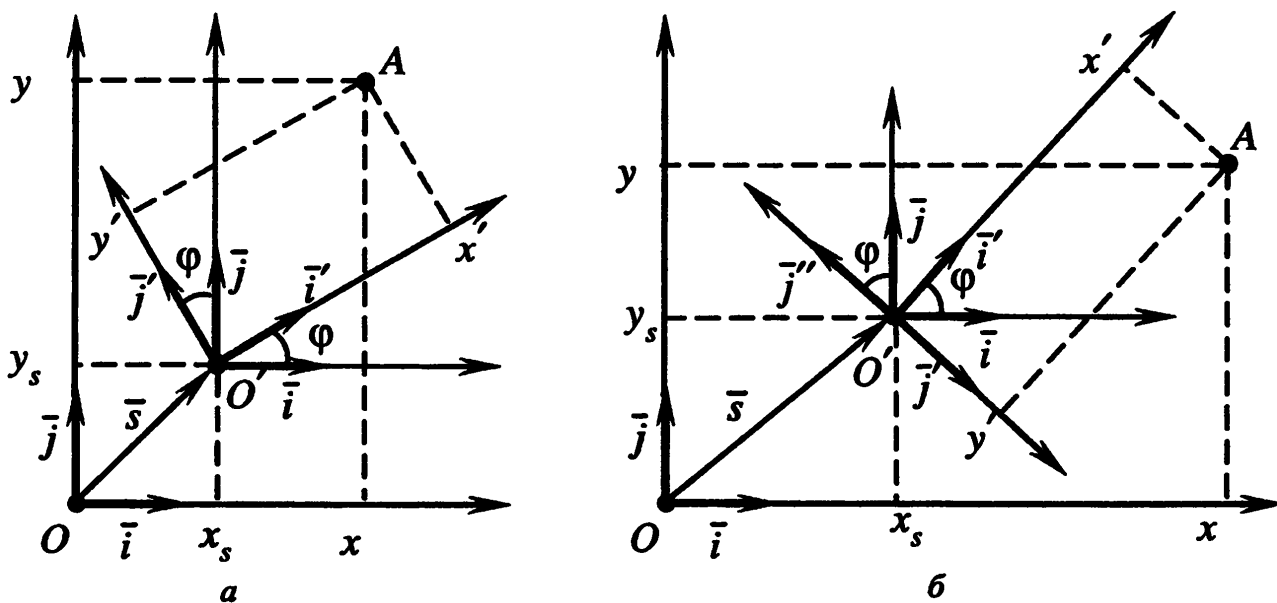


Рис.2.12

Таким образом, любое преобразование прямоугольной системы координат на плоскости сводится к композиции преобразований, каждое из которых является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо зеркальным отражением в оси координат.

З а м е ч а н и я 2.3.

1. Для рассмотренных преобразований координат точек нетрудно получить выражения новых координат через старые:

$$\text{а) } \begin{cases} x' = x - x_s, \\ y' = y - y_s, \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x' = x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi, \\ y' = -x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi, \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Для преобразования (2.9) аналогичные формулы имеют вид:

$$\begin{cases} x' = (x - x_s) \cdot \cos \varphi + (y - y_s) \cdot \sin \varphi, \\ y' = -(x - x_s) \cdot \sin \varphi + (y - y_s) \cdot \cos \varphi. \end{cases}$$

2. При $x_s = 0$, $y_s = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ из соотношений (2.10) получается преобразование

$$\begin{cases} x = y', \\ y = x', \end{cases}$$

изменяющее названия координатных осей (зеркальное отражение в прямой, содержащей биссектрису первого координатного угла).

3. Справедливо утверждение: *любое преобразование прямоугольной системы координат на плоскости может быть представлено в виде композиции зеркальных отражений в некоторых прямых.*

Для доказательства достаточно показать, что рассмотренные выше преобразования – параллельный перенос (рис.2.11,а) и поворот (рис.2.11,б) – можно представить при помощи композиции зеркальных отражений. Действительно, параллельный перенос системы координат вдоль оси абсцисс (на вектор $\vec{s} = x_s \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$) можно получить при помощи двух отражений: первое – относительно оси ординат (получим систему координат $O\vec{i}''\vec{j}$), а второе – относительно прямой l , проходящей через точку $\frac{1}{2} \cdot x_s$ на оси абсцисс параллельно оси ординат (рис.2.13,а). Аналогично выполняется сдвиг вдоль оси ординат. Поэтому любой параллельный перенос сводится к композиции зеркальных отражений.

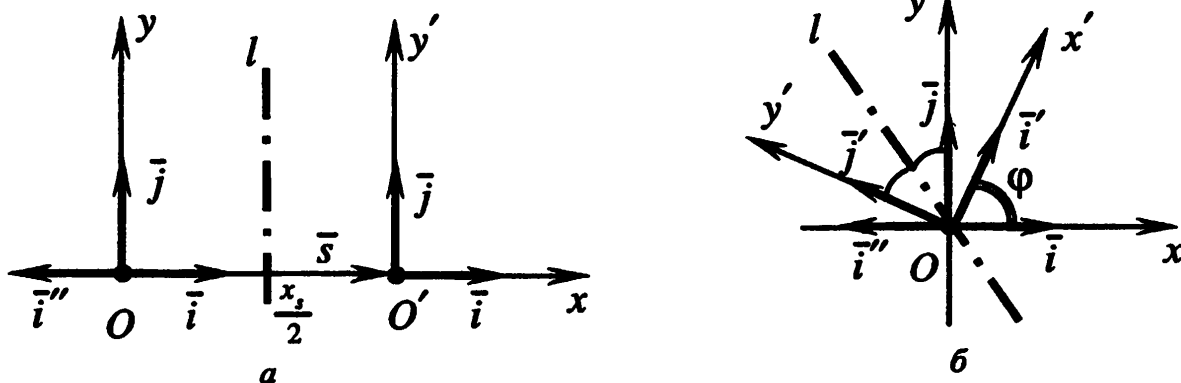


Рис.2.13

Чтобы получить поворот на угол φ , нужно выполнить два зеркальных отражения (рис.2.13,б): первое – относительно оси ординат (получим систему $O\bar{i}''\bar{j}$), а второе – относительно биссектрисы l угла между векторами \bar{j} и \bar{j}' .

4. Утверждение п.3 можно уточнить: *любое преобразование прямоугольной системы координат на плоскости может быть представлено в виде композиции не более трех зеркальных отражений в некоторых прямых* [4].

5. Преобразования координат (2.7),(2.8) называются *ортогональными*, если матрица перехода $\begin{matrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{e}') \end{matrix}$ *ортогональная*, т.е. $S^{-1} = S^T$. Нетрудно показать [10], что преобразования (2.9),(2.10) ортогональные, поэтому *любое преобразование прямоугольной системы координат является ортогональным*.

Пример 2.5. Известны координаты точек $A(7, -1)$ и $O'(8, 6)$ в прямоугольной системе координат $O\bar{i}\bar{j}$ на плоскости. Найти координаты точки A в прямоугольной системе координат $O'\bar{i}'\bar{j}'$, полученной при помощи зеркального отражения в некоторой прямой l системы Oxy (рис.2.14).

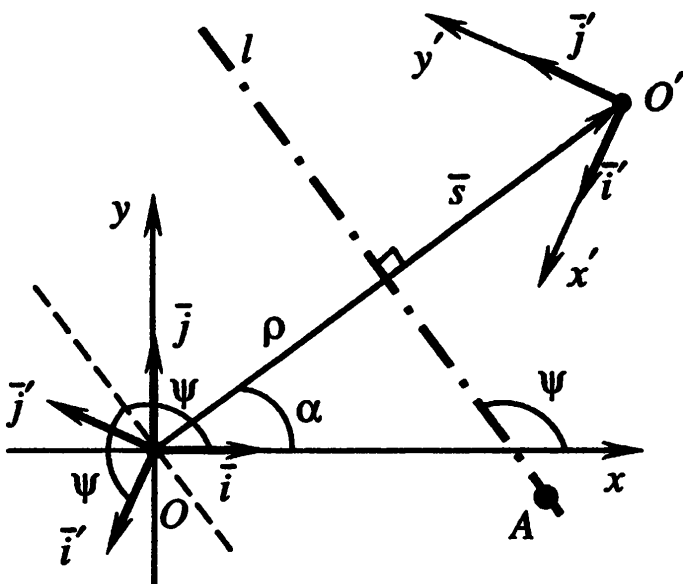


Рис.2.14

□ Находим вектор переноса начала системы координат $\bar{s} = \overline{OO'}$ $= 8 \cdot \bar{i} + 6 \cdot \bar{j}$ ($x_s = 8, y_s = 6$), его длину $|\bar{s}| = 10$ и угол $\alpha = \arccos \frac{4}{5}$ между векторами \bar{s} и \bar{i} , так как $\cos \alpha = \frac{x_s}{|\bar{s}|} = \frac{8}{10}$. Ось симметрии l при зеркальном отражении является серединным перпендикуляром к отрезку OO' , поэтому угол ψ , который образует ось симметрии с положительным направлением оси абсцисс Ox , равен $\psi = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Отражение в оси l представим в виде композиции следующих преобразований: параллельного переноса на вектор $\bar{s} = \overline{OO'}$ $= 8 \cdot \bar{i} + 6 \cdot \bar{j}$; поворота на угол $\varphi = 2\psi = \pi + 2\alpha$; зеркального отражения в оси абсцисс (рис.2.12,б). Старые и новые координаты точки A связаны формулой (2.10) при $x_s = 8, y_s = 6, \varphi = \pi + 2\alpha$. Учитывая, что $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и

$$\cos \varphi = \cos(\pi + 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -2\cos^2 \alpha + 1 = -2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 1 = -\frac{7}{25};$$

$$\sin \varphi = \sin(\pi + 2\alpha) = -\sin 2\alpha = -2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{24}{25};$$

получаем

$$\begin{cases} x = 8 - \frac{7}{25} \cdot x' - \frac{24}{25} \cdot y', \\ y = 6 - \frac{24}{25} \cdot x' + \frac{7}{25} \cdot y', \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{7}{25} \cdot (x-8) - \frac{24}{25} \cdot (y-6), \\ y' = -\frac{24}{25} \cdot (x-8) + \frac{7}{25} \cdot (y-6). \end{cases}$$

Подставляя старые координаты $x = 7$, $y = -1$ точки A , получаем ее новые координаты:

$$x' = -\frac{7}{25} \cdot (7-8) - \frac{24}{25} \cdot (-1-6) = 7; \quad y' = -\frac{24}{25} \cdot (7-8) + \frac{7}{25} \cdot (-1-6) = -1.$$

Следовательно, точка A имеет одинаковые координаты в обеих системах, т.е. точка A лежит на оси симметрии l . ■

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Получим формулы, связывающие координаты точки при переходе от одной прямоугольной системы координат в пространстве к другой прямоугольной системе координат.

Рассмотрим три типа преобразований прямоугольной системы координат:

- а) *параллельный перенос*;
- б) *поворот вокруг координатной оси*;
- в) *зеркальное отражение в координатной плоскости (изменение направления одной координатной оси на противоположное)*.

В каждом случае координаты точки в старой $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ и новой $O'\bar{i}'\bar{j}'\bar{k}'$ системах координат связаны формулой (2.7). Поэтому достаточно найти вектор \bar{s} переноса начала координат и матрицу S перехода от базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ к базису $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$.

а) *При параллельном переносе* системы координат базис не изменяется, поэтому матрица перехода является единичной: $S = E$. Находим координаты вектора переноса начала координат: $\bar{s} = \overline{OO'} = x_s \cdot \bar{i} + y_s \cdot \bar{j} + z_s \cdot \bar{k}$.

Тогда формулу (2.7) можно записать в виде

$$\begin{cases} x = x_s + x', \\ y = y_s + y', \\ z = z_s + z'. \end{cases}$$

б) *При повороте системы координат на угол φ (рис.2.11,б) вокруг оси аппликат* начало O' новой системы координат совпадает с началом O ста-

рой, поэтому вектор переноса нулевой: $\bar{s} = \overline{OO'} = \bar{o}$. Разлагая новые базисные векторы \bar{i}' , \bar{j}' , \bar{k}' по старому базису, получаем

$$\bar{i}' = \cos \varphi \cdot \bar{i} + \sin \varphi \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}; \quad \bar{j}' = -\sin \varphi \cdot \bar{i} + \cos \varphi \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}; \quad \bar{k}' = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 1 \cdot \bar{k}.$$

Составим матрицу перехода $S = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, записывая координаты

векторов \bar{i}' , \bar{j}' , \bar{k}' по столбцам. Тогда формулу (2.7) можно записать в виде

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi, \\ y = x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi, \\ z' = z. \end{cases}$$

Очевидно, что система координат на плоскости Oxy при этом преобразовании поворачивается на угол φ .

в) При зеркальном отражении в плоскости Oxy (изменении направления оси аппликат на противоположное) начало O' новой системы координат совпадает с началом O старой, поэтому вектор переноса нулевой: $\bar{s} = \overline{OO'} = \bar{o}$. Разлагая новые базисные векторы \bar{i}' , \bar{j}' , \bar{k}' по старому базису, получаем $\bar{i}' = 1 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}$; $\bar{j}' = 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}$; $\bar{k}' = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} - 1 \cdot \bar{k}$. Со-

ставим матрицу перехода $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда формулу (2.7) можно запи-

сать в виде

$$\begin{cases} x = x', \\ y = y', \\ z' = -z. \end{cases}$$

Аналогично определяются зеркальные отражения в других координатных плоскостях (изменение направлений осей абсцисс или ординат на противоположные).

Матрицы переходов в п. "а", "б", "в" ортогональные (см. п.5 замечаний 2.3).

Как и в случае преобразований на плоскости, можно показать, что любое преобразование прямоугольной системы координат в пространстве сводится к композиции преобразований, каждое из которых является либо параллельным переносом, либо поворотом вокруг координатной оси, либо зеркальным отражением в координатной плоскости [4].

Используя композицию, получим формулы преобразования координат точки в пространстве при переходе от старой прямоугольной системы $Oxyz$ к новой $Ox'y'z'$, имеющей то же начало и ту же ориентацию (т.е. новая система координат получается из старой поворотом вокруг начала координат O). Обе системы координат изображены на рис.2.15 (полужирными и двойными линиями соответственно). Чтобы от системы $Oxyz$ перейти к системе $Ox'y'z'$ нужно выполнить три поворота. Сначала проведем через точку O перпендикуляр Ox_1 (линию узлов) к плоскости Ozz' . Направление на этом перпендикуляре выберем так, чтобы ориентация система координат Ox_1zz' совпадала бы с ориентацией системы координат $Oxyz$. Если оси Oz и Oz' совпадают, то ось Ox_1 выбирается совпадающей с осью Ox . Если оси Oz и Oz' противоположно направлены, то и ось Ox_1 выбирается противоположно направленной оси Ox . Затем последовательно сделаем три поворота:

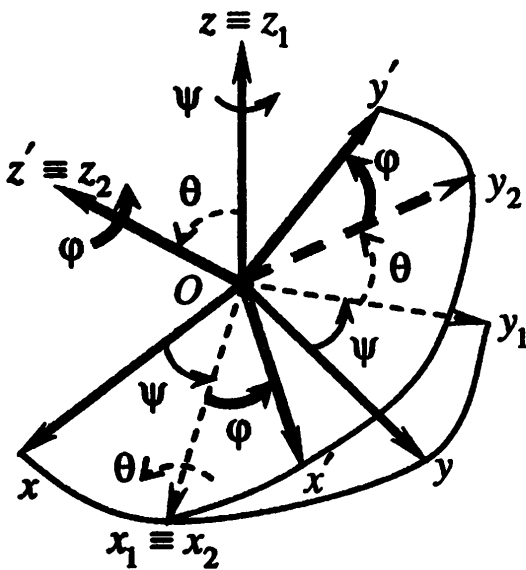


Рис.2.15

первый поворот выполним вокруг оси Oz на угол ψ ($0 \leq \psi < 2\pi$) от оси Ox до оси Ox_1 (получим систему координат $Ox_1y_1z_1$, оси Ox_1 и Oy_1 которой изображены штриховыми линиями на рис.2.15);

второй поворот выполним вокруг оси Ox_1 на угол θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) от оси Oz до оси Oz' , при этом ось Oy_1 примет положение Oy_2 (получим систему координат $Ox_1y_2z_2$, ось Oy_2 которой изображена двойной штриховой линией на рис.2.15);

третий поворот выполним вокруг оси Oz' на угол ϕ ($0 \leq \phi < 2\pi$) от оси Ox_2 до оси Ox' .

Указанные углы ψ, θ, ϕ называются *углами Эйлера*, в частности, угол ψ называется *углом прецессии*, угол θ – *углом нутации*, а угол ϕ – *углом чистого вращения*.

Согласно п."б", запишем матрицы переходов S_1, S_2, S_3 от базиса к базису для указанных поворотов соответственно:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По свойству 1 (см. разд.2.2.1) получаем матрицу перехода S от базиса прямоугольной системы координат $Oxyz$ к базису прямоугольной системы координат $Ox'y'z'$:

$$\begin{aligned} S_{(\psi, \theta, \varphi)} &= S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cdot \cos \varphi - \sin \psi \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi & -\cos \psi \cdot \sin \varphi - \sin \psi \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi & \sin \psi \cdot \sin \theta \\ \sin \psi \cdot \cos \varphi + \cos \psi \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi & -\sin \psi \cdot \sin \varphi + \cos \psi \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi & -\cos \psi \cdot \sin \theta \\ \sin \theta \cdot \sin \varphi & \sin \theta \cdot \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следуют формулы для преобразования прямоугольных координат точки

$$x = (\cos \psi \cdot \cos \varphi - \sin \psi \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi) \cdot x' + (-\cos \psi \cdot \sin \varphi - \sin \psi \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi) \cdot y' + \sin \psi \cdot \sin \theta \cdot z';$$

$$y = (\sin \psi \cdot \cos \varphi + \cos \psi \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi) \cdot x' + (-\sin \psi \cdot \sin \varphi + \cos \psi \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi) \cdot y' - \cos \psi \cdot \sin \theta \cdot z';$$

$$z = \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot x' + \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot y' + \cos \theta \cdot z'.$$

Поскольку каждая из матриц S_1, S_2, S_3 ортогональная, то и их произведение также является ортогональной матрицей (см. п.5 замечаний 2.3).

Пример 2.6. Прямоугольная система координат $O\bar{i}'\bar{j}'\bar{k}'$ получена из стандартной системы координат $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ при помощи поворота на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг прямой, проходящей через начало координат и образующей равные углы с координатными осями (на рис.2.16 эта прямая изображена одной точкой O , поскольку перпендикулярна плоскости рисунка). Требуется найти углы Эйлера.

□ Составим матрицу S перехода от базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ к базису $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$. Так как $\bar{i}' = 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}$, $\bar{j}' = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 1 \cdot \bar{k}$,

$$\bar{k}' = 1 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}, \text{ то } S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Сравнивая}$$

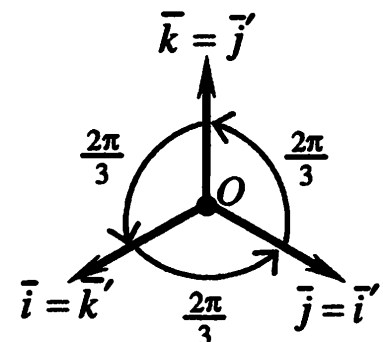


Рис.2.16

с матрицей $S_{(\psi, \theta, \varphi)}$, заключаем, что $\theta = \frac{\pi}{2}$ (так как

$\cos \theta = 0$ и $0 \leq \theta \leq \pi$); $\psi = \frac{\pi}{2}$ (так как $\sin \psi = 1$ и $0 \leq \psi < 2\pi$); $\varphi = 0$ (так как $\cos \varphi = 1$ и $0 \leq \varphi < 2\pi$). ■

2.2.4. Аффинные преобразования плоскости и пространства

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА И ПЛОСКОСТИ

Напомним (см. разд. В.2), что *преобразованием пространства* называется правило f , которое каждой точке X пространства ставит в соответствие единственную точку $Y = f(X)$ того же пространства, при этом точка Y называется *образом* точки X , а точка X – *прообразом* точки Y [8,10,23]. Преобразование называется *взаимно однозначным*, если у каждой точки Y пространства существует единственный прообраз X .

Два преобразования f и g пространства называются *равными*, если $f(X) = g(X)$ для любой точки X .

Композицией преобразований g и f называется преобразование $f \circ g$, определяемое равенством $(f \circ g)(X) = f(g(X))$.

Преобразование ε называется *тождественным*, если каждой точке пространства ставится в соответствие эта же точка: $\varepsilon(X) = X$.

Преобразование f^{-1} называется *обратным* для преобразования f , если $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \varepsilon$. Преобразование f называется *обратимым*, если для него существует обратное преобразование. Необходимым и достаточным условием обратимости является условие взаимной однозначности преобразования.

Аналогичные понятия определяются для преобразований плоскости.

Преобразование f пространства можно представить в *координатной форме*. Пусть в пространстве задана система координат, в которой точка X и ее образ Y имеют координаты $X(x_1, x_2, x_3)$ и $Y(y_1, y_2, y_3)$ соответственно. Преобразование f ставит в соответствие упорядоченной тройке чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$ упорядоченную тройку чисел $y = (y_1, y_2, y_3)$. Такое преобразование можно задать при помощи трех скалярных функций:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3), \end{cases}$$

или, что то же самое, вектор-функцией $f(x) = (f_1(x) \quad f_2(x) \quad f_3(x))^T$.

Преобразование плоскости задается двумя скалярными функциями двух переменных:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

или, что то же самое, вектор-функцией $f(x) = (f_1(x) \ f_2(x))^T$.

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Пусть на плоскости фиксирована аффинная система координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$. Преобразование \mathcal{A} плоскости называется **аффинным**, если координаты y_1, y_2 образа Y выражаются через координаты x_1, x_2 прообраза X ($Y = \mathcal{A}(X)$) по формулам

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2, \\ y_2 = a_2 + a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} y \\ \bar{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \bar{e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ \bar{e} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \bar{e} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где $\begin{pmatrix} A \\ \bar{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – невырожденная матрица (**матрица аффинного преобразования**), $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – координатные столбцы образа Y и про-

образа X (координатные столбцы радиус-векторов \overline{OY} и \overline{OX}) соответственно, $\begin{pmatrix} a \\ \bar{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ – координатный столбец **образа начала координат**, или

вектора переноса начала координат. В формулах аффинного преобразования (2.11) подчеркивается зависимость матрицы преобразования и координат векторов от выбранной системы координат. Обозначение системы координат в (2.11) будем опускать, если понятно, в какой системе координат задано преобразование.

З а м е ч а н и я 2.4.

1. Столбец $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ в (2.11) определяет координаты образа $O' = \mathcal{A}(O)$

начала координат. Действительно, подставляя координаты $x_1 = x_2 = 0$ точки O в (2.11), получаем координаты $y_1 = a_1$, $y_2 = a_2$ точки $O' = \mathcal{A}(O)$. Можно сказать, что при аффинном преобразовании начало координат переносится на вектор $\bar{a} = \overline{OO'}$, координатный столбец которого равен a .

2. *Аффинное преобразование (2.11) в любой другой аффинной системе координат $O'\vec{e}'_1\vec{e}'_2$ задается формулами того же вида.*

Действительно, пусть известны: матрица $S = \begin{matrix} S \\ (\vec{e}) \rightarrow (\vec{e}') \end{matrix}$ перехода от старого базиса $(\vec{e}) = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2)$ к новому базису $(\vec{e}') = (\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2)$ и координатный столбец s вектора переноса начала координат $\vec{s} = \overline{OO'}$ (рис.2.17). Тогда по формуле (2.8) $x = s + S \cdot x'$ и $y = s + S \cdot y'$, где x, y и x', y' – координатные столбцы точек X, Y (радиус-векторов $\overline{OX}, \overline{OY}$ и $\overline{O'X}, \overline{O'Y}$) в старой $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и новой $O'\vec{e}'_1\vec{e}'_2$ системах координат.

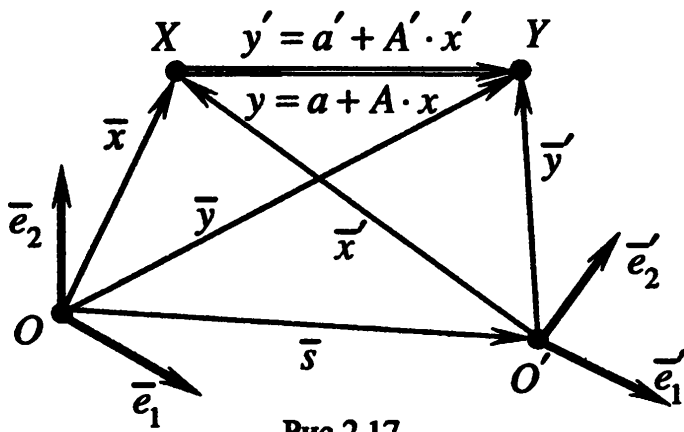


Рис.2.17

Подставляя в (2.11), получаем

$$\underbrace{s + S \cdot y'}_y = a + A \cdot \underbrace{(s + S \cdot x')}_x.$$

Учитывая, что матрица S обратимая (см. свойство 2 матриц перехода в разд.2.2.1), выражаем координатный столбец y' образа Y через координатный столбец x' прообраза X в системе координат $O'\vec{e}'_1\vec{e}'_2$:

$$y' = \underbrace{S^{-1} \cdot (a + A \cdot s - s)}_{a'} + \underbrace{S^{-1} \cdot A \cdot S}_{A'} \cdot x' = a' + A' \cdot x'.$$

В результате получили аффинное преобразование вида (2.11):

$$\begin{pmatrix} y' \\ (\vec{e}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ (\vec{e}') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' \\ (\vec{e}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ (\vec{e}') \end{pmatrix}$$

с матрицей $A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$ и координатным столбцом $a' = S^{-1} \cdot (a + A \cdot s - s)$ вектора переноса.

Таким образом, связь матриц одного и того же аффинного преобразования в разных базисах, а также координатных столбцов вектора переноса, имеет вид

$$\begin{pmatrix} A' \\ (\vec{e}') \end{pmatrix} = \begin{matrix} S^{-1} \\ (\vec{e}) \rightarrow (\vec{e}') \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ (\vec{e}) \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} S \\ (\vec{e}') \rightarrow (\vec{e}) \end{matrix}, \quad \begin{pmatrix} a' \\ (\vec{e}') \end{pmatrix} = \begin{matrix} S^{-1} \\ (\vec{e}) \rightarrow (\vec{e}') \end{matrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a \\ (\vec{e}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ (\vec{e}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ (\vec{e}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s \\ (\vec{e}) \end{pmatrix} \right), \quad (2.12)$$

где $\begin{pmatrix} A \\ (\vec{e}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' \\ (\vec{e}') \end{pmatrix}$ – матрицы $(\begin{pmatrix} a \\ (\vec{e}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ (\vec{e}') \end{pmatrix}$ – координатные столбцы вектора переноса) аффинного преобразования в старом и новом базисах, а $\begin{matrix} S \\ (\vec{e}) \rightarrow (\vec{e}') \end{matrix}$ – матрица перехода от старого базиса к новому.

3. Запишем (2.11), обозначив образ точки X через $X' = \mathcal{A}(X)$:

$$\begin{cases} x'_1 = a_1 + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2, \\ x'_2 = a_2 + a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad x' = a + A \cdot x. \quad (2.13)$$

Сравнивая формулы (2.13) аффинного преобразования плоскости с формулами (2.8) аффинного преобразования координат, заключаем, что эти соотношения:

$$x' = a + A \cdot x \quad \text{и} \quad x = s + S \cdot x'$$

будут равносильными, если положить $S = A^{-1}$ и $s = -A^{-1} \cdot a$. Действительно, умножая обе части равенства $x = -A^{-1} \cdot a + A^{-1} \cdot x'$, следующего из первого соотношения, на матрицу A слева, с учетом равенства $A \cdot A^{-1} = E$ получаем $A \cdot x = -A \cdot A^{-1} \cdot a + A \cdot A^{-1} \cdot x'$, т.е. $A \cdot x = -a + x'$, что равносильно $x' = a + A \cdot x$. Таким образом, изменение координат точки будет одно и то же, подвергается ли мы плоскость аффинному преобразованию, оставляя систему координат неизменной, или же оставляем плоскость неизменной, подвергая систему координат обратному преобразованию.

4. Аффинное преобразование плоскости порождает преобразование векторов на плоскости, если рассматривать векторы как упорядоченные пары точек, а именно: при аффинном преобразовании \mathcal{A} каждому вектору \bar{v} (рассматриваемому как упорядоченная пара точек $\bar{v} = \overline{MN}$) ставится в соответствие вектор \bar{v}' ($\bar{v}' = \overline{M'N'}$, причем $M' = \mathcal{A}(M)$, $N' = \mathcal{A}(N)$), координаты которого выражаются через координаты прообраза \bar{v} по формулам:

$$v' = A \cdot v, \quad (2.14)$$

где v, v' – координатные столбцы векторов \bar{v}, \bar{v}' (относительно одного и того же базиса), A – матрица аффинного преобразования (в том же базисе).

Это свойство следует из правила нахождения координат вектора, согласно которому из координат конца вектора надо вычесть координаты его начала. Если m, m', n, n' – координатные столбцы точек M, M', N, N' соответственно, то учитывая (2.13): $m' = a + A \cdot m$, $n' = a + A \cdot n$, получаем

$$v' = n' - m' = \underbrace{(a + A \cdot n)}_{n'} - \underbrace{(a + A \cdot m)}_{m'} = A \cdot \underbrace{(n - m)}_v = A \cdot v,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим способы задания аффинного преобразования плоскости.

Первый способ. Чтобы задать аффинное преобразование плоскости по определению, достаточно указать систему координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ и формулы (2.11), т.е. задать невырожденную матрицу A преобразования и координатный столбец a в (2.11).

Второй способ. Пусть на плоскости заданы две аффинные системы координат: старая $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ и новая $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ (рис.2.18). Тогда существует единственное аффинное преобразование \mathcal{A} плоскости, которое каждой точке X ставит в соответствие точку $Y = \mathcal{A}(X)$, координаты которой в новой системе координат $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ совпадают с координатами точки X в старой системе координат.

Действительно, пусть $\bar{s} = \overline{OO'}$ – вектор переноса начала координат, $\begin{pmatrix} \bar{e} \\ \bar{e} \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} \bar{e}' \\ \bar{e}' \end{pmatrix}$ – матрица перехода от старого базиса $(\bar{e}) = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2)$ к новому базису $(\bar{e}') = (\bar{e}'_1 \ \bar{e}'_2)$. Тогда, учитывая (2.8), имеем $\begin{pmatrix} y \\ \bar{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \bar{e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ \bar{e} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ \bar{e}' \end{pmatrix}$. Подставляя

$\begin{pmatrix} y' \\ \bar{e}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \bar{e} \end{pmatrix}$ (координаты образа $Y = \mathcal{A}(X)$ в новой системе координат совпадают с координатами прообраза X в старой системе координат), получаем аффинное преобразование

$$\begin{pmatrix} y \\ \bar{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \bar{e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ \bar{e} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \bar{e} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

вида (2.11) с невырожденной матрицей $\begin{pmatrix} A \\ \bar{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ \bar{e} \end{pmatrix}$ и столбцом $\begin{pmatrix} a \\ \bar{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \bar{e} \end{pmatrix}$. Существование аффинного преобразования доказано. Докажем единственность от противного. Пусть преобразование \mathcal{B} удовлетворяет тем же условиям, что и \mathcal{A} , но для некоторой (хотя бы одной) точки X образы $\mathcal{A}(X)$ и $\mathcal{B}(X)$ не совпадают. Тогда в новой системе координат $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ разные точки $\mathcal{A}(X)$ и $\mathcal{B}(X)$ будут иметь равные координаты (такие же, как координаты точки X в старой системе координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$), чего быть не может (см. п.1 замечаний 2.1). Полученное противоречие доказывает единственность аффинного преобразования.

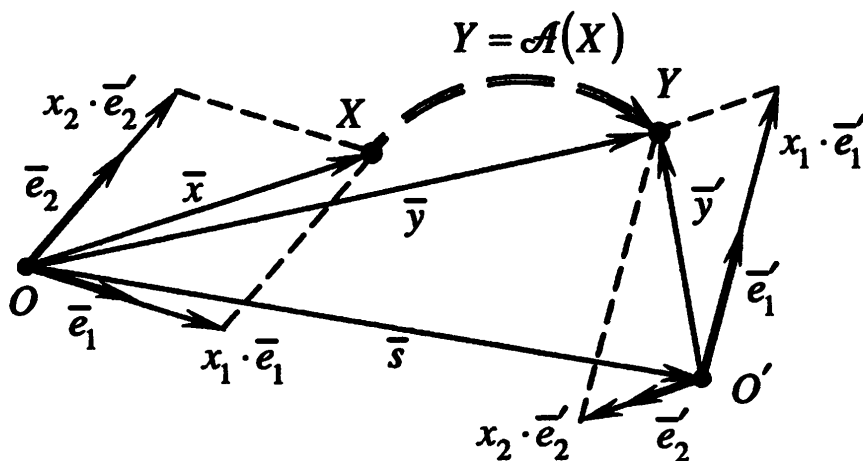


Рис.2.18

Таким образом, аффинное преобразование (2.15) может быть задано указанием двух аффинных систем координат. Говорят, что **аффинное преобразование задано переходом от одной аффинной системы координат к другой.**

Третий способ. Аффинное преобразование плоскости вполне определяется образами трех данных точек, не лежащих на одной прямой, т.е. существует единственное аффинное преобразование, переводящее три точки O, A, B , не лежащие на одной прямой, в три точки O', A', B' , также не лежащие на одной прямой.

В самом деле, заданные точки O, A, B и O', A', B' порождают две аффинные системы координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ и $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$, где $\bar{e}_1 = \overline{OA}$, $\bar{e}_2 = \overline{OB}$, $\bar{e}'_1 = \overline{O'A'}$, $\bar{e}'_2 = \overline{O'B'}$ – пары базисных (неколлинеарных) векторов, и тем самым однозначно определяют аффинное преобразование.

Пример 2.7. В прямоугольной системе координат $O\bar{i}\bar{j}$ заданы точки (рис.2.19): $Q(2,1)$, $A(6,4)$, $B(-2,4)$, $Q'(10,3)$, $A'(10,5)$, $B'(6,6)$, $X(2,7)$. Требуется вывести формулы (2.11) аффинного преобразования \mathcal{A} , отображающего точки Q, A, B в точки Q', A', B' , и найти координаты образа $Y = \mathcal{A}(X)$ точки X :

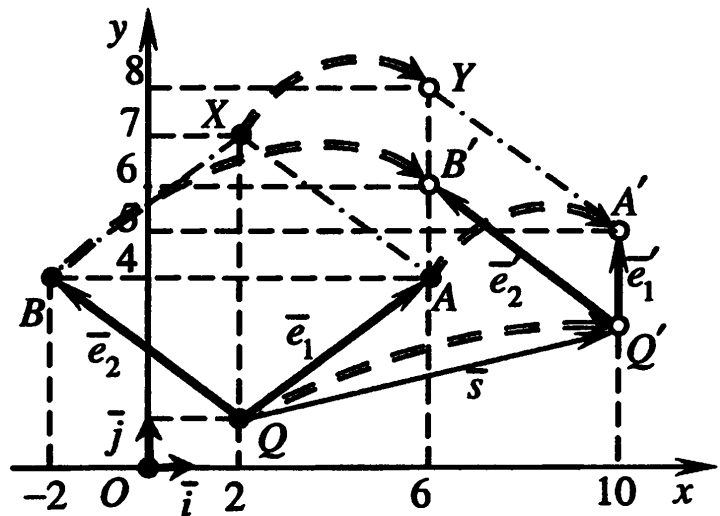


Рис.2.19

а) в системе координат $Q\bar{e}_1\bar{e}_2$, $\bar{e}_1 = \overline{QA}$, $\bar{e}_2 = \overline{QB}$;

б) в заданной прямоугольной системе координат.

□ а) Искомое преобразование \mathcal{A} отображает систему координат $Q\bar{e}_1\bar{e}_2$ в систему координат $Q'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$, где $\bar{e}'_1 = \overline{Q'A'} = \mathcal{A}(\bar{e}_1)$, $\bar{e}'_2 = \overline{Q'B'} = \mathcal{A}(\bar{e}_2)$. Формулы, задающие такое преобразование \mathcal{A} , имеют вид (2.15), где s – координатный столбец вектора $\bar{s} = \overline{QQ'}$ в базисе $(\bar{e}) = (\bar{e}_1 \bar{e}_2)$, а $\begin{matrix} S \\ (\bar{e}) \rightarrow (\bar{e}') \end{matrix}$ – матрица перехода от базиса $(\bar{e}) = (\bar{e}_1 \bar{e}_2)$ к базису $(\bar{e}') = (\bar{e}'_1 \bar{e}'_2)$. По рис.2.19, учитывая, что $\bar{i} = \frac{1}{8} \cdot (\bar{e}_1 - \bar{e}_2)$, $\bar{j} = \frac{1}{6} \cdot (\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$, определяем разложения векторов $\bar{s}, \bar{e}'_1, \bar{e}'_2$ по базису (\bar{e}) :

$$\bar{s} = 8 \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j} = \frac{8}{8} \cdot (\bar{e}_1 - \bar{e}_2) + \frac{2}{6} \cdot (\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = \frac{4}{3} \cdot \bar{e}_1 - \frac{2}{3} \cdot \bar{e}_2;$$

$$\bar{e}'_1 = 2 \cdot \bar{j} = \frac{2}{6} \cdot (\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = \frac{1}{3} \cdot \bar{e}_1 + \frac{1}{3} \cdot \bar{e}_2; \quad \bar{e}'_2 = \bar{e}_2 = 0 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2.$$

Следовательно, в системе координат $Q\bar{e}_1\bar{e}_2$ преобразование (2.15) имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

поскольку согласно (2.2) матрица перехода формируется путем записи по столбцам координат векторов \bar{e}'_1, \bar{e}'_2 в базисе (\bar{e}) .

Найдем координаты образа точки X . В системе координат $Q\bar{e}_1\bar{e}_2$ точка X имеет координаты $x_1 = 1, x_2 = 1$, так как $\overline{QX} = 1 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2$. Подставляя в найденные формулы координаты прообраза, получаем искомые координаты образа:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ т.е. } Y_{(\bar{e})} \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Заметим, что в новой системе координат $Q'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ точка $Y = \mathcal{A}(X)$ имеет координаты $Y_{(\bar{e}')}(1,1)$, которые совпадают с координатами точки $X_{(\bar{e})}(1,1)$ в старой системе координат $Q\bar{e}_1\bar{e}_2$.

б) Подставляя в (2.11) координаты образов и прообразов, получаем:

$$Q' = \mathcal{A}(Q): \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A' = \mathcal{A}(A): \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$B' = \mathcal{A}(B): \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Вычитая первое уравнение из второго и третьего, получаем

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \begin{cases} 4 \cdot a_{11} + 3 \cdot a_{12} = 0, \\ 4 \cdot a_{21} + 3 \cdot a_{22} = 2, \\ -4 \cdot a_{11} + 3 \cdot a_{12} = -4, \\ -4 \cdot a_{21} + 3 \cdot a_{22} = 3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим элементы матрицы $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$, после чего

определяем столбец $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{3} \\ \frac{29}{12} \end{pmatrix}$. Таким образом, искомое преобразова-

ние \mathcal{A} в заданной прямоугольной системе координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{3} \\ \frac{29}{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты образа точки $X(2, 7)$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{3} \\ \frac{29}{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } Y(6, 8).$$

Получим теперь формулы аффинного преобразования \mathcal{A} в системе координат $Q\bar{e}_1\bar{e}_2$, используя связи (2.12). Учтывая, что переход от прямоугольной системы координат $O\bar{i}\bar{j}$ к системе координат $Q\bar{e}_1\bar{e}_2$ определяется

матрицей $S = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ и столбцом $s = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, поскольку $\bar{s} = \overline{OQ}$,

$\bar{e}_1 = 4 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j}$, $\bar{e}_2 = -4 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j}$, находим

$$\begin{aligned} A'_{(\bar{e})} &= S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 8 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_{(\bar{e})} &= S^{-1} \cdot (a + A \cdot s - s) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{29}{3} \\ \frac{29}{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{29}{3} + 1 - \frac{2}{3} - 2 \\ \frac{29}{12} - \frac{1}{4} + \frac{5}{6} - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 32 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

что совпадает с результатами п. "а". ■

Аффинные преобразования плоскости обладают следующими свойствами.

1. Аффинное преобразование взаимно однозначное, кроме того:

а) преобразование, обратное к аффинному, является также аффинным;

б) композиция аффинных преобразований является также аффинным преобразованием.

2. При аффинном преобразовании векторы преобразуются следующим образом:

а) равные векторы – в равные;

б) коллинеарные – в коллинеарные, причем отношение коллинеарных векторов сохраняется;

в) неколлинеарные – в неколлинеарные.

3 При аффинном преобразовании сохраняется отношение, в котором точка делит отрезок.

4. При аффинном преобразовании (2.11) площадь любого параллелограмма изменяется в одном и том же отношении, т.е. умножается на одно и то же число (называемое коэффициентом искажения площади): $S_{\#'} = |\det A| \cdot S_{\#}$, где $S_{\#}$ – площадь параллелограмма, а $S_{\#'}$ – площадь образа этого параллелограмма. Другими словами, коэффициент искажения площади при аффинном преобразовании равен модулю определителя матрицы этого преобразования.

Первое свойство следует из обратимости матрицы A аффинного преобразования, поскольку из (2.11) можно выразить координаты прообраза через координаты образа:

$$x = -A^{-1} \cdot a + A^{-1} \cdot y.$$

Заметим, что эти формулы имеют тот же вид, что и (2.11), т.е. преобразование, обратное к аффинному, является аффинным преобразованием с матрицей A^{-1} и вектором переноса $(-A^{-1} \cdot a)$. Композиция аффинных преобразований $y = a + A \cdot x$ и $z = b + B \cdot y$:

$$z = b + B \cdot \underbrace{(a + A \cdot x)}_y = b + B \cdot a + B \cdot A \cdot x$$

также является аффинным преобразованием с матрицей $B \cdot A$ (невырожденной в силу невырожденности B и A) и вектором переноса $b + B \cdot a$.

Докажем второе свойство. Пусть ненулевые векторы \bar{v} и \bar{w} коллинеарны, причем $\frac{\bar{v}}{\bar{w}} = \lambda$. Надо доказать, что их образы $\bar{v}' = \mathcal{A}(\bar{v})$ и $\bar{w}' = \mathcal{A}(\bar{w})$

также коллинеарны и $\frac{\bar{v}'}{\bar{w}'} = \lambda$. Действительно, если v и w – координатные столбцы векторов \bar{v} и \bar{w} , то $v = \lambda \cdot w$. Тогда для координатных столбцов v' и w' (векторов \bar{v}' и \bar{w}') по формуле (2.14) получаем (см. п.4 замечаний 2.4):

$$v' = A \cdot v = A \cdot \underbrace{(\lambda \cdot w)}_v = \lambda \cdot \underbrace{A \cdot w}_{w'} = \lambda \cdot w',$$

т.е. $v' = \lambda \cdot w'$. Следовательно, $\bar{v}' = \lambda \cdot \bar{w}'$, т.е. векторы \bar{v}' и \bar{w}' коллинеарны и $\frac{\bar{v}'}{\bar{w}'} = \lambda$. Если же хотя бы один из векторов нулевой, например, $\bar{v} = \bar{o}$, то

его образ (по свойству 2) также нулевой вектор $\bar{v}' = \bar{o}$, который коллинеарен любому вектору \bar{w}' . При $\lambda = 1$ получаем, что равные векторы преобразуются в равные. Наконец, неколлинеарные векторы не могут преобразоваться в коллинеарные, поскольку в этом случае при обратном преобразова-

нии коллинеарные векторы преобразуются в неколлинеарные, что противоречит п.2, "б".

Третье свойство следует из второго (см. п.2, "б"). Действительно, пусть точки A, B, C отображаются в точки A', B', C' соответственно. Если точка C делит отрезок AB в отношении $AC:CB = \alpha:\beta$, то векторы \overline{AC} и \overline{AB}

коллинеарные и $\overline{AC} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \overline{AB}$ (см. разд.1.6.1). По свойству 2 п. "б" векто-

ры $\overline{A'C'}$ и $\overline{A'B'}$ также коллинеарны и $\overline{A'C'} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \overline{A'B'}$, т.е. точка C' де-

лит отрезок $A'B'$ в отношении $A'C':C'B' = \alpha:\beta = AC:CB$.

Обсудим четвертое свойство. На рис.2.20 заштрихованы параллелограмм, построенный на базисных векторах \bar{e}_1, \bar{e}_2 , и его образ

(параллелограмм, построенный на базисных векторах \bar{e}'_1, \bar{e}'_2).

Справедливость утверждения для параллелограммов следует из свойства 3 матрицы перехода от одного базиса к другому (см. разд.2.2.1). Любой параллелограмм разбивается диагональю на два равных треугольника. Следовательно, утверждение справедливо для

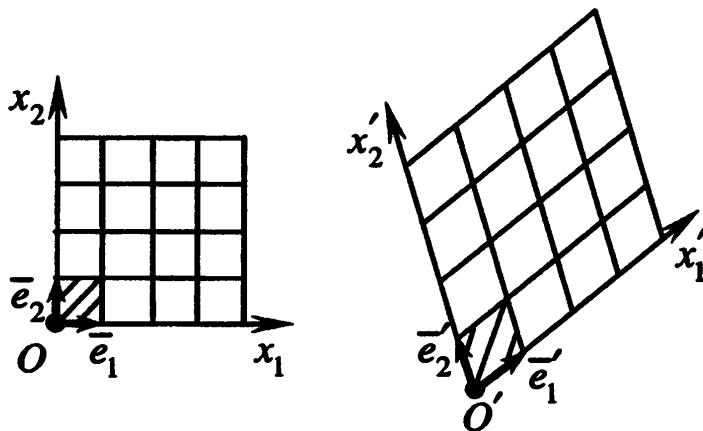


Рис.2.20

треугольников, а значит и для многоугольников, поскольку любой многоугольник разбивается на конечное число треугольников. Средствами математического анализа это свойство может быть распространено на произвольную измеримую плоскую фигуру [19].

З а м е ч а н и я 2.5.

1. Третье свойство является характеристическим для аффинного преобразования и может быть взято в качестве эквивалентного определения [14].

2. Преобразование (2.11) для произвольной квадратной матрицы A (быть может, вырожденной) называется *линейным*, при этом матрица A называется *матрицей линейного преобразования* [10]. Любое аффинное преобразование является линейным, но не всякое линейное преобразование является аффинным.

3. Квадратные матрицы A' и A , связанные соотношением $A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$, называются *подобными* [10], а матрица S – *преобразующей*. В силу (2.12) матрицы аффинного преобразования в разных базисах оказываются подобными, причем преобразующей матрицей служит матрица перехода от одного базиса к другому.

Рассмотрим примеры преобразований.

1. **Движением** называется преобразование плоскости, при котором сохраняются расстояния между точками, т.е. расстояние между образами X' и Y' равно расстоянию между их прообразами X и Y : $X'Y' = XY$.

Из определения следует, что при движении сохраняются углы, так как из равенства треугольников ABC и $A'B'C'$ (по трем сторонам) следует равенство соответствующих углов.

Таким образом, при движении прямоугольная система координат переходит в прямоугольную (рис.2.21,а). Учитывая (2.9), (2.10), а также п.3 замечаний 2.4, получим формулы, выражающие координаты образа через координаты прообраза:

$$\begin{cases} x' = x_s + x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi, \\ y' = y_s + x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi, \end{cases}$$

(такое движение называется **собственным**);

$$\begin{cases} x' = x_s + x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi, \\ y' = y_s + x \cdot \sin \varphi - y \cdot \cos \varphi, \end{cases}$$

(такое движение называется **несобственным**).

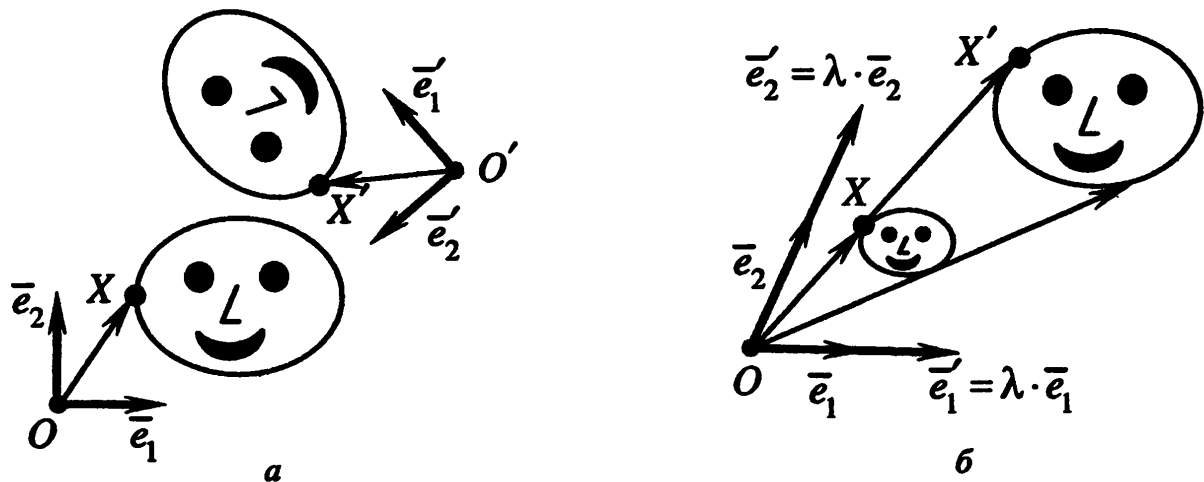


Рис.2.21

Сравнивая с (2.11), делаем вывод, что собственное движение является аффинным преобразованием с матрицей $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$, а несобственное

– с матрицей $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$. На рис.2.21,а изображены исходная система координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ и новая система координат $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$, в которой координаты образа X' любой точки совпадают с координатами прообраза X в старой системе координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ (см. второй способ задания аффинного преобразования).

На рис.2.21,б изображены исходная система координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ и новая система координат $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$, в которой координаты образа X' любой точки совпадают с координатами прообраза X в старой системе координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ (см. второй способ задания аффинного преобразования).

2. Гомотетией с центром в точке O с коэффициентом $\lambda > 0$ называется преобразование плоскости, при котором каждой точке X ставится в соответствие такая точка X' , что $\overline{OX'} = \lambda \cdot \overline{OX}$ (рис.2.21,б).

Докажем, что гомотетия является аффинным преобразованием. Для этого выберем аффинную систему координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$, начало которой совпадает с центром гомотетии. Пусть точка X имеет координаты x_1, x_2 , тогда ее образ X' при гомотетии имеет координаты $x'_1 = \lambda \cdot x_1, x'_2 = \lambda \cdot x_2$, т.е.

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda \cdot x_1, \\ x'_2 = \lambda \cdot x_2. \end{cases}$$

Сравнивая эти формулы с (2.11) делаем вывод, что гомотетия есть аффинное преобразование с матрицей $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ и нулевым столбцом a .

Определим гомотетию, используя второй способ задания аффинного преобразования. Для старой системы координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ построим новую аффинную систему координат $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$, в которой координаты образа X' при гомотетии совпадают с координатами прообраза X в старой системе координат. Примем точку O за начало (точка O' совпадает с точкой O), а векторы $\bar{e}'_1 = \lambda \cdot \bar{e}_1, \bar{e}'_2 = \lambda \cdot \bar{e}_2$ в качестве нового базиса. Найдем координаты точки X' в системе координат $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$:

$$\overline{OX'} = x'_1 \cdot \bar{e}_1 + x'_2 \cdot \bar{e}_2 = x_1 \cdot \underbrace{\lambda \cdot \bar{e}_1}_{\bar{e}'_1} + x_2 \cdot \underbrace{\lambda \cdot \bar{e}_2}_{\bar{e}'_2} = x_1 \cdot \bar{e}'_1 + x_2 \cdot \bar{e}'_2.$$

Поскольку $\overline{OX} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2$, то точки X и X' имеют равные координаты в аффинных системах координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ и $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ соответственно.

Наоборот, если заданы аффинные системы координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ и $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$, то существует единственное аффинное преобразование, при котором координаты точки X (в системе координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$) совпадают с координатами образа X' (в новой системе координат $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$), и это преобразование является гомотетией (см. второй способ задания аффинного преобразования).

3. Сжатием плоскости к прямой l вдоль пересекающей ее прямой m с коэффициентом $\lambda > 0$ (косым сжатием) называется преобразование плоскости, при котором каждая точка L , принадлежащая прямой l , остается неподвижной (преобразуется в себя: $L' = L$), а каждой точке X , не лежащей на прямой l , ставится в соответствие такая точка X' , что

$\overline{X_1 X'} = \lambda \cdot \overline{X_1 X}$, где X_1 – проекция точки X на прямую l вдоль прямой m (рис.2.22,а). При $\lambda > 1$ это преобразование называют также *растяжением*.

В частности, *сжатием* к прямой l с коэффициентом $\lambda > 0$ называют сжатие в направлении, перпендикулярном прямой l , т.е. в случае, когда прямая m перпендикулярна прямой l (рис.2.21,б).

Покажем, что это аффинное преобразование. Выберем аффинную систему координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ так, чтобы ее начало совпадало с точкой O пересечения прямых m и l , а векторы \bar{e}_1 и \bar{e}_2 принадлежали прямым l и m соответственно. Из формулы $\overline{X_1 X'} = \lambda \cdot \overline{X_1 X}$ следует, что при сжатии абсцисса точки X не изменяется, а ордината умножается на коэффициент сжатия λ :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1, \\ x'_2 = \lambda \cdot x_2. \end{cases}$$

Сравнивая с (2.11), делаем вывод, что сжатие является аффинным преобразованием с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ и нулевым столбцом a .

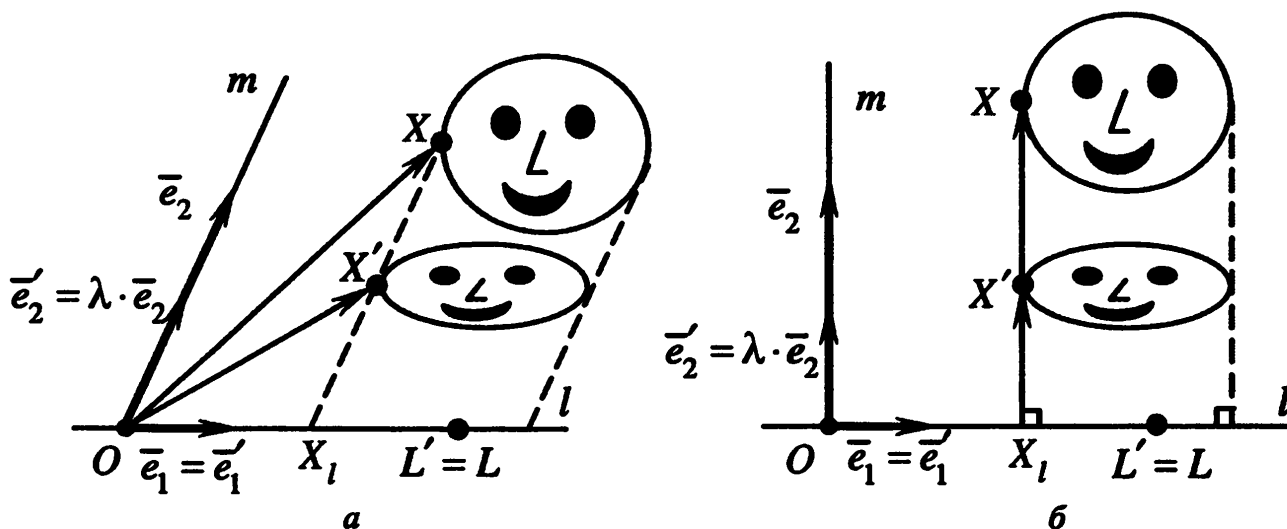


Рис.2.22

4. Отражением плоскости в прямой l параллельно пересекающей ее прямой m (вдоль прямой m) называется преобразование плоскости, при котором каждая точка L , принадлежащая прямой l , остается неподвижной (преобразуется в себя: $L' = L$), а каждой точке X , не лежащей на прямой l , ставится в соответствие такая точка X' , что $\overline{X_1 X'} = -\overline{X_1 X}$, где X_1 – проекция точки X на прямую l вдоль прямой m (рис.2.23,а).

Это преобразование является аффинным, поскольку оно не изменяет расстояний между точками, т.е. представляет собой движение. Выберем систему координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ так, чтобы ее начало совпадало с точкой O пересечения прямых m и l , а векторы \bar{e}_1 и \bar{e}_2 принадлежали прямым l и m

соответственно. Найдем матрицу A преобразования, записывая по столбцам координаты образов базисных векторов. Поскольку $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$ и $\vec{e}'_2 = -\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + (-1) \cdot \vec{e}_2$, то $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Проекцией плоскости на прямую l параллельно пересекающей ее прямой m (вдоль прямой m) называется преобразование плоскости, при котором каждая точка L , принадлежащая прямой l , остается неподвижной (преобразуется в себя: $L' = L$), а каждой точке X , не лежащей на прямой l , ставится в соответствие ее проекция X_l на прямую l вдоль прямой m (рис.2.23,б).

Это преобразование является линейным, но не является аффинным. В самом деле, выберем аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ так, чтобы ее начало совпадало с точкой O пересечения прямых m и l , а векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2 принадлежали прямым l и m соответственно. Найдем матрицу A преобразования, записывая по столбцам координаты образов базисных векторов.

Поскольку $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$ и $\vec{e}'_2 = \vec{o} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$, то $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Как ви-

дим, матрица A преобразования вырожденная, поэтому преобразование не является аффинным, но является линейным (см.п.2 замечаний 2.5).

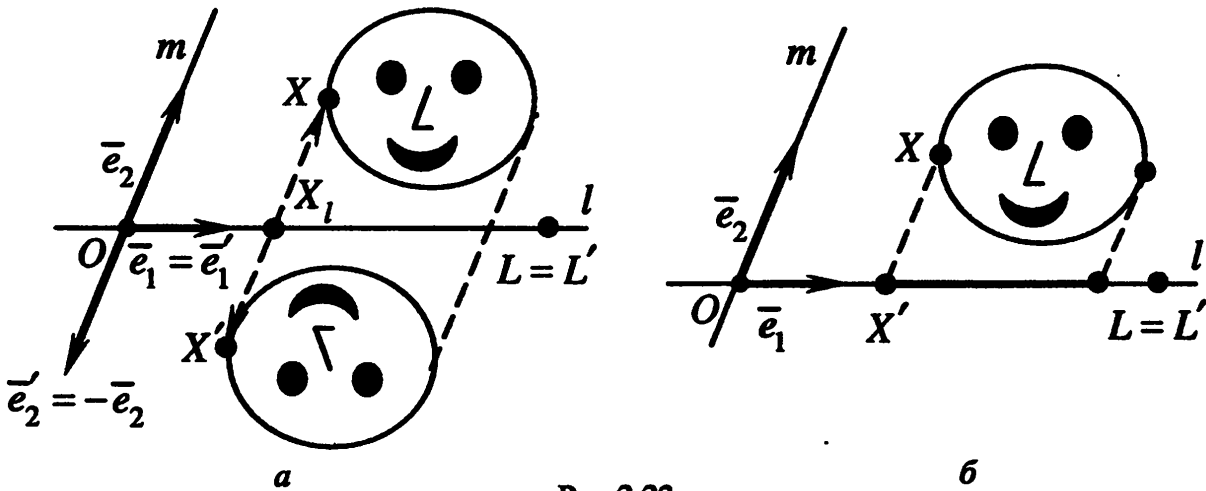


Рис.2.23

6. Инверсией плоскости относительно окружности радиуса R с центром в точке O называется преобразование плоскости, при котором точки, принадлежащие данной окружности, остаются неподвижными (преобразуются в себя), а каждой точке X , отличной от O , ставится в соответствие такая точка X' , что $\overline{OX'} = \frac{R^2}{|\overline{OX}|} \cdot \overline{OX}$ (рис.2.24), т.е. радиус-векторы $\overline{OX'}$ и

\overline{OX} образа и прообраза коллинеарны, а произведение их длин равно квад-

рату радиуса окружности (при $R = 1$ длины радиус-векторов взаимно обратные: $|\overline{OX'}| = \frac{1}{|\overline{OX}|}$). Для взаимной однозначности преобразования предполагают, что точка O отображается в некоторую "бесконечно удаленную точку" плоскости. Преобразование инверсии называется также **зеркальным отражением в окружности**.

Это преобразование не является линейным (и, следовательно, аффинным). В самом деле, выберем прямоугольную систему координат $O\vec{i}\vec{j}$, начало которой совпадает с центром данной окружности. Выразим прямоугольные координаты x', y' образа X' через координаты x, y прообраза X . Записывая равенство $\overline{OX'} = \frac{R^2}{|\overline{OX}|^2} \cdot \overline{OX}$ в

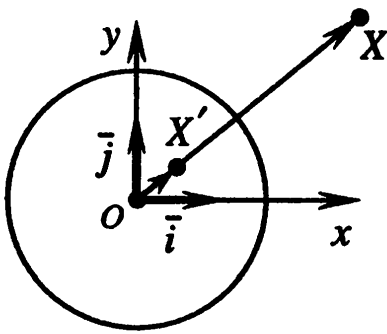


Рис.2.24

координатной форме, получаем:

$$\begin{cases} x' = \frac{x \cdot R^2}{x^2 + y^2}, \\ y' = \frac{y \cdot R^2}{x^2 + y^2}, \end{cases}$$

что отличается от (2.11), так как зависимость нелинейная.

Замечания 2.6.

1. Справедливо утверждение [4]: *любое аффинное преобразование плоскости можно представить в виде композиции движения и двух сжатий (во взаимно перпендикулярных направлениях)*.

2. В п.3. замечаний 2.4 показано, что изменение координат точки будет одно и то же, подвергается ли мы плоскость аффинному преобразованию, оставляя систему координат неизменной, или же оставляем плоскость неизменной, подвергая систему координат обратному преобразованию. Например, при повороте плоскости на угол φ вокруг начала системы координат $O\vec{i}\vec{j}$ (рис.2.25,а) координаты точек меняются так же, как при повороте системы координат $O\vec{i}\vec{j}$ на угол, равный $(-\varphi)$, т.е. при переходе к системе координат $O\vec{i}'\vec{j}'$ (рис.2.25,б).

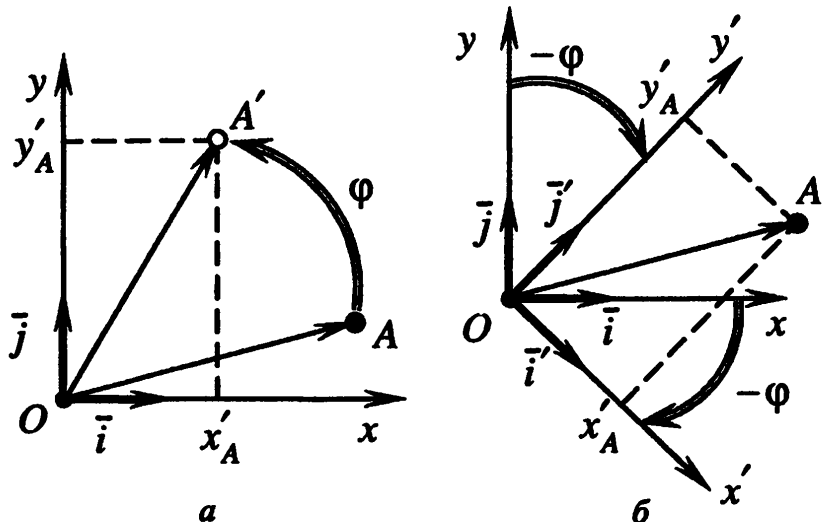


Рис.2.25

Пример 2.8. Пусть на плоскости задана окружность. В результате прямого сжатия плоскости к прямой l с коэффициентом $0 < \lambda \leq 1$ в направлении, перпендикулярном l (рис.2.26,*a*), окружность преобразуется в кривую, называемую эллипсом (см. разд.3.3.2), а центр окружности – в центр эллипса. При этом образом каждого диаметра окружности служит диаметр эллипса, т.е. хорда, проходящая через центр эллипса.

Доказать, что:

а) для любого данного диаметра $A'B'$ эллипса существует единственный диаметр A_1B_1 , который делит пополам все хорды, параллельные данному диаметру;

б) существуют два взаимно перпендикулярных диаметра эллипса, называемых его *главными осями*.

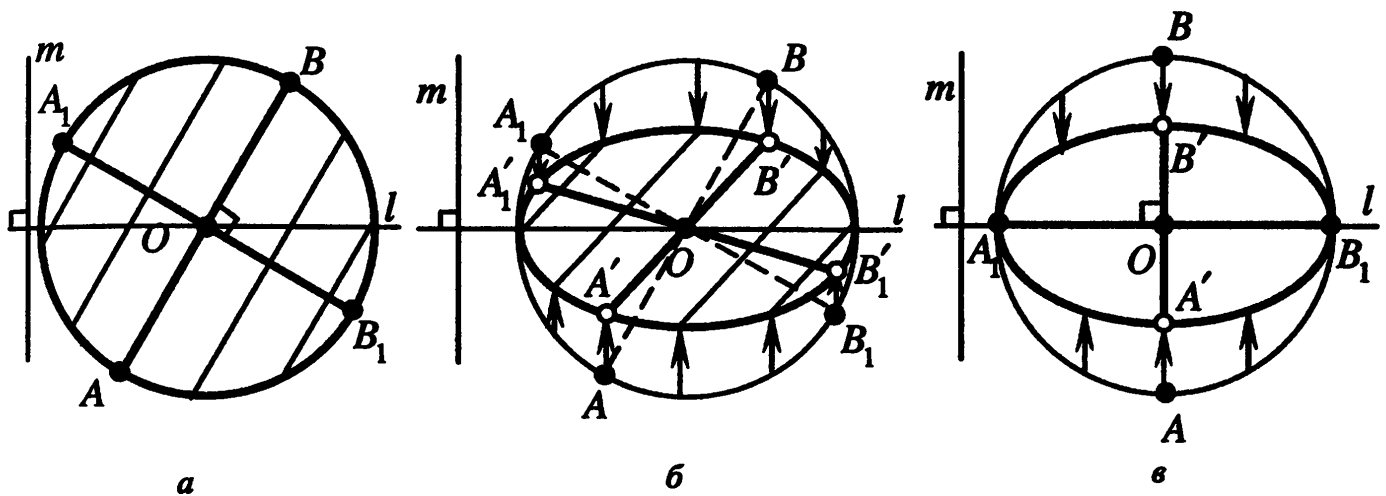


Рис.2.26

□ Для решения задачи используем два свойства аффинного преобразования: параллельные отрезки отображаются в параллельные отрезки (что следует из свойства 2); середина отрезка отображается в середину образа этого отрезка (см. свойство 3).

а) Сформулированное в п."а" свойство диаметров очевидно для окружности (рис.2.26,*a*), поскольку диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.

Рассмотрим эллипс (рис.2.26,*б*) как образ окружности при сжатии плоскости к прямой l , проходящей через центр O окружности. Сжатие происходит вдоль прямой m , перпендикулярной l , при этом точка O остается неподвижной. Пусть $A'B'$ – диаметр эллипса (центр O эллипса – середина $A'B'$), а AB – его прообраз, который является диаметром окружности (поскольку центр O окружности – середина AB). Рассмотрим хорды окружности, параллельные диаметру AB . Геометрическим местом середин этих хорд является диаметр A_1B_1 окружности (рис.2.26,*a*), поскольку диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. При сжатии параллельные хорды окружности преобразуются в параллельные хорды эл-

липса, а диаметр A_1B_1 окружности преобразуется в диаметр $A'_1B'_1$ эллипса. Поскольку середина любого отрезка при аффинном преобразовании переходит в середину образа этого отрезка, то диаметр $A'_1B'_1$ будет делить пополам все хорды эллипса, параллельные диаметру $A'B'$. Существование диаметра с указанными свойствами доказано. Единственность следует из единственности перпендикулярного к AB диаметра A_1B_1 окружности. Конечно, перпендикулярность диаметров AB и A_1B_1 окружности, вообще говоря, не сохраняется для диаметров $A'B'$ и $A'_1B'_1$ эллипса, так как при сжатии плоскости углы, в общем случае, изменяются. Аналогично можно показать, что для данного диаметра $A'_1B'_1$ существует единственный диаметр $A'B'$, который делит пополам все хорды, параллельные $A'_1B'_1$. Два диаметра, каждый из которых делит пополам хорды, параллельные другому диаметру, называются *сопряженными*. В данном случае сопряженными являются диаметры $A'B'$ и $A'_1B'_1$. Заметим, что описанное свойство очевидно для взаимно перпендикулярных диаметров окружности: любые два взаимно перпендикулярных диаметра окружности являются сопряженными, например AB и A_1B_1 .

б) Выберем диаметр $A'B'$ эллипса, перпендикулярный прямой l (рис.2.26,в). Этот диаметр является образом диаметра AB окружности, который также перпендикулярен прямой l . Диаметр A_1B_1 окружности, перпендикулярный, а значит, сопряженный (см. п."а"), диаметру AB , лежит на прямой l . Поскольку все точки прямой l при сжатии к ней отображаются в себя, то диаметр A_1B_1 окружности является также диаметром эллипса (см.п."а"), сопряженным для $A'B'$. Таким образом, диаметры $A'B'$ и A_1B_1 эллипса взаимно перпендикулярны. ■

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Пусть в пространстве фиксирована аффинная система координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$. Преобразование \mathcal{A} пространства называется *аффинным*, если координаты y_1, y_2, y_3 образа Y выражаются через координаты x_1, x_2, x_3 прообраза X ($Y = \mathcal{A}(X)$) по формулам:

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3, \\ y_2 = a_2 + a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3, \\ y_3 = a_3 + a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} y \\ \bar{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \bar{e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ \bar{e} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \bar{e} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

где $\underset{(\bar{e})}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – невырожденная матрица (*матрица аффинного*

преобразования), $\underset{(\bar{e})}{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\underset{(\bar{e})}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – координатные столбцы образа Y и

прообраза X (координатные столбцы радиус-векторов \overline{OY} и \overline{OX})

соответственно, $\underset{(\bar{e})}{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ – координатный столбец *образа начала*

координат, или *вектора переноса* начала координат. В *формулах аффинного преобразования* (2.16) подчеркивается зависимость матрицы преобразования и координат векторов от выбранной системы координат. Обозначение системы координат в (2.16) будем опускать, если понятно, в какой системе координат задано преобразование.

Аффинное преобразование пространства, так же как аффинное преобразование плоскости, можно задать несколькими способами.

При *первом способе* (по определению) нужно зафиксировать в пространстве аффинную систему координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ и задать невырожденную матрицу A и столбец a в (2.16).

При *втором способе* нужно взять две аффинные системы координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$, $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3$ и определить аффинное преобразование \mathcal{A} , поставив в соответствие каждой точке X такую точку $X' = \mathcal{A}(X)$, координаты которой относительно системы координат $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3$ совпадают с координатами точки X в системе координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$. Говорят, что аффинное преобразование \mathcal{A} задается переходом от одной аффинной системы координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ к другой $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3$.

Третий способ – задание образов четырех точек, не лежащих в одной плоскости, а именно существует единственное аффинное преобразование, переводящее четыре точки O, A, B, C , не лежащие в одной плоскости, в четыре точки O', A', B', C' , также не лежащие в одной плоскости.

Для аффинных преобразований пространства остаются справедливыми свойства 1–3, доказанные для преобразований плоскости. Четвертое свойство формулируется следующим образом:

при аффинном преобразовании (2.16) *объем любого параллелепипеда изменяется в одном и том же отношении, т.е. умножается на одно и то*

же число (называемое *коэффициентом искажения объема*): $V_{\#}' = |\det A| \cdot V_{\#}$, где $V_{\#}$ – объем параллелепипеда, а $V_{\#}'$ – объем образа этого параллелепипеда. Другими словами, коэффициент искажения объема при аффинном преобразовании равен модулю определителя матрицы этого преобразования.

Примерами аффинного преобразования пространства могут служить движение, гомотетия, сжатие к плоскости.

Сжатием пространства к плоскости π вдоль пересекающей ее прямой t с коэффициентом $\lambda > 0$ (косым сжатием) называется преобразование пространства, при котором каждая точка P , принадлежащая плоскости π , остается неподвижной (преобразуется в себя: $P' = P$), а каждой точке X , не лежащей на плоскости π , ставится в соответствие такая точка X' , что $\overline{X_{\pi}X'} = \lambda \cdot \overline{X_{\pi}X}$, где X_{π} – проекция точки X на плоскость π вдоль прямой t . При $\lambda > 1$ это преобразование называют также *растяжением*.

Сжатием пространства к плоскости π называют сжатие вдоль направления, ортогонального плоскости π , т.е. в случае, когда прямая t перпендикулярна плоскости π .

З а м е ч а н и я 2.7.

1. Справедливо утверждение [4]: *любое аффинное преобразование пространства можно представить в виде композиции движения и трех сжатий (во взаимно перпендикулярных направлениях).*

2. Для аффинных преобразований пространства остаются справедливыми соотношения (2.12), (2.14), (2.15), полученные для аффинных преобразований плоскости (с соответствующими изменениями размеров матриц A , S и столбцов a, s, x, y), а также вывод, аналогичный указанному в п.2 замечаний 2.6.

Пример 2.9. Рассматривая эллипсоид (см. разд.4.3.2) как образ сферы при композиции двух сжатий пространства к плоскостям (вдоль взаимно перпендикулярных направлений), доказать, что существуют три взаимно перпендикулярных диаметра эллипсоида, которые называются его *главными осями*.

□ Сформулированное свойство очевидно для диаметров сферы (рис.2.27,а). Пусть AB, CD, EF – три взаимно перпендикулярных диаметра сферы. Выполним сжатие пространства с коэффициентом $0 < \lambda_1 \leq 1$ к плоскости, проходящей через прямые CD и EF . При этом отрезок AB преобразуется в диаметр $A'B'$ эллипсоида, а диаметры CD и EF останутся без изменений (рис.2.27,б). Если выполнить второе сжатие с коэффициентом $0 < \lambda_2 \leq 1$ к плоскости (рис.2.27,в), проходящей через диаметры $A'B'$ и CD ,

то диаметр EF преобразуется в диаметр $E''F''$, а диаметры $A'B'$ и CD останутся без изменений. В результате получим три взаимно перпендикулярных диаметра $A'B'$, CD , $E''F''$ эллипсоида. ■

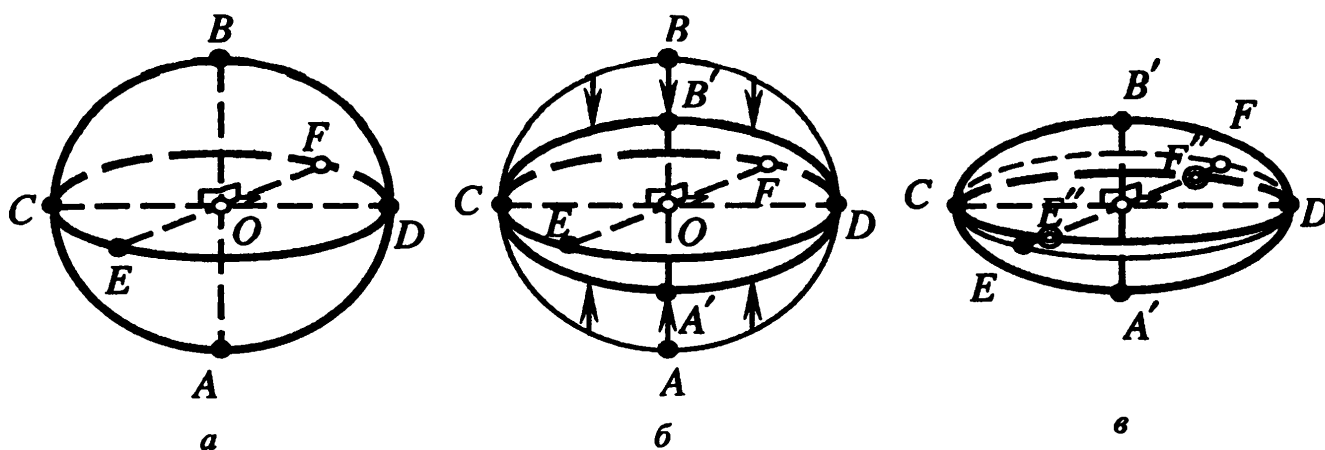


Рис.2.27

2.3. ПОЛЯРНАЯ, ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ И СФЕРИЧЕСКАЯ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

2.3.1. Полярная система координат

Полярная система координат на плоскости – это совокупность точки O , называемой *полюсом*, и полупрямой Ox , называемой *полярной осью*. Кроме того, задается *масштабный отрезок* для измерения расстояний от точек плоскости до полюса. Как правило, на полярной оси выбирается вектор \vec{i} , приложенный к точке O , длина которого принимается за величину масштабного отрезка, а направление вектора задает положительное направление на полярной оси (рис.2.28,а).

Положение точки M в полярной системе координат определяется расстоянием r (*полярным радиусом*) от точки M до полюса (т.е. $r = |\overline{OM}|$) и углом φ (*полярным углом*) между полярной осью и вектором \overline{OM} . Полярный радиус и полярный угол составляют *полярные координаты* точки M , что записывается в виде $M(r, \varphi)$. Полярный угол измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси:

- в положительном направлении (против направления движения часовой стрелки), если значение угла положительное;
- в отрицательном направлении (по направлению движения часовой стрелки), если значение угла отрицательное.

Полярный радиус определен для любой точки плоскости и принимает неотрицательные значения $r \geq 0$. Полярный угол φ определен для любой точки плоскости, за исключением полюса O , и принимает значения $-\pi < \varphi \leq \pi$, называемыми *главными значениями полярного угла*. В некоторых случаях целесообразно считать, что полярный угол определен с точностью до слагаемых $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае значениям $\varphi + 2\pi n$ полярного угла для всех $n \in \mathbb{Z}$ соответствует одно и то же направление радиус-вектора.

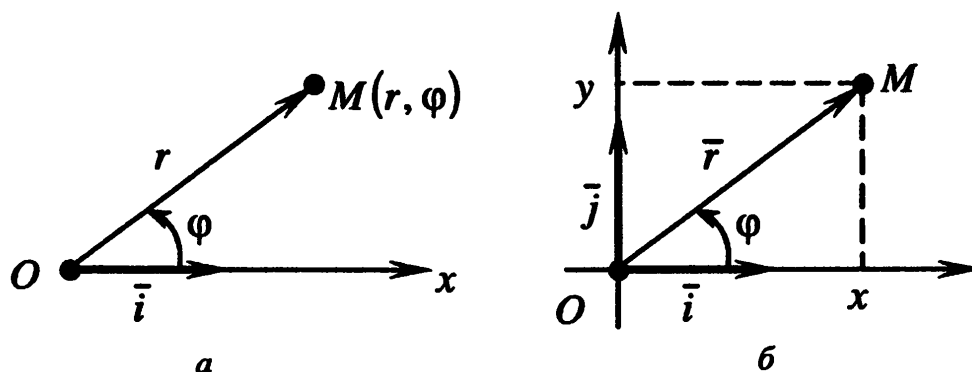


Рис.2.28

С полярной системой координат $O r \varphi$ можно связать прямоугольную систему координат $O \bar{i} \bar{j}$, начало O которой совпадает с полюсом, а ось абсцисс (точнее положительная полуось абсцисс) – с полярной осью. Ось ординат достраивается перпендикулярно оси абсцисс так, чтобы получилась правая прямоугольная система координат (рис.2.28,б). Длины базисных векторов определяются масштабным отрезком на полярной оси.

Наоборот, если на плоскости задана правая прямоугольная система координат, то, приняв положительную полуось абсцисс за полярную ось, получим полярную систему координат (*связанную с данной прямоугольной*).

Выведем формулы, связывающие между собой прямоугольные координаты x, y точки M , отличной от точки O , и ее полярные координаты r, φ . По рис.2.28,б получаем

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \varphi. \end{cases} \quad (2.17)$$

Эти формулы позволяют найти прямоугольные координаты по известным полярным координатам. Обратный переход выполняется по формулам:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Последние два равенства определяют полярный угол с точностью до слагаемых $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. При $x \neq 0$ из них следует, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$. Главное значение полярного угла φ ($-\pi < \varphi \leq \pi$) находится по формулам (рис.2.29):

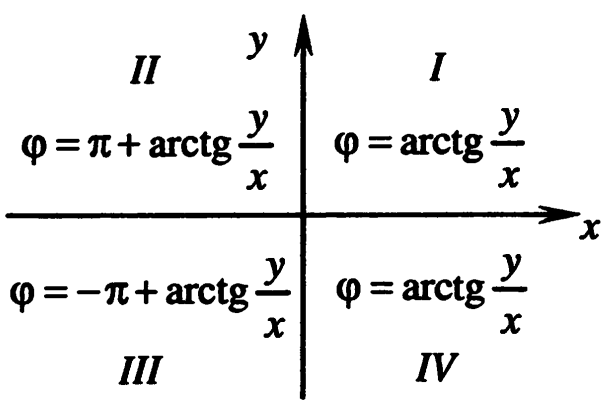
$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$


Рис.2.29

Пример 2.10. В полярной системе координат $O r \varphi$:

а) изобразить *координатные линии* $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$;

б) изобразить точки M_1 , M_2 с полярными координатами $r_1 = 3$, $\varphi_1 = \frac{9\pi}{4}$, $r_2 = 3$, $\varphi_2 = -\frac{7\pi}{4}$. Найти главные значения полярных углов этих точек;

в) найти прямоугольные координаты точек M_1 , M_2 .

□ а) Координатные линии $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$ представляют собой окружности соответствующих радиусов, а линии $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ – полу-прямые (рис.2.30,а).

б) Построим точки $M_1(3, \frac{9\pi}{4})$ и $M_2(3, -\frac{7\pi}{4})$ (рис.2.30,б,в). Их координаты отличаются полярным углом, однако, имеют одно и то же главное значение $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, это одна и та же точка, которая совпадает с точкой $M(3, \frac{\pi}{4})$, изображенной на рис.2.30,а.

в) Учитывая п."б", найдем прямоугольные координаты точки M . По формулам (2.17) получаем:

$$x = r \cdot \cos \varphi = 3 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}; \quad y = r \cdot \sin \varphi = 3 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

т.е. $M\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. ■

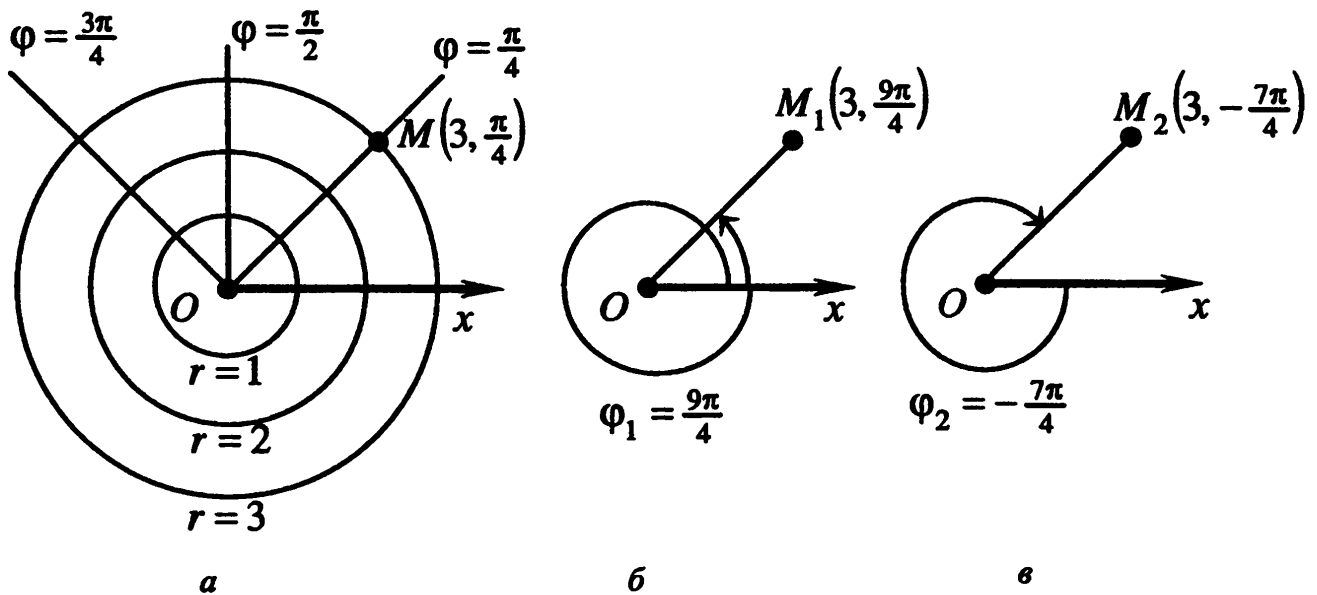


Рис.2.30

Замечания 2.8.

1. Главное значение полярного угла можно выбрать иначе [2,3], например, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

2. Расстояние между двумя точками $M_1(r_1, \varphi_1)$ и $M_2(r_2, \varphi_2)$ (длина отрезка M_1M_2) вычисляется по формуле

$$M_1M_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

что следует из теоремы косинусов (рис.2.31).

3. Ориентированная площадь $S_{\#}^{\wedge}$ параллелограмма (рис.2.31), построенного на радиус-векторах $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$, находится по формуле

$$S_{\#OM_1, OM_2}^{\wedge} = \overline{OM_1} \wedge \overline{OM_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Она положительна, если $\varphi_1 < \varphi_2$ (при этом ориентация пары радиус-векторов $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$ правая), и отрицательна, если $\varphi_1 > \varphi_2$ (ориентация пары радиус-векторов $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$ левая).

Пример 2.10. Даны полярные координаты $\varphi_A = \frac{\pi}{3}, r_A = 4$ и

$\varphi_B = \frac{2\pi}{3}, r_B = 2$ точек A и B (рис.2.32). Требуется найти:

- а) скалярное произведение $(\overline{OA}, \overline{OB})$;
- б) длину отрезка AB ;

в) внешнее произведение $\overline{OA} \wedge \overline{OB}$;

г) площадь S_{OAB} треугольника OAB ;

д) координаты середины C отрезка AB в прямоугольной системе координат, связанной с данной полярной.

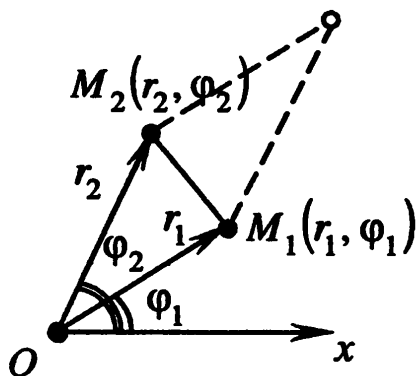


Рис.2.31

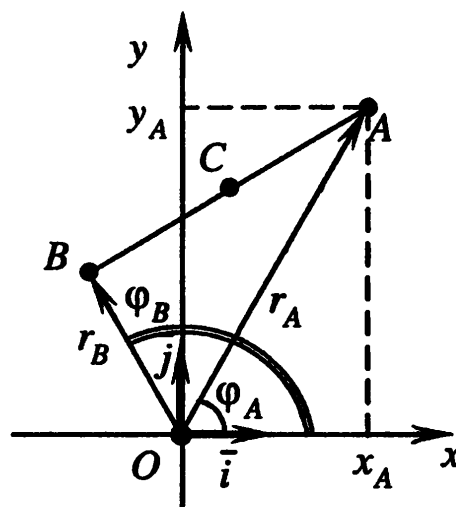


Рис.2.32

□ а) По определению скалярного произведения находим

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) = |\overline{OA}| \cdot |\overline{OB}| \cdot \cos \psi = r_A \cdot r_B \cdot \cos(\varphi_B - \varphi_A) = 4 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 4.$$

б) Находим длину отрезка (см. п.2 замечаний 2.8):

$$AB = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2 \cdot r_A \cdot r_B \cdot \cos(\varphi_B - \varphi_A)} = \sqrt{4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} = 2 \cdot \sqrt{3}.$$

в) Внешнее произведение находим как ориентированную площадь параллелограмма, построенного на векторах \overline{OA} и \overline{OB} :

$$\overline{OA} \wedge \overline{OB} = r_A \cdot r_B \cdot \sin(\varphi_B - \varphi_A) = 2 \cdot 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3}.$$

Площадь положительная, так как векторы \overline{OA} и \overline{OB} образуют правую пару ($\varphi_A < \varphi_B$).

г) Площадь треугольника OAB находим как половину площади параллелограмма, построенного на радиус-векторах \overline{OA} и \overline{OB} . Так как $S_{\# \overline{OA}, \overline{OB}} = |\overline{OA} \wedge \overline{OB}| = 4\sqrt{3}$ (см. п."в"), то $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

д) По формулам (2.17) находим прямоугольные координаты точек A и B :

$$x_A = r_A \cdot \cos \varphi_A = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2; \quad y_A = r_A \cdot \sin \varphi_A = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3};$$

$$x_B = r_B \cdot \cos \varphi_B = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1; \quad y_B = r_B \cdot \sin \varphi_B = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

а затем координаты середины C отрезка AB (см. п.3 замечаний 2.1):

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + (-1)}{2} = \frac{1}{2}; \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad \blacksquare$$

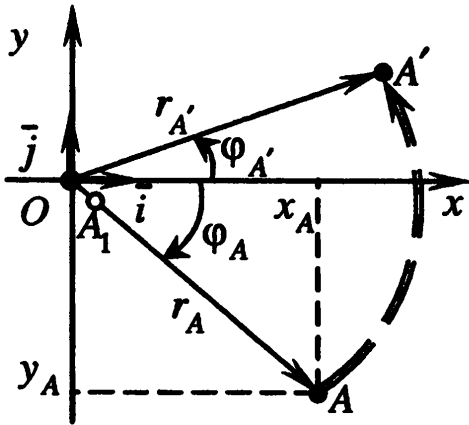


Рис.2.33

Пример 2.11. На координатной плоскости Oxy отмечена точка $A(4; -3)$. Найти:

а) полярные координаты точки A' , образа точки A при повороте радиус-вектора \overline{OA} на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг начала координат (рис.2.33);

б) полярные координаты точки A_1 , образа точки A при инверсии плоскости относительно окружности единичного радиуса с центром в начале координат (см. пример 6 преобразований плоскости в разд.2.2.4).

□ а) Найдем полярные координаты точки A . По формулам (2.17), учитывая рис.2.29, получаем:

$$r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5; \quad \varphi_A = \arctg \frac{y_A}{x_A} = \arctg \frac{-3}{4} = -\arctg \frac{3}{4},$$

так как точка A лежит в IV четверти.

При повороте радиус-вектора \overline{OA} вокруг полюса на угол $\frac{\pi}{3}$ полярный радиус не изменяется, а полярный угол увеличивается. Следовательно, полярные координаты точки A' : $r_{A'} = r_A = 5$, $\varphi_{A'} = \varphi_A + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \arctg \frac{3}{4}$, причем $\varphi_{A'}$ – главное значение полярного угла ($-\pi < \varphi_{A'} \leq \pi$).

б) При инверсии относительно окружности радиуса R полярные координаты r' , φ' образа выражаются через полярные координаты r , φ прообраза следующими формулами:

$$r' = \frac{R^2}{r}, \quad \varphi' = \varphi.$$

Поэтому, учитывая п."а", находим (для $R = 1$):

$$r_{A_1} = \frac{1}{r_A} = \frac{1}{5}, \quad \varphi_{A_1} = \varphi_A = -\arctg \frac{3}{4}. \quad \blacksquare$$

2.3.2. Цилиндрическая система координат

Для введения цилиндрической системы координат в пространстве выбирается плоскость (*основная плоскость*) и на ней задается полярная система координат с полюсом O и полярной осью Ox . Через точку O перпендикулярно основной плоскости проведем ось Oz (*ось аппликат*) и выберем ее направление так, чтобы возрастание полярного угла, наблюдаемое со стороны положительного направления оси Oz , происходило против часовой стрелки (рис.2.34,а).

В цилиндрической системе координат положение точки M , не принадлежащей оси аппликат, характеризуется полярными координатами r, φ точки M_0 – ортогональной проекции точки M на основную плоскость, и аппликатой z – координатой точки M_z – ортогональной проекции точки M на ось аппликат. Таким образом, цилиндрические координаты точки M – это упорядоченная тройка чисел r, φ, z – *полярный радиус* ($r \geq 0$), *полярный угол* ($-\pi < \varphi \leq \pi$) и *аппликата* ($-\infty < z < +\infty$). У точек, принадлежащих оси аппликат, не определен полярный угол, они задаются указанием нулевого полярного радиуса и аппликатой.

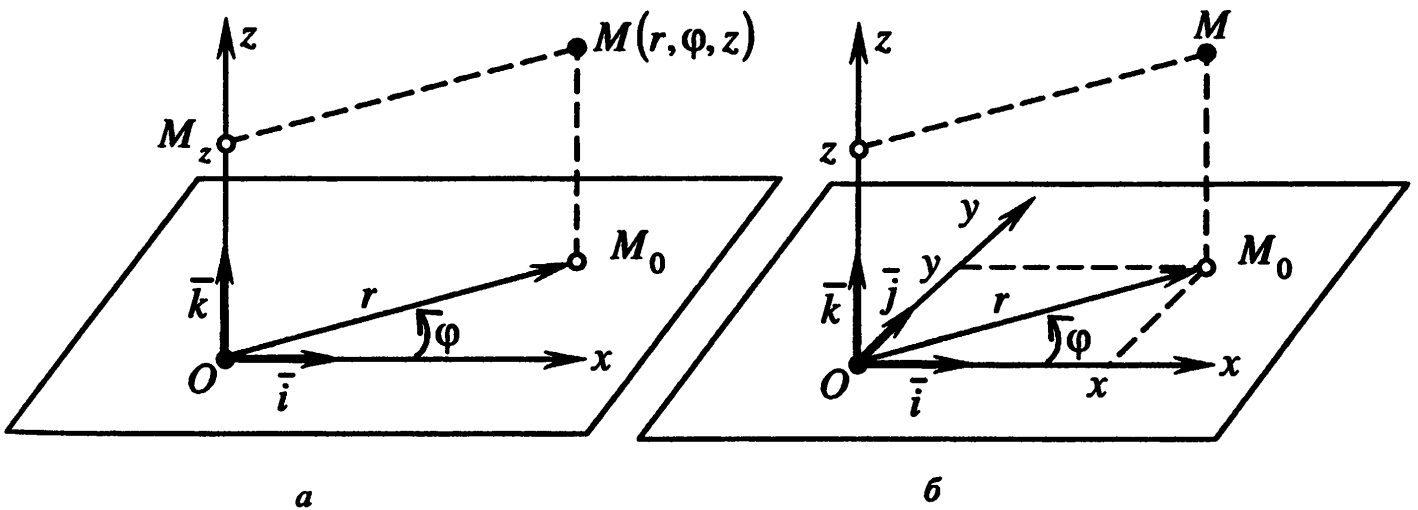


Рис.2.34

С цилиндрической системой координат $O r \varphi z$ можно связать прямоугольную систему координат $O \bar{i} \bar{j} \bar{k}$ (рис.2.34,б), у которой начало и базисные векторы \bar{i}, \bar{k} совпадают с началом цилиндрической системы координат и единичными векторами на полярной оси и оси аппликат соответственно, а базисный вектор \bar{j} выбирается так, чтобы тройка $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ была правой (при этом базис оказывается стандартным).

Наоборот, если в пространстве задана правая прямоугольная система координат, то, приняв положительную полуось абсцисс за полярную ось, получим цилиндрическую систему координат (*связанную с данной прямоугольной*).

Поскольку аппликата z точки M в прямоугольной системе координат и аппликата z в цилиндрической системе координат совпадают, то формулы, связывающие между собой прямоугольные координаты x, y, z точки M и ее цилиндрические координаты r, φ, z , имеют вид, следующий из (2.17), (2.18):

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad (2.19)$$

Эти формулы позволяют найти прямоугольные координаты по известным цилиндрическим. Обратный переход выполняется по формулам

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ z = z. \end{cases} \quad (2.20)$$

Главное значение полярного угла φ ($-\pi < \varphi \leq \pi$) находится по формулам (см. рис.2.29).

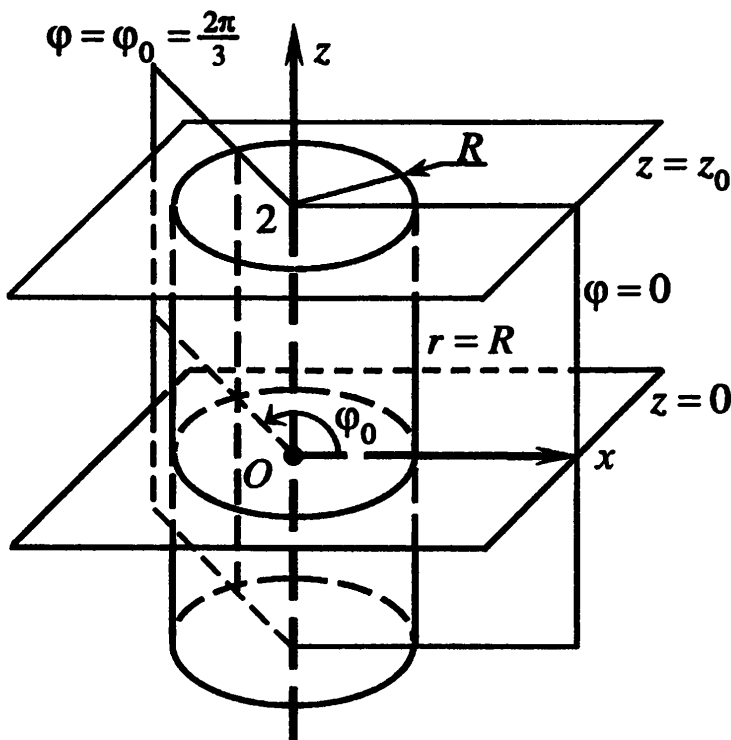


Рис.2.35

Пример 2.12. В цилиндрической системе координат $O r \varphi z$:

а) построить координатные поверхности $r = R$, $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $z = 0$, $z = z_0$;

б) найти цилиндрические координаты точки A , если известны ее прямоугольные координаты $A(4, -3, 2)$;

в) найти прямоугольные координаты точки B , если известны ее цилиндрические координаты: $r_B = 2$, $\varphi_B = \frac{2\pi}{3}$, $z_B = 1$.

□ а) Координатной поверхностью $r = R$, т.е. геометрическим местом точек $M(R, \varphi, z)$ при фиксированном значении полярного радиуса $r = R$, является прямая круговая цилиндр, ось которого параллельна оси аппликат (рис.2.35). Этим объясняется название цилиндрической системы координат. Координатной поверхностью

$\varphi = \varphi_0$, т.е. геометрическим местом точек $M(r, \varphi_0, z)$ при фиксированном значении полярного угла $\varphi = \varphi_0$, является полуплоскость, ограниченная осью аппликат (на рис.2.35 изображены полуплоскости $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$). Координатной поверхностью $z = z_0$, т.е. геометрическим местом точек $M(r, \varphi, z_0)$ при фиксированном значении аппликаты $z = z_0$, является плоскость, перпендикулярная оси аппликат (на рис.2.35 изображены плоскости $z = 0$ и $z = 2$).

б) Найдем цилиндрические координаты точки $A(4, -3, 2)$. Аппликата $z_A = 2$, полярный радиус и полярный угол находим по формулам (2.20) (см. пример 2.11):

$$r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5; \quad \varphi_A = \operatorname{arctg} \frac{y_A}{x_A} = \operatorname{arctg} \frac{-3}{4} = -\operatorname{arctg} \frac{3}{4}; \quad z_A = 2,$$

так как $-\pi < \varphi \leq \pi$ и ортогональная проекция точки A на координатную плоскость Oxy (основную плоскость) лежит в IV четверти.

б) Найдем прямоугольные координаты точки B . По формулам (2.19) вычисляем (см. пример 2.10):

$$x_B = r_B \cdot \cos \varphi_B = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1; \quad y_B = r_B \cdot \sin \varphi_B = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}; \quad z_B = 1. \blacksquare$$

2.3.3. Сферическая система координат

Для введения сферической системы координат в пространстве выбирается плоскость (*основная плоскость*) и на ней задается полярная система координат с полюсом O (*начало сферической системы координат*) и полярной осью Ox . Через точку O перпендикулярно основной плоскости проведем ось Oz (*ось аппликат*) и выберем ее направление так, чтобы возрастание полярного угла со стороны положительного направления оси Oz происходило против часовой стрелки (рис.2.36,а).

В сферической системе координат положение точки M , не лежащей на оси аппликат, характеризуется расстоянием $\rho = |\overline{OM}|$ до начала координат, полярным углом φ точки M_0 – ортогональной проекции точки M на основную плоскость, и углом θ между вектором \overline{OM} и положительным направлением оси аппликат [15,40]. Таким образом, сферические координаты точки M – это упорядоченная тройка чисел ρ, φ, θ – *радиус* ($\rho \geq 0$), *долгота* ($-\pi < \varphi \leq \pi$) и *широта* ($0 \leq \theta \leq \pi$). У точек, принадлежащих оси

апликат, не определена долгота, их положение задается радиусом ρ и широтой $\theta = 0$ для положительной части оси Oz и $\theta = \pi$ для отрицательной ее части. Начало координат задается нулевым значением радиуса ρ . Иногда [2,3] вместо угла θ широтой называют угол $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$, принимающий значения $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$.

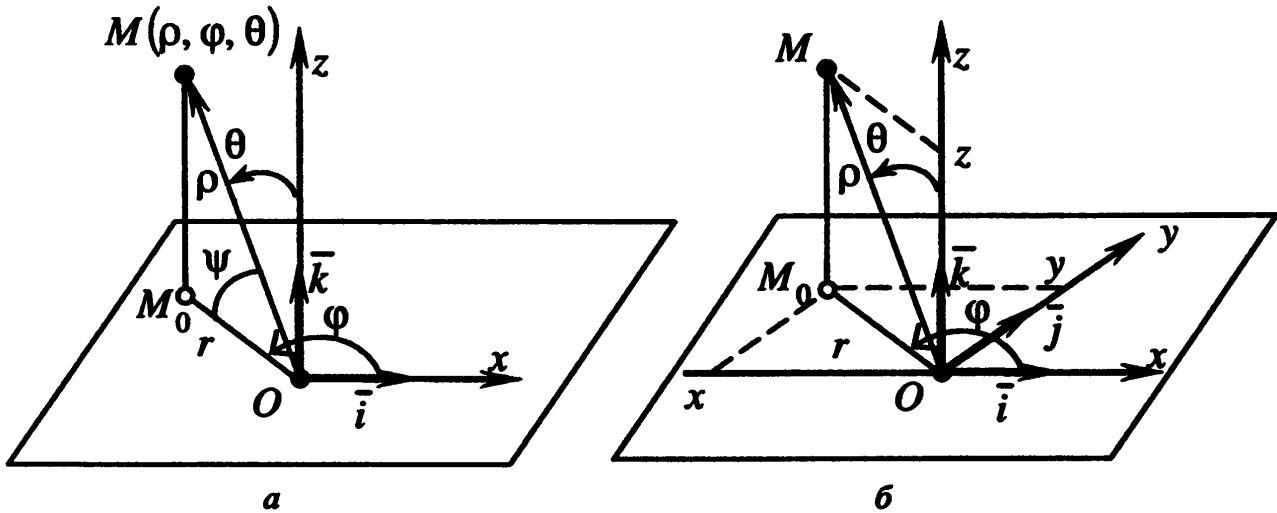


Рис.2.36

Со сферической системой координат $O\rho\varphi\theta$ можно связать прямоугольную систему координат $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ (рис.2.36,б), у которой начало и базисные векторы \bar{i}, \bar{k} совпадают с началом сферической системы координат и единичными векторами на полярной оси Ox и оси аппликат Oz соответственно, а базисный вектор \bar{j} выбирается так, чтобы тройка $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ была правой (при этом базис оказывается стандартным).

Наоборот, если в пространстве задана правая прямоугольная система координат, то, приняв положительную полуось абсцисс за полярную ось, получим сферическую систему координат (связанную с данной прямоугольной).

Получим формулы, связывающие между собой прямоугольные координаты x, y, z точки M и ее сферические координаты ρ, φ, θ . По рис.2.36,б получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta, \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta, \\ z = \rho \cdot \cos \theta. \end{cases} \quad (2.21)$$

Эти формулы позволяют найти прямоугольные координаты по известным сферическим координатам. Обратный переход выполняется по формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \theta = \arccos \frac{z}{\rho} = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Формулы (2.22) определяют долготу φ с точностью до слагаемых $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. При $x \neq 0$ из них следует, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$. Главное значение долготы φ ($-\pi < \varphi \leq \pi$) находится по формулам (см. рис.2.29).

Пример 2.13. В сферической системе координат $O\rho\varphi\theta$:

а) построить координатные поверхности $\rho = R$, $\varphi = \varphi_0$, $z = z_0$;

б) найти сферические координаты ρ, φ, θ точки A , если известны ее прямоугольные координаты $A(4, -3, 12)$;

в) найти прямоугольные координаты x, y, z точки B , если известны ее сферические координаты: $\rho = 4$; $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

□ а) Координатной поверхностью $\rho = R$, т.е. геометрическим местом точек $M(R, \varphi, \theta)$ при фиксированном значении радиуса $\rho = R$, является сфера с центром в начале координат (рис.2.37). Этим объясняется название сферической системы координат. Координатной поверхностью $\varphi = \varphi_0$, т.е. геометрическим местом точек $M(\rho, \varphi_0, \theta)$ при фиксированном значении долготы $\varphi = \varphi_0$, является полуплоскость, ограниченная осью аппликат (на рис.2.37 изображена полуплоскость $\varphi = 0$). Координатной поверхностью $\theta = \theta_0$, т.е. геометрическим местом точек $M(\rho, \varphi, \theta_0)$ при фиксированном значении широты $\theta = \theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$, является конус, ось которого совпадает с осью аппликат, а вершина – с началом координат. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ получаем основную плоскость.

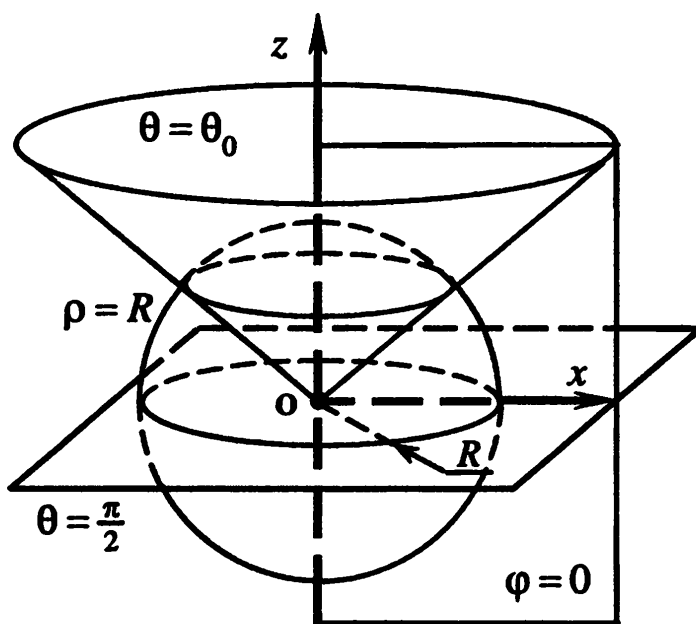


Рис.2.37

На рис.2.37 изображены конус $\theta = \theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ и основная плоскость $\theta = \frac{\pi}{2}$.

б) Найдем сферические координаты точки $A(4, -3, 12)$. По формулам (2.22), учитывая рис.2.29 (см. пример 2.12), получаем

$$\rho = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 12^2} = 13; \quad \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{3}{4}; \quad \theta = \arccos \frac{12}{13}.$$

б) По формулам (2.21) получаем

$$x = \rho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2};$$

$$y = \rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{6};$$

$$z = \rho \cdot \cos \theta = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}. \blacksquare$$

2.4. КООРДИНАТНОЕ ПРОСТРАНСТВО R^n

2.4.1. Точки, векторы и операции над ними

В разд.2.1 подчеркивалось, что введение аффинной системы координат на прямой, на плоскости, в пространстве устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками и их координатами. Эта идея, лежащая в основе аналитической геометрии, обобщается в данном разделе.

Рассмотрим множество R^n упорядоченных наборов n действительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n , которое будем называть *n -мерным аффинным пространством* (*n -мерным декартовым пространством, n -мерным арифметическим пространством*), а его элементы – *точками* и обозначать их прописными буквами, например, $A(a_1, \dots, a_n)$. Две точки $A(a_1, \dots, a_n)$ и $B(b_1, \dots, b_n)$ называются *совпадающими*, если $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Число n называется *числом измерений* или *размерностью* пространства R^n . Например, в силу введения аффинных систем координат на прямой, на плоскости и в пространстве (см. разд.2.1) можно говорить, что прямая, плоскость, пространство являются одномерным (R), двумерным (R^2) и трехмерным (R^3) аффинными пространствами соответственно. Примером четырехмерного пространства служит пространственно-временной континуум, используемый для описания физических процессов, в котором каждому "событию" ставится в соответствие набор четырех чисел (t, x_1, x_2, x_3) , где t – момент времени, в который произошло "событие", а x_1, x_2, x_3 – координаты "места события" [15].

Упорядоченная пара точек пространства R^n называется **вектором**. Первая точка называется **началом вектора**, вторая – **концом вектора**. Начало вектора называют также его **точкой приложения**. Вектором \overline{AB} с началом в точке $A(a_1, \dots, a_n)$ и концом в точке $B(b_1, \dots, b_n)$ называется матрица-столбец (см. разд. П.1)

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым** и обозначается $o = (0 \ \dots \ 0)^T$.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Операции сложения векторов и умножения векторов на число определяются как соответствующие операции над столбцами [8,10,37]:

суммой векторов $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$ и $y = (y_1 \ \dots \ y_n)^T$ называется вектор

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix};$$

произведением вектора $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$ на число λ называется вектор

$$\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Эти операции удовлетворяют свойствам 1-8 линейных операций над векторами в разд. 1.1.2. Поэтому пространство R^n можно рассматривать как линейное (векторное) пространство [8,10].

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если существует такое число λ , что $y = \lambda \cdot x$. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Каждый вектор коллинеарен самому себе.

З а м е ч а н и я 2.9.

1. Совершенно так же, как в разд. 1.1.2, 1.1.3, 1.2.1, вводятся следующие, связанные с линейными операциями над векторами, понятия: противоположных векторов, разности векторов, отношения коллинеарных векторов, линейной зависимости и линейной независимости векторов. Свойства 1–7

линейно зависимых и линейно независимых векторов (см. разд.1.1.3) переносятся на векторы пространства R^n без изменений.

2. Рассматривая множество упорядоченных наборов n комплексных чисел z_1, z_2, \dots, z_n , приходим к понятию *n -мерного комплексного арифметического пространства C^n* , где $z_1 = x_1 + i y_1 \in C, \dots, z_n = x_n + i y_n \in C$; C – множество комплексных чисел. Все точки пространства R^n содержатся в C^n (при $y_1 = \dots = y_n = 0$) и называются *вещественными (действительными) точками* пространства C^n .

Понятия вектора, размерности пространства C^n , линейных операций над векторами и их свойства аналогичны соответствующим понятиям и свойствам действительного арифметического пространства R^n .

СТАНДАРТНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В R^n

Базисом пространства R^n называется упорядоченная система n линейно независимых векторов (*базисных векторов*).

Упорядоченный набор векторов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

называются *стандартным базисом* в пространстве R^n .

Векторы стандартного базиса линейно независимы и любой вектор $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$ может быть разложен по базису, т.е. представлен в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n. \quad (2.24)$$

Как и ранее (см. разд.1.3), *координатами вектора x* относительно базиса $(e) = (e_1 \ \dots \ e_n)$ называются коэффициенты x_1, x_2, \dots, x_n в разложении (2.24). Как видим, в стандартном базисе (2.23) координаты x_1, x_2, \dots, x_n

вектора $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$ совпадают с его элементами, а **координатный столбец** $(x_1 \ \dots \ x_n)^T$ – с самим вектором x .

Например, в одномерном пространстве R вектор x представляется столбцом $x = (x_1)$, в двумерном пространстве R^2 – столбцом $x = (x_1 \ x_2)^T$, в трехмерном пространстве R^3 – столбцом $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$.

Совокупность точки O и базиса $(e) = (e_1 \ \dots \ e_n)$ называется **аффинной (декартовой) системой координат** пространства R^n . Точка O называется **началом** системы координат.

Вектор \overline{OX} , начало которого совпадает с началом O системы координат, а конец – с точкой $X(x_1, \dots, x_n)$ пространства, называется **радиус-вектором** точки X . **Координатами** точки $X(x_1, \dots, x_n)$ в пространстве R^n называются координаты ее радиус-вектора \overline{OX} относительно базиса e_1, \dots, e_n . Разумеется, что соответствия

$$\begin{aligned} (\text{точка}) &\leftrightarrow (\text{радиус-вектор точки}) \leftrightarrow (\text{координаты точки}) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (\text{координатный столбец радиус-вектора точки}) \end{aligned}$$

взаимно однозначные.

Система координат с началом в точке $O(0, \dots, 0)$ и стандартным базисом e_1, \dots, e_n (2.23) считается **стандартной системой координат** пространства R^n и обозначается $Oe_1 \dots e_n$ или $Ox_1 \dots x_n$. В этой системе координат точка $X(x_1, \dots, x_n)$ имеет координаты x_1, \dots, x_n , так как $\overline{OX} = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n$.

Заметим, что правило нахождения координат вектора (см. разд.2.1.1), согласно которому из координат конца вектора нужно вычесть координаты его начала, было фактически принято в качестве определения векторов в R^n . Действительно, в стандартной системе координат вектор \overline{AB} с началом в точке $A(a_1, \dots, a_n)$ и концом в точке $B(b_1, \dots, b_n)$ обозначается матрицей-столбцом

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b - a = \overline{OB} - \overline{OA},$$

где $a = \overline{OA}$ и $b = \overline{OB}$ – радиус-векторы точек A и B соответственно.

ЛИНЕЙНЫЕ, НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ, АФФИННЫЕ И ВЫПУКЛЫЕ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ

Вектор v пространства R^n называется *линейной комбинацией* векторов v_1, v_2, \dots, v_k , если он может быть представлен в виде

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_k \cdot v_k,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – некоторые числа.

Множество линейных комбинаций векторов v_1, v_2, \dots, v_k называется их *линейной оболочкой* и обозначается

$$\text{Lin}(v_1, v_2, \dots, v_k) = \{ v : v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_k \cdot v_k; \alpha_i \in R, i = 1, \dots, k \}.$$

Векторы v_1, v_2, \dots, v_k называются *образующими* линейной оболочки $\text{Lin}(v_1, v_2, \dots, v_k)$.

Линейная комбинация $\alpha_1 \cdot \overline{OA_1} + \alpha_2 \cdot \overline{OA_2} + \dots + \alpha_k \cdot \overline{OA_k}$ радиус-векторов $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$ называется *неотрицательной*, если все ее коэффициенты – неотрицательные числа. Множество неотрицательных комбинаций радиус-векторов $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$ называется их *конической оболочкой* и обозначается:

$$\text{Con}(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}) = \left\{ \overline{OM} : \overline{OM} = \alpha_1 \cdot \overline{OA_1} + \alpha_2 \cdot \overline{OA_2} + \dots + \alpha_k \cdot \overline{OA_k}; \right. \\ \left. \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in R \right\}.$$

Линейная комбинация $\alpha_1 \cdot \overline{OA_1} + \alpha_2 \cdot \overline{OA_2} + \dots + \alpha_k \cdot \overline{OA_k}$ радиус-векторов $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$ называется *аффинной*, если сумма ее коэффициентов равна единице: $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$. Множество аффинных комбинаций радиус-векторов $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$ называется их *аффинной оболочкой* и обозначается:

$$\text{Aff}(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}) = \left\{ \overline{OM} : \overline{OM} = \alpha_1 \cdot \overline{OA_1} + \alpha_2 \cdot \overline{OA_2} + \dots + \alpha_k \cdot \overline{OA_k}; \right. \\ \left. \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in R \right\}.$$

Линейная комбинация $\alpha_1 \cdot \overline{OA_1} + \alpha_2 \cdot \overline{OA_2} + \dots + \alpha_k \cdot \overline{OA_k}$ радиус-векторов $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$ называется *выпуклой*, если все ее коэффициенты – неотрицательные числа, а их сумма равна единице: $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$. Множество выпуклых комбинаций радиус-векторов $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$ называется их *выпуклой оболочкой* и обозначается:

$$\text{Conv}(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}) = \left\{ \overline{OM} : \overline{OM} = \alpha_1 \cdot \overline{OA_1} + \alpha_2 \cdot \overline{OA_2} + \dots + \alpha_k \cdot \overline{OA_k}; \right. \\ \left. \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in R \right\}.$$

Радиус-векторы $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$ называются *образующими* конической оболочки $\text{Con}(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k})$, аффинной оболочки $\text{Aff}(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k})$, выпуклой оболочки $\text{Conv}(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k})$.

Учитывая взаимно однозначное соответствие радиус-векторов и точек пространства R^n , можно говорить о неотрицательной, аффинной или выпуклой комбинации точек A_1, A_2, \dots, A_k , полагая (по определению)

$$\text{Con}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \text{Con}(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}), \\ \text{Aff}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \text{Aff}(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}), \\ \text{Conv}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \text{Conv}(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}).$$

Свойства линейных, конических, аффинных и выпуклых оболочек использовались в разд.1.6.1 для описания простейших геометрических объектов: прямых, плоскостей, отрезков, треугольников, плоских и трехгранных углов, тетраэдров. В n -мерном пространстве линейные, конические, аффинные и выпуклые оболочки служат для определения аналогичных геометрических объектов (см. разд.2.4.2).

2.4.2. Линейные и аффинные подпространства

ЛИНЕЙНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО

Непустое подмножество L векторов из R^n называется *линейным подпространством* пространства R^n , если:

- 1) $u + v \in L \quad \forall u, v \in L$ (подпространство *замкнуто по отношению к операции сложения*);
- 2) $\lambda v \in L \quad \forall v \in L$ и любого действительного числа λ (подпространство *замкнуто по отношению к операции умножения вектора на число*).

Для указания линейного подпространства будем использовать обозначение $L \triangleleft R^n$. В частности, множество $\{o\}$, состоящее из одного нулевого вектора, и все пространство R^n считаются подпространствами R^n : $\{o\} \triangleleft R^n$, $R^n \triangleleft R^n$. В "обычном" пространстве R^3 координатная ось (R) и координатная плоскость (R^2) являются подпространствами: $R \triangleleft R^2 \triangleleft R^3$.

Линейное подпространство L называется *t -мерным*, если в нем существует система из t линейно независимых векторов, а любая система из большего количества векторов линейно зависима. Число t называется

размерностью (числом измерений) линейного подпространства L и обозначается $\dim L$, в частности, $\dim\{o\}=0$ (так как в множестве $\{o\}$ нет линейно независимых векторов), $\dim\{R^n\}=n$ (что совпадает с данным в разд.2.4.1 определением размерности R^n). Другими словами, размерность подпространства – это максимальное число линейно независимых векторов этого подпространства.

Базисом m -мерного линейного подпространства называется упорядоченная совокупность m линейно независимых векторов (**базисных векторов**). Например, векторы \bar{i}, \bar{j} образуют базис на координатной плоскости R^2 , являющейся подпространством R^3 .

З а м е ч а н и я 2.10.

1. **Линейное подпространство** – это непустое подмножество R^n , которое содержит любую линейную комбинацию своих векторов, т.е.

$$L \triangleleft R^n \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_k \cdot v_k \in L \\ \forall v_1, \dots, v_k \in L \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in R \quad \forall k \in N.$$

Это утверждение следует из условий 1, 2 в определении линейного подпространства и может быть взято в качестве эквивалентного определения [2,3].

2. **Базис** линейного подпространства – это **полная** система векторов этого подпространства в том смысле, что любой вектор подпространства линейно выражается через базисные векторы. Другими словами, m -мерное линейное подпространство L есть линейная оболочка своих базисных векторов l_1, \dots, l_m : $L = \text{Lin}(l_1, \dots, l_m)$.

3. **Базис** линейного подпространства – это **максимальная линейно независимая система векторов** этого подпространства, так как базис – это линейно независимая система векторов, и ее нельзя дополнить каким-либо вектором из подпространства без потери линейной независимости.

4. **Базис** линейного подпространства – это **полная линейно независимая система векторов** линейного подпространства.

АФФИННОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО

Непустое подмножество Π точек из R^n называется **аффинным подпространством**, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и любую их аффинную комбинацию:

для любых точек A и B (концов радиус-векторов a, b соответственно), принадлежащих Π , точка C , радиус-вектор которой имеет вид

$$c = \alpha \cdot a + \beta \cdot b, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha \in R, \quad \beta \in R,$$

также принадлежит Π .

Например, аффинными подпространствами являются точка, прямая, плоскость или все пространство R^3 (см. также разд.1.6.1).

Покажем, что аффинное подпространство можно задать при помощи операции *откладывания векторов от точки* (см. п.4 замечаний 1.1). Действительно, пусть A – некоторая точка R^n (a – ее радиус-вектор), а $L \subset R^n$ – линейное подпространство. Рассмотрим множество Π таких точек P (p – радиус-вектор точки P) из R^n , которые получаются в результате откладывания от точки A векторов из L (рис.2.38):

$$\Pi = a + L = \{p \in R^n : p = a + l, l \in L\}. \quad (2.25)$$

Пусть точки A_1 и A_2 принадлежат Π , т.е. их радиус-векторы имеют вид $a_1 = a + l_1$ и $a_2 = a + l_2$. Тогда их аффинная комбинация также принадлежит Π , так как

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 = \alpha_1 \cdot (a + l_1) + \alpha_2 \cdot (a + l_2) = \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{=1} \cdot a + \underbrace{\alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2}_{l_3} = a + l_3,$$

где $l_3 \in L$ (l_3 – линейная комбинация векторов l_1 и l_2 из L).

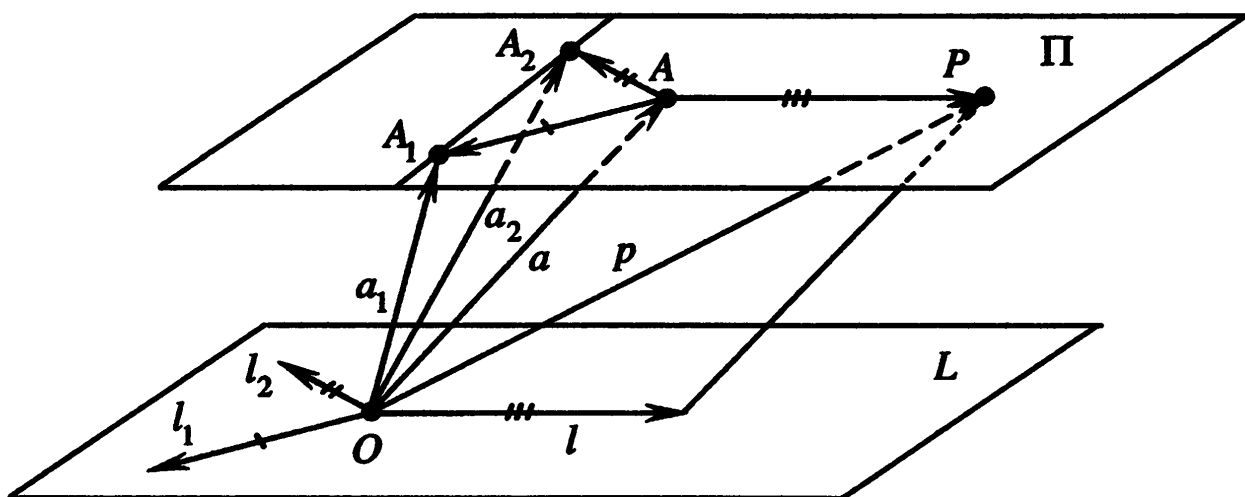


Рис.2.38

Таким образом, множество Π (2.25) является аффинным подпространством и называется *плоскостью, проходящей через точку A* (конец радиус-вектора a) *параллельно линейному подпространству L* . При этом линейное подпространство L называется *однородной частью аффинного подпространства Π* . Говорят также, что плоскость Π получена в результате *параллельного переноса* линейного подпространства L на вектор a .

Размерностью плоскости Π называется размерность ее однородной части, т.е. $\dim \Pi = \dim L$. Например, точка, прямая, плоскость в "обычном" пространстве R^3 являются нульмерным, одномерным, двумерным аффинными подпространствами соответственно. Плоскость размерности $(n-1)$ в пространстве R^n называется *гиперплоскостью*. Прямая на координатной

плоскости или плоскость в "обычном" пространстве R^3 являются гиперплоскостями.

З а м е ч а н и я 2.11.

1. *Аффинное подпространство* – это непустое подмножество R^n , которое содержит любую аффинную комбинацию своих точек.

2. Точки A_0, A_1, \dots, A_r называются *геометрически независимыми*, если векторы $\overline{A_0A_1}, \overline{A_0A_2}, \dots, \overline{A_0A_r}$ образуют линейно независимую систему. В r -мерной плоскости $\Pi = a_0 + L$ существует не более $(r+1)$ геометрически независимых точек.

В самом деле, пусть A_0 – любая точка плоскости Π (a_0 – радиус-вектор точки A_0), а l_1, l_2, \dots, l_r – базис L , тогда точки A_0, A_1, \dots, A_r – концы радиус-векторов $a_0, a_0 + l_1, a_0 + l_2, \dots, a_0 + l_r$ геометрически независимы, так как векторы l_1, l_2, \dots, l_r линейно независимы. Существование $(r+1)$ геометрически независимых точек доказано. Предположим, что в r -мерной плоскости Π имеются $(r+2)$ геометрически независимых точек $B_0, B_1, \dots, B_r, B_{r+1}$. Тогда по определению получим линейно независимую систему $(r+1)$ векторов $l_1 = \overline{B_0B_1}, l_2 = \overline{B_0B_2}, \dots, l_r = \overline{B_0B_r}, l_{r+1} = \overline{B_0B_{r+1}}$ подпространства L , что противоречит его r -мерности.

3. Геометрически независимые точки аффинного подпространства аналогичны базису линейного подпространства, а именно: если A_0, A_1, \dots, A_r – геометрически независимые точки r -мерной плоскости Π , то

$$\Pi = \text{Aff}(\overline{OA_0}, \overline{OA_1}, \dots, \overline{OA_r}).$$

4. Выпуклая комбинация $\text{Conv}(\overline{OA_0}, \overline{OA_1}, \dots, \overline{OA_r})$ геометрически независимых точек A_0, A_1, \dots, A_r (их радиус-векторов) называется *r -мерным симплексом* (с вершинами A_0, A_1, \dots, A_r) и обозначается $A_0A_1\dots A_r$. Например, в "обычном" пространстве R^3 : тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$ (включая его внутренние точки) является трехмерным симплексом, плоский треугольник $A_0A_1A_2$ – двумерным симплексом, отрезок A_0A_1 – одномерным симплексом, а точка A_0 – нульмерным симплексом.

Выпуклая комбинация k ($0 \leq k \leq r$) точек из набора A_0, A_1, \dots, A_r называется *k -мерной гранью* r -мерного симплекса $A_0A_1\dots A_r$. Например, нульмерные грани тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$ – это его вершины, одномерные грани – ребра, двумерные грани – "обычные" грани тетраэдра.

2.4.3. Скалярное произведение

Стандартным скалярным произведением векторов $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$ и $y = (y_1 \ \dots \ y_n)^T$ называется число

$$(x, y) = x^T \cdot y = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n. \quad (2.26)$$

Скалярным квадратом вектора $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$ называется скалярное произведение вектора на себя: $(x, x) = x^T \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

Скалярное произведение (2.26) обладает свойствами 1–4 (перечисленными в разд.1.4.2), из которых следует неравенство Коши – Буняковского (см. п.3 замечаний 1.9):

$$(a, b)^2 \leq (a, a) \cdot (b, b),$$

справедливое для любых векторов $a = (a_1 \ \dots \ a_n)^T$ и $b = (b_1 \ \dots \ b_n)^T$.

Используя скалярное произведение, можно определить **основные метрические понятия**: длину вектора и величину угла между векторами (см. геометрические свойства 1,2 скалярного произведения в разд.1.4.2).

Длиной вектора $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$ называется квадратный корень из скалярного квадрата:

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x^T \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.

Расстояние между точками $A(a_1, \dots, a_n)$ и $B(b_1, \dots, b_n)$ находится как длина вектора $\overline{AB} = b - a$:

$$|\overline{AB}| = |b - a| = \sqrt{(b - a, b - a)} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2},$$

где $a = (a_1 \ \dots \ a_n)^T$ и $b = (b_1 \ \dots \ b_n)^T$ – радиус-векторы точек A и B соответственно (см. разд.2.4.1).

Величиной φ угла между ненулевыми векторами $a = (a_1 \ \dots \ a_n)^T$ и $b = (b_1 \ \dots \ b_n)^T$ называется число $0 \leq \varphi \leq \pi$:

$$\cos \varphi = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} = \frac{a^T \cdot b}{\sqrt{a^T \cdot a} \cdot \sqrt{b^T \cdot b}} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}.$$

Векторы называются **ортогональными (перпендикулярными)**, если их скалярное произведение равно нулю.

Система векторов называется **ортогональной**, если все векторы системы попарно ортогональны.

Система векторов называется *ортонормированной*, если все векторы системы попарно ортогональны и их длины равны единице.

Покажем, например, что стандартный базис (2.23) (см. разд.2.4.1) – ортонормированный. Действительно, длина каждого вектора стандартного базиса равна единице, например,

$$|e_1| = \sqrt{(e_1, e_1)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0} = 1,$$

а угол между разными векторами стандартного базиса равен $\frac{\pi}{2}$, например, угол φ между векторами e_1 и e_2 :

$$\cos \varphi = \frac{(e_1, e_2)}{|e_1| \cdot |e_2|} = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0}{1 \cdot 1} = 0, \text{ т.е. } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому стандартную систему координат $Ox_1 \dots x_n$ называют *прямоугольной*.

***n*-МЕРНЫЙ ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ОБЪЕМ**

Введем по индукции понятие ориентированных объемов параллелепипедов в пространствах R, R^2, R^3, \dots, R^n .

Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – линейно независимая система векторов n -мерного пространства R^n . Множество точек P , радиус-вектор \overline{OP} которых удовлетворяет условиям

$$\overline{OP} = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \dots, \quad 0 \leq x_n \leq 1,$$

называется *n -мерным параллелепипедом*, построенным на векторах a_1, a_2, \dots, a_n , и обозначается $\#a_1, a_2, \dots, a_n$. Например, одномерный параллелепипед $\#a_1$ в пространстве R – это отрезок числовой оси Ox ; двумерный параллелепипед $\#a_1, a_2$ в пространстве R^2 – это параллелограмм на координатной плоскости Ox_1x_2 , трехмерный параллелепипед $\#a_1, a_2, a_3$ в пространстве R^3 – это параллелепипед в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$.

Обозначим:

$V_{\#a_1}^{\wedge} = a_1$ – одномерный ориентированный объем, определяемый вектором (числом) a_1 из пространства R ;

$V_{\#a_1, a_2}^{\wedge} = a_1 \wedge a_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – двумерный ориентированный объем, определяемый ориентированной площадью параллелограмма $\#a_1, a_2$, постро-

енного на векторах $a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ пространства R^2 (см. разд.1.5.3);

$$V_{\#a_1, a_2, a_3}^{\wedge} = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{трехмерный ориентированный}$$

объем, т.е. ориентированный объем параллелепипеда $\#a_1, a_2, a_3$, по-

строенного на векторах $a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ пространст-

ва R^3 (см. разд.1.5.3);

...

$$V_{\#a_1, \dots, a_n}^{\wedge} = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - n\text{-мерный ориентированный}$$

объем параллелепипеда $\#a_1, \dots, a_n$, построенного на векторах

$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$, ..., $a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ пространства R^n .

Заметим, что n -мерный объем параллелепипеда (неориентированный) равен

$$\left| V_{\#a_1, \dots, a_n}^{\wedge} \right|.$$

З а м е ч а н и я 2.12.

1. Скалярное произведение векторов пространства R^n можно определить следующим образом:

$$(x, y) = x^T \cdot G \cdot y,$$

где G – любая симметрическая положительно определенная матрица n -го порядка [8,10,15].

2. Ориентированный объем n -мерного симплекса $OA_1A_2\dots A_n$ в R^n находится по формуле [40]:

$$V_{OA_1A_2\dots A_n}^{\wedge} = \frac{1}{n!} \cdot (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n) = \frac{1}{n!} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а неориентированный – равен $\left| V_{OA_1A_2 \dots A_n}^\wedge \right|$.

Пример 2.14. В пространстве R^4 даны радиус-векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

точек A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно. Требуется найти:

- длину диагонали $\overline{OA} = a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ параллелепипеда $\#a_1, a_2, a_3, a_4$, построенного на векторах a_1, a_2, a_3, a_4 ;
- четырёхмерный объём параллелепипеда $\#a_1, a_2, a_3, a_4$;
- объём четырёхмерного симплекса $OA_1A_2A_3A_4$;

□ а) Находим вектор

$$\overline{OA} = a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

а затем его длину $|a| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{30}$.

б) По определению находим четырёхмерный ориентированный объём параллелепипеда $\#a_1, a_2, a_3, a_4$:

$$V_{\#a_1, a_2, a_3, a_4}^\wedge = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Следовательно, четырёхмерный объём равен $\left| V_{\#a_1, a_2, a_3, a_4}^\wedge \right| = |-1| = 1$.

в) Согласно п.2 замечаний 2.12, находим ориентированный объём симплекса $OA_1A_2A_3A_4$:

$$V_{OA_1A_2A_3A_4}^\wedge = \frac{1}{4!} \cdot V_{\#OA_1, OA_2, OA_3, OA_4}^\wedge = \frac{1}{4!} \cdot V_{\#a_1, a_2, a_3, a_4}^\wedge = -\frac{1}{24}.$$

Поскольку искомый объём (неориентированный) есть величина неотрицательная, то $V_{OA_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{24}$. ■

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x'_1, \dots, x'_n), \\ \vdots \\ x_n = g_n(x'_1, \dots, x'_n), \end{cases} \Leftrightarrow x = g(x'), \quad (2.29)$$

где $g_i(x'_1, \dots, x'_n)$, $i=1, \dots, n$ – непрерывно дифференцируемые функции;

$$g(x') = \begin{pmatrix} g_1(x') \\ \vdots \\ g_n(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x'_1, \dots, x'_n) \\ \vdots \\ g_n(x'_1, \dots, x'_n) \end{pmatrix} \text{ – столбец заданных функций; } x \text{ и } x' \text{ – координатные столбцы радиус-векторов точки } X \text{ в старой и новой системах координат.}$$

Обозначим через $\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) = \left(\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(x'_1, \dots, x'_n)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x')}{\partial x'_1} & \dots & \frac{\partial g_1(x')}{\partial x'_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(x')}{\partial x'_1} & \dots & \frac{\partial g_n(x')}{\partial x'_n} \end{pmatrix}$ матрицу частных производных первого порядка заданных функций (матрицу Якоби преобразования (2.29)).

Определитель $\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)$ матрицы Якоби называется **якобианом преобразования координат**.

Точки, где якобиан преобразования равен нулю или не существует, называются **особыми**, а остальные точки называются **неособыми**.

По теореме об обратном преобразовании [23]: *если задано преобразование координат (2.29): $x = g(x')$, выражающее старые координаты x_1, \dots, x_n произвольной точки $X \in R^n$ через новые x'_1, \dots, x'_n , причем $x_0 = g(x'_0)$ для некоторой фиксированной точки $X_0 \in R^n$, и якобиан преобразования $\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)$ в этой точке X_0 (при $x' = x'_0$) отличен от нуля, то в достаточно малой окрестности точки X_0 можно выразить новые координаты x'_1, \dots, x'_n через старые:*

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \Leftrightarrow x' = f(x), \quad (2.30)$$

причем $x'_0 = f(x_0)$. Матрица Якоби $\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\Big|_{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}\Big|_{x_0}$

обратного преобразования будет обратной для матрицы $\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\Big|_{x'_0}$.

Поясним это утверждение. Пусть x_0, x'_0 – координатные столбцы радиус-векторов точки X_0 в старой и новой системах координат, причем якобиан преобразования $\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\Big|_{x'_0}$ в этой точке X_0 отличен от нуля. Разложим функцию $g(x')$ в ряд Тейлора в окрестности точки X_0 , оставляя члены только первого порядка. Получим выражение приращения $\Delta x = x - x_0$ старых координат через приращение $\Delta x' = x' - x'_0$ новых координат:

$$\Delta x = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\Big|_{x'_0} \cdot \Delta x', \quad (2.31)$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \frac{\partial g_1(x')}{\partial x'_1}\Big|_{x'_0} \cdot \Delta x'_1 + \dots + \frac{\partial g_1(x')}{\partial x'_n}\Big|_{x'_0} \cdot \Delta x'_n, \\ \dots \\ \Delta x_n = \frac{\partial g_n(x')}{\partial x'_1}\Big|_{x'_0} \cdot \Delta x'_1 + \dots + \frac{\partial g_n(x')}{\partial x'_n}\Big|_{x'_0} \cdot \Delta x'_n. \end{cases}$$

Формула (2.31) представляет собой *локальное преобразование координат* в окрестности точки X_0 с учетом членов только первого порядка. Сравнивая (2.31) с формулами (2.28), делаем вывод: в окрестности точки X_0 старые локальные координаты $\Delta x = x - x_0$ и новые локальные координаты $\Delta x' = x' - x'_0$ вектора $\overline{X_0 X}$ преобразуются так же, как при аффинном преобразовании (2.28) с матрицей $S = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\Big|_{x'_0}$ – матрицей Якоби, вычисленной в точке X_0 (при $x' = x'_0$).

Другими словами, преобразование координат (2.29) в окрестности неособой точки X_0 можно рассматривать как переход от одной аффинной системы координат к другой, т.е. локальное преобразование координат является невырожденным линейным преобразованием координат (2.28). Аффинное преобразование координат, как известно, обратимо и матрица

$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\Big|_{x_0}$ обратного перехода является обратной для $\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\Big|_{x'_0}$ (см. свойства

матрицы перехода от одного базиса к другому в разд.2.2.1). При этом модуль якобиана равен коэффициенту искажения объемов (в окрестности рассматриваемой точки X_0) [40]. В отличие от аффинных преобразований коэффициент искажения объемов при нелинейных преобразованиях, вообще говоря, меняется в зависимости от точки X_0 .

Пример 2.15. На плоскости в прямоугольной системе координат Oxy отмечена точка $Q(1,0)$ и введена система координат, в которой положение произвольной точки M задается двумя углами φ, ψ . Оба угла отсчитываются от оси абсцисс в положительном направлении (против движения часовой стрелки) до вектора \overline{OM} и вектора \overline{QM} соответственно (рис.2.39,а), причем диапазоны изменения углов φ, ψ выбираются как в полярной системе координат: $-\pi < \varphi \leq \pi, -\pi < \psi \leq \pi$ (допустимые значения углов φ, ψ изображены на рис.2.39,б (два заштрихованных треугольника), где учтены очевидные неравенства $\varphi < \psi$ для точек, принадлежащих I и II четвертям, и $\varphi > \psi$ — для точек в III и IV четвертях). Требуется:

- вывести формулы (2.29) преобразования координат;
- вывести формулы (2.31) локального преобразования координат;
- указать особые точки полученного преобразования координат.

□ а) Найдем полярный радиус r точки M . По теореме синусов для треугольника OQM :

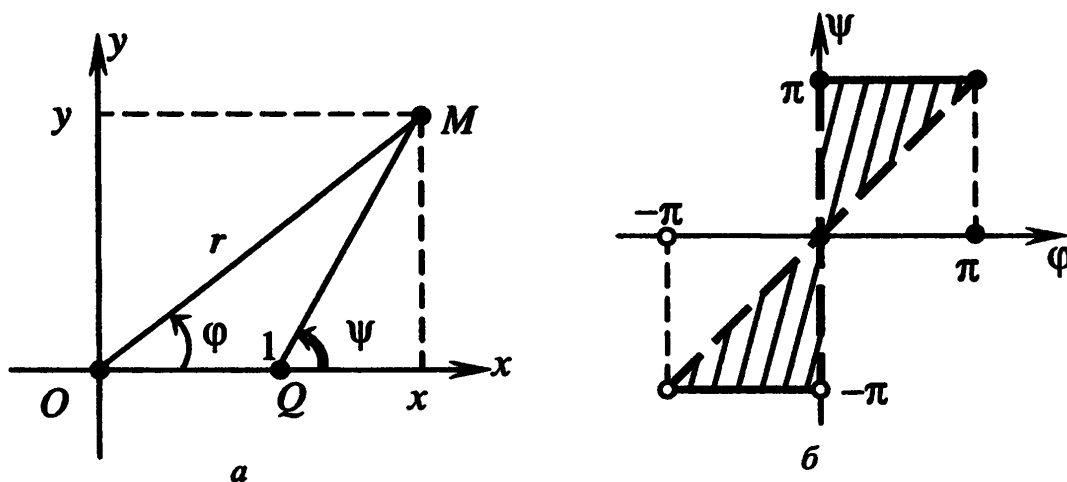


Рис.2.39

$$\frac{r}{\sin(\pi - \psi)} = \frac{1}{\sin \angle OMQ} \Rightarrow r = \frac{\sin \psi}{\sin(\psi - \varphi)},$$

так как $\psi = \angle OMQ + \varphi$ (внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним) и, следовательно, $\angle OMQ = \psi - \varphi$.

Теперь, используя связь (2.17) прямоугольных и полярных координат, получаем

$$\begin{cases} x = \frac{\sin \psi \cdot \cos \varphi}{\sin(\psi - \varphi)} = g_1(\varphi, \psi), \\ y = \frac{\sin \psi \cdot \sin \varphi}{\sin(\psi - \varphi)} = g_2(\varphi, \psi). \end{cases}$$

б) Найдем матрицу Якоби

$$\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\varphi, \psi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_1(\varphi, \psi)}{\partial \psi} \\ \frac{\partial g_2(\varphi, \psi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_2(\varphi, \psi)}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \psi \cdot \cos \psi}{\sin^2(\psi - \varphi)} & -\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sin^2(\psi - \varphi)} \\ \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2(\psi - \varphi)} & -\frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2(\psi - \varphi)} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, локальное преобразование координат (2.31) в окрестности точки M имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \psi \cdot \cos \psi}{\sin^2(\psi - \varphi)} & -\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sin^2(\psi - \varphi)} \\ \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2(\psi - \varphi)} & -\frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2(\psi - \varphi)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \psi \end{pmatrix}.$$

в) Находим якобиан преобразования:

$$\det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\sin \psi \cdot \cos \psi}{\sin^2(\psi - \varphi)} & -\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sin^2(\psi - \varphi)} \\ \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2(\psi - \varphi)} & -\frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2(\psi - \varphi)} \end{vmatrix} = \frac{\sin \varphi \cdot \sin \psi}{\sin^3(\psi - \varphi)}.$$

Он равен нулю или не имеет смысла для точек, принадлежащих оси абсцисс, т.е. при $\varphi = \psi = 0$, $\varphi = \psi = \pi$, $\varphi = 0$ и $\psi = \pi$. Остальные точки плоскости являются неособыми. ■

ПЕРЕХОД К ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Пусть на плоскости заданы прямоугольная система координат Oxy и соответствующая ей полярная система координат $Or\varphi$, для которых (см. разд.2.3.1)

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \varphi, \end{cases} \quad (2.32)$$

т.е. в (2.29) $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x'_1 = r$, $x'_2 = \varphi$, $g_1(x') = r \cdot \cos \varphi$, $g_2(x') = r \cdot \sin \varphi$.
Найдем матрицу Якоби

$$\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Якобиан преобразования $\det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right) = r \cdot \cos^2 \varphi + r \cdot \sin^2 \varphi = r$ отличен от нуля всюду ($r > 0$), за исключением начала координат O , где $r = 0$. Следовательно, точка O – единственная особая точка преобразования (2.32).

Вычислим коэффициент искажения площади в окрестности произвольной неособой точки X_0 . Пусть точка X_0 имеет прямоугольные координаты x_0, y_0 и полярные координаты r_0, φ_0 , причем $r_0 > 0$. В окрестности точки X_0 введем две аффинные системы координат $X_0 \Delta x \Delta y$ и $X_0 \Delta r \Delta \varphi$ (см. рис.2.40,а), связанные локальным преобразованием координат (2.31):

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & -r_0 \cdot \sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & r_0 \cdot \cos \varphi_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

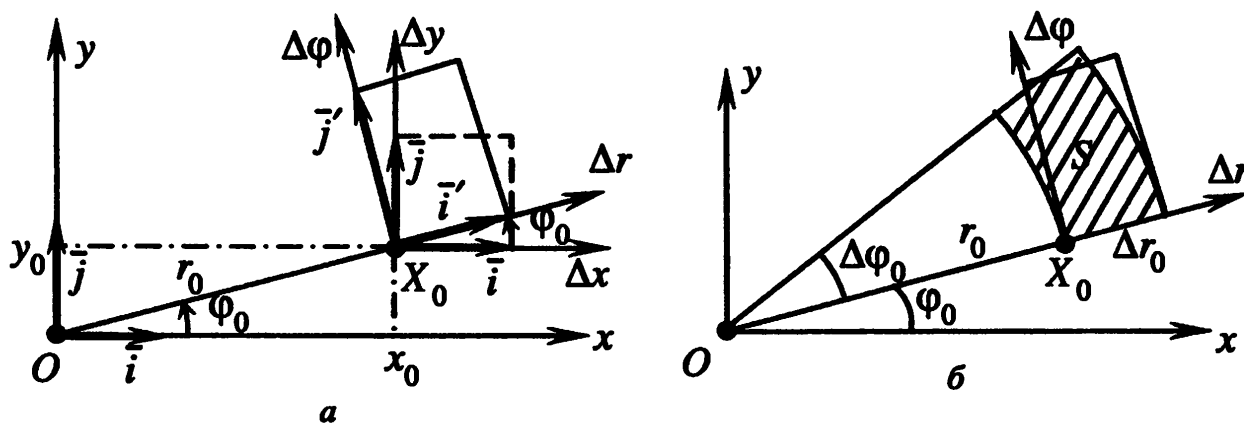


Рис.2.40

Аффинное преобразование (2.33), описываемое матрицей Якоби, можно представить в виде композиции двух преобразований: поворота на угол φ_0 и сжатия к оси $X_0 \Delta r$ с коэффициентом r_0 (см. разд.2.2.4):

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & -r_0 \cdot \sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & r_0 \cdot \cos \varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}.$$

Базисные векторы системы координат $X_0 \Delta x \Delta y$ совпадают со стандартным базисом \vec{i}, \vec{j} прямоугольной системы координат Oxy , а базисные векторы \vec{i}', \vec{j}' системы координат $X_0 \Delta r \Delta \varphi$ связаны с ними соотношениями

$$|\vec{i}'| = |\vec{i}|; \quad |\vec{j}'| = r_0 \cdot |\vec{j}|.$$

Ортогональность базисных векторов при такой композиции преобразований естественно сохраняется: $\vec{i}' \perp \vec{j}'$. Поэтому квадрат, построенный на базисных векторах \vec{i}, \vec{j} (изображен на рис.2.40,а штриховой линией), единичной площади $S_{\#\vec{i}, \vec{j}} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| = 1$ преобразуется в прямоугольник (изображен на рис.2.40,а сплошной линией) площади $S'_{\#\vec{i}', \vec{j}'} = |\vec{i}'| \cdot |\vec{j}'| = r_0 \cdot |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| = r_0$. Таким образом, в окрестности неособой точки коэффициент искажения площади r_0 равен модулю якобиана преобразования (2.32):

$$\det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right) \Big|_{(r_0, \varphi_0)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_0 & -r_0 \cdot \sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & r_0 \cdot \cos \varphi_0 \end{vmatrix} = r_0.$$

Коэффициент искажения площади равен r_0 и применяется при вычислении двойных интегралов [19,23,40].

Сравним теперь полное искажение площади в результате преобразования (2.32) и при локальным преобразованием (2.33). Рассмотрим множество $\#r\varphi$ точек, полярные координаты r, φ которых удовлетворяют условиям

$$r_0 \leq r \leq r_0 + \Delta r_0, \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \Delta \varphi_0.$$

Это множество представляет собой криволинейный четырехугольник (заштрихованный на рис.2.40,б), ограниченный дугами окружностей $r = r_0$, $r = r_0 + \Delta r_0$ и отрезками лучей $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi_0$. Найдем площадь S этой фигуры:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \Delta \varphi_0 \cdot (r_0 + \Delta r_0)^2 - \frac{1}{2} \cdot \Delta \varphi_0 \cdot r_0^2 = r_0 \cdot \Delta \varphi_0 \cdot \Delta r_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta \varphi_0 \cdot \Delta r_0^2.$$

В аффинной системе координат $X_0 \Delta r \Delta \varphi$ множество $\#\Delta r \Delta \varphi$ точек, координаты $\Delta r, \Delta \varphi$ которых удовлетворяют условиям

$$0 \leq \Delta r \leq \Delta r_0, \quad 0 \leq \Delta \varphi \leq \Delta \varphi_0,$$

представляет собой прямоугольник (изображен сплошными линиями на рис.2.36,б) площади $S_{\#} = r_0 \cdot \Delta \varphi_0 \cdot \Delta r_0$. Искомая разность площадей

$$S - S_{\#} = \frac{1}{2} \cdot \Delta \varphi_0 \cdot \Delta r_0^2.$$

Так как относительная ошибка

$$\left| \frac{S - S_{\#}}{S_{\#}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} \cdot \Delta \varphi_0 \cdot \Delta r_0^2}{r_0 \cdot \Delta \varphi_0 \cdot \Delta r_0} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{\Delta r_0}{r_0} \right|$$

стремится к нулю при $\Delta r_0 \rightarrow 0$, то при вычислении искажения площадей можно использовать локальное преобразование координат (2.33) вместо преобразования (2.32).

ПЕРЕХОД К ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Пусть в пространстве заданы прямоугольная система координат $Oxyz$ и соответствующая ей цилиндрическая система координат $O r \varphi z$, для которых (см. разд.2.3.2)

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad (2.34)$$

Найдем матрицу Якоби

$$\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якобиан преобразования $\det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right) = (r \cdot \cos^2 \varphi + r \cdot \sin^2 \varphi) \cdot 1 = r$ отличен от нуля всюду ($r > 0$), за исключением оси Oz , где $r = 0$. Следовательно, все точки оси аппликат (и только они) являются особыми точками преобразования (2.34). Коэффициент искажения объема равен r и применяется при вычислении тройных интегралов [19,23,40].

ПЕРЕХОД К СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Пусть в пространстве заданы прямоугольная система координат $Oxyz$ и соответствующая ей сферическая система координат $O \rho \varphi \theta$, для которых (см. разд.2.3.3)

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta, \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta, \\ z = \rho \cdot \cos \theta. \end{cases} \quad (2.35)$$

Найдем матрицу Якоби

$$\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} \right) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \sin \theta & -\rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta & \rho \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \\ \sin \varphi \cdot \sin \theta & \rho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta & \rho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\rho \cdot \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Вычислим якобиан преобразования

$$\det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cdot \sin \theta & -\rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta & \rho \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \\ \sin \varphi \cdot \sin \theta & \rho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta & \rho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\rho \cdot \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho^2 \cdot \sin \theta.$$

При $\rho > 0$ и при $\theta \neq 0$ или $\theta \neq \pi$ якобиан отличен от нуля. Следовательно, все точки оси аппликат Oz (и только они) являются особыми точками преобразования (2.35). Коэффициент искажения объема равен $\rho^2 \sin \theta$ и применяется при вычислении тройных интегралов [19,23,40].

Задачи для самостоятельного решения

2.1. На координатной плоскости $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ заданы вершины $A(1, 2)$, $B(3, 5)$, $C(5, -1)$ треугольника ABC . Найти координаты:

- а) середины K стороны BC ;
- б) точки M пересечения медиан;
- в) середины N средней линии треугольника, параллельной стороне BC ;
- г) точки L , которая делит сторону BC в отношении $BL:LC = 2:3$.

Ответ: а) $K(4, 2)$; б) $M(3, 2)$; в) $N(\frac{5}{2}, 2)$; г) $L(\frac{19}{5}, \frac{13}{5})$.

2.2. В координатном пространстве $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ заданы вершины $A(4, 4, 6)$, $B(12, 10, 2)$, $C(20, -2, 4)$ треугольной пирамиды $OABC$. Найти координаты:

- а) точки M пересечения медиан грани ABC ;
- б) точки N , которая делит отрезок OM в отношении $ON:NM = 3:1$.
- в) середины Z отрезка, соединяющего середины противоположных ребер пирамиды.

Ответ: а) $M(12, 4, 4)$; б) $N(9, 3, 3)$; в) $Z(9, 3, 3)$ – совпадает с N .

2.3. На координатной плоскости $O\bar{i}\bar{j}$ заданы векторы $\bar{f}_1 = 3\cdot\bar{i} + 2\cdot\bar{j}$, $\bar{f}_2 = 2\cdot\bar{i} + 1\cdot\bar{j}$, $\bar{g}_1 = 2\cdot\bar{i} - 2\cdot\bar{j}$, $\bar{g}_2 = -1\cdot\bar{i} + 6\cdot\bar{j}$. Доказать, что каждая из систем $(\bar{f}) = (\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ и $(\bar{g}) = (\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ является базисом; найти матрицу перехода от базиса (\bar{f}) к базису (\bar{g}) ; определить координаты вектора $\bar{a} = 2\cdot\bar{g}_1 + 1\cdot\bar{g}_2$ в базисе (\bar{f}) .

Ответ: $(\bar{f}) \xrightarrow{S} (\bar{g}) = \begin{pmatrix} -6 & 13 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$, $\bar{a} = 1\cdot\bar{f}_1 + 0\cdot\bar{f}_2$.

2.4. На плоскости заданы две системы координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ и $O\bar{e}_1^*\bar{e}_2^*$ с общим началом O и взаимными базисами: $(\bar{e}_1, \bar{e}_1^*) = (\bar{e}_2, \bar{e}_2^*) = 1$, $(\bar{e}_1, \bar{e}_2^*) = (\bar{e}_2, \bar{e}_1^*) = 0$. Найти матрицу $(\bar{e}) \xrightarrow{S} (\bar{e}^*)$ преобразования координат, если известно, что единичные векторы \bar{e}_1 и \bar{e}_2 образуют угол φ .

$$\text{Ответ: } S_{(\bar{e}) \rightarrow (\bar{e}')} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2 \varphi} & -\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \\ -\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} & \frac{1}{\sin^2 \varphi} \end{pmatrix}.$$

2.5. На плоскости заданы две системы координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ и $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$. Начало O' второй системы координат относительно первой системы координат имеет координаты $(-1, 3)$, а базисные векторы \bar{e}'_1 и \bar{e}'_2 имеют в базисе \bar{e}_1, \bar{e}_2 координаты 2, 3 и 1, 1 соответственно. Найти:

а) координаты x_1, x_2 точки в первой системе координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$, если известны координаты x'_1, x'_2 этой точки во второй системе координат $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$;

б) координаты x'_1, x'_2 точки во второй системе координат $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$, если известны координаты x_1, x_2 этой точки в первой системе координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$;

в) координаты точки O во второй системе координат $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$.

Ответ: а) $x_1 = 2 \cdot x'_1 + x'_2 - 1$; $x_2 = 3 \cdot x'_1 + x'_2 + 3$; б) $x'_1 = -x_1 + x_2 - 4$; $x'_2 = 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 9$; в) $O(-4, 9)$.

2.6. В пространстве заданы две системы координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ и $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3$. Начало O' второй системы координат относительно первой системы координат имеет координаты $(1, 1, 2)$, а базисные векторы \bar{e}'_1, \bar{e}'_2 и \bar{e}'_3 имеют в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ координаты 4, 2, 1; 5, 3, 2 и 3, 2, 1 соответственно. Найти:

а) координаты x_1, x_2, x_3 точки в первой системе координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$, если известны координаты x'_1, x'_2, x'_3 этой точки во второй системе координат $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3$;

б) координаты x'_1, x'_2, x'_3 точки во второй системе координат $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3$, если известны координаты x_1, x_2, x_3 этой точки в первой системе координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$;

в) координаты точки O во второй системе координат $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2\bar{e}'_3$.

Ответ: а) $x_1 = 4 \cdot x'_1 + 5 \cdot x'_2 + 3 \cdot x'_3 + 1$; $x_2 = 2 \cdot x'_1 + 3 \cdot x'_2 + 2 \cdot x'_3 + 1$,
 $x_3 = x'_1 + 2 \cdot x'_2 + x'_3 + 2$; б) $x'_1 = x_1 - x_2 - x_3 + 2$, $x'_2 = -x_2 + 2 \cdot x_3 - 3$,
 $x'_3 = -x_1 + 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 2$; в) $O(2, -3, 2)$.

2.7. Найти координаты неподвижной точки собственного ортогонального преобразования

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi + x_0, \\ y' = x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi + y_0, \end{cases}$$

где $\varphi \neq \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$; система координат Oxy прямоугольная.

Ответ: $x = \frac{1}{2} \cdot (x_0 - y_0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}), y = \frac{1}{2} \cdot (x_0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + y_0).$

2.8. На координатной плоскости Oxy (в прямоугольной системе координат $O\bar{i}\bar{j}$) задана точка $X(4, 6)$. Найти координаты образа Y этой точки при следующих преобразованиях плоскости:

- а) поворот плоскости на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг начала координат;
- б) отражение в оси абсцисс параллельно оси ординат;
- в) отражение в оси абсцисс параллельно прямой $y = x$;
- г) сжатие к оси абсцисс (вдоль оси ординат) с коэффициентом $\lambda = \frac{1}{2}$;
- д) сжатие к оси абсцисс вдоль прямой $y = x$ с коэффициентом $\lambda = \frac{1}{2}$;
- е) гомотетия с центром в точке O и коэффициентом $\lambda = 2$;
- ж) параллельный перенос на вектор $\bar{a} = 2 \cdot \bar{i} - \bar{j}$;
- з) ортогональная проекция на ось абсцисс;
- и) проекция на ось абсцисс параллельно прямой $y = x$.

Для каждого из преобразований а,б,в,г,д,е,ж определить коэффициент k искажения площади.

Ответ: а) $Y(2 - 3 \cdot \sqrt{3}, 2 \cdot \sqrt{3} + 3), k = 1$; б) $Y(4, -6), k = 1$;
 в) $Y(-8, -6), k = 1$; г) $Y(4, 3), k = \frac{1}{2}$; д) $Y(1, 3), k = \frac{1}{2}$; е) $Y(8, 12), k = 4$;
 ж) $Y(6, 5), k = 1$; з) $Y(4, 0)$; и) $Y(-2, 0)$.

2.9. В прямоугольной системе координат Oxy заданы точки $A(3, 4)$ и $B(12, 5)$. Найти координаты этих точек в полярной системе координат $Or\varphi$, а также угол φ между векторами \overline{OA} и \overline{OB} .

Ответ: $A(5, \operatorname{arctg} \frac{4}{3}), B(13, \operatorname{arctg} \frac{5}{12}), \varphi = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} - \operatorname{arctg} \frac{5}{12}.$

2.10. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ заданы точки $A(3, 4, 5)$ и $B(6, 6, -7)$. Найти координаты точки A в цилиндрической системе координат $Or\varphi z$, а координаты точки B в сферической системе координат $Or\varphi\theta$.

Ответ: $A(5, \operatorname{arctg} \frac{4}{3}, 5), B(11, \frac{\pi}{4}, \pi - \arccos \frac{7}{11}).$

ГЛАВА 3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Предметом аналитической геометрии является описание и исследование свойств геометрических фигур средствами алгебры и математического анализа, а также изучение и классификация уравнений с геометрической точки зрения. При этом геометрические свойства фигур выражаются алгебраически, как свойства соответствующих уравнений, и наоборот, результаты анализа уравнений получают геометрическое представление. Тем самым возникает связь алгебры и геометрии, обогащающая оба раздела математики.

В геометрии любую фигуру можно рассматривать как *геометрическое место точек* (г.м.т.), т.е. как множество точек, каждая из которых удовлетворяет заданному характеристическому свойству, а точка, не принадлежащая этому множеству, не удовлетворяет этому свойству. Например, в элементарной геометрии окружность определяется как г.м.т., равноудаленных от заданной точки (центра окружности), серединный перпендикуляр к отрезку – как г.м.т., равноудаленных от концов этого отрезка и т.п.

В аналитической геометрии, созданной Рене Декартом, геометрические фигуры задаются как множества решений соответствующих уравнений. Рассмотрим, например, уравнение

$$F(x, y) = 0$$

с двумя неизвестными x, y . Его *решением* называется пара чисел x_0, y_0 , при подстановке которых вместо неизвестных $x = x_0, y = y_0$ уравнение превращается в верное числовое равенство $F(x_0, y_0) = 0$. Каждое решение x_0, y_0 уравнения $F(x, y) = 0$ можно рассматривать как точку $M_0(x_0, y_0)$ на координатной плоскости с абсциссой x_0 и ординатой y_0 . Таким образом, множество решений уравнения $F(x, y) = 0$ определяет на координатной плоскости Π некоторую фигуру

$$F = \{ M(x, y) \in \Pi : F(x, y) = 0 \}.$$

Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ в прямоугольной системе координат Oxy задает окружность единичного радиуса с центром O (рис.3.1,з).

Переход к этому способу описания геометрических фигур базируется на введении системы координат, которая позволяет вместо точек (элементарных геометрических объектов) оперировать с числами (элементарными алгебраическими объектами). В разд.2 подчеркивалось, что введение системы координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками и их координатами (числами или упорядоченными наборами чисел), т.е. соответствие, удовлетворяющее двум условиям:

1) разным точкам множества соответствуют разные наборы координат, отличающиеся хотя бы одной координатой;

2) любому набору координат соответствует некоторая точка.

Введение системы координат позволяет задать любую геометрическую фигуру уравнением, связывающим координаты таким образом, что координаты любой точки, принадлежащей заданной фигуре, удовлетворяют этому уравнению, а координаты точки, не принадлежащей фигуре, не удовлетворяют уравнению. Такой способ описания геометрических фигур применяется в аналитической геометрии.

Рисунки, изображающие геометрические фигуры, в аналитической геометрии играют вспомогательную роль. Аналитическое решение любой геометрической задачи сводится к алгебраическим методам и вычислительным процедурам, при выполнении которых изображения фигур не используются. Такие методы и процедуры без труда переводятся на алгоритмический язык и реализуются на компьютере. Во всех разбираемых ниже примерах иллюстрация геометрическая фигур приводится, но не используется в ходе решения.

3.1. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

3.1.1. Общие уравнения геометрических мест точек

Уравнением множества F точек (уравнением г.м.т.) координатной плоскости называется равенство, связывающее координаты точек, верное для координат точек, принадлежащих множеству F , и неверное для координат точек, не принадлежащих F . Например, уравнение множества в аффинной системе координат Ox_1x_2 имеет вид:

$$F(x_1, x_2) = 0, \quad (3.1)$$

в частности, в прямоугольной системе координат Oxy :

$$F(x, y) = 0,$$

а в полярной системе координат $Or\varphi$:

$$G(r, \varphi) = 0, \quad (3.2)$$

где F и G – некоторые функции двух аргументов.

Уравнения (3.1), (3.2) представляют собой аналитическую запись функциональной зависимости между координатами точек на плоскости, образующих геометрическое место точек. В частных случаях одна из координат может быть выражена через другую, т.е. одна координата задается как явная функция другой координаты. Тогда получается уравнение, разрешенное относительно этой координаты, например:

$$y = f(x), \quad r = g(\varphi).$$

Заметим, что уравнениями вида $y = f(x)$ в прямоугольной системе координат Oxy могут быть заданы графики элементарных функций: степенных, тригонометрических, показательных, логарифмических.

Пример 3.1. Изобразить на координатной плоскости Oxy (в прямоугольной системе координат) множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим уравнениям:

- а) $x - y = 0$; б) $x^2 - y^2 = 0$; в) $x^2 + y^2 = 0$;
 г) $x^2 + y^2 - 1 = 0$; д) $|x| - x = 0$; е) $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

□ а) Уравнению $x - y = 0$ удовлетворяют только те точки плоскости, у которых равны абсциссы и ординаты ($y = x$). Эти точки лежат на биссектрисах I и III координатных углов (рис.3.1,а).

б) Разлагая левую часть уравнения на множители, получаем уравнение $(x - y) \cdot (x + y) = 0$, которое равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} y = x, \\ y = -x. \end{cases}$$

Первому уравнению отвечают биссектрисы нечетных координатных углов, второму – биссектрисы четных координатных углов. Следовательно, заданному уравнению удовлетворяют только те точки, которые принадлежат хотя бы одной из указанных биссектрис (рис.3.1,б).

в) Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

которая определяет единственную точку O (начало координат) на плоскости (рис.3.1,в).

г) Выражение $x^2 + y^2$ есть квадрат расстояния от точки (x, y) до начала координат. Поэтому уравнению $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (или $x^2 + y^2 = 1$) удовлетворяют только те точки, которые удалены от точки O на расстояние, равное 1. Это множество точек является окружностью с центром в начале координат и радиусом 1 (рис.3.1,г).

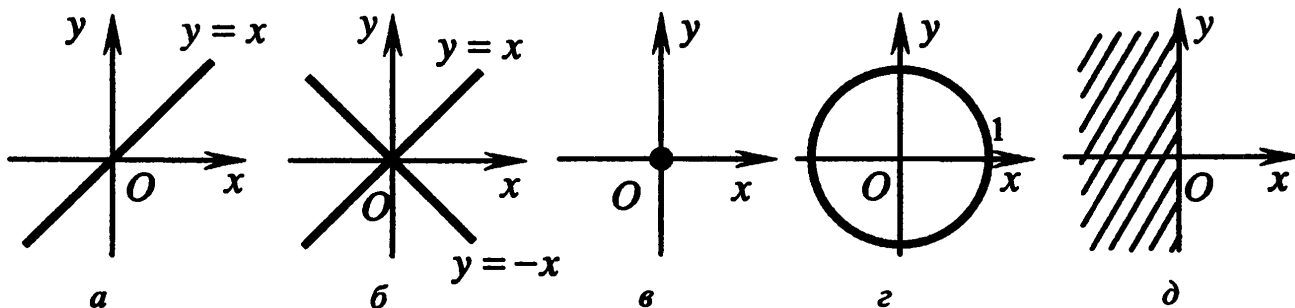


Рис.3.1

д) Уравнению $|x| + x = 0$ удовлетворяет каждая точка с неположительной абсциссой. Следовательно, множество решений этого уравнения представляет собой полуплоскость $x \leq 0$, ограниченную осью ординат (рис.3.1,д).

е) Уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не имеет действительных решений, поэтому на координатной плоскости нет точек, удовлетворяющих этому уравнению. ■

Пример 3.2. На координатной плоскости Oxy (в прямоугольной системе координат) отмечены точки $A(2, 0)$ и $B(0, 4)$. Вывести уравнения заданных множеств:

а) прямой AB (рис.3.2,а);

б) серединного перпендикуляра к отрезку AB (рис.3.2,б);

в) окружности с диаметром AB (рис.3.2,в).

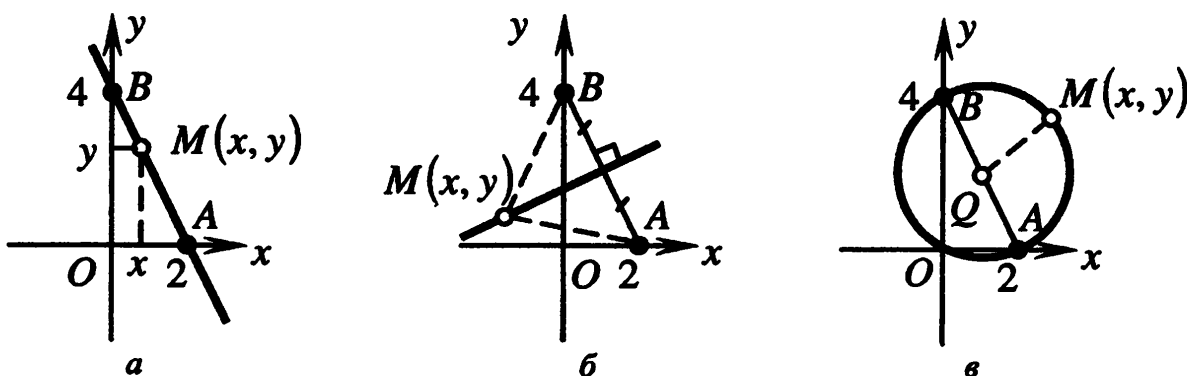


Рис.3.2

□ а) Точка $M(x, y)$ принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда ее радиус-вектор \overline{OM} удовлетворяет условию $\overline{OM} = t \cdot \overline{OA} + (1-t) \cdot \overline{OB}$, где t – некоторое действительное число (см. разд.1.6.1). Записывая это векторное равенство в координатной форме, получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot t, \\ y = 4 - 4 \cdot t. \end{cases}$$

Исключая параметр t из этой системы (например, подставляя во второе уравнение $t = \frac{x}{2}$), приходим к уравнению $y = 4 - 2 \cdot x$ или $2 \cdot x + y - 4 = 0$.

б) Пусть $M(x, y)$ произвольная точка плоскости. Эта точка принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB тогда и только тогда, когда $MA = MB$. Записывая это равенство в координатной форме, получаем

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}.$$

Возводя в квадрат и приводя подобные члены, приходим к уравнению $x - 2 \cdot y + 3 = 0$.

в) Найдем радиус заданной окружности

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(2-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{5}$$

и координаты центра Q окружности – середины отрезка AB : $Q(1, 2)$, так как $Q\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$ (см. разд.2.1.1). По определению точка $M(x, y)$ принадлежит этой окружности тогда и только тогда, когда $MQ = r$. Записывая это равенство в координатной форме, получаем

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Возводя в квадрат и перенося все члены в левую часть равенства, получаем

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 5 = 0. \blacksquare$$

Пример 3.3. Изобразить на плоскости в полярной системе координат $O\rho\varphi$ множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим уравнениям:

- а) $r = \varphi$ (спираль Архимеда); б) $r = 1 + \cos \varphi$ (кардиоида);
 в) $r^2 = \cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли).

□ а) Построение выполняется по точкам при $0 \leq \varphi < 2\pi$. Далее учитывается, что при каждом полном обороте полярный радиус увеличивается на 2π (рис.3.3,а).

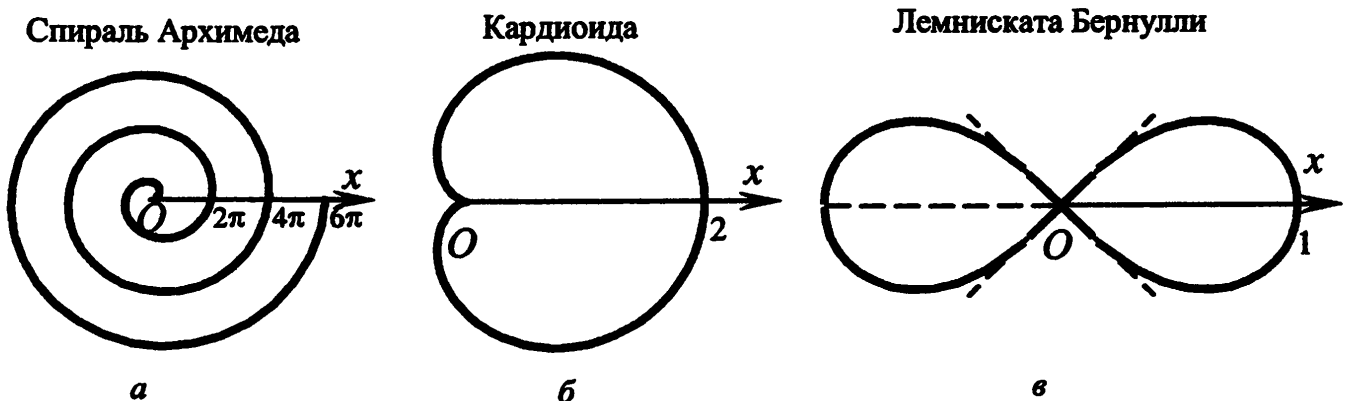


Рис.3.3

б) Построение выполняется по точкам при $0 \leq \varphi \leq \pi$, а затем продолжается симметрично полярной оси, так как замена φ на $-\varphi$ не изменяет уравнения (рис.3.3,б).

в) Построение выполняется по точкам при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, а затем продолжается симметрично полярной оси и полюса O (рис.3.3,в). ■

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ И ОБЪЕДИНЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК

Рассмотрим основные операции с множествами точек на координатной плоскости, заданными своими уравнениями.

Пусть множества F и G в аффинной системе координат Ox_1x_2 заданы общими уравнениями $F(x_1, x_2) = 0$ и $G(x_1, x_2) = 0$ соответственно.

Пересечение $F \cap G$ множеств F и G состоит из точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x_1, x_2) = 0, \\ G(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Можно составить одно уравнение, равносильное этой системе, например:

$$(F(x_1, x_2))^2 + (G(x_1, x_2))^2 = 0.$$

Объединение $F \cup G$ множеств F и G состоит из точек, координаты которых удовлетворяют совокупности уравнений

$$\begin{cases} F(x_1, x_2) = 0, \\ G(x_1, x_2) = 0, \end{cases}$$

равносильной одному уравнению, например:

$$F(x_1, x_2) \cdot G(x_1, x_2) = 0.$$

Включение $F \subset G$ с алгебраической точки зрения означает, что уравнение $G(x_1, x_2) = 0$ является следствием уравнения $F(x_1, x_2) = 0$, т.е.

$$F(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow G(x_1, x_2) = 0.$$

Равенство $F = G$ означает, что уравнения $F(x_1, x_2) = 0$ и $G(x_1, x_2) = 0$ равносильны (эквивалентны), т.е.

$$F(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow G(x_1, x_2) = 0.$$

В частности, равносильные уравнения, описывающие одно и то же геометрическое место точек, получаются при тождественных алгебраических преобразованиях равенств, например, при умножении обеих частей уравнения на отличное от нуля число, при приведении подобных членов, при переносе членов из одной части уравнения в другую с изменением знака на противоположный и т.п.

Полученные соотношения, сводящие операции с множествами на плоскости к алгебраическим операциям с уравнениями этих геометрических мест точек, не зависят от выбора системы координат. Например, в прямоугольной системе координат Oxy аналогичные соотношения получаем, полагая $x_1 = x$, $x_2 = y$, а в полярной системе координат $O\rho\varphi$ при $x_1 = r$, $x_2 = \varphi$.

3.1.2. Параметрические уравнения геометрических мест точек

Функциональная зависимость между координатами точек плоскости, например в прямоугольной системе координат Oxy , может быть задана в **параметрической форме**, в которой обе координаты выражаются в виде функций вспомогательной переменной, называемой **параметром**:

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} \quad (3.3)$$

где t – параметр, принимающий действительные значения. Систему (3.3) называют **параметрическим уравнением** геометрического места точек.

Пример 3.4. Изобразить на координатной плоскости Oxy (в прямоугольной системе координат) множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим параметрическим уравнениям:

$$\text{а) } \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

□ а) Исключим из заданной системы уравнений параметр t . Возведя обе части каждого уравнения в квадрат и сложив почленно результаты, получим уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$ (см. пример 3.1,г). Параметром t служит величина угла поворота радиус-вектора изображающей точки, измеряемого от положительного направления оси абсцисс (рис.3.4,а).

б) Уравнения задают **циклоиду** – линию, которую описывает точка, принадлежащая окружности при качении этой окружности (без проскальзывания) по прямой (оси абсцисс). Построение одной арки циклоиды выполняется по точкам при $0 \leq t \leq 2\pi$. Затем эта арка "переносится" вдоль оси абсцисс (рис.3.4,б). Параметром t служит величина угла поворота радиуса катящейся окружности.

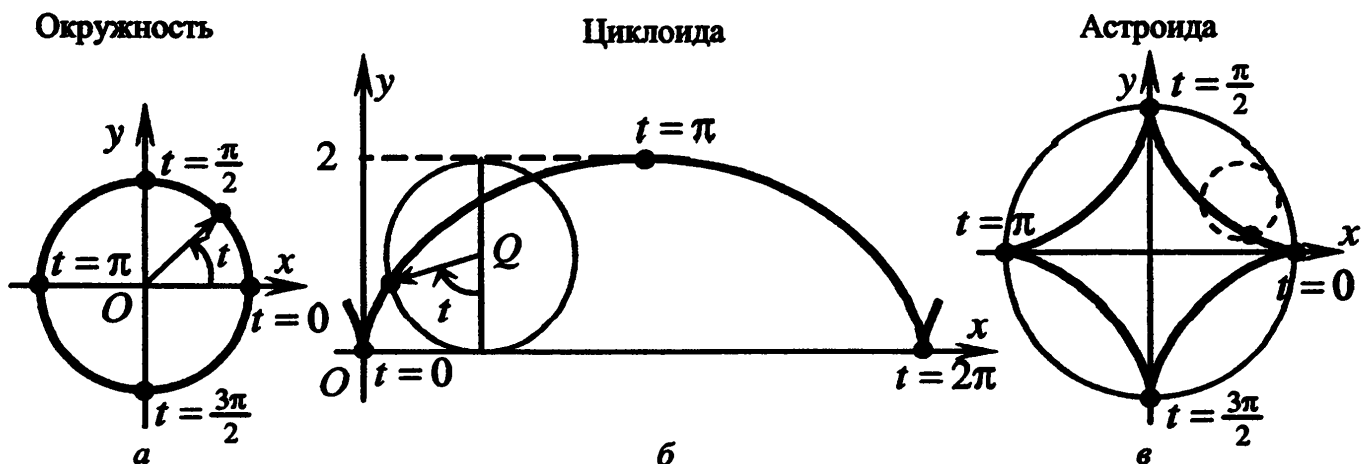


Рис.3.4

в) Уравнения задают **астроиду (гипоциклоиду)** – линию, которую описывает точка, принадлежащая окружности при качении этой окружности (без проскальзывания) по другой неподвижной окружности, касаясь ее

внутренним образом. Астроида и обе окружности изображены на рис.3.4,в (астроида полужирной линией, неподвижная окружность сплошной, а подвижная – штриховой). Построение выполняется по точкам при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, а затем продолжается симметрично координатным осям. ■

3.1.3. Алгебраические уравнения линий на плоскости

Напомним, что *многочленом степени n одной переменной x* называется выражение вида

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0,$$

где a_0, a_1, \dots, a_n – действительные числа (*коэффициенты многочлена*), $a_n \neq 0$ – *старший коэффициент*, a_0 – *свободный член*. Степень многочлена обозначается $\deg p(x) = n$.

Многочленом двух переменных x_1, x_2 называется выражение вида

$$p(x_1, x_2) = a_1 \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{l_1} + a_2 \cdot x_1^{k_2} \cdot x_2^{l_2} + \dots + a_m \cdot x_1^{k_m} \cdot x_2^{l_m},$$

где a_1, a_2, \dots, a_m – действительные числа (*коэффициенты многочлена*), $k_1, \dots, k_m, l_1, \dots, l_m$ – целые неотрицательные числа. Число $\deg p(x_1, x_2) = \max\{k_1 + l_1; k_2 + l_2; \dots; k_m + l_m\}$ называется *степенью многочлена*.

Алгебраической линией на плоскости называется множество точек, которое в какой-либо аффинной системе координат Ox_1x_2 может быть задано уравнением вида

$$p(x_1, x_2) = 0, \tag{3.4}$$

где $p(x_1, x_2)$ – многочлен двух переменных x_1, x_2 .

Уравнение вида (3.4) называется *алгебраическим уравнением с двумя неизвестными*. *Степенью уравнения* (3.4) называется степень многочлена $p(x_1, x_2)$. Одна и та же линия может быть задана уравнением вида (3.4) с многочленами разных степеней. *Порядком* алгебраической линии называется наименьшая из степеней этих многочленов.

Всякую неалгебраическую линию называют *трансцендентной*.

В примере 3.1,а,б,в,г,е – линии алгебраические: а – первого порядка, б,в,г,е – второго порядка. Примером трансцендентной линии служит синусоида, т.е. график функции $y = \sin x$. Эту линию нельзя задать уравнением вида (3.4).

Теорема 3.1 (об инвариантности порядка алгебраической линии).

Если в некоторой аффинной системе координат на плоскости линия задана уравнением (3.4), то и в любой другой аффинной системе координат эта линия задается уравнением того же вида (3.4) и той же степени.

Действительно, пусть в аффинной системе координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ уравнение имеет вид (3.4):

$$a_1 \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{l_1} + a_2 \cdot x_1^{k_2} \cdot x_2^{l_2} + \dots + a_m \cdot x_1^{k_m} \cdot x_2^{l_m} = 0.$$

Получим уравнение этой линии в другой (новой) аффинной системе координат $O'e'_1e'_2$. Старые координаты точки связаны с новыми ее координатами выражениями (2.8):

$$\begin{cases} x_1 = s_1 + s_{11} \cdot x'_1 + s_{12} \cdot x'_2, \\ x_2 = s_2 + s_{21} \cdot x'_1 + s_{22} \cdot x'_2, \end{cases}$$

где s_1, s_2 – координаты вектора переноса начала координат $\bar{s} = \overline{OO'}$, а

$s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}$ – элементы матрицы перехода $\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ от старого

базиса $(\bar{e}) = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2)$ к новому $(\bar{e}') = (\bar{e}'_1 \ \bar{e}'_2)$. Подставим эти выражения в

одночлен $a_1 \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{l_1}$:

$$a_1 \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{l_1} = a_1 \cdot (s_1 + s_{11} \cdot x'_1 + s_{12} \cdot x'_2)^{k_1} \cdot (s_2 + s_{21} \cdot x'_1 + s_{22} \cdot x'_2)^{l_1}.$$

Раскрывая скобки, получаем многочлен двух переменных x'_1, x'_2 , степень которого не больше, чем $(k_1 + l_1)$. Аналогичные многочлены получим из других одночленов, входящих в левую часть (3.4). Сложив эти многочлены, получим многочлен $\tilde{p}(x'_1, x'_2)$, степень которого не превосходит степени исходного многочлена $p(x_1, x_2)$: $\deg \tilde{p} \leq \deg p$. Таким образом, при замене системы координат порядок алгебраической линии не увеличивается. Но он не может и уменьшиться, так как если порядок уменьшится при переходе к новой системе координат, то он должен увеличиться при обратном переходе к старой системе координат. Следовательно, порядок алгебраической линии остается неизменным в любой аффинной системе координат (говорят, что порядок алгебраической линии является *инвариантом*). Теорема доказана.

В аналитической геометрии на плоскости изучаются:

– **алгебраические линии первого порядка**, описываемые алгебраическим уравнением первой степени с двумя неизвестными:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 = 0;$$

– **алгебраические линии второго порядка**, описываемые алгебраическим уравнением второй степени с двумя неизвестными:

$$a_1 \cdot x_1^2 + a_2 \cdot x_1 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_2^2 + a_4 \cdot x_1 + a_5 \cdot x_2 + a_6 = 0.$$

З а м е ч а н и я 3.1.

1. Теорема 3.1 фактически выражает свойство многочленов: *при линейной невырожденной замене переменных*

$$\begin{cases} x_1 = s_1 + s_{11} \cdot x'_1 + s_{12} \cdot x'_2, \\ x_2 = s_2 + s_{21} \cdot x'_1 + s_{22} \cdot x'_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad x = s + S \cdot x',$$

где $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$, $\det S \neq 0$, степень многочлена $p(x_1, x_2)$ не изменяется.

Действительно, преобразование уравнения $p(x_1, x_2) = 0$ при переходе от одной системы координат к другой соответствует линейной невырожденной замене переменных x_1, x_2 многочлена $p(x_1, x_2)$ в левой части уравнения.

2. Алгебраическое уравнение (3.4) может не иметь действительных решений. Например, на плоскости Ox_1x_2 нет точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$. Однако в области комплексных чисел, согласно основной теореме алгебры [3,8,10], любое алгебраическое уравнение имеет решения. Поэтому каждое алгебраическое уравнение (3.4) $p(z_1, z_2) = 0$, где $z_1 = x_1 + i \cdot y_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 = x_2 + i \cdot y_2 \in \mathbb{C}$, задает некоторую алгебраическую линию на двумерной комплексной плоскости \mathbb{C}^2 (см. п.2 замечаний 2.9). Если все точки этой линии вещественные (действительные), т.е. $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, а $y_1 = y_2 = 0$, то линию называют **вещественной (действительной)**. В противном случае линию называют **мнимой**.

3. **Алгебраическими неравенствами с двумя неизвестными** называются неравенства вида

$$p(x_1, x_2) \geq 0, \quad p(x_1, x_2) \leq 0, \quad p(x_1, x_2) > 0, \quad p(x_1, x_2) < 0,$$

где $p(x_1, x_2)$ – многочлен двух переменных x_1, x_2 . **Степенью алгебраического неравенства** называется степень многочлена $p(x_1, x_2)$.

4. Многочлены первой степени и алгебраические уравнения (неравенства) первой степени называются **линейными**.

5. Многочлен второй степени

$$p(x_1, x_2) = a_{11} \cdot x_1^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2^2 + 2 \cdot a_1 \cdot x_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x_2 + a_0$$

называется также **квадратичной функцией двух переменных**; многочлен $a_{11} \cdot x_1^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2^2$ называется **квадратичной формой (квадратичной частью функции)**, многочлен $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2$ – **линейной формой (линейной частью функции)**, коэффициент a_0 – **свободным членом**. По сравнению со стандартной записью многочлена некоторые коэффициенты квадратичной функции удвоены для удобства выполнения алгебраических преобразований.

6. Квадратичную функцию можно записать:

а) в матричном виде

$$p(x) = p(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{x}^T \cdot P \cdot \hat{x},$$

где $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной функции; $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ –

расширенный (дополненный единицей) *столбец переменных*;

б) выделяя квадратичную и линейную части:

$$\begin{aligned} p(x) = p(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_0 = \\ &= x^T \cdot A \cdot x + 2 \cdot a^T \cdot x + a_0, \end{aligned}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы; $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ – столбец

коэффициентов линейной формы; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – столбец переменных.

7. Многочлены второй степени и алгебраические уравнения (неравенства) второй степени называются *квадратичными* (*квадратными*).

8. Линии, задаваемые системой алгебраических уравнений и неравенств, называются *полуалгебраическими*. Например, уравнение $y = |x|$ задает на координатной плоскости Oxy полуалгебраическую линию:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

9. Теорема 3.1, разумеется, справедлива для прямоугольных систем координат на плоскости. Напомним, что преобразования прямоугольных систем координат (см. разд.2.2.3) являются ортогональными (см. п.5 замечаний 2.3). Поэтому соответствующие этим преобразованиям линейные замены переменных $x = s + S \cdot x'$ (см. п.1) с ортогональной матрицей S ($S^T = S^{-1}$) называются *ортогональными* (*неоднородными* при $s \neq 0$ или *однородными* при $s = 0$). Далее, как правило, будут рассматриваться уравнения, записанные в прямоугольной системе координат Oxy .

3.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (ПРЯМЫЕ НА ПЛОСКОСТИ)

3.2.1. Уравнения прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Ненулевой вектор \vec{n} , перпендикулярный заданной прямой, называется **нормальным вектором** (или, короче, **нормалью**) для этой прямой.

Пусть на координатной плоскости Oxy (в прямоугольной системе координат) заданы:

а) точка $M_0(x_0, y_0)$;

б) ненулевой вектор $\vec{n} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}$ (рис.3.5,а).

Требуется составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору \vec{n} .

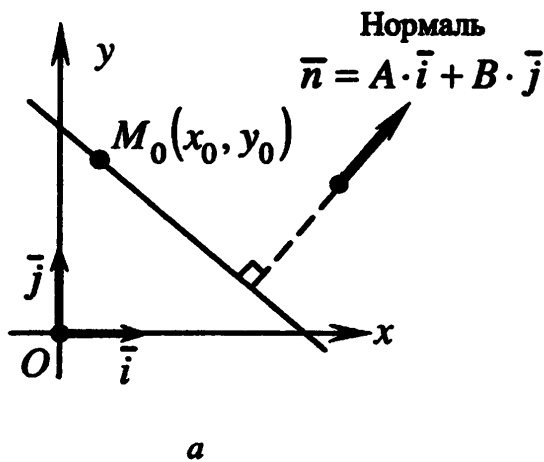


Рис.3.5

Выберем на плоскости произвольную точку $M(x, y)$. Обозначим $\vec{r} = \overline{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, $\vec{r}_0 = \overline{OM_0} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j}$ – радиус-векторы точек $M(x, y)$ и $M_0(x_0, y_0)$. Точка M принадлежит заданной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и \vec{n} перпендикулярны (рис.3.5,б). Условие ортогональности запишем при помощи скалярного произведения (см. разд.1.6.2):

$$(\overline{M_0M}, \vec{n}) = 0.$$

Учитывая, что $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, получаем **векторное уравнение прямой**:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0. \tag{3.5}$$

Это уравнение можно записать в другой форме. Преобразуем левую часть $(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{n}) = (\bar{r}, \bar{n}) - (\bar{r}_0, \bar{n})$, используя свойства скалярного произведения (см. разд.1.4.2). Обозначая $c = (\bar{r}_0, \bar{n})$, получаем уравнение $(\bar{r}, \bar{n}) - c = 0$ или

$$(\bar{r}, \bar{n}) = c, \quad (3.6)$$

выражающее постоянство проекций на нормаль \bar{n} радиус-векторов точек, принадлежащих прямой.

Получим координатную форму записи векторного уравнения прямой (3.5). Так как $\bar{r} - \bar{r}_0 = (x - x_0) \cdot \bar{i} + (y - y_0) \cdot \bar{j}$, $\bar{n} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j}$, по формуле (1.9) находим $(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{n}) = (x - x_0) \cdot A + (y - y_0) \cdot B = 0$ или

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0. \quad (3.7)$$

Полученное соотношение (3.7) позволяет по координатам точки $M_0(x_0, y_0)$ и координатам A, B нормали \bar{n} записать уравнение прямой без промежуточных вычислений.

Обозначив $C = -A \cdot x_0 - B \cdot y_0$, получим уравнение

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0, \quad (3.8)$$

которое называется **общим уравнением прямой** на плоскости. Поскольку коэффициенты A и B не равны нулю одновременно (это координаты ненулевого вектора \bar{n}), уравнение (3.8) является алгебраическим уравнением первой степени, т.е. линейным уравнением с двумя неизвестными. Следовательно, прямая является алгебраической линией первого порядка.

Проводя рассуждения в обратном порядке, делаем вывод о том, что линейное уравнение (3.8) задает на координатной плоскости прямую. Полученные выводы сделаны для прямоугольной системы координат, но, учитывая теорему 3.1 (см. разд.3.1.3), они переносятся (без изменений) и на любую аффинную систему координат.

Теорема 3.2 (об алгебраической линии первого порядка). *Всякое уравнение первой степени с двумя неизвестными задает в аффинной системе координат прямую, и наоборот, всякая прямая в любой аффинной системе координат может быть задана уравнением первой степени с двумя неизвестными. Другими словами, алгебраическая линия первого порядка есть прямая.*

З а м е ч а н и я 3.2.

1. При составлении общего уравнения прямой нормаль выбирается неоднозначно: можно выбрать любую, отличную от нуля, длину нормали \bar{n} , а также одно из двух возможных направлений (противоположный вектор $(-\bar{n})$ также является нормалью). Например, вместо нормали \bar{n} можно взять нормаль $-7 \cdot \bar{n}$, что соответствует умножению обеих частей уравнения (3.8) на число -7 .

2. Если один из коэффициентов уравнения прямой (3.8) равен нулю, общее уравнение прямой (3.8) принимает один из следующих частных видов:

а) если $A = 0$, уравнение (3.8) имеет вид $B \cdot y + C = 0$ или $y = -\frac{C}{B}$ – уравнение прямой, параллельной оси абсцисс (рис.3.6,а); при $C = 0$ прямая $y = 0$ совпадает с осью Ox ;

б) если $B = 0$, уравнение (3.8) имеет вид $A \cdot x + C = 0$ или $x = -\frac{C}{A}$ – уравнение прямой, параллельной оси ординат (рис.3.6,б); при $C = 0$ прямая $x = 0$ совпадает с осью Oy ;

в) если $C = 0$, уравнение (3.8) имеет вид $A \cdot x + B \cdot y = 0$ – уравнение прямой, проходящей через начало координат (рис.3.6,в).

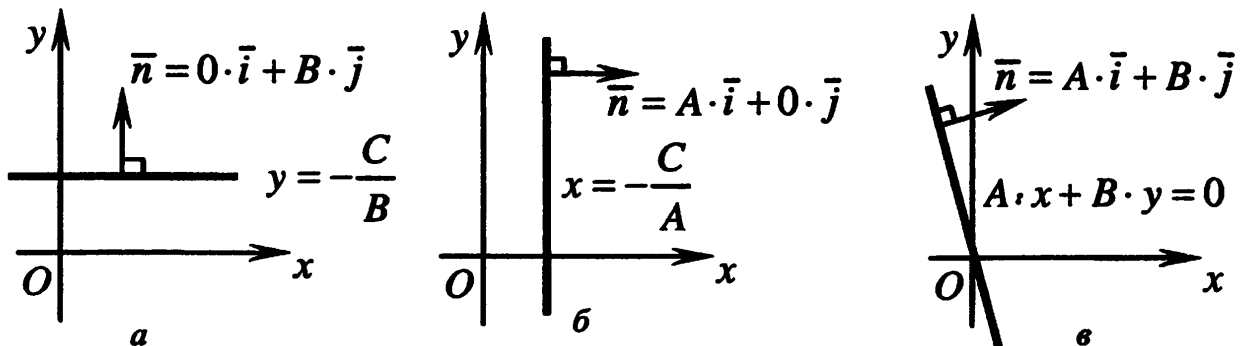


Рис.3.6

3. Нормаль $\bar{n} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j}$ к прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ совпадает с градиентом функции $f(x, y) = A \cdot x + B \cdot y + C$:

$$\text{grad } f(x, y) = \nabla f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \bar{j} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j} = \bar{n}.$$

В курсе математического анализа [19] доказывается, что градиент направлен в сторону наискорейшего возрастания функции в данной точке.

4. Прямая $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ разбивает плоскость на две полуплоскости (рис.3.7,а): положительную, координаты всех точек которой удовлетворяют неравенству $A \cdot x + B \cdot y + C \geq 0$, и отрицательную, для точек которой $A \cdot x + B \cdot y + C \leq 0$. Нормаль $\bar{n} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j}$, приложенная к любой точке прямой, принадлежит положительной полуплоскости. Другими словами, нормаль, приложенная к произвольной точке прямой, указывает на положительную полуплоскость (рис.3.7,а)

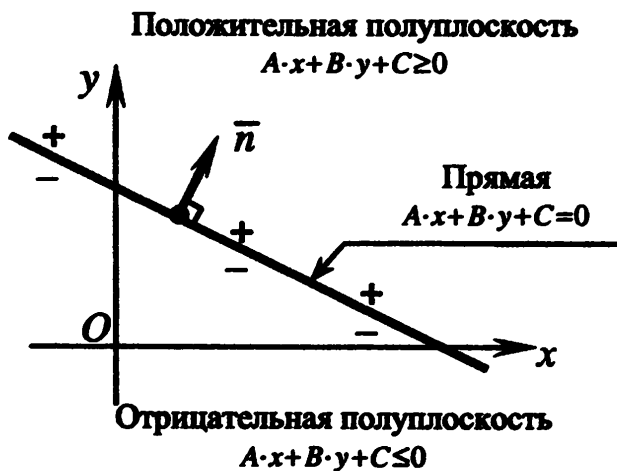
Действительно, обозначим через $p(x, y) = A \cdot x + B \cdot y + C$ – многочлен первой степени от двух переменных x, y . Тогда для любой точки $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей прямой (3.8), справедливо $p(x_0, y_0) = 0$. Пред-

ставим значение многочлена $p(x, y)$ в произвольной точке $M^*(x^*, y^*)$ плоскости в виде скалярного произведения:

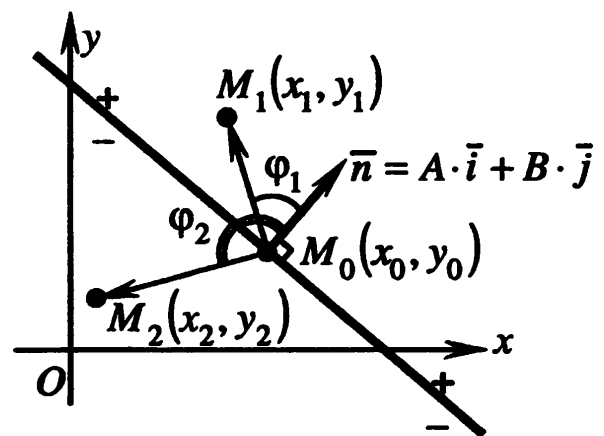
$$p(x^*, y^*) = p(x^*, y^*) - \underbrace{p(x_0, y_0)}_{=0} = A \cdot x^* + B \cdot y^* + C - \underbrace{(A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C)}_{=0} =$$

$$= A \cdot (x^* - x_0) + B \cdot (y^* - y_0) = \left(\overline{M_0 M^*}, \bar{n} \right) = \left| \overline{M_0 M^*} \right| \cdot |\bar{n}| \cdot \cos \varphi,$$

где $\bar{n} = (A \ B)^T$ – нормаль к прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$; $M_0(x_0, y_0)$ – точка, принадлежащая этой прямой. Знак выражения $p(x, y)$ определяется величиной угла φ между нормалью \bar{n} и вектором $\overline{M_0 M^*}$. Например, для точки $M_1(x_1, y_1)$ угол φ_1 острый (рис.3.7,б), поэтому $p(x_1, y_1) > 0$, а для точки $M_2(x_2, y_2)$ угол φ_2 тупой (рис.3.7,б), поэтому $p(x_2, y_2) < 0$. Следовательно, координаты любой точки $M^*(x^*, y^*)$, принадлежащей полуплоскости, на которую указывает нормаль, удовлетворяют неравенству $A \cdot x^* + B \cdot y^* + C \geq 0$, а координаты точек $M^*(x^*, y^*)$ другой полуплоскости – неравенству $A \cdot x^* + B \cdot y^* + C \leq 0$.



а



б

Рис.3.7

5. Абсолютное значение $|A \cdot x + B \cdot y + C|$ пропорционально расстоянию от точки $M(x, y)$ до прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, т.е. отношение расстояний от точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ до прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ равно отношению $\frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C|}{|A \cdot x_2 + B \cdot y_2 + C|}$.

Действительно, в п.3 получено представление значений линейного трехчлена $p(x, y) = A \cdot x + B \cdot y + C$ в виде скалярного произведения, которое

можно выразить через алгебраическое значение длины ортогональной проекции (см. разд.1.4.1):

$$p(x^*, y^*) = \left(\overline{M_0 M^*}, \bar{n} \right) = np_{\bar{n}} \overline{M_0 M^*} \cdot |\bar{n}|.$$

Запишем отношение значений линейного трехчлена $p(x, y)$ для двух точек

$$M_1(x_1, y_1) \text{ и } M_2(x_2, y_2): \frac{p(x_1, y_1)}{p(x_2, y_2)} = \frac{np_{\bar{n}} \overline{M_0 M_1} \cdot |\bar{n}|}{np_{\bar{n}} \overline{M_0 M_2} \cdot |\bar{n}|} = \frac{np_{\bar{n}} \overline{M_0 M_1}}{np_{\bar{n}} \overline{M_0 M_2}}. \text{ Учиты-}$$

вая, что абсолютная величина $\left| np_{\bar{n}} \overline{M_0 M^*} \right|$ равна расстоянию от точки M^* до прямой, получаем искомое отношение

$$\frac{\left| np_{\bar{n}} \overline{M_0 M_1} \right|}{\left| np_{\bar{n}} \overline{M_0 M_2} \right|} = \frac{\left| p(x_1, y_1) \right|}{\left| p(x_2, y_2) \right|} = \frac{\left| A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \right|}{\left| A \cdot x_2 + B \cdot y_2 + C \right|}.$$

6. В аффинной системе координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ линейное уравнение $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 = 0$ задает, согласно теореме 3.2, прямую. Выводы, полученные в п.2,3,4,5, остаются справедливыми с тем лишь исключением, что вектор $\bar{n} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2$ не является нормалью.

Пример 3.5. На координатной плоскости Oxy (в прямоугольной системе координат) заданы точки $K(1, 2)$ и $L(5, 0)$. Составить уравнение серединного перпендикуляра к отрезку KL (рис.3.8).

□ Серединный перпендикуляр, по определению, проходит перпендикулярно отрезку KL через его середину. Находим координаты середины M отрезка KL (см. п.3 замечаний 2.1 в разд.2.1.1):

$$M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+0}{2}\right), \text{ т.е. } M(3, 1). \text{ Вектор } \overline{KL} \text{ можно}$$

взять в качестве нормали для серединного перпендикуляра. Находим координаты этого вектора, вычитая из координат его конца соответствующие координаты его начала:

$$\overline{KL} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \bar{n}.$$

Следовательно, уравнение (3.8) искомой прямой имеет вид

$$4 \cdot x - 2 \cdot y + C = 0.$$

Осталось найти величину свободного члена C . Поскольку точка $M(3, 1)$ принадлежит прямой, то ее координаты $x = 3, y = 1$ должны удовлетворять уравнению этой прямой, следовательно, $4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + C = 0$. Отсюда $C = -10$.

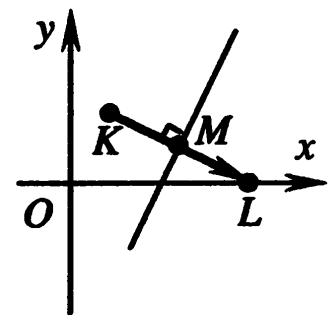


Рис.3.8

Таким образом, серединный перпендикуляр задается уравнением

$$4 \cdot x - 2 \cdot y - 10 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x - y - 5 = 0.$$

Уравнение этой прямой можно было получить в виде (3.7), подставляя координаты нормали $\bar{n} = (4 \ -2)^T$ и точки $M(3, 1)$: $4 \cdot (x - 3) - 2 \cdot (y - 1) = 0$.

Решение задачи получено аналитически без использования графического изображения (рис.3.8). Чертеж в аналитической геометрии служит, как правило, лишь иллюстрацией к решению. ■

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Пусть заданы:

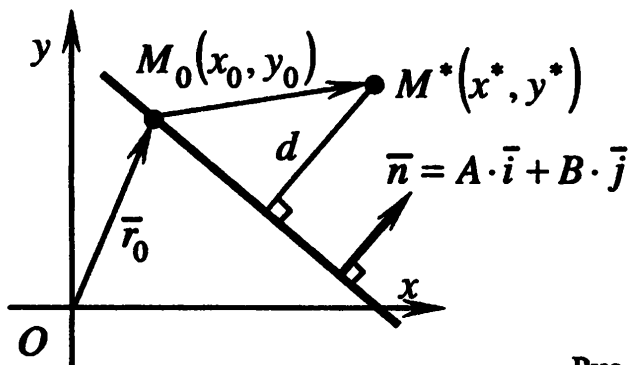
- а) прямая, описываемая общим уравнением (3.8): $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$;
- б) точка $M^*(x^*, y^*)$ на плоскости.

Требуется найти расстояние d от точки до прямой.

Искомое расстояние равняется длине ортогональной проекции вектора $\overline{M_0M^*}$ на направление нормали \bar{n} (рис.3.9):

$$d = \left| \overline{np_{\bar{n}} M_0M^*} \right| = \frac{\left| \left(\bar{n}, \overline{M_0M^*} \right) \right|}{|\bar{n}|},$$

где $M_0(x_0, y_0)$ – любая точка на заданной прямой.



Расстояние d от точки $M^*(x^*, y^*)$ до прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Рис.3.9

Запишем правую часть в координатной форме, выражая скалярное произведение и длину через координаты векторов $\bar{n} = (A \ B)^T$, $\overline{M_0M^*} = (x^* - x_0 \ y^* - y_0)^T$, (см. разд.1.6.2):

$$d = \frac{\left| A \cdot (x^* - x_0) + B \cdot (y^* - y_0) \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\left| A \cdot x^* + B \cdot y^* - (A \cdot x_0 + B \cdot y_0) \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Поскольку координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ удовлетворяют уравнению (3.8), то $A \cdot x_0 + B \cdot y_0 = -C$. Подставляя это выражение, получаем

$$d = \frac{|A \cdot x^* + B \cdot y^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.9)$$

Пример 3.6. На координатной плоскости Oxy (в прямоугольной системе координат) заданы точки $K(1,2)$ и $L(5,0)$. Требуется найти, в каком отношении прямая $m: 3 \cdot x - 4 \cdot y - 10 = 0$ делит отрезок KL .

□ Найдем значения линейного трехчлена $p(x, y) = 3 \cdot x - 4 \cdot y - 10$ в точках $K(1,2)$ и $L(5,0)$:
 $p(1, 2) = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 10 = -15$; $p(5, 0) = 5$. Получили значения разных знаков. Следовательно, точки K и L лежат по разные стороны от прямой m (согласно п.4 замечаний 3.2, эти точки лежат в разных полуплоскостях), т.е. прямая m действительно пересекает отрезок KL (в точке M на рис.3.10). Так как эти значения по абсолютной величине пропорциональны расстояниям от точек K и L до прямой m , то

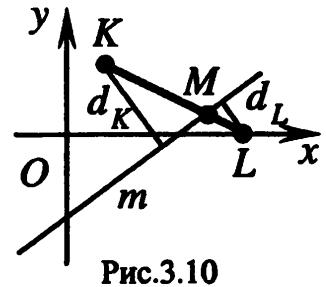


Рис.3.10

$$\frac{KM}{ML} = \frac{|p(1,2)|}{|p(5,0)|} = \frac{|-15|}{|5|} = \frac{3}{1}.$$

Этот же результат можно получить по формуле (3.9). Находим расстояния d_K и d_L от точек K и L до прямой m :

$$d_K = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3; \quad d_L = \frac{|3 \cdot 5 - 4 \cdot 0 - 10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{5} = 1.$$

Следовательно, $\frac{KM}{ML} = \frac{d_K}{d_L} = \frac{3}{1}$. ■

НОРМИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Преобразуем общее уравнение прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ следующим образом. Если свободный член $C < 0$, то разделим обе части на длину нормали $|\bar{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$, а если $C \geq 0$, то разделим на $-|\bar{n}| = -\sqrt{A^2 + B^2}$. Получим уравнение

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \cdot x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \cdot y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

в котором свободный член $\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, в силу описанного выбора знака, положительный. Обозначим его через $-\rho = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$. Коэффициенты при неизвестных являются координатами единичного вектора $\frac{1}{|\bar{n}} \cdot \bar{n}$ или $-\frac{1}{|\bar{n}} \cdot \bar{n}$, и равны направляющим косинусам (см. разд.1.3.5, а также п.9 в разд.1.6.2):

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta - \rho = 0, \quad \rho \geq 0, \quad (3.10)$$

и называется *нормированным уравнением прямой*.

Замечания 3.3.

1. Свободный член ρ нормированного уравнения (3.10) равен расстоянию от начала координат до прямой.

Действительно, по формуле (3.9) находим расстояние d от начала координат $O(0,0)$ до прямой, описываемой уравнением (3.10):

$$d = \frac{|0 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \cos \beta - \rho|}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} = \frac{\rho}{1} = \rho.$$

2. Нормированное уравнение прямой (3.10) можно записать в виде (3.7): $(\bar{r}, \bar{n}) = \rho$, если в качестве нормали \bar{n} выбрать единичный вектор $\bar{n} = \cos \alpha \cdot \bar{i} + \cos \beta \cdot \bar{j}$, так как $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta = (\bar{r}, \bar{n})$. Из двух возможных

единичных нормалей условию $\rho > 0$ отвечает нормаль \bar{n} , направленная к прямой (рис.3.11), если вектор \bar{n} приложить к началу координат. При выборе противоположного вектора $(-\bar{n})$ получилось бы отрицательное значение ρ , которое не допускается в уравнении (3.10).

3. Коэффициенты общего уравнения прямой (3.8) определяются неоднозначно в силу неоднозначного выбора нормали (см. п.1 замечаний 3.2). При составлении нормированного уравнения (3.10) прямой такого

Нормированное уравнение
прямой:
 $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta - \rho = 0, \quad \rho \geq 0.$

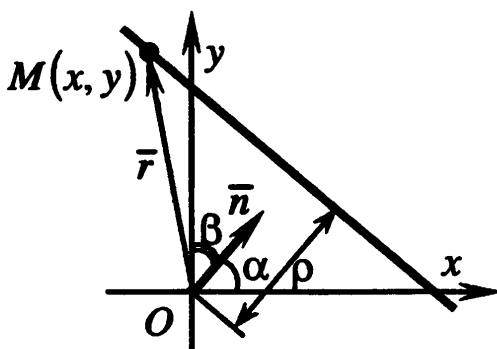


Рис.3.11

произвола нет. Здесь все коэффициенты определены однозначно (при $\rho > 0$) или с точностью до знака (при $\rho = 0$).

4. Нормированное уравнение прямой имеет смысл только в прямоугольной системе координат.

Пример 3.7. На координатной плоскости Oxy (в прямоугольной системе координат) заданы вершины $P(1,2), Q(13,-3), R(5,5)$ треугольника (рис.3.12). Требуется:

а) составить общее и нормированное уравнения прямой, содержащей высоту PH ;

б) найти расстояние от начала координат до прямой PH ;

в) найти расстояние d от точки Q до прямой PH .

□ а) Вектор \overline{RQ} , перпендикулярный прямой PH , является нормалью для этой прямой. Находим координаты вектора $\overline{n} = \overline{RQ}$, вычитая из координат конца координаты его начала:

$$\overline{n} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты при неизвестных в общем уравнении прямой PH равны координатам нормали, поэтому $A=8, B=-8$, т.е. уравнение имеет вид $8 \cdot x - 8 \cdot y + C = 0$. Подберем свободный член C так, чтобы прямая проходила через точку P . Для этого подставим координаты $x=1, y=2$ точки P в уравнение: $8 \cdot 1 - 8 \cdot 2 + C = 0$. Отсюда $C=8$. Таким образом, искомое общее уравнение имеет вид: $8 \cdot x - 8 \cdot y + 8 = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$.

Преобразуем общее уравнение $x - y + 1 = 0$.

Поскольку в этом уравнении $A=1, B=-1, C=1 > 0$, разделим его на

$$-\sqrt{A^2 + B^2} = -\sqrt{1^2 + (-1)^2} = -\sqrt{2}. \quad \text{Получим}$$

нормированное уравнение прямой PH :

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0. \quad \text{Сравнивая с (3.10), нахо-$$

дим направляющие косинусы $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и параметр $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

б) Из п.1 замечаний 3.3 следует, что искомое расстояние от начала координат до прямой PH равно $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

в) Расстояние d от точки $Q(13,-3)$ до прямой PH ($x - y + 1 = 0$) на-

$$\text{ходим по формуле (3.9): } d = \frac{|1 \cdot 13 + (-1) \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{17}{\sqrt{2}}. \quad \blacksquare$$

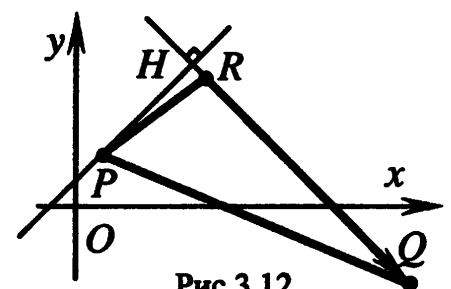


Рис.3.12

3.2.2. Уравнения прямой, проходящей через заданную точку коллинеарно заданному вектору

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Направляющим вектором прямой называется ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой, т.е. принадлежащий или параллельный ей.

Пусть на координатной плоскости Oxy заданы:

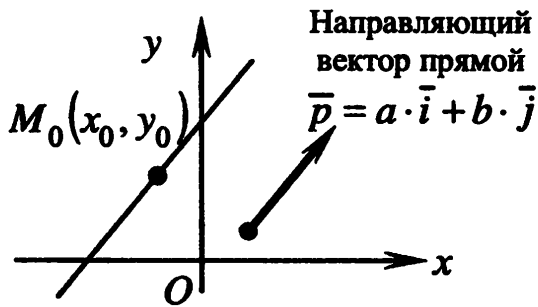


Рис.3.13

а) точка $M_0(x_0, y_0)$;

б) ненулевой вектор $\bar{p} = a \cdot \bar{i} + b \cdot \bar{j}$

(рис.3.13).

Требуется составить уравнение прямой, коллинеарной вектору \bar{p} и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Выберем на прямой произвольную точку $M(x, y)$. Обозначим $\bar{r} = \overline{OM}$, $\bar{r}_0 = \overline{OM_0}$ – радиус-векторы точек $M(x, y)$ и $M_0(x_0, y_0)$ (рис.3.14).

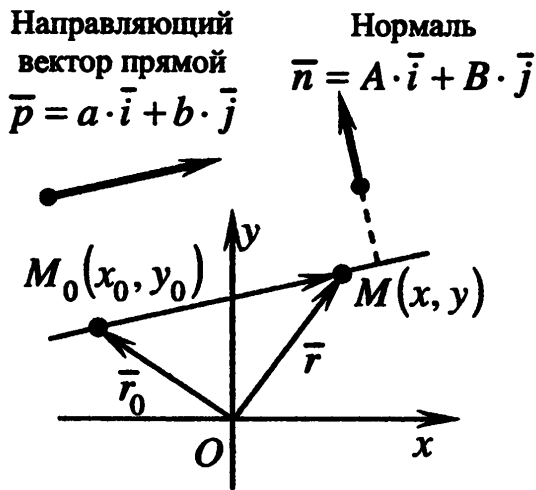


Рис.3.14

Векторное параметрическое уравнение прямой:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t \cdot \bar{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t, \\ y = y_0 + b \cdot t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

Точка M принадлежит заданной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и \bar{p} коллинеарны. Запишем условие коллинеарности:

$\overline{M_0M} = t \cdot \bar{p}$, где t – некоторое действительное число (параметр). Учитывая, что $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$, получим **векторное параметрическое уравнение прямой**:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t \cdot \bar{p}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.11)$$

где \bar{p} – направляющий вектор прямой, а \bar{r}_0 – радиус-вектор точки, принадлежащей прямой.

Координатная форма записи уравнения (3.11) называется *параметрическим уравнением прямой*

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t, \\ y = y_0 + b \cdot t, \end{cases} \quad t \in R, \quad (3.12)$$

где a, b – координаты направляющего вектора \vec{p} прямой. Параметр t в уравнениях (3.11), (3.12) имеет следующий *геометрический смысл*: величина t пропорциональна расстоянию от начальной точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x_0 + a \cdot t, y_0 + b \cdot t)$. *Физический смысл* параметра t в параметрических уравнениях (3.11), (3.12) – это время при равномерном и прямолинейном движении точки $M(x, y)$ по прямой. При $t=0$ точка $M(x, y)$ совпадает с начальной точкой M_0 , при возрастании t движение происходит в направлении, определяемым направляющим вектором \vec{p} .

КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Выразим параметр t из каждого уравнения системы (3.12):

$$\frac{x - x_0}{a} = t = \frac{y - y_0}{b}, \text{ а затем исключим этот параметр:}$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad a^2 + b^2 \neq 0. \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) называется *каноническим уравнением прямой*. В этом уравнении коэффициенты a, b не равны нулю одновременно, так как это координаты направляющего вектора прямой.

З а м е ч а н и я 3.4.

1. Если один из знаменателей дробей в (3.13) равен нулю, то считается, что соответствующий числитель дроби равен нулю:

каноническое уравнение $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{b}$ – это уравнение $x = x_0$ пря-

мой, параллельной оси ординат (рис.3.15,а);

каноническое уравнение $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{0}$ – это уравнение $y = y_0$ прямой, параллельной оси абсцисс (рис.3.15,б).

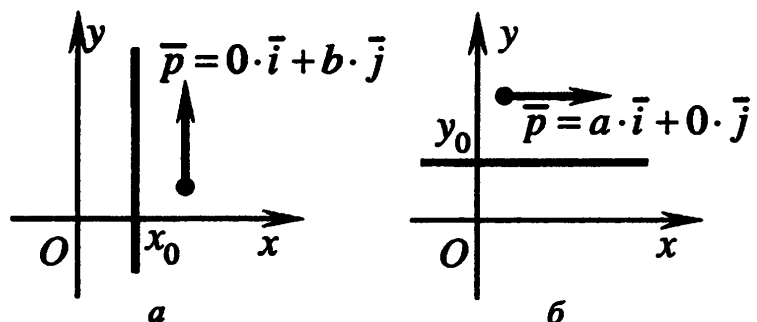


Рис.3.15

2. Поскольку направляющий вектор $\vec{p} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$ коллинеарен прямой, а нормаль $\vec{n} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}$ ей перпендикулярна, то векторы \vec{p} и \vec{n} ортогональны. Следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$(\vec{p}, \vec{n}) = a \cdot A + b \cdot B = 0,$$

т.е. координаты направляющего вектора прямой и ее нормали связаны однородным уравнением: $a \cdot A + b \cdot B = 0$. Подставим, например, решение $A = -b$, $B = a$ этого уравнения в общее уравнение прямой (3.7):

$$-b \cdot (x - x_0) + a \cdot (y - y_0) = 0.$$

Это соотношение позволяет по координатам направляющего вектора и координатам точки $M_0(x_0, y_0)$ записать уравнение прямой без промежуточных вычислений.

3. Направляющий вектор \vec{p} прямой определяется неоднозначно. Например, любой ненулевой вектор $\lambda \cdot \vec{p}$, где $\lambda \in R$, также является направляющим вектором для той же прямой.

4. Для перехода от общего уравнения прямой (3.8) $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ к каноническому (3.13) нужно выполнить следующие действия:

1) найти любое решение (x_0, y_0) уравнения $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, определяя тем самым координаты точки $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей прямой;

2) найти любое ненулевое решение (a, b) однородного уравнения $A \cdot a + B \cdot b = 0$, определяя тем самым координаты a, b направляющего вектора \vec{p} , в частности, можно взять $a = B$, $b = -A$;

3) записать каноническое уравнение (3.13).

5. Чтобы перейти от канонического уравнения к общему, достаточно перенести все члены уравнения (3.13) в левую часть:

$$\frac{x - x_0}{a} - \frac{y - y_0}{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot x - \frac{1}{b} \cdot y + \frac{y_0}{b} - \frac{x_0}{a} = 0.$$

Полученное уравнение (при $a \neq 0$, $b \neq 0$) имеет вид (3.8) с $A = \frac{1}{a}$, $B = -\frac{1}{b}$,

$$C = \frac{y_0}{b} - \frac{x_0}{a}.$$

6. Чтобы перейти от канонического уравнения к параметрическому, следует приравнять левую и правую части уравнения (3.13) параметру t и записать полученное двойное равенство в виде системы (3.12):

$$\frac{x - x_0}{a} = t = \frac{y - y_0}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t, \\ y = y_0 + b \cdot t, \end{cases} \quad t \in R.$$

7. Параметрическое (3.12) и каноническое (3.13) уравнения прямой, полученные в прямоугольной системе координат, имеют тот же вид в любой

другой аффинной системе координат. Геометрический смысл коэффициентов в уравнениях остается прежним.

Пример 3.8. На координатной плоскости Oxy (в прямоугольной системе координат) заданы прямая $l: x - 3 \cdot y + 3 = 0$ и точка $M(5, 6)$ (рис.3.16). Требуется:

а) составить параметрическое уравнение прямой m , проходящей через точку M перпендикулярно заданной прямой;

б) найти ортогональную проекцию M_l точки M на прямую l ;

в) найти координаты точки M' , симметричной точке M относительно прямой l .

□ а) Нормаль \vec{n} к прямой l является направляющим вектором \vec{p} для прямой m . Координаты нормали определяем по общему уравнению прямой $l: \vec{n} = 1 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}$, тогда $\vec{p} = 1 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}$, $x_0 = 5$, $y_0 = 6$. Составляем параметрическое уравнение (3.12) прямой m :

$$m: \begin{cases} x = 5 + 1 \cdot t, \\ y = 6 + (-3) \cdot t, \end{cases} \quad t \in R.$$

б) Проекция M_l точки M является точкой пересечения прямых m и l . Найдем ее координаты. Для этого подставляем в уравнение прямой $l: x - 3 \cdot y + 3 = 0$ выражения координат $x = 5 + t$, $y = 6 - 3 \cdot t$ из параметрического уравнения прямой m . Получим уравнение

$$\underbrace{5+t}_x - 3 \cdot \underbrace{(6-3 \cdot t)}_y + 3 = 0 \Leftrightarrow 10 \cdot t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Значению параметра $t = 1$ отвечает точка с координатами $x = 5 + 1 = 6$, $y = 6 - 3 \cdot 1 = 3$. Следовательно, искомая точка $M_l(6, 3)$.

в) В п. "а" составлено параметрическое уравнение прямой m . В этом уравнении при $t = 0$ получаем точку M , при $t = 1$ – точку M_l , значит искомую точку M' получим при $t = 2$, поскольку в силу симметрии $M'M_l = M_lM$. Вычисляем координаты искомой точки:

$$M'(5 + 1 \cdot 2, 6 + (-3) \cdot 2), \text{ т.е. } M'(7, 0). \blacksquare$$

Пример 3.9. На координатной плоскости Oxy (в прямоугольной системе координат) заданы вершины $P(1, 2)$, $Q(13, -3)$, $R(5, 5)$ треугольника (рис.3.17). Составить:

а) каноническое уравнение прямой, содержащей высоту PH треугольника;

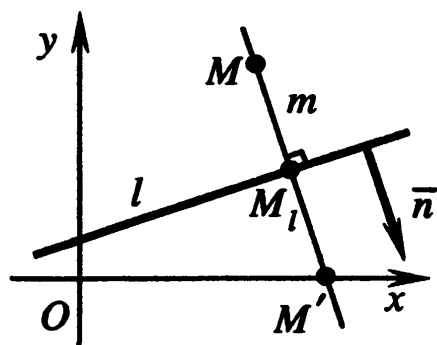


Рис.3.16

б) каноническое и параметрическое уравнения прямой, содержащей биссектрису PL треугольника.

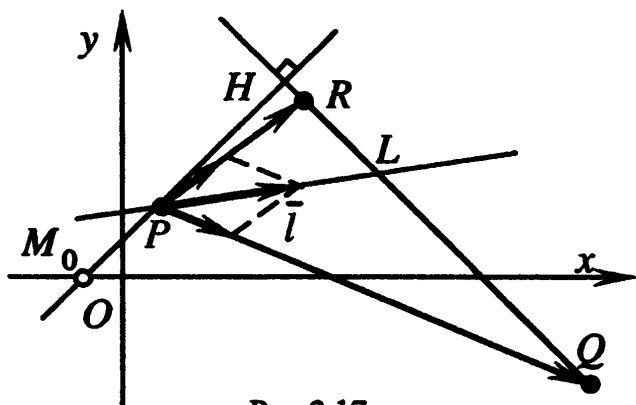


Рис.3.17

□ а) В примере 3.7 было получено общее уравнение $x - y + 1 = 0$ прямой PH ($A=1, B=-1, C=1$). Перейдем от общего уравнения к каноническому.

1) Найдем любое решение уравнения $x - y + 1 = 0$, например, $x_0 = -1, y_0 = 0$ (точка $M_0(-1, 0)$ принадлежит прямой PH).

2) Найдем ненулевое решение однородного уравнения $A \cdot a + B \cdot b = 1 \cdot a - 1 \cdot b = 0$, например $a = b = 1$ (направляющий вектор \bar{p} прямой PH имеет координаты $a = b = 1$).

3) Запишем каноническое уравнение: $\frac{x - (-1)}{1} = \frac{y - 0}{1} \Leftrightarrow \frac{x + 1}{1} = \frac{y}{1}$.

б) Найдем направляющий вектор \bar{l} биссектрисы PL . Для этого отложим от вершины P единичные векторы $\frac{\overline{PQ}}{|\overline{PQ}|}, \frac{\overline{PR}}{|\overline{PR}|}$ и построим на них ромб (изображенный на рис.3.17 штриховой линией). Поскольку диагональ ромба является биссектрисой, то вектор $\bar{l} = \frac{\overline{PQ}}{|\overline{PQ}|} + \frac{\overline{PR}}{|\overline{PR}|}$ является направ-

ляющим вектором биссектрисы PL . Находим координаты и длины векторов:

$$\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad |\overline{PQ}| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13; \quad \frac{\overline{PQ}}{|\overline{PQ}|} = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ \frac{-5}{13} \end{pmatrix};$$

$$\overline{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad |\overline{PR}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5; \quad \frac{\overline{PR}}{|\overline{PR}|} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix};$$

$$\bar{l} = \frac{\overline{PQ}}{|\overline{PQ}|} + \frac{\overline{PR}}{|\overline{PR}|} = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ \frac{-5}{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{112}{65} \\ \frac{14}{65} \end{pmatrix}.$$

Составляем каноническое уравнение прямой с направляющим вектором \bar{l} ,

проходящей через точку $P(1, 2)$: $\frac{x-1}{\frac{112}{65}} = \frac{y-2}{\frac{14}{65}} \Leftrightarrow \frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{1}$.

Чтобы получить параметрическое уравнение прямой PL , приравняем левую и правую части канонического уравнения параметру t :

$\frac{x-1}{8} = t = \frac{y-2}{1}$. Записываем полученную систему в виде (3.12):

$$\begin{cases} x = 1 + 8 \cdot t, \\ y = 2 + 1 \cdot t, \end{cases} \quad t \in R. \quad \blacksquare$$

3.2.3. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть на координатной плоскости Oxy заданы две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Требуется составить уравнение прямой, проходящей через заданные точки.

Как показано в разд.1.6.1, точка $M(x, y)$ принадлежит прямой M_0M_1 тогда и только тогда, когда ее радиус-вектор \overline{OM} удовлетворяет условию (рис.3.18):

$$\overline{OM} = (1-t) \cdot \overline{OM_0} + t \cdot \overline{OM_1}, \quad (3.14)$$

где t – некоторое действительное число (параметр). Уравнение (3.14), а также его координатную форму

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot (x_1 - x_0), \\ y = y_0 + t \cdot (y_1 - y_0) \end{cases} \quad (3.15)$$

будем называть *аффинным уравнением прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$* .

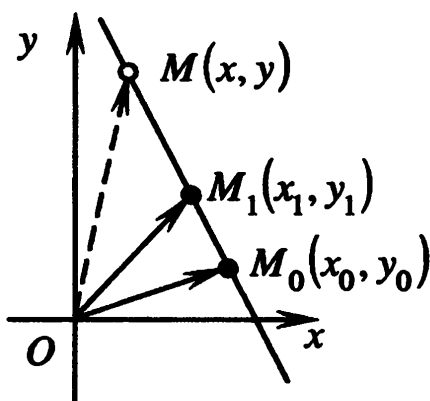


Рис.3.18

Аффинное уравнение прямой:

$$\overline{OM} = (1-t) \cdot \overline{OM_0} + t \cdot \overline{OM_1};$$

$$\begin{cases} x = (1-t) \cdot x_0 + t \cdot x_1, \\ y = (1-t) \cdot y_0 + t \cdot y_1, \end{cases} \quad t \in R.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки M_0 и M_1 :

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Выражая параметр t из первого и второго уравнений системы (3.15),

получаем: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = t = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$. Исключая параметр t , приходим к *уравне-*

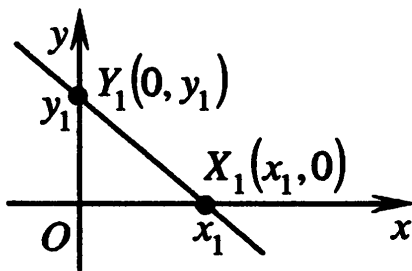
нию прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) можно получить из канонического уравнения (3.13), выбирая в качестве направляющего вектора $\vec{p} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$ вектор $\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0) \cdot \vec{i} + (y_1 - y_0) \cdot \vec{j}$, т.е. подставляя $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$.

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ "В ОТРЕЗКАХ"

Пусть на координатных осях заданы точки $X_1(x_1, 0)$ и $Y_1(0, y_1)$, причем $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$ (рис.3.19). Требуется составить уравнение прямой, проходящей через эти точки.



Уравнение прямой "в отрезках":

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1, \quad x_1 \neq 0, y_1 \neq 0.$$

Рис.3.19

Подставляя в уравнение (3.16) $x_0 = x_1$, $y_0 = 0$, $x_1 = 0$, $y_1 = y_1$, получаем:

$$\frac{x-x_1}{0-x_1} = \frac{y-0}{y_1-0} \Leftrightarrow -\frac{x}{x_1} + 1 = \frac{y}{y_1} \Leftrightarrow 1 = \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1}.$$

Меняя левую и правую части равенства, получаем уравнение

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1, \quad x_1 \neq 0, y_1 \neq 0, \quad (3.17)$$

которое называется *уравнением прямой "в отрезках"*. Говорят, что прямая, проходящая через точки $X_1(x_1, 0)$ и $Y_1(0, y_1)$, *отсекает на координатных осях "отрезки"*: x_1 на оси абсцисс и y_1 на оси ординат. Разумеется, длины отрезков OX_1 и OY_1 равны $|x_1|$ и $|y_1|$ соответственно.

Замечания 3.5.

1. Перейти от общего уравнения прямой (3.8) $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ к уравнению "в отрезках" (3.17) можно при условии, что все коэффициенты общего уравнения отличны от нуля. Для этого нужно перенести свободный член в правую часть уравнения: $A \cdot x + B \cdot y = -C$, а затем разделить обе части уравнения на $-C$: $\frac{A}{-C} \cdot x + \frac{B}{-C} \cdot y = 1$. Обозначив $x_1 = -\frac{C}{A}$, $y_1 = -\frac{C}{B}$, получим уравнение "в отрезках" (3.17): $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1$.

2. Уравнения (3.16), (3.17), полученные в прямоугольной системе координат, имеют тот же вид в любой другой аффинной системе координат. Геометрический смысл коэффициентов в уравнениях остается прежним, однако, величины $|x_1|$ и $|y_1|$ в общем случае не равны длинам отсекаемых отрезков OX_1 и OY_1 .

Пример 3.10. На координатной плоскости Oxy (в прямоугольной системе координат) заданы вершины $P(1,2)$, $Q(13,-3)$, $R(5,5)$ треугольника (рис.3.20). Составить:

а) уравнение "в отрезках" для прямой, содержащей высоту PH треугольника;

б) уравнение "в отрезках" для прямой, содержащей биссектрису PL треугольника;

в) уравнение прямой, содержащей медиану PM треугольника.

□ а) В примере 3.7 было получено общее уравнение $x - y + 1 = 0$ прямой PH . Перенесем свободный член в правую часть: $x - y = -1$ и поделим обе части уравнения на (-1) : $-x + y = 1$. Запишем это уравнение в виде (3.17): $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$. Эта прямая отсекает на координатных осях "отрезки" (-1) и 1 соответственно.

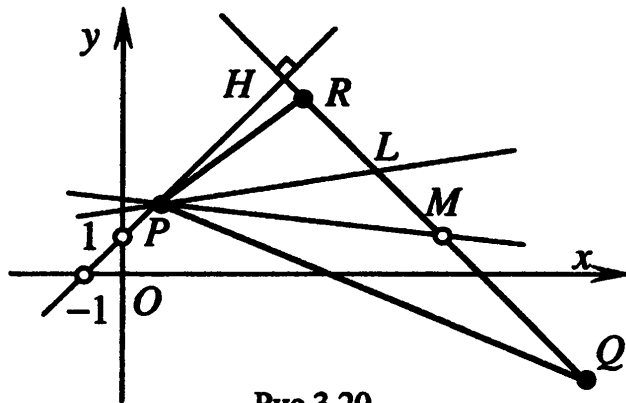


Рис.3.20

б) В примере 3.9 было получено каноническое уравнение $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{1}$ прямой PL . Перейдем к общему уравнению, перенося все члены в левую часть: $\frac{x-1}{8} - \frac{y-2}{1} = 0$. Умножая обе части на 8 и приводя подобные члены, получаем $x - 8 \cdot y + 15 = 0$. Теперь переходим от общего уравнения к уравнению "в отрезках" (аналогично п. "а"):

$$x - 8 \cdot y + 15 = 0 \Leftrightarrow x - 8 \cdot y = -15 \Leftrightarrow \frac{x}{-15} - \frac{8 \cdot y}{-15} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-15} + \frac{y}{\frac{15}{8}} = 1.$$

в) Найдем координаты середины M отрезка QR (см. п.3 замечаний 2.1 в разд.2.1.1): $M\left(\frac{13+5}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$, т.е. $M(9,1)$. Составим уравнение (3.16) прямой, проходящей через точки $P(1,2)$ и $M(9,1)$: $\frac{x-1}{9-1} = \frac{y-2}{1-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{-1}$. ■

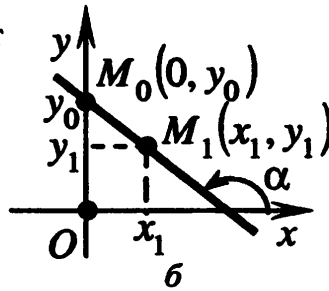
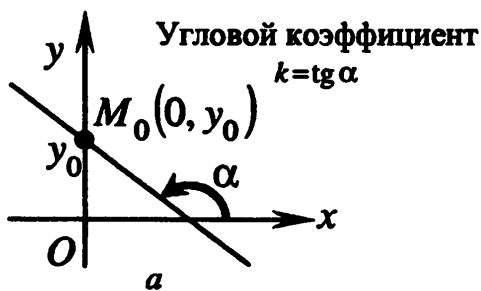
3.2.4. Уравнения прямой, проходящей через заданную точку, с данным угловым коэффициентом

Пусть заданы:

- а) точка $M_0(0, y_0)$ на оси ординат;
- б) угол α , $0 \leq \alpha < \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ (рис.3.21,а).

Требуется составить уравнение прямой, пересекающей ось ординат в заданной точке и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол заданной величины α .

Величину, равную тангенсу угла α , который образует прямая с положительным направлением оси абсцисс, называют *угловым коэффициентом прямой* и обозначают $k = \operatorname{tg} \alpha$ (рис.3.21,а).



Уравнение прямой с угловым коэффициентом:
 $y = k \cdot x + y_0$, $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Рис.3.21

Выберем на прямой произвольную точку $M_1(x_1, y_1)$, отличную от $M_0(0, y_0)$, т.е. $x_1 \neq 0$. Запишем уравнение (3.16) при $x_0 = 0$:

$$\frac{x-0}{x_1-0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Отсюда $(y_1 - y_0) \cdot x = (y - y_0) \cdot x_1 \Leftrightarrow y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1} \cdot x$. Подставляя

$\frac{y_1 - y_0}{x_1} = \operatorname{tg} \alpha = k$, получаем уравнение

$$y = k \cdot x + y_0, \quad (3.18)$$

которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* (или *уравнением прямой, разрешенным относительно y*).

Найдем, например, величину α угла между прямой RH (см. пример 3.7, рис.3.12) и положительным направлением оси абсцисс. Для этого из общего уравнения $x - y + 1 = 0$ прямой RH выражаем $y = x + 1$. Сравнивая с (3.18), получаем $k = 1$, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = k = 1$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

З а м е ч а н и я 3.6.

1. Чтобы *перейти от общего уравнения прямой* (3.8) $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ к *уравнению с угловым коэффициентом* (3.18), нужно разрешить общее уравнение относительно неизвестной y :

$$y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B} \Leftrightarrow y = k \cdot x + y_0,$$

где $k = -\frac{A}{B}$, $y_0 = -\frac{C}{B}$. Такой переход возможен при условии $B \neq 0$.

2. Если в поставленной задаче заданная точка $M_0(x_0, y_0)$ не лежит на оси ординат, то, проводя аналогичные рассуждения, получаем **уравнение прямой с угловым коэффициентом** вида:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0).$$

3. Уравнение прямой (3.18) с угловым коэффициентом применяется только в прямоугольной системе координат, поскольку в любой другой аффинной системе координат в уравнении (3.18), разрешенном относительно неизвестной y , коэффициент k утрачивает смысл углового коэффициента.

3.2.5. Взаимное расположение прямых

КОЛЛИНЕАРНЫЕ ПРЯМЫЕ

Две прямые называются **коллинеарными**, если они параллельны или совпадают.

Получим условие коллинеарности двух прямых l_1 и l_2 , заданных общими уравнениями:

$$l_1: A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0; \quad l_2: A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0. \quad (3.19)$$

Необходимым и достаточным условием коллинеарности прямых (3.19) является условие коллинеарности их нормалей $\vec{n}_1 = A_1 \cdot \vec{i} + B_1 \cdot \vec{j}$, $\vec{n}_2 = A_2 \cdot \vec{i} + B_2 \cdot \vec{j}$. Следовательно, если прямые (3.19) коллинеарны, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, т.е. существует такое число $\lambda \neq 0$, что

$$\vec{n}_1 = \lambda \cdot \vec{n}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \lambda \cdot A_2, \\ B_1 = \lambda \cdot B_2, \end{cases}$$

и наоборот.

Прямые совпадают, если помимо этих условий справедливо $C_1 = \lambda \cdot C_2$. Тогда первое уравнение в (3.19) имеет вид $\lambda \cdot (A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2) = 0$, т.е. равносильно второму, поскольку $\lambda \neq 0$.

Таким образом, **прямые (3.19) параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты при неизвестных в их уравнениях пропорциональны, т.е. существует такое число $\lambda \neq 0$, что $A_1 = \lambda \cdot A_2$, $B_1 = \lambda \cdot B_2$, но $C_1 \neq \lambda \cdot C_2$. Прямые (3.19) совпадают тогда и только тогда, когда все соответствующие коэффициенты в их уравнениях пропорциональны: $A_1 = \lambda \cdot A_2$, $B_1 = \lambda \cdot B_2$, $C_1 = \lambda \cdot C_2$.**

Условия параллельности или совпадения прямых (3.19) можно записать в виде

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}; \quad l_1 \equiv l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие коллинеарности двух прямых (3.19) можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0.$$

ЛИНИИ УРОВНЯ ЛИНЕЙНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Линией уровня функции $f(x, y)$ двух переменных называется геометрическое место точек координатной плоскости Oxy , в которых функция принимает постоянное значение, т.е. $f(x, y) = \text{const}$ (см. [19,28,40]).

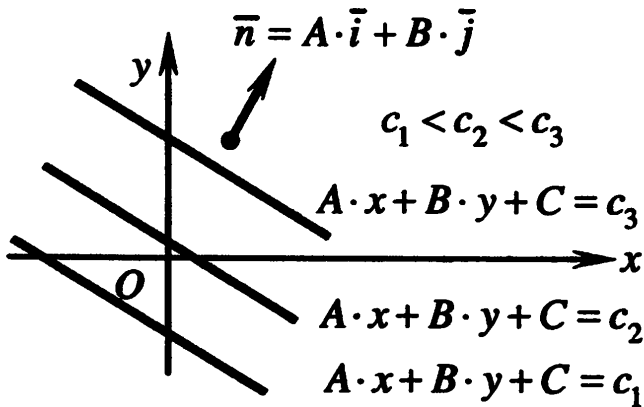


Рис.3.22

Для линейного трехчлена $p(x, y) = A \cdot x + B \cdot y + C$ уравнение линии уровня $p(x, y) = \text{const}$ имеет вид

$$A \cdot x + B \cdot y + C = \text{const}. \quad (3.20)$$

При любом фиксированном значении постоянной уравнение (3.20) описывает прямую. Рассмотрим поведение семейства линий уровня, отличающихся значением

постоянной. Поскольку коэффициенты A и B не изменяются, то у всех прямых (3.20) будет одна и та же нормаль $\bar{n} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j}$. Следовательно, линии уровня линейного трехчлена $p(x, y) = A \cdot x + B \cdot y + C$ представляют собой семейство параллельных прямых (рис.3.22). Поскольку нормаль совпадает с градиентом (см. п.3 замечаний 3.2), а градиент направлен в сторону наискорейшего возрастания функции, то при увеличении постоянной линии уровня (3.20) переносятся параллельно в направлении нормали.

ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

Необходимым и достаточным условием пересечения двух прямых (3.19) является условие неколлинеарности их нормалей, или, что то же самое, условие непропорциональности коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}. \quad (3.21)$$

При этом условии система уравнений

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0, \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение x_0, y_0 , которое определяет точку $M_0(x_0, y_0)$ пересечения прямых (3.19) (см. [10]).

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Углом между двумя прямыми на плоскости называется угол между их направляющими векторами. По этому определению получаются не один угол, а два смежных угла, дополняющих друг друга до π . В элементарной геометрии из двух смежных углов, как правило, выбирается меньший, т.е. величина φ угла между двумя прямыми удовлетворяет условию $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

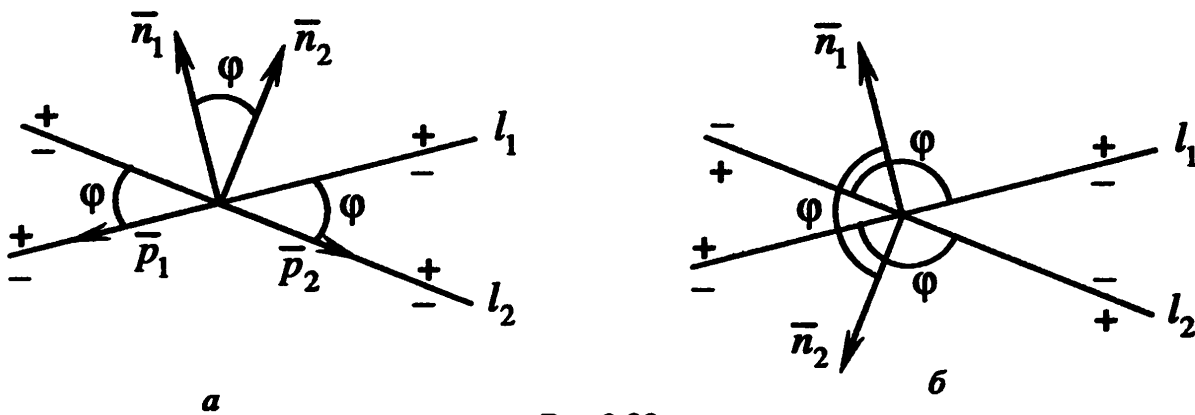


Рис.3.23

Если $\bar{p}_1 = a_1 \cdot \bar{i} + b_1 \cdot \bar{j}$ и $\bar{p}_2 = a_2 \cdot \bar{i} + b_2 \cdot \bar{j}$ – направляющие векторы прямых l_1 и l_2 соответственно (рис.3.23,а), то величина φ угла между этими прямыми вычисляется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{p}_1, \bar{p}_2)}{|\bar{p}_1| \cdot |\bar{p}_2|} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Чтобы получить величину φ острого угла между прямыми, нужно правую часть взять по абсолютной величине:

$$\cos \varphi = \frac{|(\bar{p}_1, \bar{p}_2)|}{|\bar{p}_1| \cdot |\bar{p}_2|} = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Угол φ между прямыми (3.19) можно вычислить как угол между их нормальными векторами $\bar{n}_1 = A_1 \cdot \bar{i} + B_1 \cdot \bar{j}$ и $\bar{n}_2 = A_2 \cdot \bar{i} + B_2 \cdot \bar{j}$:

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (3.22)$$

Чтобы получить величину φ острого угла между прямыми, нужно правую часть взять по абсолютной величине:

$$\cos \varphi = \frac{|\langle \bar{n}_1, \bar{n}_2 \rangle|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности прямых (3.19) является условие ортогональности их нормалей, т.е. $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0.$$

По формуле (3.22) получаем острый угол φ между прямыми (3.19), если $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 > 0$ (рис.3.23,а), и тупой в противном случае: $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 < 0$ (рис.3.23,б). Другими словами, по формуле (3.22) находится тот угол между прямыми, в котором лежат точки, принадлежащие разноименным полуплоскостям, определяемым данными прямыми. На рис.3.23 положительные и отрицательные полуплоскости отмечены знаками + или – соответственно.

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$l_1: y = k_1 \cdot x + y_1, \quad k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, \quad \alpha_1 \neq \frac{\pi}{2};$$

$$l_2: y = k_2 \cdot x + y_2, \quad k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2, \quad \alpha_2 \neq \frac{\pi}{2},$$

то угол φ между ними (один из смежных углов) находится по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}. \quad (3.23)$$

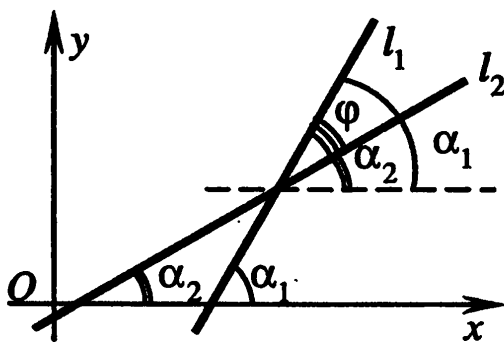


Рис.3.24

Если правая часть (3.23) положительна, то угол φ острый (рис.3.24), в противном случае – тупой. Чтобы получить острый угол φ , нужно правую часть (3.23) взять по абсолютной величине:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

Если $k_1 = k_2$ (условие параллельности прямых), то $\varphi = 0$. Если $k_1 \cdot k_2 + 1 = 0$ (условие перпендикулярности прямых), то правая часть (3.23) не определена ($\operatorname{tg} \varphi = \infty$). Тогда полагают, что $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Пример 3.11. Найти величину того угла, образованного прямыми $l_1: 3 \cdot x - y - 3 = 0$ и $l_2: x - 2 \cdot y + 4 = 0$, внутри которого лежит точка $M(5, 2)$.

□ По общим уравнениям прямых находим нормали $\vec{n}_1 = 3\vec{i} - 1\vec{j}$, $\vec{n}_2 = 1\vec{i} - 2\vec{j}$, а также величину φ угла между нормальными, используя (3.22):

$$\cos \varphi = \frac{3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Подставляя координаты точки $M(5, 2)$ в левые части уравнений прямых, выясняем, каким полуплоскостям принадлежит эта точка. Для прямой l_1 имеем $3 \cdot 5 - 2 - 3 > 0$, значит точка M лежит в положительной полуплоскости, определяемой прямой l_1 . Для прямой l_2 имеем $5 - 2 \cdot 2 + 4 > 0$, значит, точка M лежит также в положительной полуплоскости, определяемой прямой l_2 . Поскольку точка M принадлежит одноименным полуплоскостям (положительным), то искомый угол – это угол ψ , смежный найденному углу $\varphi = \frac{\pi}{4}$: $\psi = \pi - \varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Приведенные рассуждения кажутся ненужными, так как положение точки M сразу же выясняется по рис.3.25. Однако, как это было ранее отмечено (см. введение к главе 3), при аналитическом решении изображения фигур не используются, поскольку записать вывод "по рисунку видно, что..." на алгоритмическом языке невозможно. ■

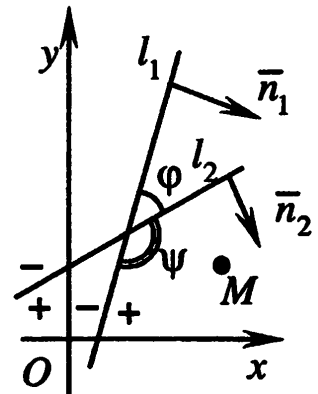


Рис.3.25

Пример 3.12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $y_0 = 1$ на оси ординат и образующей с прямой $y = \frac{1}{2} \cdot x + 1$ угол $\frac{\pi}{4}$.

□ Искомая прямая (с угловым коэффициентом k) образует с заданной прямой l (с угловым коэффициентом $\frac{1}{2}$) острый угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\text{tg } \varphi = 1$. По формуле (3.23), учитывая, что угол φ острый, составляем уравнение и упрощаем его:

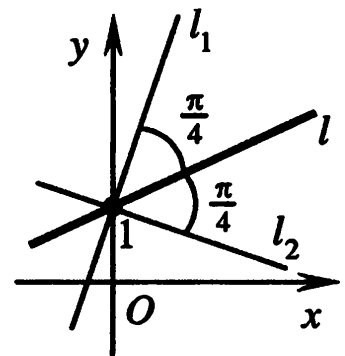


Рис.3.26

$$1 = \left| \frac{k - \frac{1}{2}}{1 + k \cdot \frac{1}{2}} \right| \Leftrightarrow \frac{k - \frac{1}{2}}{1 + k \cdot \frac{1}{2}} = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot k, \\ k - \frac{1}{2} = -1 - \frac{1}{2} \cdot k. \end{cases}$$

Отсюда находим два решения $k_1 = 3$ или $k_2 = -\frac{1}{3}$. Следовательно, учитывая (3.18), поставленной задаче удовлетворяют две прямые (рис.3.26)

$$l_1: y = 3 \cdot x + 1; \text{ или } l_2: y = -\frac{1}{3} \cdot x + 1.$$

Заметим, что прямые l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны, поскольку выполняется условие $k_1 \cdot k_2 + 1 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$. ■

Собственным пучком прямых на плоскости называется совокупность всех прямых плоскости, проходящих через фиксированную точку (*центр пучка*).

Несобственным пучком прямых называется совокупность прямых, параллельных фиксированной прямой (центром несобственного пучка прямых считается бесконечно удаленная точка плоскости).

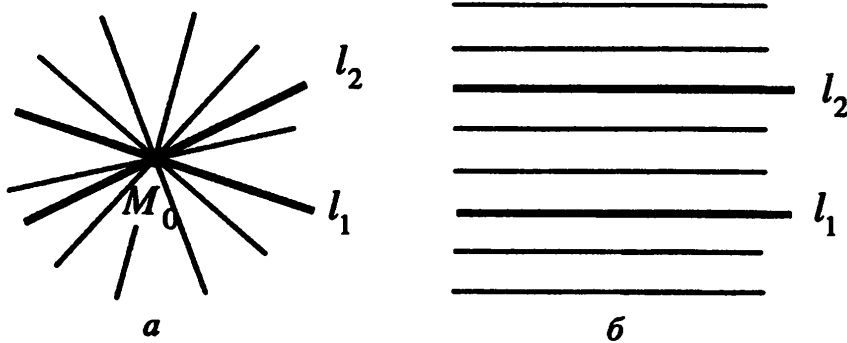


Рис. 3.27

Любые две прямые l_1 и l_2 определяют *пучок прямых, содержащий заданные прямые l_1 и l_2* . Если прямые l_1 и l_2 пересекаются, то точка M_0 их пересече-

ния является центром собственного пучка (рис.3.27,*а*). Если l_1 и l_2 параллельны, то они определяют несобственный пучок параллельных прямых (рис.3.27,*б*).

Пусть заданы уравнения двух прямых (3.19)

$$l_1: A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0; \quad l_2: A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0.$$

Линейной комбинацией этих уравнений называется уравнение

$$\lambda_1 \cdot (A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1) + \lambda_2 \cdot (A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2) = 0, \quad (3.24)$$

где числа λ_1, λ_2 – **коэффициенты** линейной комбинации. Его можно записать в форме

$$(\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2) \cdot x + (\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2) \cdot y + \lambda_1 \cdot C_1 + \lambda_2 \cdot C_2 = 0. \quad (3.25)$$

Заметим, что линейная комбинация уравнений является уравнением первой степени для любых значений коэффициентов, кроме случая, когда оба коэффициента при неизвестных равны нулю, т.е. при $\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 = 0$ и $\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 = 0$. Эти значения параметров λ_1, λ_2 считаются недопустимыми.

Уравнение (3.24) называется **уравнением пучка прямых, содержащего прямые $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ и $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$** .

При любых допустимых значениях параметров λ_1, λ_2 уравнение (3.24) задает прямую, принадлежащую пучку, и наоборот, для любой прямой пучка найдутся такие значения параметров λ_1, λ_2 , что уравнение (3.24) будет задавать эту прямую.

Действительно, уравнения прямых l_1 и l_2 получаются из (3.24) при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ и при $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ соответственно.

Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то существует такое число $\lambda \neq 0$, что $A_1 = \lambda \cdot A_2$ и $B_1 = \lambda \cdot B_2$. Тогда при любых допустимых значениях параметров λ_1, λ_2 прямая (3.25) параллельна прямой l_2 , так как коэффициенты при неизвестных пропорциональны:

$$\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 = (\lambda_1 \cdot \lambda + \lambda_2) \cdot A_2, \quad \lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 = (\lambda_1 \cdot \lambda + \lambda_2) \cdot B_2.$$

Если прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке $M_0(x_0, y_0)$, то любая прямая (3.24) проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ пересечения прямых l_1 и l_2 , поскольку

$$\lambda_1 \cdot \underbrace{(A_1 \cdot x_0 + B_1 \cdot y_0 + C_1)}_0 + \lambda_2 \cdot \underbrace{(A_2 \cdot x_0 + B_2 \cdot y_0 + C_2)}_0 = 0$$

при любых значениях λ_1, λ_2 .

Осталось показать, что для любой точки $M^*(x^*, y^*)$ плоскости существуют такие значения параметров λ_1, λ_2 , при которых уравнение (3.24) задает прямую l , проходящую через точку $M^*(x^*, y^*)$. В самом деле, подставим координаты точки $M^*(x^*, y^*)$ в уравнение (3.24):

$$\lambda_1 \cdot \underbrace{(A_1 \cdot x^* + B_1 \cdot y^* + C_1)}_{\neq 0} + \lambda_2 \cdot \underbrace{(A_2 \cdot x^* + B_2 \cdot y^* + C_2)}_{\neq 0} = 0.$$

Это означает, что прямая (3.24) проходит через точку M^* . Отсюда определяется отношение

отношение $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{A_2 \cdot x^* + B_2 \cdot y^* + C_2}{A_1 \cdot x^* + B_1 \cdot y^* + C_1}$, равное по абсолютной вели-

чине отношению расстояний от точки M^* до прямых l_2 и l_1 (см. п.5 замечаний 3.2). При таком выборе параметров λ_1, λ_2 уравнение (3.24) будет задавать прямую, проходящую через точку M^* , т.е. прямую l .

Пример 3.13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2 \cdot x + y + 4 = 0$, $3 \cdot x - y - 1 = 0$ и через точку $M^*(2, 3)$.

□ Искомая прямая входит в пучок прямых, задаваемый уравнением

$$\lambda_1 \cdot (2 \cdot x + y + 4) + \lambda_2 \cdot (3 \cdot x - y - 1) = 0.$$

Подставляя координаты точки $M^*(2, 3)$, получаем:

$$\lambda_1 \cdot (2 \cdot 2 + 3 + 4) + \lambda_2 \cdot (3 \cdot 2 - 3 - 1) = 0 \Leftrightarrow 11 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 = 0.$$

Возьмем, например, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 11$ и подставим в уравнение пучка:

$$-2 \cdot (2 \cdot x + y + 4) + 11 \cdot (3 \cdot x - y - 1) = 0 \Leftrightarrow 29 \cdot x - 13 \cdot y - 19 = 0.$$

Искомое уравнение получено. ■

3.2.6. Типовые задачи с прямыми на плоскости

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРЯМЫХ

Разнообразие видов уравнений прямых на плоскости порождается многообразием геометрических способов задания прямых. По любому набору геометрических данных, однозначно определяющих прямую на плоскости, можно составить уравнение этой прямой, причем геометрические данные будут отражены в коэффициентах уравнения. И наоборот, коэффициенты любого уравнения прямой имеют геометрический смысл, соответствующий способу задания прямой на плоскости.

Для удобства решения типовых задач, связанных с прямыми на плоскости, все основные типы уравнений прямых и соответствующие геометрические способы задания этих прямых отражены в таблице 3.1.

Примеры составления прямых по геометрическим данным, указанным в таблице 3.1, разбирались в разд.3.2.1–3.2.4. Рассмотрим примеры нахождения уравнений прямых, заданных как геометрические места точек.

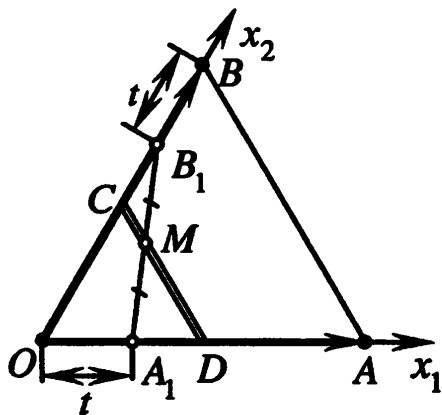


Рис.3.28

Пример 3.14. По сторонам OA и OB равнобедренного треугольника OAB ($OA = OB$) перемещаются точки A_1 и B_1 так, что $OA_1 = BB_1$ (рис.3.28). Найти геометрическое место точек M – середин отрезков A_1B_1 .

□ Введем аффинную систему координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ с базисными векторами $\bar{e}_1 = \overline{OA}$ и $\bar{e}_2 = \overline{OB}$ (рис.3.28). Вершины A и B треугольника имеют координаты $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, а точки A_1 и B_1 – координаты $A_1(t, 0)$, $B_1(0, 1-t)$, где t – параметр, принимающий значения $0 \leq t \leq 1$ ($t = \frac{\overline{OA_1}}{\bar{e}_1}$).

Середина M отрезка A_1B_1 имеет координаты $M\left(\frac{t+0}{2}, \frac{0+1-t}{2}\right)$, т.е. $M\left(\frac{t}{2}, \frac{1-t}{2}\right)$. Это означает, что при изменении параметра t координаты точки M изменяются по закону

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \cdot t, \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot t. \end{cases}$$

Получили параметрическое уравнение прямой. Поскольку t изменяется в пределах $0 \leq t \leq 1$, то при $t = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, точка $M\left(0, \frac{1}{2}\right)$ совпадает с серединой C стороны OB ; при $t = 1$ $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, точка $M\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ совпа-

дает с серединой D стороны OA . Поэтому искомое геометрическое место точек – отрезок CD , а именно средняя линия треугольника OAB , параллельная стороне AB . ■

Т а б л и ц а 3.1. Основные типы уравнений прямых на плоскости

Название	Уравнение	Способ задания прямой	Геометрический смысл коэффициентов
Общее уравнение прямой	$A \cdot x + B \cdot y + C = 0,$ $A^2 + B^2 \neq 0$	Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}$ (рис.3.5,а)	Коэффициенты A, B – координаты нормали $\vec{n} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}$; свободный член $C = -A \cdot x_0 - B \cdot y_0$
Параметрическое уравнение прямой	$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t, \\ y = y_0 + b \cdot t, \\ t \in R; \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases}$	Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ коллинеарно вектору $\vec{p} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$ (рис.3.13)	Коэффициенты a, b – координаты направляющего вектора $\vec{p} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$; x_0, y_0 – координаты точки $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей прямой
Каноническое уравнение прямой	$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$	См. параметрическое уравнение	См. параметрическое уравнение
Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$	Прямая проходит через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ (рис.3.18)	Коэффициенты x_0, y_0 и x_1, y_1 – координаты точек $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$
Уравнение прямой "в отрезках"	$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1,$ $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$	Прямая отсекает на координатных осях "отрезки" x_1 и y_1 (рис.3.19)	Коэффициенты x_1, y_1 определяют точки на координатных осях, через которые проходит прямая
Уравнение с угловым коэффициентом	$y = k \cdot x + y_0$	Прямая проходит через точку $(0, y_0)$ на оси Oy и образует угол α с положительным направлением оси Ox (рис.3.21,а)	Угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha, 0 \leq \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$; y_0 – ордината точки пересечения прямой с осью ординат

Пример 3.15. Найти геометрическое место точек плоскости, разность квадратов расстояний от каждой из которых до двух заданных точек плоскости постоянна (равна c).

□ Пусть A и B – заданные точки. Введем прямоугольную систему координат Oxy (рис.3.29): начало координат O совпадает с серединой отрезка AB , ось абсцисс совпадает с прямой AB (направление на оси абсцисс выберем от точки A к точке B , т.е. $\vec{i} \uparrow \overline{AB}$), тогда ось ординат совпадает

с серединным перпендикуляром к отрезку AB (направление на оси ординат выбирается так, чтобы система координат была правой, хотя для решения задачи это не важно). Обозначим через $2a > 0$ длину отрезка AB , тогда точки A и B имеют координаты $A(-a, 0)$ и $B(a, 0)$. Пусть $M(x, y)$ произвольная точка искомого множества. По условию задачи $MA^2 - MB^2 = c$ или $MB^2 - MA^2 = c$. Запишем равенство $MA^2 - MB^2 = \pm c$ в координатной форме:

$$(x - (-a))^2 + (y - 0)^2 - (x - a)^2 - (y - 0)^2 = \pm c.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$4ax = \pm c \Leftrightarrow x = \frac{\pm c}{4a}.$$

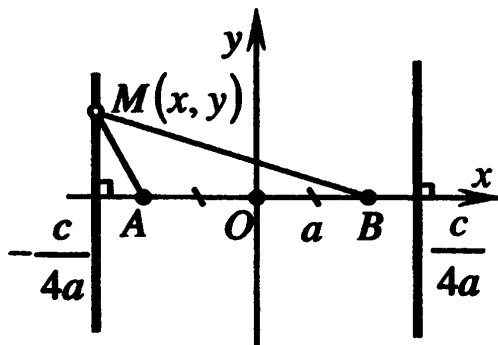


Рис.3.29

Это уравнение определяет пару прямых, перпендикулярных оси абсцисс (или ось ординат при $c = 0$). Следовательно, искомое геометрическое место точек – серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему заданные точки (при $c = 0$), или два перпендикуляра $x = \frac{c}{4a}$ и $x = -\frac{c}{4a}$ к

прямой, проходящей через заданные точки. ■

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

Перечислим формулы для вычисления длин отрезков (расстояний) и величин углов по уравнениям образующих их прямых.

1. Расстояние d от точки $M^*(x^*, y^*)$ до прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|A \cdot x^* + B \cdot y^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2. Расстояние между параллельными прямыми $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ и $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$ находится как расстояние d_1 от точки $M_2(x_2, y_2)$, координаты которой удовлетворяют уравнению $A_2 \cdot x_2 + B_2 \cdot y_2 + C_2 = 0$, до прямой $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ по формуле:

$$d_1 = \frac{|A_1 \cdot x_2 + B_1 \cdot y_2 + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

3. Острый угол φ между двумя прямыми l_1 и l_2 находится по формулам:

$$а) \cos \varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \text{ если } \bar{p}_1 = a_1 \cdot \bar{i} + b_1 \cdot \bar{j} \text{ и } \bar{p}_2 = a_2 \cdot \bar{i} + b_2 \cdot \bar{j} -$$

направляющие векторы прямых l_1 и l_2 соответственно (в случае задания прямых каноническими или параметрическими уравнениями);

$$б) \cos \varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \text{ если } \bar{n}_1 = A_1 \cdot \bar{i} + B_1 \cdot \bar{j} \text{ и}$$

$\bar{n}_2 = A_2 \cdot \bar{i} + B_2 \cdot \bar{j}$ – нормали к прямым l_1 и l_2 соответственно (в случае задания прямых общими уравнениями);

$$в) \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|, \text{ если } k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \text{ и } k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 - \text{угловые коэффициенты}$$

прямых l_1 и l_2 соответственно (в случае задания прямых уравнениями с угловыми коэффициентами).

При решении задач свойства 1–3 используются наряду с метрическими приложениями векторной алгебры (см. разд. 1.6.2).

Пример 3.16. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 см и 12 см. Найти расстояние от точки пересечения медиан до центра вписанной в треугольник окружности.

□ Пусть ABC – заданный треугольник с катетами $AC = 9$ см и $BC = 12$ см. Введем прямоугольную систему координат Cxy (рис. 3.30): начало координат совпадает с вершиной прямого угла треугольника ABC ; ось абсцисс содержит катет AC ($\bar{i} \uparrow \overline{CA}$), ось ординат – катет BC ($\bar{j} \uparrow \overline{CB}$). Тогда вершины треугольника имеют координаты $A(9, 0)$, $B(0, 12)$, $C(0, 0)$. По координатам вершин треугольника находим координаты точки M пересечения его медиан:

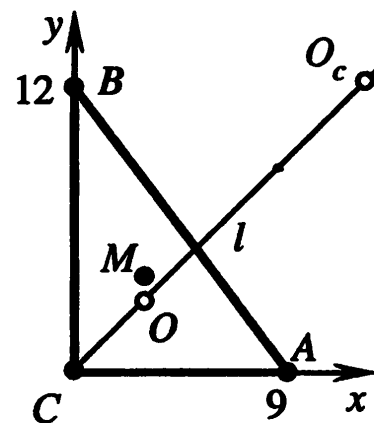


Рис. 3.30

$M\left(\frac{9+0+0}{3}, \frac{0+12+0}{3}\right)$, т.е. $M(3, 4)$ (см. разд. 2.1.1). Найдем координаты центра O вписанной окружности. Поскольку центр принадлежит биссектрисе l прямого угла, уравнение которой $y = x$, то абсцисса и ордината точки O равны, т.е. $O(r, r)$, где r – радиус вписанной окружности. Выразим радиус r как расстояние от точки O до гипотенузы AB . Уравнение прямой, содержащей гипотенузу, имеет вид

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{12} = 1.$$

Это уравнение прямой "в отрезках". Запишем его как общее уравнение прямой $\frac{x}{9} + \frac{y}{12} - 1 = 0$, и по свойству 1 выразим расстояние от точки O до

гипотенузы: $r = \frac{\left| \frac{r}{9} + \frac{r}{12} - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2}}$. Отсюда $r = \frac{|21 \cdot r - 108|}{15} \Leftrightarrow 15 \cdot r = |21 \cdot r - 108|$,

т.е. $r = 3$ (радиус вписанной окружности) или $r = 18$ (радиус невписанной окружности с центром O_c , касающейся гипотенузы). Следовательно, точка O имеет координаты $O(3, 3)$. Осталось найти искомое расстояние

$$OM = \sqrt{(3-3)^2 + (4-3)^2} = 1. \blacksquare$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Системой m линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2, \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 = b_m. \end{cases} \quad (3.26)$$

Числа a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, 2$ называются *коэффициентами системы*; b_1, b_2, \dots, b_m — *свободными членами*, x_1, x_2 — *неизвестными* (см. разд. П.10, а также [10]).

Решением системы называется упорядоченная пара чисел (α_1, α_2) такая, что после замены неизвестных x_1, x_2 соответственно числами α_1, α_2 каждое уравнение системы превращается в верное числовое равенство. Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Система (3.26) называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = 0, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = 0, \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

В отличие от однородной, систему общего вида (3.26) называют *неоднородной*.

Систему (3.26) принято записывать в матричной форме. Для этого из коэффициентов системы составляем *матрицу системы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix},$$

свободные члены записываем в *столбец свободных членов* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,

а неизвестные – в *столбец неизвестных* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Матричная запись неоднородной системы уравнений (3.26) имеет вид

$$Ax = b, \quad (3.28)$$

а однородной:

$$Ax = o, \quad (3.29)$$

где символ o в правой части обозначает нулевой столбец размеров $m \times 1$:

$$o = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Блочная матрица $(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & b_m \end{array} \right)$ называется *расширенной*

матрицей системы (3.26).

Рассматривается случай, когда все уравнения системы первой степени, т.е. коэффициенты при неизвестных каждого уравнения не равны нулю одновременно. Поэтому матрица A системы ненулевая, более того, все ее строки ненулевые.

В соответствии с матричной записью решением системы (3.28) называется столбец $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, при подстановке которого в (3.28) получаем верное

равенство для столбцов в левой и правой частях. В частности, нулевой столбец o является решением однородной системы (3.29), т.е. любая однородная система уравнений совместна.

Рангом системы уравнений (3.26) называется ранг матрицы A системы: $r = \text{rg } A$, т.е. максимальное число линейно независимых строк матри-

цы A (максимальное число линейно независимых уравнений системы). Поскольку матрица системы (3.26) ненулевая и содержит два столбца, то ее ранг $r = \text{rg } A \leq 2$. Ранг может быть равен либо единице ($r = 1$, если все строки матрицы A пропорциональны), либо двум ($r = 2$, если имеются две линейно независимые строки).

Выясним геометрический смысл и свойства решений системы уравнений (3.26).

Пусть на плоскости задана аффинная система координат Ox_1x_2 . Как показано в разд.3.2.1, множество точек $X(x_1, x_2)$, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению с двумя неизвестными $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 = b_i$, или $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 - b_i = 0$, представляет собой прямую. Поэтому множество решений системы уравнений является пересечением прямых $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 - b_i = 0, i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим примеры пересечения прямых.

Если ранг системы (3.26) равен 1, то коэффициенты при неизвестных всех уравнений пропорциональны. В этом случае любые две прямые параллельны (система уравнений несовместна (рис.3.31,а)) или совпадают (в этом случае вся система (3.26) равносильна одному, например, первому ее уравнению (рис.3.31,б)).

Если ранг системы равен 2, то в системе имеются хотя бы два линейно независимых уравнения. Прямые, соответствующие этим уравнениям, пересекаются, например, в точке $X_0(x_{10}, x_{20})$. Поэтому множество решений системы (3.26) либо одна точка (система совместна, все прямые проходят через точку X_0 , т.е. все прямые принадлежат собственному пучку прямых (рис.3.31,в)), либо пусто (система несовместна (рис.3.31,г)).

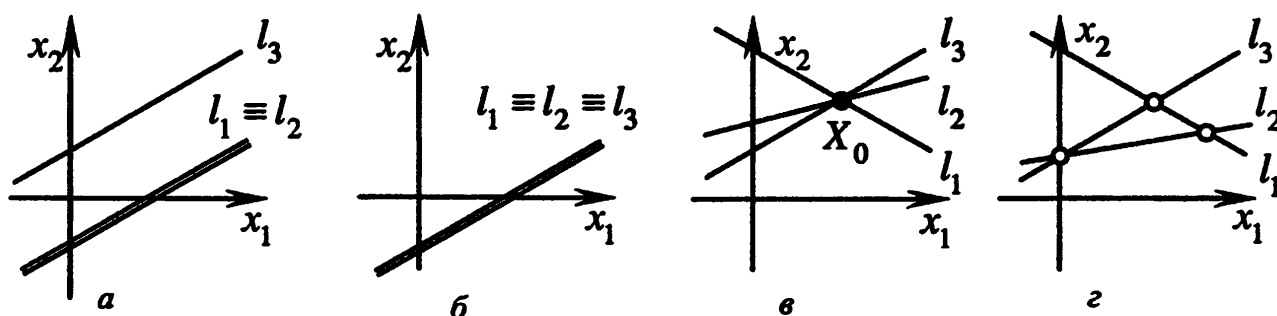


Рис.3.31

Для решения системы (3.26) обычно применяется *метод Гаусса исключения неизвестных* [10], при котором уравнения системы заменяются линейными комбинациями уравнений (см.разд.3.2.5), содержащими меньшее количество неизвестных, при этом расширенная матрица системы приводится к ступенчатому виду. Продемонстрируем этот метод на примере.

Пример 3.17. Решить системы уравнений:

$$а) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -1; \end{cases} б) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 = -1; \end{cases} в) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 - 4x_2 = -3, \\ x_1 - 2x_2 = -1; \end{cases} г) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 - 4x_2 = -2, \\ x_1 - 2x_2 = -1. \end{cases}$$

Изобразить множество решений на координатной плоскости Ox_1x_2 .

□ а) Составляем расширенную матрицу системы

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{array} \right).$$

Поскольку $a_{11} = 1 \neq 0$ (элемент a_{11} – ведущий), прибавим ко второй и к третьей строкам первую, умноженную на (-2) и на (-1) соответственно:

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Последняя строка соответствует уравнению $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = -2$, которое не имеет решений. Следовательно, множество решений системы пустое (прямые, задаваемые уравнениями системы, изображены на рис.3.31,а).

б) Составляем расширенную матрицу системы

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array} \right).$$

Поскольку $a_{11} = 1 \neq 0$ (элемент a_{11} – ведущий), прибавим к третьей строке первую, а ко второй – первую, умноженную на (-2) :

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Система равносильна одному уравнению $x_1 - 2x_2 = 1$. Множество ее решений представляет собой прямую на координатной плоскости Ox_1x_2 . Координаты любой точки этой прямой удовлетворяют системе уравнений, следовательно, система имеет бесконечно много решений (рис.3.31,б).

в) Составляем расширенную матрицу системы

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{array} \right).$$

Поскольку $a_{11} = 1 \neq 0$ (элемент a_{11} – ведущий), прибавим ко второй и к третьей строкам первую строку, умноженную на (-1) :

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -4 & -4 \end{array} \right).$$

Разделим вторую строку на (-6) , а затем к первой и третьей строкам прибавим вторую, умноженную на (-2) и на 4 соответственно:

$$(A | b) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получили единственное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, которому соответствует точка $X_0(1, 1)$ на координатной плоскости (рис.3.31,в).

г) Составляем расширенную матрицу системы

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{array} \right).$$

Поскольку $a_{11} = 1 \neq 0$ (элемент a_{11} – ведущий), прибавим ко второй и к третьей строкам первую строку, умноженную на (-1) :

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & -4 & -4 \end{array} \right).$$

Разделим третью строку на (-4) , а затем ко второй строке прибавим третью, умноженную на 6:

$$(A | b) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Вторая строка соответствует уравнению $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$, которое не имеет решений. Следовательно, система несовместна (прямые, задаваемые уравнениями системы, изображены на рис.3.31,з). ■

Системой t линейных алгебраических нестрогих неравенств с двумя неизвестными называется система неравенств вида

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \geq b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \geq b_2, \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 \geq b_m. \end{cases} \quad (3.30)$$

Числа a_{ij} , $i=1, \dots, t$, $j=1, 2$ называются **коэффициентами системы**; b_1, b_2, \dots, b_m – **свободными членами**; x_1, x_2 – **неизвестными**.

Решением системы называется упорядоченная пара чисел (α_1, α_2) такая, что после замены неизвестных x_1, x_2 соответственно числами α_1, α_2 каждое неравенство системы превращается в верное числовое неравенство. Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Система (3.30) называется **однородной**, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \geq 0, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \geq 0, \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

В отличие от однородной, систему общего вида (3.30) называют **неоднородной**.

Систему (3.30) принято записывать в матричной форме. Для этого из коэффициентов системы составляем **матрицу системы**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix},$$

свободные члены записываем в **столбец свободных членов** $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,

а неизвестные – в **столбец неизвестных** $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Матричная запись неоднородной системы неравенств (3.30) имеет вид

$$Ax \geq b, \quad (3.32)$$

а однородной:

$$Ax \geq o, \quad (3.33)$$

где символ o в правой части обозначает нулевой столбец размеров $m \times 1$. Сравнение левой и правой частей неравенств (3.32), (3.33) выполняется покомпонентно: два столбца $\alpha = (\alpha_1 \ \dots \ \alpha_m)^T$ и $\beta = (\beta_1 \ \dots \ \beta_m)^T$ одинаковых размеров удовлетворяют неравенству $\alpha \geq \beta$ тогда и только тогда, когда все неравенства $\alpha_1 \geq \beta_1, \dots, \alpha_m \geq \beta_m$ выполняются одновременно.

Блочная матрица $(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & b_m \end{array} \right)$ называется *расширенной*

матрицей системы (3.30).

Рассматривается случай, когда все неравенства системы первой степени, т.е. коэффициенты при неизвестных каждого неравенства не равны нулю одновременно. Поэтому матрица A системы ненулевая, более того, все ее строки ненулевые.

В соответствии с матричной записью решением системы (3.32) называется столбец $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, при подстановке которого в (3.32) получаем верное

неравенство для столбцов в левой и правой частях. В частности, нулевой столбец o является решением однородной системы (3.33), т.е. любая однородная система неравенств совместна.

Рангом системы неравенств (3.30) называется ранг матрицы A системы: $r = \text{rg } A$, т.е. максимальное число линейно независимых строк матрицы A (максимальное число линейно независимых неравенств системы). Поскольку матрица системы (3.30) ненулевая, то ее ранг может быть равен либо единице ($r = 1$, если все строки матрицы A пропорциональны), либо двум ($r = 2$, если имеются хотя бы две непропорциональные строки).

Выясним геометрический смысл и свойства решений системы неравенств (3.30). Напомним, что множество точек (на плоскости или в пространстве) называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки (рис.3.32,а). Пустое множество и множество, состоящее из одной точки, по определению считаются выпуклыми. Отрезок, луч, прямая, треугольник (вместе с внутренними его точками), круг, плоскость, полуплоскость, треугольная пирамида, шар и т.п. являются выпуклыми множествами. Фигура, изображенная на рис.3.32,б, не является выпуклой, поскольку отрезок (штриховая линия), соединяющий две точки фигуры, не принадлежит целиком этой фигуре. Примерами невыпуклых множеств являются также ломаная, окружность, сфера и т.п.

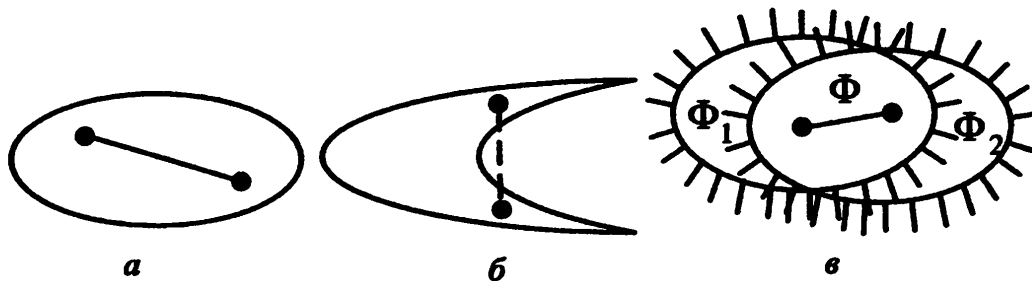


Рис.3.32

Отметим важное свойство выпуклых множеств: *пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.*

Действительно, пусть две точки принадлежат пересечению $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2$ двух выпуклых множеств Φ_1 и Φ_2 (рис.3.32,в), т.е. обе точки принадлежат каждому из множеств Φ_1 и Φ_2 . Тогда весь отрезок, соединяющий выбранные точки, принадлежит каждому из множеств Φ_1 и Φ_2 , поскольку они выпуклые. Следовательно, весь отрезок принадлежит пересечению $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2$. Это рассуждение распространяется на любое количество выпуклых множеств.

Пусть на плоскости задана аффинная система координат Ox_1x_2 . Как показано в разд.3.2.1, множество точек $X(x_1, x_2)$, координаты которых удовлетворяют линейному неравенству с двумя неизвестными $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 \geq b_i$, представляет собой полуплоскость, ограниченную прямой $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 = b_i$. Поэтому множество M решений системы неравенств является пересечением полуплоскостей $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 \geq b_i$, $i = 1, \dots, m$. Поскольку полуплоскость является выпуклым множеством, пересечение конечного числа полуплоскостей также является выпуклым множеством, которое называется *выпуклым многоугольным множеством*. Таким образом, множество решений системы неравенств (3.30) – это выпуклое многоугольное множество.

Рассмотрим примеры пересечения полуплоскостей.

Если ранг системы (3.30) равен 1, то коэффициенты при неизвестных всех неравенств пропорциональны. В этом случае все прямые, ограничивающие полуплоскости, параллельны. Пересечение M таких полуплоскостей может быть либо пустым множеством (система неравенств несовместна), либо прямой (рис.3.33,а), либо полосой (рис.3.33,б), либо полупространством (рис.3.33,в). Здесь и далее на рисунках прямая, ограничивающая полуплоскость, изображается со стрелками, указывающими на выбранную полуплоскость, а также, как правило, штриховкой, которой отмечается другая полуплоскость, не удовлетворяющая неравенству. При пересечении полуплоскостей заштрихованное множество не удовлетворяет системе неравенств.

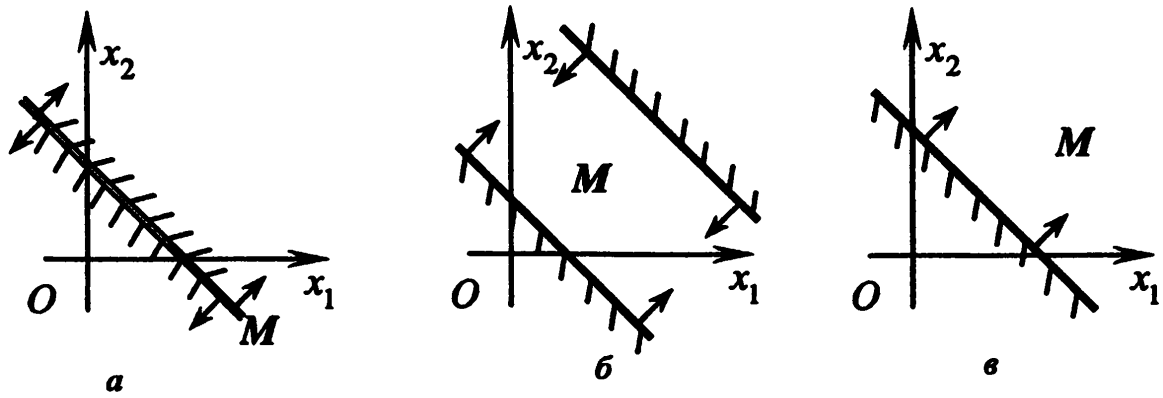


Рис.3.33

Если ранг равен 2, то не все прямые $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 = b_i$, $i = 1, \dots, m$, параллельны. В этом случае пересечение полуплоскостей может быть либо пустым множеством, либо точкой (рис.3.34,а), либо полупрямой (рис.3.34,б), либо отрезком (рис.3.34,в), либо многоугольником (рис.3.34,г), либо выпуклым многоугольным множеством (рис.3.34,д).

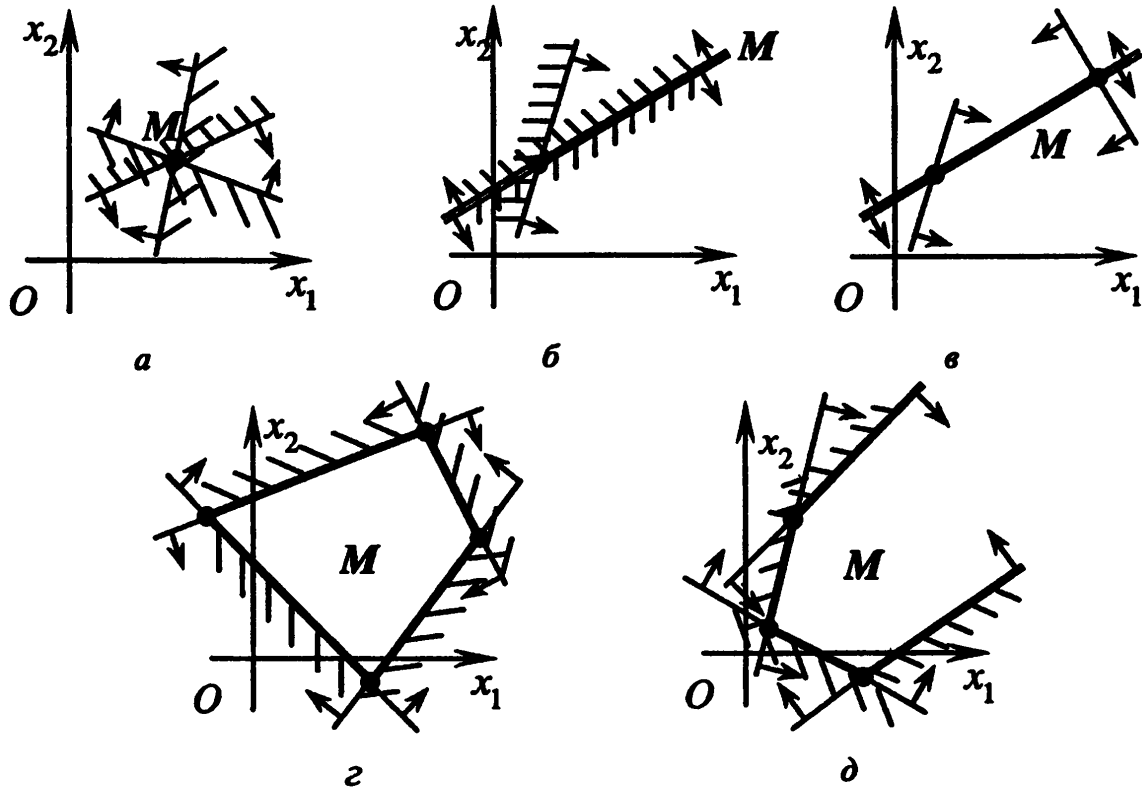


Рис.3.34

МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ

Для решения системы (3.30) можно применить *метод исключения неизвестных* [39]. При этом нужно учитывать, что в отличие от уравнений линейная комбинация неравенств является следствием системы неравенств только при положительных коэффициентах, т.е.

$$\begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ \dots \\ f_m(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 \cdot f_1(x) + \dots + \lambda_m \cdot f_m(x) \geq 0$$

при $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$, за исключением случая $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Такие линейные комбинации называются *положительными*. Поэтому метод Гаусса, где используются линейные комбинации с положительными и отрицательными коэффициентами, для систем неравенств неприменим.

Рассмотрим *метод исключения неизвестных*, применяемый для решения системы (3.30).

1. Выбираем в матрице A системы неравенств (3.32) столбец, в котором имеются нулевые элементы или элементы противоположных знаков (такой столбец называется *ведущим*, его элементы – *ведущими*, а неизвестная, соответствующая ведущему столбцу, – *ведущей*). По ведущему столбцу формируется новая система неравенств $A' \cdot x \geq b'$, в которой ведущая неизвестная отсутствует (исключается ведущая неизвестная).

Например, если первый столбец матрицы A ведущий, то в новую систему $A' \cdot x \geq b'$ записываем:

– все неравенства исходной системы, в которых неизвестная x_1 входит с нулевым коэффициентом;

– положительную линейную комбинацию i -го и j -го неравенств, если $a_{i1} > 0$ и $a_{j1} < 0$:

$$a_{i1} \cdot (a_{j1} \cdot x_1 + a_{j2} \cdot x_2) - a_{j1} \cdot (a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2) \geq a_{i1} \cdot b_j - a_{j1} \cdot b_i,$$

т.е. к j -му неравенству $a_{j1} \cdot x_1 + a_{j2} \cdot x_2 \geq b_j$, умноженному на $a_{i1} > 0$, прибавляем i -е неравенство $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 \geq b_i$, умноженное на $-a_{j1} > 0$. В этой комбинации неравенств коэффициент при неизвестной x_1 получается равным нулю. Другими словами (при исключении неизвестной x_1), расширенная матрица $(A' | b')$ новой системы составляется из строк расширенной матрицы $(A | b)$ системы (3.32) с нулевыми ведущими элементами, и положительных комбинаций строк матрицы $(A | b)$ с ведущими элементами противоположных знаков (коэффициенты положительной комбинации выбираются так, чтобы ведущие элементы взаимно уничтожались). После процедуры исключения неизвестной x_1 в матрице A' первый столбец оказывается нулевым.

Если в матрице A нет ведущего столбца (элементы каждого столбца матрицы отличны от нуля и имеют одинаковые знаки), то исключить неизвестную в этой системе нельзя.

2. Если в системе исключена неизвестная x_1 , то решаем систему $A' \cdot x \geq b'$ с одной неизвестной x_2 , преобразуя ее к системе $\tilde{A}' \cdot x \geq \tilde{b}'$, состоящей из одного или двух неравенств. В результате получаем один из пяти частных случаев:

$$\text{а) } 0 \cdot x_2 \geq \tilde{b}'_1, \text{ где } \tilde{b}'_1 > 0; \qquad \text{б) } 0 \cdot x_2 \geq \tilde{b}'_1, \text{ где } \tilde{b}'_1 \leq 0;$$

$$\text{в) } x_2 \geq \tilde{b}'_1, \qquad \text{г) } -x_2 \geq \tilde{b}'_1,$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_2 \geq \tilde{b}'_1, \\ -x_2 \geq \tilde{b}'_2, \end{cases} \text{ где } \tilde{b}'_1 \leq -\tilde{b}'_2.$$

В случае "а" неравенство не имеет решений, следовательно, исходная система неравенств $Ax \geq b$ несовместна (процесс решения заканчивается). В остальных случаях исходная система совместна.

Если в исходной системе нельзя исключить одну неизвестную, то полагаем формально $0 \cdot x_2 \geq 0$ ($A' = 0, b' = 0$). Этому неравенству удовлетворяют любые значения неизвестной x_2 , т.е. $-\infty < x_2 < +\infty$.

3. Преобразуем исходную систему неравенств $Ax \geq b$, выражая неизвестную x_1 через x_2 . Получим систему $\tilde{A} \cdot x \geq \tilde{b}$, разрешенную относительно x_1 .

4. Записываем "цепочку" систем:

$$\tilde{A} \cdot x \geq \tilde{b} \quad \Rightarrow \quad \tilde{A}' \cdot x \geq \tilde{b}',$$

полученных в п.2,3. Эти системы задают полное описание множества M решений исходной системы (считаются ее полным решением). Чтобы получить какое-либо одно решение исходной системы, нужно взять фиксированное решение $x_2 = x_{20}$ системы $\tilde{A}' \cdot x \geq \tilde{b}'$, подставить его в систему $\tilde{A} \cdot x \geq \tilde{b}$ и найти какое-либо ее решение $x_1 = x_{10}$. Столбец $(x_{10} \quad x_{20})^T$ будет решением исходной системы (3.32).

Первые два пункта алгоритма составляют *прямой ход* метода исключения, третий и четвертый – *обратный ход*.

З а м е ч а н и я 3.7.

1. При исключении неизвестной (прямой ход) получаем следствие исходной системы: $Ax \geq b \Rightarrow A' \cdot x \geq b'$.

2. Множество решений системы неравенств $A' \cdot x \geq b'$ после исключения неизвестной x_1 представляет собой проекцию на ось Ox_2 (вдоль оси Ox_1) множества M решений исходной системы неравенств. Поскольку M – выпуклое многоугольное множество, то его проекция на ось представляет собой либо пустое множество (см. п.2, "а"), либо ось Ox_2 (см. п.2, "б"),

либо луч (см. п.2, "в", "г"), либо отрезок (см. п.2, "д" при $\tilde{b}'_1 < -\tilde{b}'_2$), либо точку (см. п.2, "д" при $\tilde{b}'_1 = -\tilde{b}'_2$).

3. При исключении неизвестной из линейно зависимых неравенств получается неравенство вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \geq \beta$, которое либо выполняется при всех значениях неизвестных (если $\beta \leq 0$), либо не имеет решений (если $\beta > 0$). В первом случае его можно удалить из системы, не изменив при этом множества ее решения. Во втором случае новая система, а также исходная система не имеют решений.

Пример 3.18. Упростить системы неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + x_2 \geq 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq -1, \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 \geq 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1 - 4x_2 \geq -3, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 1; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} -x_1 - x_2 \geq -5, \\ x_1 - x_2 \geq -1, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 11, \\ -x_1 + 2x_2 \geq -1. \end{cases}$$

Найти какое-либо решение. Изобразить множество решений на координатной плоскости Ox_1x_2 .

□ а) *Прямой ход.* 1,2. Элементы каждого столбца матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

системы неравенств имеют одинаковые знаки. Такую систему упростить нельзя. Прямой ход метода исключения завершается составлением неравенства $0 \cdot x_2 \geq 0$, которому удовлетворяют любые значения неизвестной x_2 .

Обратный ход. 3. Выражаем неизвестную x_1 из каждого неравенства

$$\text{исходной системы: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + x_2 \geq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \geq 3 - 2x_2, \\ x_1 \geq 3 - 2x_2, \\ x_1 \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2. \end{cases}$$

Первые два неравенства совпадают, поэтому одно из них можно удалить.

4. Записываем "цепочку" систем, полученных в результате прямого и обратного хода:

$$\begin{cases} x_1 \geq 3 - 2x_2, \\ x_1 \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2, \end{cases} \Rightarrow 0 \cdot x_2 \geq 0.$$

Эта "цепочка" систем дает полное описание множества M решений исходной системы (см. рис.3.35,а). Проекция множества M на ось Ox_2 (вдоль оси Ox_1) совпадает со всей осью Ox_2 (см. п.2 замечаний 3.7).

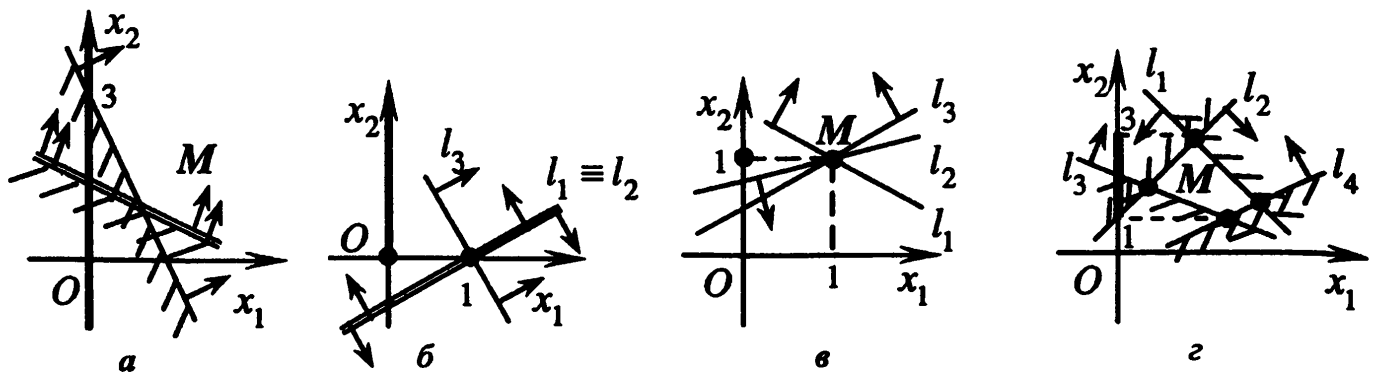


Рис.3 35

Найдем какое-либо решение системы. Выбирая любое решение второй системы в "цепочке", например $x_2 = 3$, подставляем это значение в первую систему "цепочки" и решаем ее:

$$\begin{cases} x_1 \geq 3 - 2 \cdot 3, \\ x_1 \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \geq -3, \\ x_1 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \geq 0.$$

Следовательно, любое неотрицательное значение x_1 является решением исходной системы при $x_2 = 3$, например, пара $(1, 3)$ – решение исходной системы.

б) *Прямой ход.* 1. Составляем расширенную матрицу системы

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

и выбираем первый столбец матрицы A в качестве ведущего (поскольку он содержит элементы противоположных знаков). Исключаем ведущую неизвестную x_1 . Прибавляем к третьей строке первую, а ко второй – первую, умноженную на 2. Полученные строки записываем в матрицу $(A' | b')$ (индексы комбинируемых строк указаны справа в скобках):

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow (A' | b') = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} (1,2) \\ (1,3) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Первое неравенство справедливо при любых x_1 и x_2 (его можно удалить из системы $(A' | b')$ (см. п.3 замечаний 3.7)). Второе неравенство $4 \cdot x_2 \geq 0$ справедливо для неотрицательных значений x_2 . Следовательно, исходная система совместна.

Обратный ход. 3. Выражаем неизвестную x_1 из каждого неравенства исходной системы:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq -1, \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 \geq -1 - 2x_2, \\ x_1 \geq 1 + 2x_2, \\ x_1 \geq 1 - 2x_2. \end{cases}$$

Первые два неравенства можно заменить уравнением $x_1 = 1 + 2x_2$.

4. Записываем "цепочку" систем, полученных в результате прямого и обратного хода:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_2, \\ x_1 \geq 1 - 2x_2, \end{cases} \Rightarrow x_2 \geq 0.$$

Эта "цепочка" систем дает полное описание множества M решений исходной системы (см. рис.3.35,б). Проекция множества M на ось Ox_2 (вдоль оси Ox_1) совпадает с неотрицательной частью оси Ox_2 (см. п.2 замечаний 3.7).

Найдем какое-либо решение системы. Выбирая любое решение второй системы в "цепочке", например $x_2 = 3$, подставляем это значение в первую систему "цепочки" и решаем ее:

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 2 \cdot 3, \\ x_1 \geq 1 - 2 \cdot 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9, \\ x_1 \geq -5, \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 9.$$

Получили решение $(9, 3)$ исходной системы.

в) *Прямой ход*. 1. Составляем расширенную матрицу системы

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

и выбираем первый столбец матрицы A в качестве ведущего (поскольку он содержит элементы противоположных знаков). Исключаем ведущую неизвестную x_1 . Прибавляем к первой и ко второй строкам третью. Полученные строки записываем в матрицу $(A' | b')$ (индексы комбинируемых строк указаны справа в скобках):

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow (A' | b') = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \begin{matrix} (1,3) \\ (2,3) \end{matrix}.$$

2. Решаем полученную систему неравенств:

$$\begin{cases} 4 \cdot x_2 \geq 4, \\ -2 \cdot x_2 \geq -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 \geq 1, \\ -x_2 \geq -1, \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = 1.$$

Получили единственное решение, следовательно, исходная система неравенств совместна.

Обратный ход. 3. Выражаем неизвестную x_1 из каждого неравенства исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1 - 4x_2 \geq -3, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \geq 3 - 2x_2, \\ x_1 \geq -3 + 4x_2, \\ -x_1 \geq 1 - 2x_2. \end{cases}$$

4. Записываем "цепочку" систем, полученных в результате прямого и обратного хода:

$$\begin{cases} x_1 \geq 3 - 2x_2, \\ x_1 \geq -3 + 4x_2, \\ -x_1 \geq 1 - 2x_2, \end{cases} \Rightarrow x_2 = 1.$$

Эта "цепочка" систем дает полное описание множества M решений исходной системы (см. рис.3.35,в). Подставим $x_2 = 1$ в первую систему "цепочки":

$$\begin{cases} x_1 \geq 3 - 2 \cdot 1, \\ x_1 \geq -3 + 4 \cdot 1, \\ -x_1 \geq 1 - 2 \cdot 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \geq 1, \\ x_1 \geq 1, \\ -x_1 \geq -1, \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 1.$$

Следовательно, исходная система имеет единственное решение $(1, 1)$, отмеченное на рис.3.35,в точкой M .

г) **Прямой ход.** 1. Составляем расширенную матрицу системы

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 11 \\ -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

и выбираем первый столбец матрицы A в качестве ведущего (поскольку он содержит элементы противоположных знаков). Исключаем ведущую неизвестную x_1 , комбинируя строки с ведущими элементами противоположных знаков. Прибавляем ко второй строке первую, а к третьей строке – первую, умноженную на 2; затем прибавляем ко второй строке четвертую, а к третьей строке – четвертую, умноженную на 2. Полученные строки записываем в матрицу $(A' | b')$ (индексы комбинируемых строк указаны справа в скобках):

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 11 \\ -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow (A' | b') = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & 9 \end{array} \right) \begin{matrix} (1,2) \\ (1,3) \\ (2,4) \\ (3,4) \end{matrix}$$

2. Решаем полученную систему неравенств:

$$\begin{cases} -2 \cdot x_2 \geq -6, \\ 3 \cdot x_2 \geq 1, \\ x_2 \geq -2, \\ 9 \cdot x_2 \geq 9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 \geq -3, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

Получили отрезок $1 \leq x_2 \leq 3$ оси Ox_2 – проекцию множества M решений исходной системы неравенств. Следовательно, исходная система неравенств совместна.

Обратный ход. 3. Выражаем неизвестную x_1 из каждого неравенства исходной системы:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \geq -5, \\ x_1 - x_2 \geq -1, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 11, \\ -x_1 + 2x_2 \geq -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 \geq -5 + x_2, \\ x_1 \geq -1 + x_2, \\ x_1 \geq \frac{11}{2} - \frac{5}{2} \cdot x_2, \\ -x_1 \geq -1 - 2 \cdot x_2. \end{cases}$$

4. Записываем "цепочку" систем, полученных в результате прямого и обратного хода:

$$\begin{cases} -x_1 \geq -5 + x_2, \\ x_1 \geq -1 + x_2, \\ x_1 \geq \frac{11}{2} - \frac{5}{2} \cdot x_2, \\ -x_1 \geq -1 - 2 \cdot x_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_2 \geq -3, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

Эта "цепочка" систем дает полное описание множества M решений исходной системы, которое представляет собой незаштрихованный четырехугольник M на рис.3.35,г.

Найдем какое-либо решение исходной системы. Подставим, например, решение $x_2 = 2$ второй системы "цепочки" в первую систему "цепочки":

$$\begin{cases} -x_1 \geq -5 + 2, \\ x_1 \geq -1 + 2, \\ x_1 \geq \frac{11}{2} - \frac{5}{2} \cdot 2, \\ -x_1 \geq -1 - 2 \cdot 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 \geq -3, \\ x_1 \geq 1, \\ x_1 \geq \frac{1}{2}, \\ -x_1 \geq -5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 \geq -3, \\ x_1 \geq 1. \end{cases}$$

Следовательно, при $x_2 = 2$ любое число x_1 из промежутка $[1; 3]$ удовлетворяет исходной системе. Например, пара $(2, 2)$ является решением системы. ■

3.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.3.1. Канонические уравнения линий второго порядка

Рассмотрим *задачу приведения* уравнения линии второго порядка к наиболее простому (каноническому) виду.

Напомним (см. разд.3.1.3), что алгебраической линией второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в какой-либо аффинной системе координат Ox_1x_2 может быть задано уравнением вида

$$p(x_1, x_2) = 0,$$

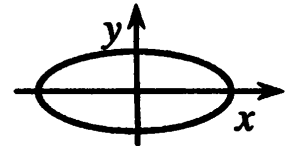
где $p(x_1, x_2)$ – многочлен второй степени двух переменных x_1, x_2 .

Требуется найти прямоугольную систему координат, в которой уравнение линии приняло бы наиболее простой вид.

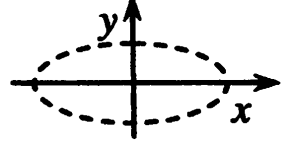
Результатом решения поставленной задачи является следующая основная теорема.

Теорема 3.3 (классификация алгебраических линий второго порядка). Для любой алгебраической линии второго порядка существует прямоугольная система координат Oxy , в которой уравнение этой линии принимает один из следующих девяти канонических видов:

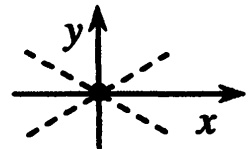
1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ уравнение эллипса;



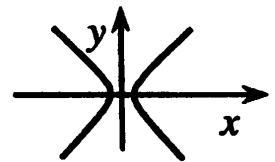
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ уравнение мнимого эллипса;



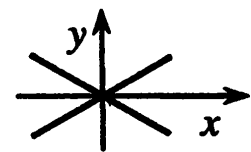
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ уравнение пары мнимых
пересекающихся прямых;



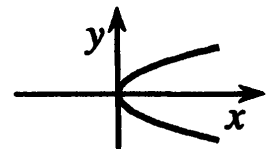
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ уравнение гиперболы;



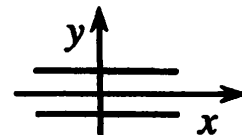
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ уравнение пары пересекающихся
прямых;



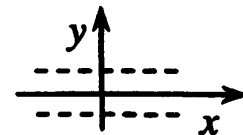
6. $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ уравнение параболы;



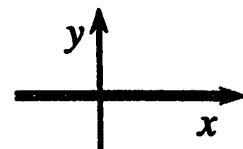
7. $y^2 - b^2 = 0$ уравнение пары параллельных прямых;



8. $y^2 + b^2 = 0$ уравнение пары мнимых параллельных прямых;



9. $y^2 = 0$ уравнение пары совпадающих прямых.



В этих уравнениях $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$, причем $a \geq b$ в уравнениях 1,2.

Теорема 3.3 дает *аналитические определения* линий второго порядка. Согласно п.2 замечаний 3.1, линии (1),(4),(5),(6),(7),(9) называются *вещественными (действительными)*, а линии (2),(3),(8) – *мнимыми*.

Приведем доказательство теоремы, поскольку оно фактически содержит алгоритм решения поставленной задачи.

Без ограничения общности можно предполагать, что уравнение линии второго порядка задано в прямоугольной системе координат Oxy . В противном случае можно перейти от непрямоугольной системы координат Ox_1x_2 к прямоугольной Oxy (см. разд.2.2.2), при этом уравнение линии будет иметь тот же вид и ту же степень согласно теореме 3.1 (см. разд.3.1.3).

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy алгебраическая линия второго порядка задана уравнением

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot y + a_0 = 0, \quad (3.34)$$

в котором хотя бы один из старших коэффициентов a_{11} , a_{12} , a_{22} отличен от нуля, т.е. левая часть (3.34) – многочлен двух переменных x , y второй степени. Коэффициенты при первых степенях переменных x и y , а также при их произведении $x \cdot y$ взяты удвоенными просто для удобства дальнейших преобразований.

Для приведения уравнения (3.34) к каноническому виду используются следующие преобразования прямоугольных координат (см. разд.2.2.3):

– поворот на угол φ
$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi, \\ y = x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi; \end{cases} \quad (3.35)$$

– параллельный перенос
$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'; \end{cases} \quad (3.36)$$

– изменение направлений координатных осей (отражения в координатных осях):

$$\text{оси ординат } \begin{cases} x = x', \\ y = -y', \end{cases} \quad \text{оси абсцисс } \begin{cases} x = -x', \\ y = y', \end{cases} \quad \text{обеих осей } \begin{cases} x = -x', \\ y = -y'; \end{cases} \quad (3.37)$$

– переименование координатных осей (отражение в прямой $y = x$)

$$\begin{cases} x = y', \\ y = x', \end{cases} \quad (3.38)$$

где x, y и x', y' – координаты произвольной точки в старой (Oxy) и новой ($O'x'y'$) системах координат соответственно.

Кроме преобразования координат обе части уравнения можно умножать на отличное от нуля число.

Рассмотрим сначала частные случаи, когда уравнение (3.34) имеет вид:

$$(I): \lambda_2 \cdot y^2 + a_0 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0;$$

$$(II): \lambda_2 \cdot y^2 + 2 \cdot a_1 \cdot x = 0, \quad \lambda_2 \neq 0, a_1 \neq 0;$$

$$(III): \lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot y^2 + a_0 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0.$$

Эти уравнения (также многочлены в левых частях) называются *приведенными*. Покажем, что приведенные уравнения (I),(II),(III) сводятся к каноническим (1)–(9).

Уравнение (I). Если в уравнении (I) свободный член равен нулю ($a_0 = 0$), то, разделив обе части уравнения $\lambda_2 \cdot y^2 = 0$ на старший коэффициент ($\lambda_2 \neq 0$), получим $y^2 = 0$ – уравнение двух совпадающих прямых (9), содержащих ось абсцисс ($y = 0$). Если же свободный член отличен от нуля ($a_0 \neq 0$), то разделим обе части уравнения (I) на старший коэффициент

($\lambda_2 \neq 0$): $y^2 + \frac{a_0}{\lambda_2} = 0$. Если величина $\frac{a_0}{\lambda_2}$ отрицательная, то, обозначив ее

через $-b^2$, где $b = \sqrt{-\frac{a_0}{\lambda_2}}$, получаем $y^2 - b^2 = 0$ – уравнение пары парал-

лельных прямых (7): $y = b$ или $y = -b$. Если же величина $\frac{a_0}{\lambda_2}$ положитель-

ная, то, обозначив ее через b^2 , где $b = \sqrt{\frac{a_0}{\lambda_2}}$, получаем $y^2 + b^2 = 0$ – уравне-

ние пары мнимых параллельных прямых (8). Это уравнение не имеет действительных решений, поэтому на координатной плоскости нет точек, отвечающих этому уравнению. Однако в области комплексных чисел уравнение $y^2 + b^2 = 0$ имеет два сопряженных решения $y = \pm ib$, которые иллюстрируются штриховыми линиями (см. п.8 теоремы 3.3).

Уравнение (II). Разделим уравнение на старший коэффициент ($\lambda_2 \neq 0$)

и перенесем линейный член в правую часть: $y^2 = -\frac{2 \cdot a_1}{\lambda_2} \cdot x$. Если величина

$\frac{a_1}{\lambda_2}$ отрицательная, то, обозначая $p = -\frac{a_1}{\lambda_2} > 0$, получаем $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ –

уравнение параболы (6). Если величина $\frac{a_1}{\lambda_2}$ положительная, то, изменяя на-

правление оси абсцисс, т.е. выполняя второе преобразование в (3.37), полу-

чаем уравнение $(y')^2 = \frac{2 \cdot a_1}{\lambda_2} \cdot x'$ или $(y')^2 = 2 \cdot p \cdot x'$, где $p = \frac{a_1}{\lambda_2} > 0$. Это

уравнение параболы в новой системе координат $Ox'y'$.

Уравнение (III). Возможны два случая: либо старшие коэффициенты одного знака (*эллиптический случай*), либо противоположных знаков (*гиперболический случай*).

В *эллиптическом случае* ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$) при $a_0 \neq 0$ переносим свободный член в правую часть и делим обе части на $-a_0 \neq 0$:

$$(III) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot y^2 = -a_0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{-a_0} \cdot x^2 + \frac{\lambda_2}{-a_0} \cdot y^2 = 1.$$

Если знак старших коэффициентов λ_1, λ_2 противоположен знаку a_0 , то; обозначая положительные величины $\frac{-a_0}{\lambda_1}$ и $\frac{-a_0}{\lambda_2}$ через a^2 и b^2 , полу-

чаем $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – *уравнение эллипса* (1).

Если знак старших коэффициентов λ_1, λ_2 совпадает со знаком a_0 , то, обозначая положительные величины $\frac{a_0}{\lambda_1}$ и $\frac{a_0}{\lambda_2}$ через a^2 и b^2 , получаем

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ – уравнение мнимого эллипса (2). Это}$$

уравнение не имеет действительных решений. Однако оно имеет решения в области комплексных чисел, которые иллюстрируются штриховой линией (см. п.2 теоремы 3.3).

Можно считать, что в уравнениях эллипса (действительного или мнимого) коэффициенты удовлетворяют неравенству $a \geq b$, в противном случае

этого можно добиться, переименовав координатные оси, т.е. делая преобразование (3.38) системы координат.

Если свободный член уравнения (III) равен нулю ($a_0 = 0$), то, обозначая положительные величины $\frac{1}{|\lambda_1|}$ и $\frac{1}{|\lambda_2|}$ через a^2 и b^2 , получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ — уравнение пары мнимых пересекающихся прямых (3).}$$

Этому уравнению удовлетворяет только точка с координатами $x = 0$ и $y = 0$, т.е. точка O — начало координат. Однако в области комплексных чисел левую часть уравнения можно разложить на множители

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{y}{b} + i \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \left(\frac{y}{b} - i \cdot \frac{x}{a} \right),$$

поэтому уравнение имеет сопряженные решения $y = \pm i \frac{b}{a} \cdot x$, которые иллюстрируются штриховыми линиями, пересекающимися в начале координат (см. п.3 теоремы 3.3).

В гиперболическом случае ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$) при $a_0 \neq 0$ переносим свободный член в правую часть и делим обе части на $-a_0 \neq 0$:

$$(III) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot y^2 = -a_0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{-a_0} \cdot x^2 + \frac{\lambda_2}{-a_0} \cdot y^2 = 1.$$

Величины $\frac{-a_0}{\lambda_1}$ и $\frac{-a_0}{\lambda_2}$ имеют противоположные знаки. Без ограничения общности считаем, что знак λ_2 совпадает со знаком свободного члена

a_0 , т.е. $\frac{a_0}{\lambda_2} > 0$. В противном случае нужно переименовать координатные

оси, т.е. сделать преобразование (3.38) системы координат. Обозначая положительные величины $\frac{-a_0}{\lambda_1}$ и $\frac{a_0}{\lambda_2}$ через a^2 и b^2 , получаем $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — уравнение гиперболы (4).

Пусть в уравнении (III) свободный член равен нулю ($a_0 = 0$). Тогда можно считать, что $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_2 < 0$ (в противном случае обе части уравне-

ния умножим на -1). Обозначая положительные величины $\frac{1}{\lambda_1}$ и $-\frac{1}{\lambda_2}$ че-

рез a^2 и b^2 , получаем $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — уравнение пары пересекающихся пря-

мых (5). Уравнения прямых находятся в результате разложения на множители левой части уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$, т.е. $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$.

Таким образом, приведенные уравнения (I),(II),(III) алгебраической линии второго порядка сводятся к одному из канонических видов (1) – (9), перечисленных в теореме 3.3.

Осталось показать, что общее уравнение (3.34) можно свести к приведенным при помощи преобразований прямоугольной системы координат.

Упрощение общего уравнения (3.34) производится в два этапа. На первом этапе при помощи поворота системы координат "уничтожается" член с произведением неизвестных. Если произведения неизвестных нет ($a_{12} = 0$), то поворот делать не надо (в этом случае переходим сразу ко второму этапу). На втором этапе при помощи параллельного переноса "уничтожаются" один или оба члена первой степени. В результате получаются *приведенные* уравнения (I),(II),(III).

Первый этап: преобразование уравнения линии второго порядка при повороте прямоугольной системы координат.

Если коэффициент $a_{12} \neq 0$, выполним поворот системы координат на угол φ . Подставляя выражения (3.35) в уравнение (3.34), получаем:

$$a_{11} \cdot (x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi)^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot (x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi) \cdot (x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi) + \\ + a_{22} \cdot (x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi)^2 + 2 \cdot a_1 \cdot (x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi) + \\ + 2 \cdot a_2 \cdot (x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi) + a_0 = 0.$$

Приводя подобные члены, приходим к уравнению вида (3.34):

$$a'_{11} \cdot (x')^2 + 2 \cdot a'_{12} \cdot x' \cdot y' + a'_{22} \cdot (y')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + a'_0 = 0, \quad (3.39)$$

где

$$a'_{11} = a_{11} \cdot \cos^2 \varphi + 2 \cdot a_{12} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + a_{22} \cdot \sin^2 \varphi;$$

$$a'_{12} = -a_{11} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + a_{12} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + a_{22} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi;$$

$$a'_{22} = a_{11} \cdot \sin^2 \varphi - 2 \cdot a_{12} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + a_{22} \cdot \cos^2 \varphi;$$

$$a'_1 = a_1 \cdot \cos \varphi + a_2 \cdot \sin \varphi; \quad a'_2 = -a_1 \cdot \sin \varphi + a_2 \cdot \cos \varphi; \quad a'_0 = a_0.$$

Определим угол φ так, чтобы $a'_{12} = 0$. Преобразуем выражение для a'_{12} , переходя к двойному углу:

$$a'_{12} = -\frac{1}{2} \cdot a_{11} \cdot \sin 2\varphi + a_{12} \cdot \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \cdot a_{22} \cdot \sin 2\varphi = \frac{a_{22} - a_{11}}{2} \cdot \sin 2\varphi + a_{12} \cdot \cos 2\varphi.$$

Угол φ должен удовлетворять однородному тригонометрическому уравнению $\frac{a_{22} - a_{11}}{2} \cdot \sin 2\varphi + a_{12} \cdot \cos 2\varphi = 0$, которое равносильно уравнению

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2 \cdot a_{12}}, \quad (3.40)$$

поскольку $a_{12} \neq 0$. Это уравнение имеет бесконечное количество корней

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arcctg} \frac{a_{11} - a_{22}}{2 \cdot a_{12}} + \frac{\pi}{2} \cdot n, \text{ где } n \in Z.$$

Выберем любой из них, например, угол φ из интервала $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Тогда в уравнении (3.39) исчезнет член $2 \cdot a'_{12} \cdot x' \cdot y'$, поскольку $a'_{12} = 0$. Обозначив оставшиеся старшие коэффициенты через $\lambda_1 = a'_{11}$ и $\lambda_2 = a'_{22}$, получим уравнение

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + a'_0 = 0. \quad (3.41)$$

Согласно теореме 3.1, уравнение (3.41) является уравнением второй степени (при преобразовании (3.35) порядок линии сохраняется), т.е. хотя бы один из старших коэффициентов λ_1 или λ_2 отличен от нуля. Далее будем считать, что именно коэффициент при $(y')^2$ не равен нулю ($\lambda_2 \neq 0$). В противном случае (при $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_1 \neq 0$) следует сделать поворот системы координат на угол $\varphi + \frac{\pi}{2}$, который также удовлетворяет условию (3.40). Тогда вместо координат x', y' в (3.41) получим $y', -x'$ соответственно, т.е. отличный от нуля коэффициент λ_1 будет при $(y')^2$.

Второй этап: преобразование уравнения линии второго порядка при параллельном переносе прямоугольной системы координат.

Уравнение (3.41) можно упростить, выделяя полные квадраты. Нужно рассмотреть два случая: $\lambda_1 \neq 0$ или $\lambda_1 = 0$ (согласно предположению $\lambda_2 \neq 0$), которые называются *центральный* (включающий эллиптический и гиперболический случаи) или *параболический* соответственно. Геометрический смысл этих названий раскрывается в дальнейшем.

Центральный случай: $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Выделяя полные квадраты по переменным x', y' , получаем

$$\lambda_1 \cdot \left[(x')^2 + 2 \cdot \frac{a'_1}{\lambda_1} \cdot x' + \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 \right] + \lambda_2 \cdot \left[(y')^2 + 2 \cdot \frac{a'_2}{\lambda_2} \cdot y' + \left(\frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 \right] -$$

$$- \lambda_1 \cdot \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \cdot \left(\frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 + a'_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \cdot \left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{a'_1}{\lambda_1}\right)^2 - \lambda_2 \cdot \left(\frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 + a'_0 = 0.$$

После замены переменных

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}, \\ y'' = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}, \end{cases} \quad (3.42)$$

получаем уравнение

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 + a''_0 = 0, \quad (3.43)$$

где $a''_0 = -\lambda_1 \cdot \left(\frac{a'_1}{\lambda_1}\right)^2 - \lambda_2 \cdot \left(\frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 + a'_0$.

Параболический случай: $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Выделяя полный квадрат по переменной y' , получаем

$$\begin{aligned} \lambda_2 \cdot \left[(y')^2 + 2 \cdot \frac{a'_2}{\lambda_2} \cdot y' + \left(\frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 \right] + 2 \cdot a'_1 \cdot x' - \lambda_2 \cdot \left(\frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 + a'_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_2 \cdot \left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' - \lambda_2 \cdot \left(\frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 + a'_0 &= 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Если $a'_1 \neq 0$, то последнее уравнение приводится к виду

$$\lambda_2 \cdot \left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot \left[x' + \frac{a'_0}{2 \cdot a'_1} - \frac{\lambda_2}{2 \cdot a'_1} \cdot \left(\frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 \right] = 0.$$

Сделав замену переменных

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{a'_0}{2 \cdot a'_1} - \frac{\lambda_2}{2 \cdot a'_1} \cdot \left(\frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2, \\ y'' = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}, \end{cases} \quad (3.45)$$

получим

$$\lambda_2 \cdot (y'')^2 + 2 \cdot a''_1 \cdot x'' = 0, \quad (3.46)$$

где $a''_1 = a'_1$.

Если $a'_1 = 0$, то уравнение (3.44) приводится к виду

$$\lambda_2 \cdot (y'')^2 + a_0'' = 0, \quad (3.47)$$

где $a_0'' = -\lambda_2 \cdot \left(\frac{a_2'}{\lambda_2}\right)^2 + a_0'$,

$$\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}. \end{cases} \quad (3.48)$$

Замены переменных (3.42), (3.45), (3.48) соответствуют параллельному переносу системы координат $Ox'y'$ (см. п.1"а" замечаний 2.3).

Таким образом, при помощи параллельного переноса системы координат $Ox'y'$ получаем новую систему координат $O''x''y''$, в которой уравнение линии второго порядка принимает вид (3.43), или (3.46), или (3.47). Эти уравнения являются приведенными (вида (III),(II) или (I) соответственно).

Основная теорема 3.3 о приведении уравнения алгебраической линии второго порядка к каноническому виду доказана.

З а м е ч а н и я 3.8.

1. Система координат, в которой уравнение алгебраической линии второго порядка имеет канонический вид, называется *канонической*. Каноническая система координат определяется неоднозначно. Например, изменяя направление оси ординат на противоположное, снова получаем каноническую систему координат, так как замена переменной y на $(-y)$ не изменяет уравнений (1) – (9). Поэтому ориентация канонической системы координат не имеет принципиального значения, ее всегда можно сделать правой, изменив при необходимости направление оси ординат.

2. В разделе 2.2.3 показано, что преобразования прямоугольных систем координат на плоскости сводятся к одному из преобразований (2.9) или (2.10):

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi, \\ y = y_0 + x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0 + x' \cdot \cos \varphi + y' \cdot \sin \varphi, \\ y = y_0 + x' \cdot \sin \varphi - y' \cdot \cos \varphi. \end{cases}$$

Поэтому задача приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду сводится к нахождению начала $O'(x_0, y_0)$ канонической системы координат $O'x'y'$ и угла φ наклона ее оси абсцисс $O'x'$ к оси абсцисс Ox исходной системы координат Oxy .

3. В случаях (3),(5),(7),(8),(9) линии называются *распадающимися*, поскольку соответствующие им многочлены второй степени разлагаются в произведение многочленов первой степени.

ПОРЯДОК ПРИВЕДЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy алгебраическая линия второго порядка задана уравнением (3.34):

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot y + a_0 = 0.$$

Чтобы привести уравнение к каноническому виду, нужно выполнить следующие действия.

1. Если в уравнении имеется член с произведением неизвестных ($a_{12} \neq 0$), то делаем поворот системы координат:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi, \\ y = x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

на угол φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), удовлетворяющий равенству $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2 \cdot a_{12}}$. При этом получим "почти" приведенное уравнение линии второго порядка:

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + a_0 = 0.$$

Если $a_{12} = 0$, переходим к п.2, поворот системы координат делать не нужно, так как исходное уравнение имеет "почти" приведенный вид.

2. Выполняем параллельный перенос системы координат:

а) если в уравнении нет линейных членов, то переходим к п.3;

б) если в уравнении имеется линейный член с какой-либо неизвестной и квадратичный член с этой же неизвестной, то, дополняя эти члены до полного квадрата, делаем замену, чтобы в уравнении не стало линейного члена с этой неизвестной. Например, если в уравнении $\lambda_1 \neq 0$ и $a'_1 \neq 0$, то выполняем преобразования:

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' = \lambda_1 \cdot \left[(x')^2 + 2 \cdot \frac{a'_1}{\lambda_1} \cdot x' + \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 \right] - \lambda_1 \cdot \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 = \lambda_1 \cdot \left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2,$$

а затем замену неизвестных $x'' = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $y'' = y'$, после которой в уравнении не будет линейного члена с неизвестной x'' ;

в) если в уравнении имеется только один линейный член с какой-либо неизвестной, а квадрат этой неизвестной отсутствует, то при помощи замены этой переменной надо сделать равным нулю свободный член уравнения. Например, если уравнение имеет вид

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + a_0 = 0,$$

то, выполняя замену неизвестных $x'' = x'$, $y'' = y' + \frac{a_0}{2 \cdot a'_2}$, получаем уравне-

ние без свободного члена: $\lambda_1 \cdot (x'')^2 + 2 \cdot a'_2 \cdot y'' = 0$.

3. Полученное в результате упрощений (п.2) уравнение имеет "почти" канонический вид [9]. Для окончательного упрощения "почти" канонического уравнения при необходимости применяются следующие преобразования:

- а) переименование координатных осей: $x' = y''$, $y' = x''$;
- б) изменение направления координатной оси, например оси абсцисс: $x' = -x''$, $y' = y''$;
- в) умножение обеих частей уравнения на отличный от нуля множитель;
- г) перенос членов из одной части уравнения в другую.

В результате этих преобразований уравнение приводится к каноническому виду. Замену неизвестных, приводящую уравнение поверхности к каноническому виду, определяем как композицию всех замен, применяемых в ходе решения.

Пример 3.19. В прямоугольной системе координат Oxy заданы уравнения алгебраических линий второго порядка:

- а) $x^2 - y^2 - 4 \cdot x + 6 \cdot y - 5 = 0$;
- б) $x^2 - 4 \cdot x + 4 \cdot y + 4 = 0$;
- в) $3 \cdot x^2 + 10 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2 + 8 = 0$;
- г) $52 \cdot x^2 + 72 \cdot x \cdot y + 73 \cdot y^2 - 280 \cdot x - 290 \cdot y + 325 = 0$.

Каждое уравнение привести к каноническому виду. Указать связь между исходной и канонической системами координат.

□ а) Сравнивая заданное уравнение с общим уравнением (3.34), находим коэффициенты $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 3$, $a_0 = -5$.

1. Поскольку $a_{12} = 0$, поворот системы координат делать не нужно.

2. В уравнении имеются квадраты обеих неизвестных. Преобразуем левую часть заданного уравнения, выделяя полные квадраты:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 4 \cdot x + 6 \cdot y - 5 &= (x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) - 2^2 - (y^2 - 2 \cdot 3 \cdot y + 3^2) + 3^2 - 5 = \\ &= (x - 2)^2 - (y - 3)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение можно записать в виде $(x - 2)^2 - (y - 3)^2 = 0$. Делая замену

$$\begin{cases} x' = x - 2, \\ y' = y - 3, \end{cases} \text{ или, выражая старые координаты через новые: } \begin{cases} x = x' + 2, \\ y = y' + 3, \end{cases}$$

получаем $\frac{(x')^2}{1^2} - \frac{(y')^2}{1^2} = 0$ – каноническое уравнение пары пересекающихся

прямых (см. уравнение (5) в теореме 3.3 при $a = b = 1$). В данном случае п.3 алгоритма не выполняется.

б) Сравнивая заданное уравнение с общим уравнением (3.34), находим коэффициенты $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_1 = -2$, $a_2 = 2$, $a_0 = 4$.

1. Поскольку в заданном уравнении нет произведения неизвестных ($a_{12} = 0$), то уравнение имеет "почти" приведенный вид.

2. Выделяя полный квадрат по неизвестной x , получаем

$$(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) - 2^2 + 4 \cdot y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = -2 \cdot 2 \cdot y.$$

Делая замену

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x - 2, \end{cases} \text{ или, выражая старые координаты через новые: } \begin{cases} x = y' + 2, \\ y = -x', \end{cases}$$

получаем $(y')^2 = 2 \cdot 2 \cdot x'$ – каноническое уравнение параболы (см. уравнение (б) в теореме 3.3 при $p = 2$).

в) Сравнивая заданное уравнение с общим уравнением (3.34), находим коэффициенты $a_{11} = 3$, $a_{12} = 5$, $a_{22} = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_0 = 8$.

1. В заданном уравнении имеется произведение неизвестных ($a_{12} = 5 \neq 0$), поэтому необходимо сделать поворот системы координат. Величину φ угла поворота находим по формуле (3.40):

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2 \cdot a_{12}} = \frac{3 - 3}{2 \cdot 5} = 0,$$

т.е. $\varphi = \frac{\pi}{4}$, учитывая ограничение $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. При повороте системы координат на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ старые координаты выражаются через новые по формулам (3.35):

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y', \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y'. \end{cases}$$

Подставляя их в левую часть заданного уравнения, получаем

$$3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right)^2 + 8 = 0.$$

Раскрываем скобки и приводим подобные члены:

$$\frac{3+10+3}{2} \cdot (x')^2 + \frac{3(-2)+3 \cdot 2}{2} \cdot x' \cdot y' + \frac{3-10+3}{2} \cdot (y')^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 8 \cdot (x')^2 - 2 \cdot (y')^2 + 8 = 0.$$

2. Так как линейные члены отсутствуют, то параллельный перенос системы координат делать не нужно.

3. Переносим свободный член в правую часть и делим обе части уравнения на (-8) :

$$-\frac{(x')^2}{1^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1.$$

Осталось поменять названия координатных осей, т.е. сделать замену

$$\begin{cases} x' = y'' \\ y' = x'' \end{cases}, \text{ после которой получаем } \frac{(x'')^2}{2^2} - \frac{(y'')^2}{1^2} = 1 - \text{каноническое уравнение гиперболы (см. уравнение (4) в теореме 3.3 при } a=2, b=1). \text{ Найдем формулы перехода от исходной системы координат } Oxy \text{ к канонической } Ox''y''. \text{ Подставляя } \begin{cases} x' = y'' \\ y' = x'' \end{cases}, \text{ в формулы поворота на угол } \varphi = \frac{\pi}{4}, \text{ получаем}$$

формулы поворота на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$, получаем

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y'' - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x'' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y'' + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x'' \end{cases}$$

г) Сравнивая заданное уравнение с общим уравнением (3.34), находим коэффициенты $a_{11} = 52$, $a_{12} = 36$, $a_{22} = 73$, $a_1 = -140$, $a_2 = -145$, $a_0 = 325$.

1. В заданном уравнении имеется произведение неизвестных ($a_{12} = 36 \neq 0$), поэтому необходимо сделать поворот системы координат.

Величину φ угла поворота находим по формуле (3.40):

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2 \cdot a_{12}} = \frac{52 - 73}{2 \cdot 36} = \frac{-21}{72} = -\frac{7}{24}.$$

Так как $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{2 \cdot \operatorname{tg} \varphi}$, то из уравнения $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{2 \cdot \operatorname{tg} \varphi} = -\frac{7}{24}$ находим тангенс

искомого угла: $24 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi - 14 \cdot \operatorname{tg} \varphi - 24 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{4}$ или $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}$. Ограничению $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ удовлетворяет острый угол $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Вычисляем

косинус угла: $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ удовлетворяет острый угол $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Вычисляем

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{3}{5}, \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{4}{5} \text{ и делаем замену:}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5} \cdot x' - \frac{4}{5} \cdot y' \\ y = \frac{4}{5} \cdot x' + \frac{3}{5} \cdot y' \end{cases}$$

соответствующую повороту (3.35) на угол $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Получаем уравнение

$$52 \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot x' - \frac{4}{5} \cdot y'\right)^2 + 72 \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot x' - \frac{4}{5} \cdot y'\right) \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot x' + \frac{3}{5} \cdot y'\right) + 73 \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot x' + \frac{3}{5} \cdot y'\right)^2 - 280 \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot x' - \frac{4}{5} \cdot y'\right) - 290 \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot x' + \frac{3}{5} \cdot y'\right) + 325 = 0.$$

Раскрываем скобки и приводим подобные члены:

$$\frac{52 \cdot 9 + 72 \cdot 12 + 73 \cdot 16}{25} \cdot (x')^2 + \frac{52 \cdot (-24) + 72 \cdot (9 - 16) + 73 \cdot 24}{25} \cdot x' \cdot y' + \frac{52 \cdot 16 + 72 \cdot (-12) + 73 \cdot 9}{25} \cdot (y')^2 + \frac{-280 \cdot 3 - 290 \cdot 4}{5} \cdot x' + \frac{-280 \cdot (-4) - 290 \cdot 3}{5} \cdot y' + 325 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100 \cdot (x')^2 + 25 \cdot (y')^2 - 400 \cdot x' + 50 \cdot y' + 325 = 0.$$

Получили приведенное уравнение (III).

2. "Уничтожаем" линейные члены, выделяя полные квадраты:

$$100 \cdot (x' - 2)^2 + 25 \cdot (y' + 1)^2 - 400 - 25 + 325 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 100 \cdot (x' - 2)^2 + 25 \cdot (y' + 1)^2 - 100 = 0.$$

После замены

$$\begin{cases} x'' = x' - 2, \\ y'' = y' + 1, \end{cases} \text{ или, выражая старые координаты через новые: } \begin{cases} x' = x'' + 2, \\ y' = y'' - 1, \end{cases}$$

получаем $100 \cdot (x'')^2 + 25 \cdot (y'')^2 - 100 = 0$.

3. Переносим свободный член в правую часть и делим обе части уравнения на 100:

$$\frac{(x'')^2}{1^2} + \frac{(y'')^2}{2^2} = 1.$$

Это уравнение похоже на каноническое уравнение эллипса (см. уравнение (1) в теореме 3.3 при $a = 1$ и $b = 2$). Однако, его коэффициенты не удовлетворяют неравенству $a \geq b$. Поэтому необходимо переименовать координатные оси, т.е. сделать замену

$\begin{cases} x'' = y''' \\ y'' = x''' \end{cases}$, после которой получаем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{(x''')^2}{2^2} + \frac{(y''')^2}{1^2} = 1.$$

Формулы перехода от исходной системы координат Oxy к канонической получаем как композицию преобразований прямоугольных координат,

подставляя в формулы поворота $\begin{cases} x = \frac{3}{5} \cdot x' - \frac{4}{5} \cdot y' \\ y = \frac{4}{5} \cdot x' + \frac{3}{5} \cdot y' \end{cases}$ выражения параллельно-

го переноса $\begin{cases} x' = x'' + 2, \\ y' = y'' - 1, \end{cases}$ а затем – отражения $\begin{cases} x'' = y''' \\ y'' = x''' \end{cases}$. Первая подста-

новка дает:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5} \cdot (x'' + 2) - \frac{4}{5} \cdot (y'' - 1) = 2 + \frac{3}{5} \cdot x'' - \frac{4}{5} \cdot y'', \\ y = \frac{4}{5} \cdot (x'' + 2) + \frac{3}{5} \cdot (y'' - 1) = 1 + \frac{4}{5} \cdot x'' + \frac{3}{5} \cdot y'', \end{cases}$$

вторая подстановка дает искомую связь

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{4}{5} \cdot x''' + \frac{3}{5} \cdot y''', \\ y = 1 + \frac{3}{5} \cdot x''' + \frac{4}{5} \cdot y'''. \end{cases} \blacksquare$$

3.3.2. Эллипс

ФОКАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ЭЛЛИПСА

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная ($2a$), ббльшая расстояния ($2c$) между этими заданными точками (рис.3.36,а). Это геометрическое определение выражает **фокальное свойство эллипса**.

Точки F_1 и F_2 называются **фокусами** эллипса, расстояние между ними $2c = F_1F_2$ – **фокусным расстоянием**, середина O отрезка F_1F_2 – **центром** эллипса, число $2a$ – **длиной большой оси** эллипса (соответственно, число a – **большой полуосью** эллипса). Отрезки F_1M и F_2M , соединяющие произвольную точку M эллипса с его фокусами, называются **фокальными радиусами** точки M . Отрезок, соединяющий две точки эллипса, называется **хордой эллипса**.

Отношение $e = \frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом** эллипса. Из определения ($2a > 2c$) следует, что $0 \leq e < 1$. При $e = 0$, т.е. при $c = 0$, фокусы F_1 и F_2 , а также центр O совпадают, и эллипс является **окружностью радиуса a** (рис.3.36,б).

Геометрическое определение эллипса, выражающее его фокальное свойство, эквивалентно его аналитическому определению – линии, задаваемой каноническим уравнением эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.49)$$

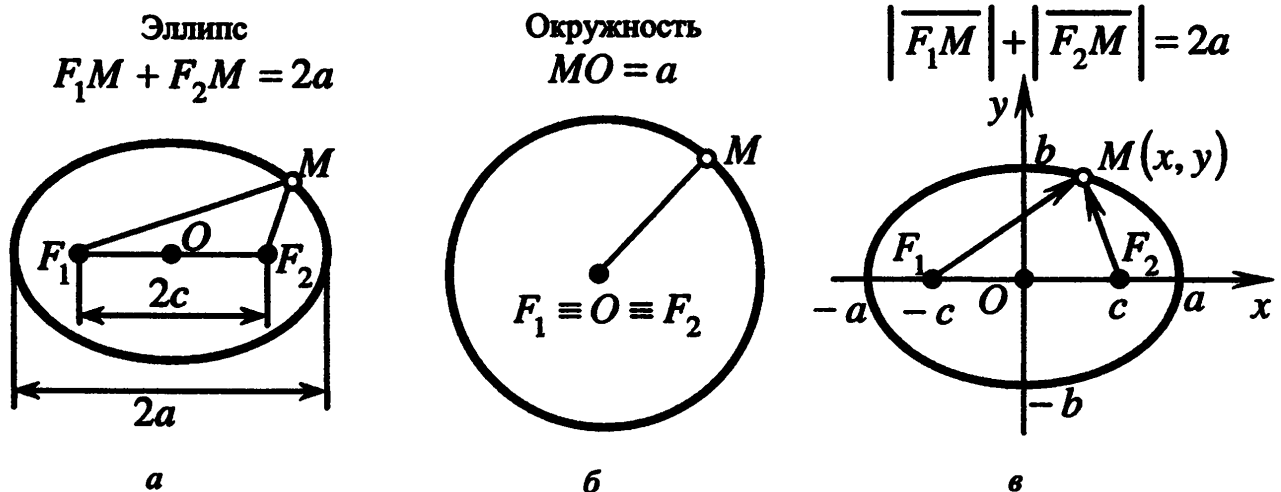


Рис.3.36

Действительно, введем прямоугольную систему координат (рис.3.36,в). Центр O эллипса примем за начало системы координат; прямую, проходящую через фокусы (*фокальную ось* или *первую ось* эллипса), примем за ось абсцисс (положительное направление на ней от точки F_1 к точке F_2); прямую, перпендикулярную фокальной оси и проходящую через центр эллипса (*вторую ось* эллипса), примем за ось ординат (направление на оси ординат выбирается так, чтобы прямоугольная система координат Oxy оказалась правой).

Составим уравнение эллипса, пользуясь его геометрическим определением, выражающим фокальное свойство. В выбранной системе координат определяем координаты фокусов $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Для произвольной точки $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу, имеем:

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a.$$

Записывая это равенство в координатной форме, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Переносим второй радикал в правую часть, возводим обе части уравнения в квадрат и приводим подобные члены:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= 4 \cdot a^2 - 4 \cdot a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 \cdot a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4 \cdot a^2 - 4 \cdot c \cdot x. \end{aligned}$$

Разделив на 4, возводим обе части уравнения в квадрат:

$$\begin{aligned} a^2 \cdot (x-c)^2 + a^2 \cdot y^2 &= a^4 - 2 \cdot a^2 \cdot c \cdot x + c^2 \cdot x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a^2 - c^2) \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 &= a^2 \cdot (a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Обозначив $b = \sqrt{a^2 - c^2} > 0$, получаем $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$. Разделив обе части на $a^2 \cdot b^2 \neq 0$, приходим к каноническому уравнению эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Следовательно, выбранная система координат является канонической.

Если фокусы эллипса совпадают, то эллипс представляет собой окружность (рис.3.36,б), поскольку $a = b$. В этом случае канонической будет любая прямоугольная система координат с началом в точке $O \equiv F_1 \equiv F_2$, а уравнение

$$x^2 + y^2 = a^2$$

является *уравнением окружности* с центром в точке O и радиусом, равным a .

Проводя рассуждения в обратном порядке, можно показать, что все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (3.49), и только они, принадлежат геометрическому месту точек, называемому эллипсом. Другими словами, аналитическое определение эллипса эквивалентно его геометрическому определению, выражающему фокальное свойство эллипса.

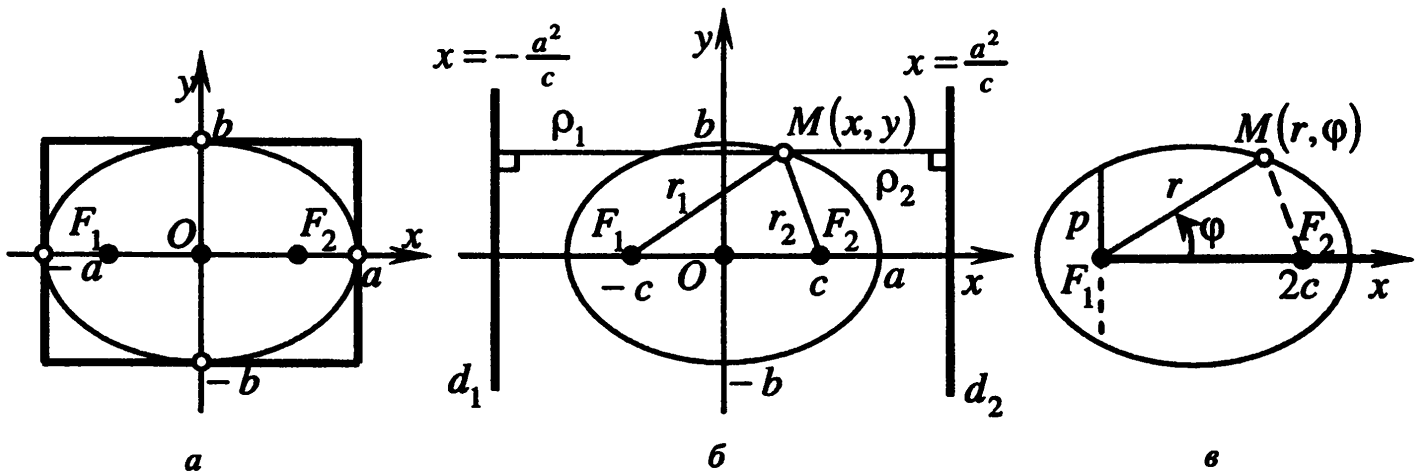


Рис.3.37

ДИРЕКТОРИАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ЭЛЛИПСА

Директрисами эллипса называются две прямые, проходящие параллельно оси ординат канонической системы координат на одинаковом расстоянии $\frac{a^2}{c}$ от нее. При $c = 0$, когда эллипс является окружностью, директрис нет (можно считать, что директрисы бесконечно удалены).

Эллипс с эксцентриситетом $0 < e < 1$ можно определить, как *геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до заданной точки F (фокуса) к расстоянию до заданной прямой d (директрисы), не проходящей через заданную точку, постоянно и равно эксцентриситету e (директориальное свойство эллипса)*. Здесь F и d — один из фокусов эллипса и одна из его директрис, расположенные по одну сторону от оси ординат канонической системы координат, т.е. F_1, d_1 или F_2, d_2 .

В самом деле, например, для фокуса F_2 и директрисы d_2 (рис.3.37,б) условие $\frac{r_2}{\rho_2} = e$ можно записать в координатной форме:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e \cdot \left(\frac{a^2}{c} - x\right).$$

Избавляясь от иррациональности и заменяя $e = \frac{c}{a}$, $a^2 - c^2 = b^2$, приходим к каноническому уравнению эллипса (3.49). Аналогичные рассуждения можно провести для фокуса F_1 и директрисы d_1 : $\frac{r_1}{\rho_1} = e$.

УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПСА В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Уравнение эллипса в полярной системе координат $F_1 r \varphi$ (рис.3.37,в) имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi},$$

где $p = \frac{b^2}{a}$ – *фокальный параметр эллипса*.

В самом деле, выберем в качестве полюса полярной системы координат левый фокус F_1 эллипса, а в качестве полярной оси – луч $F_1 F_2$ (рис.3.37,в). Тогда для произвольной точки $M(r, \varphi)$, согласно геометрическому определению (фокальному свойству) эллипса, имеем $r + MF_2 = 2a$. Выражаем расстояние между точками $M(r, \varphi)$ и $F_2(2c, 0)$ (см. п.2 замечаний 2.8):

$$F_2 M = \sqrt{(2c)^2 + r^2 - 2 \cdot (2c) \cdot r \cdot \cos(\varphi - 0)} = \sqrt{r^2 - 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos \varphi + 4 \cdot c^2}.$$

Следовательно, в координатной форме уравнение эллипса $F_1 M + F_2 M = 2a$ имеет вид

$$r + \sqrt{r^2 - 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos \varphi + 4 \cdot c^2} = 2 \cdot a.$$

Уединяем радикал, возводим обе части уравнения в квадрат, делим на 4 и приводим подобные члены:

$$r^2 - 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos \varphi + 4 \cdot c^2 = 4 \cdot a^2 - 4 \cdot a \cdot r + r^2 \Leftrightarrow a \cdot \left(1 - \frac{c}{a} \cdot \cos \varphi\right) \cdot r = a^2 - c^2.$$

Выражаем полярный радиус r и делаем замену $e = \frac{c}{a}$, $b^2 = a^2 - c^2$, $p = \frac{b^2}{a}$:

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a \cdot (1 - e \cdot \cos \varphi)} \Leftrightarrow r = \frac{b^2}{a \cdot (1 - e \cdot \cos \varphi)} \Leftrightarrow r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi},$$

что и требовалось доказать.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КОЭФФИЦИЕНТОВ В УРАВНЕНИИ ЭЛЛИПСА

Найдем точки пересечения эллипса (см. рис.3.37,а) с координатными осями (*вершины эллипса*). Подставляя в уравнение $y = 0$, находим точки пересечения эллипса с осью абсцисс (с фокальной осью): $x = \pm a$. Следовательно, длина отрезка фокальной оси, заключенного внутри эллипса, равна $2a$. Этот отрезок, как отмечено выше, называется *большой осью эллипса*, а число a – *большой полуосью эллипса*. Подставляя $x = 0$, получаем $y = \pm b$. Следовательно, длина отрезка второй оси эллипса, заключенного

внутри эллипса, равна $2b$. Этот отрезок называется *малой осью эллипса*, а число b – *малой полуосью эллипса*.

Действительно, $b = \sqrt{a^2 - c^2} \leq \sqrt{a^2} = a$, причем равенство $b = a$ получается только в случае $c = 0$, когда эллипс является окружностью. Отношение $k = \frac{b}{a} \leq 1$ называется *коэффициентом сжатия эллипса*.

З а м е ч а н и я 3.9.

1. Прямые $x = \pm a$, $y = \pm b$ ограничивают на координатной плоскости *основной прямоугольник*, внутри которого находится эллипс (см. рис.3.37,а).

2. Эллипс можно определить, как *геометрическое место точек, получаемое в результате сжатия окружности к ее диаметру*.

Действительно, пусть в прямоугольной системе координат Oxy уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = a^2$. При сжатии к оси абсцисс с коэффициентом $0 < k \leq 1$ (см. разд.2.2.4) координаты произвольной точки $M(x, y)$, принадлежащей окружности, изменяются по закону

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = k \cdot y. \end{cases}$$

Подставляя в уравнение окружности $x = x'$ и $y = \frac{1}{k} \cdot y'$, получаем уравнение для координат образа $M'(x', y')$ точки $M(x, y)$:

$$(x')^2 + \left(\frac{1}{k} \cdot y'\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{k^2 \cdot a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1,$$

поскольку $b = k \cdot a$. Это каноническое уравнение эллипса.

3. Координатные оси (канонической системы координат) являются *осями симметрии* эллипса (называются *главными осями эллипса*), а его центр – *центром симметрии*.

Действительно, если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

то и точки $M'(x, -y)$ и $M''(-x, y)$, симметричные точке M относительно координатных осей, также принадлежат тому же эллипсу.

4. Из уравнения эллипса в полярной системе координат $r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi}$

(см. рис.3.37,в), выясняется *геометрический смысл фокального параметра* – это половина длины хорды эллипса, проходящей через его фокус перпендикулярно фокальной оси ($r = p$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

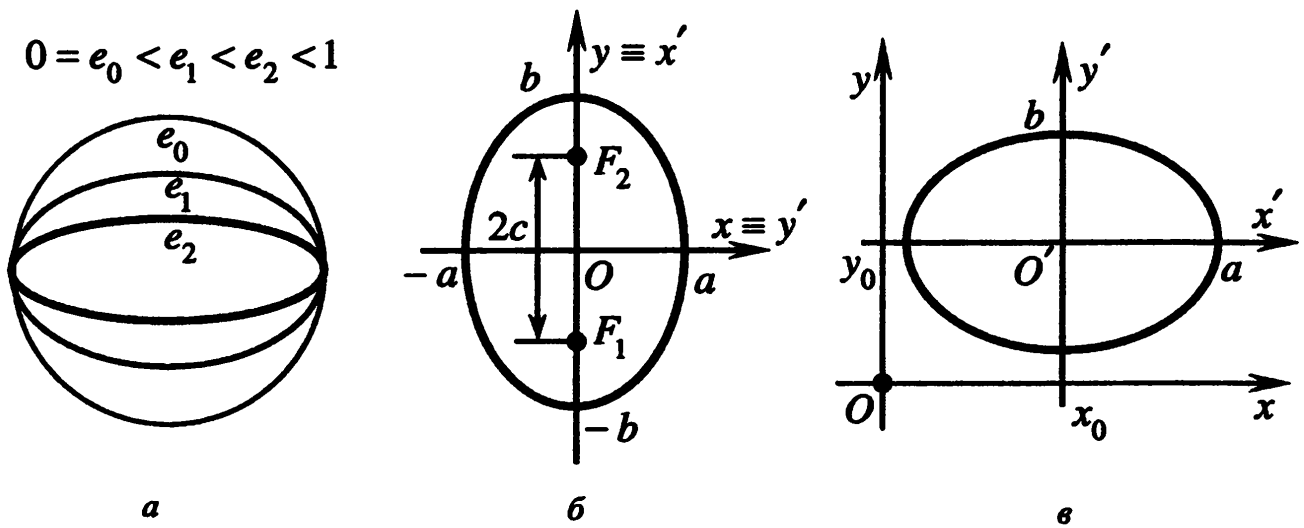


Рис.3.38

5. Эксцентриситет e характеризует форму эллипса, а именно отличие эллипса от окружности. Чем больше e , тем эллипс более вытянут, а чем ближе e к нулю, тем ближе эллипс к окружности (рис.3.38,а).

Действительно, учитывая, что $e = \frac{c}{a}$ и $c^2 = a^2 - b^2$, получаем

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - k^2,$$

где k — коэффициент сжатия эллипса, $0 < k \leq 1$. Следовательно, $e = \sqrt{1 - k^2}$. Чем больше сжат эллипс по сравнению с окружностью, тем меньше коэффициент сжатия k и больше эксцентриситет. Для окружности $k = 1$ и $e = 0$.

6. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при $a < b$ определяет эллипс, фокусы которого расположены на оси Oy (рис.3.38,б). Это уравнение сводится к каноническому при помощи переименования координатных осей (3.38).

7. Уравнение $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, $a \geq b$, определяет эллипс с центром в точке $O'(x_0, y_0)$, оси которого параллельны координатным осям (рис.3.38,в). Это уравнение сводится к каноническому при помощи параллельного переноса (3.36).

При $a = b = R$ уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ описывает окружность радиуса R с центром в точке $O'(x_0, y_0)$.

8. *Параметрическое уравнение эллипса* в канонической системе координат имеет вид

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = b \cdot \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Действительно, подставляя эти выражения в уравнение (3.49), приходим к основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

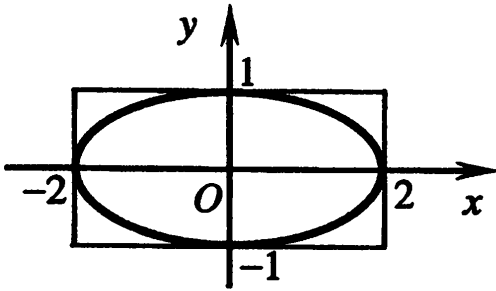


Рис.3.39

Пример 3.20. Изобразить эллипс $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ в канонической системе координат Oxy . Найти полуоси, фокусное расстояние, эксцентриситет, коэффициент сжатия, фокальный параметр, уравнения директрис.

□ Сравнивая заданное уравнение с каноническим, определяем полуоси:

$a = 2$ – большая полуось, $b = 1$ – малая полуось эллипса. Строим основной прямоугольник со сторонами $2a = 4$, $2b = 2$ с центром в начале координат (рис.3.39). Учитывая симметричность эллипса, вписываем его в основной прямоугольник. При необходимости определяем координаты некоторых точек эллипса. Например, подставляя $x = 1$ в уравнение эллипса, получаем $\frac{1^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, точки с координатами $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ принадлежат эллипсу.

Вычисляем коэффициент сжатия $k = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$; фокусное расстояние $2 \cdot c = 2 \cdot \sqrt{a^2 - b^2} = 2 \cdot \sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$; эксцентриситет $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; фокальный параметр $p = \frac{b^2}{a} = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$. Составляем уравнения директрис: $x = \pm \frac{a^2}{c} \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$. ■

3.3.3. Гипербола

ФОКАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ГИПЕРБОЛЫ

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная ($2a$), меньшая расстояния ($2c$) между этими заданными точками (рис.3.40,а). Это геометрическое определение выражает *фокальное свойство гиперболы*.

Точки F_1 и F_2 называются **фокусами** гиперболы, расстояние $2c = F_1F_2$ между ними – **фокусным расстоянием**, середина O отрезка F_1F_2 – **центром** гиперболы, число $2a$ – **длиной действительной оси** гиперболы (соответственно, a – **действительной полуосью** гиперболы). Отрезки F_1M и F_2M , соединяющие произвольную точку M гиперболы с ее фокусами, называются **фокальными радиусами** точки M . Отрезок, соединяющий две точки гиперболы, называется **хордой гиперболы**.

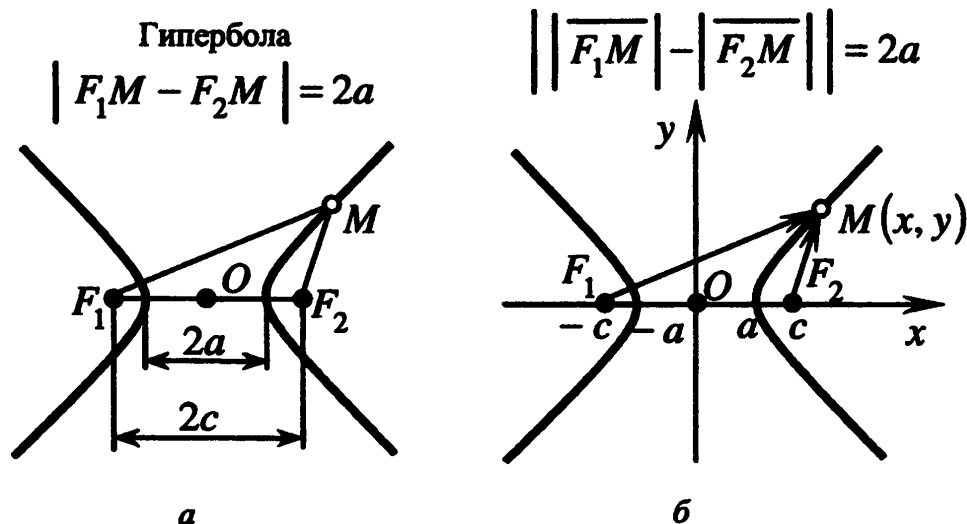


Рис.3.40

Отношение $e = \frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом** гиперболы. Из определения ($2a < 2c$) следует, что $e > 1$.

Геометрическое определение гиперболы, выражающее ее фокальное свойство, эквивалентно ее аналитическому определению – линии, задаваемой каноническим уравнением гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.50)$$

Действительно, введем прямоугольную систему координат (рис.3.40,б). Центр O гиперболы примем за начало системы координат; прямую, проходящую через фокусы (**фокальную ось**), примем за ось абсцисс (положительное направление на ней от точки F_1 к точке F_2); прямую, перпендикулярную оси абсцисс и проходящую через центр гиперболы, примем за ось ординат (направление на оси ординат выбирается так, чтобы прямоугольная система координат Oxy оказалась правой).

Составим уравнение гиперболы, используя геометрическое определение, выражающее фокальное свойство. В выбранной системе координат определяем координаты фокусов $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Для произвольной точки $M(x, y)$, принадлежащей гиперболе, имеем:

$$\left| \left| \overline{F_1 M} \right| - \left| \overline{F_2 M} \right| \right| = 2a .$$

Записывая это уравнение в координатной форме, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a .$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям, используемым при выводе уравнения эллипса (т.е. избавляясь от иррациональности), приходим к каноническому уравнению гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, т.е. выбранная система координат является канонической.

Проводя рассуждения в обратном порядке, можно показать, что все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (3.50), и только они, принадлежат геометрическому месту точек, называемому гиперболой. Таким образом, аналитическое определение гиперболы эквивалентно его геометрическому определению.

ДИРЕКТОРИАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ГИПЕРБОЛЫ

Директрисами гиперболы называются две прямые, проходящие параллельно оси ординат канонической системы координат на одинаковом расстоянии $\frac{a^2}{c}$ от нее (рис.3.41,а). При $a = 0$, когда гиперболой вырождается в пару пересекающихся прямых, директрисы совпадают.

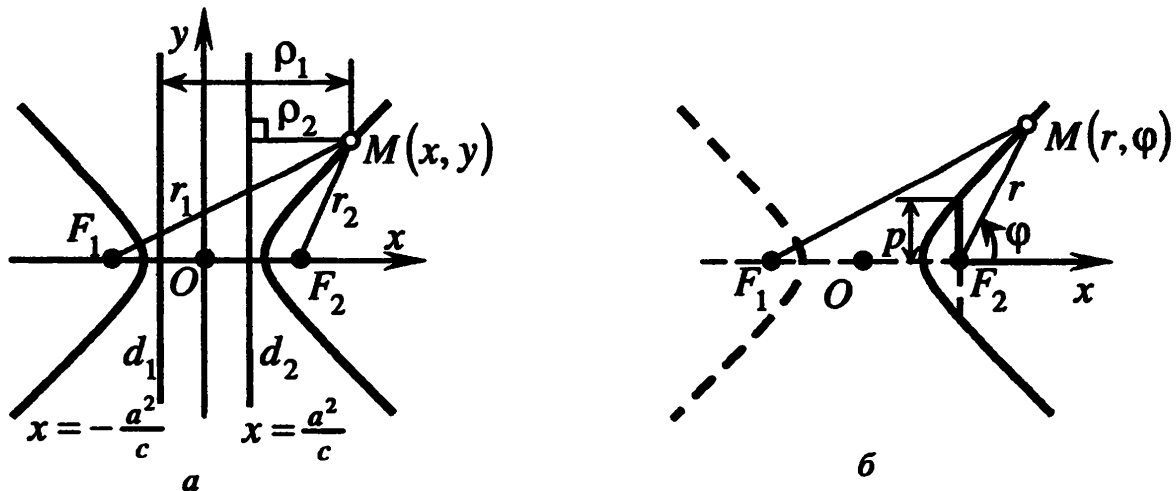


Рис.3.41

Гиперболу с эксцентриситетом $e > 1$ можно определить, как *геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до заданной точки F (фокуса) к расстоянию до заданной прямой d (директрисы), не проходящей через заданную точку, постоянно и равно эксцентриситету e (директориальное свойство гиперболы)*. Здесь F и

d – один из фокусов гиперболы и одна из ее директрис, расположенные по одну сторону от оси ординат канонической системы координат.

В самом деле, например, для фокуса F_2 и директрисы d_2 (рис.3.41,а)

условие $\frac{r_2}{\rho_2} = e$ можно записать в координатной форме:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e \cdot \left(x - \frac{a^2}{c} \right).$$

Избавляясь от иррациональности и заменяя $e = \frac{c}{a}$, $c^2 - a^2 = b^2$, приходим к каноническому уравнению гиперболы (3.50). Аналогичные рассуждения можно провести для фокуса F_1 и директрисы d_1 :

$$\frac{r_1}{\rho_1} = e \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = e \cdot \left(x + \frac{a^2}{c} \right).$$

УРАВНЕНИЕ ГИПЕРБОЛЫ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Уравнение правой ветви гиперболы в полярной системе координат $F_2 r \varphi$ (рис.3.41,б) имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi},$$

где $p = \frac{b^2}{a}$ – *фокальный параметр гиперболы*.

В самом деле, выберем в качестве полюса полярной системы координат правый фокус F_2 гиперболы, а в качестве полярной оси – луч с началом в точке F_2 , принадлежащий прямой $F_1 F_2$, но не содержащий точки F_1 (рис.3.41,б). Тогда для произвольной точки $M(r, \varphi)$, принадлежащей правой ветви гиперболы, согласно геометрическому определению (фокальному свойству) гиперболы, имеем $F_1 M - r = 2a$. Выражаем расстояние между точками $M(r, \varphi)$ и $F_1(2c, \pi)$ (см. п.2 замечаний 2.8):

$$F_1 M = \sqrt{(2c)^2 + r^2 - 2 \cdot (2c) \cdot r \cdot \cos(\varphi - \pi)} = \sqrt{r^2 + 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos \varphi + 4 \cdot c^2}.$$

Следовательно, в координатной форме уравнение гиперболы имеет вид

$$\sqrt{r^2 + 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos \varphi + 4 \cdot c^2} - r = 2a.$$

Уединяем радикал, возводим обе части уравнения в квадрат, делим на 4 и приводим подобные члены:

$$r^2 + 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos \varphi + 4 \cdot c^2 = 4 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot r + r^2 \Leftrightarrow a \cdot \left(1 - \frac{c}{a} \cdot \cos \varphi\right) \cdot r = c^2 - a^2.$$

Выражаем полярный радиус r и делаем замены $e = \frac{c}{a}$, $b^2 = c^2 - a^2$, $p = \frac{b^2}{a}$:

$$r = \frac{c^2 - a^2}{a \cdot (1 - e \cdot \cos \varphi)} \Leftrightarrow r = \frac{b^2}{a \cdot (1 - e \cdot \cos \varphi)} \Leftrightarrow r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi},$$

что и требовалось доказать. Заметим, что в полярных координатах уравнения гиперболы и эллипса совпадают, но описывают разные линии, поскольку отличаются эксцентриситетами ($e > 1$ для гиперболы, $0 \leq e < 1$ для эллипса).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КОЭФФИЦИЕНТОВ В УРАВНЕНИИ ГИПЕРБОЛЫ

Найдем точки пересечения гиперболы (рис.3.42,а) с осью абсцисс (*вершины гиперболы*). Подставляя в уравнение $y = 0$, находим абсциссы точек пересечения: $x = \pm a$. Следовательно, вершины имеют координаты $(-a, 0)$, $(a, 0)$. Длина отрезка, соединяющего вершины, равна $2a$. Этот отрезок называется *действительной осью гиперболы*, а число a – *действительной полуосью гиперболы*. Подставляя $x = 0$, получаем $y = \pm i \cdot b$. Длина отрезка оси ординат, соединяющего точки $(0, -b)$, $(0, b)$, равна $2b$. Этот отрезок называется *мнимой осью гиперболы*, а число b – *мнимой полуосью гиперболы*. Гипербола пересекает прямую, содержащую действительную ось, и не пересекает прямую, содержащую мнимую ось.

З а м е ч а н и я 3.10.

1. Прямые $x = \pm a$, $y = \pm b$ ограничивают на координатной плоскости *основной прямоугольник*, вне которого находится гипербола (рис.3.42,а).

2. Прямые $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$, содержащие диагонали основного прямоугольника, называются *асимптотами гиперболы* (рис.3.42,а).

Для *равносторонней гиперболы*, описываемой уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ (т.е. при $a = b$), основной прямоугольник является квадратом,

диагонали которого перпендикулярны. Поэтому асимптоты равносторонней гиперболы также перпендикулярны, и их можно взять в качестве координатных осей прямоугольной системы координат $Ox'y'$ (рис.3.42,б). В этой

системе координат уравнение гиперболы имеет вид $y' = \frac{a^2}{2 \cdot x'}$ (гипербола

совпадает с графиком элементарной функции, выражающей обратно-пропорциональную зависимость).

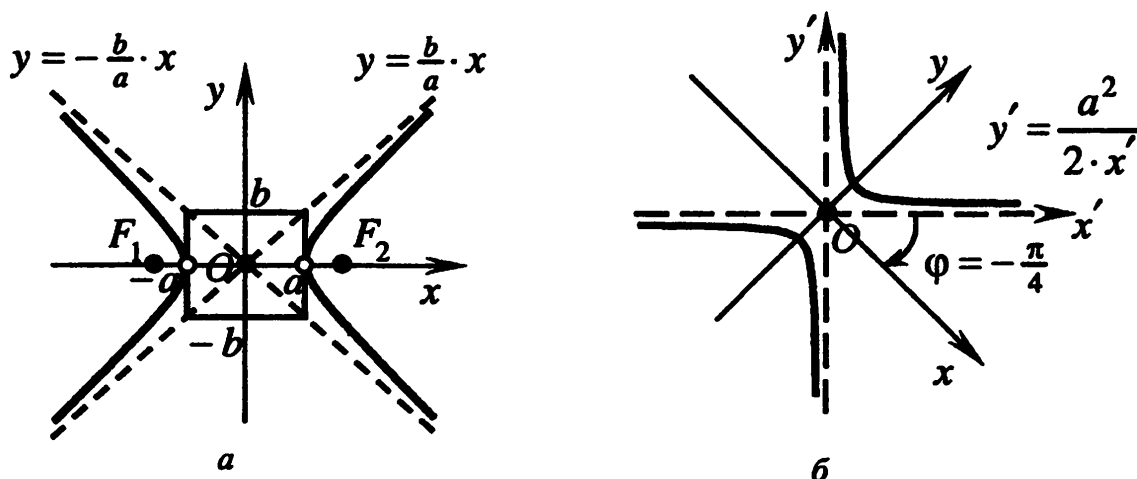


Рис.3.42

В самом деле, повернем каноническую систему координат на угол $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (рис.3.42,б). При этом координаты точки в старой и новой системах координат связаны равенствами

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y', \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y', \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x' + y'), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (y' - x'). \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ равносторонней гиперболы и приводя подобные члены, получаем

$$\frac{\frac{1}{2}(x' + y')^2}{a^2} - \frac{\frac{1}{2}(y' - x')^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot x' \cdot y' = a^2 \Leftrightarrow y' = \frac{a^2}{2 \cdot x'}.$$

3. Координатные оси (канонической системы координат) являются **осями симметрии** гиперболы (называются **главными осями гиперболы**), а ее центр – **центром симметрии**.

Действительно, если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то и точки $M'(x, -y)$ и $M''(-x, y)$, симметричные точке M относительно координатных осей, также принадлежат той же гиперболе.

Ось симметрии, на которой располагаются фокусы гиперболы, является **фокальной осью**.

4. Из уравнения гиперболы в полярных координатах $r = \frac{P}{1 - e \cdot \cos \varphi}$ (см. рис.3.41,б) выясняется **геометрический смысл фокального параметра** –

это половина длины хорды гиперболы, проходящей через ее фокус перпендикулярно фокальной оси ($r = p$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

5. Эксцентриситет e характеризует форму гиперболы. Чем больше e , тем шире ветви гиперболы, а чем ближе e к единице, тем ветви гиперболы уже (рис.3.43,а).

Действительно, величина γ угла между асимптотами гиперболы, содержащего ее ветвь, определяется отношением сторон основного прямоугольника: $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{b}{a}$. Учитывая, что $e = \frac{c}{a}$ и $c^2 = a^2 + b^2$, получаем

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Чем больше e , тем больше угол γ . Для равносторонней гиперболы ($a = b$) имеем $e = \sqrt{2}$ и $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Для $e > \sqrt{2}$ угол γ тупой, а для $1 < e < \sqrt{2}$ угол γ острый (рис.3.43,а).

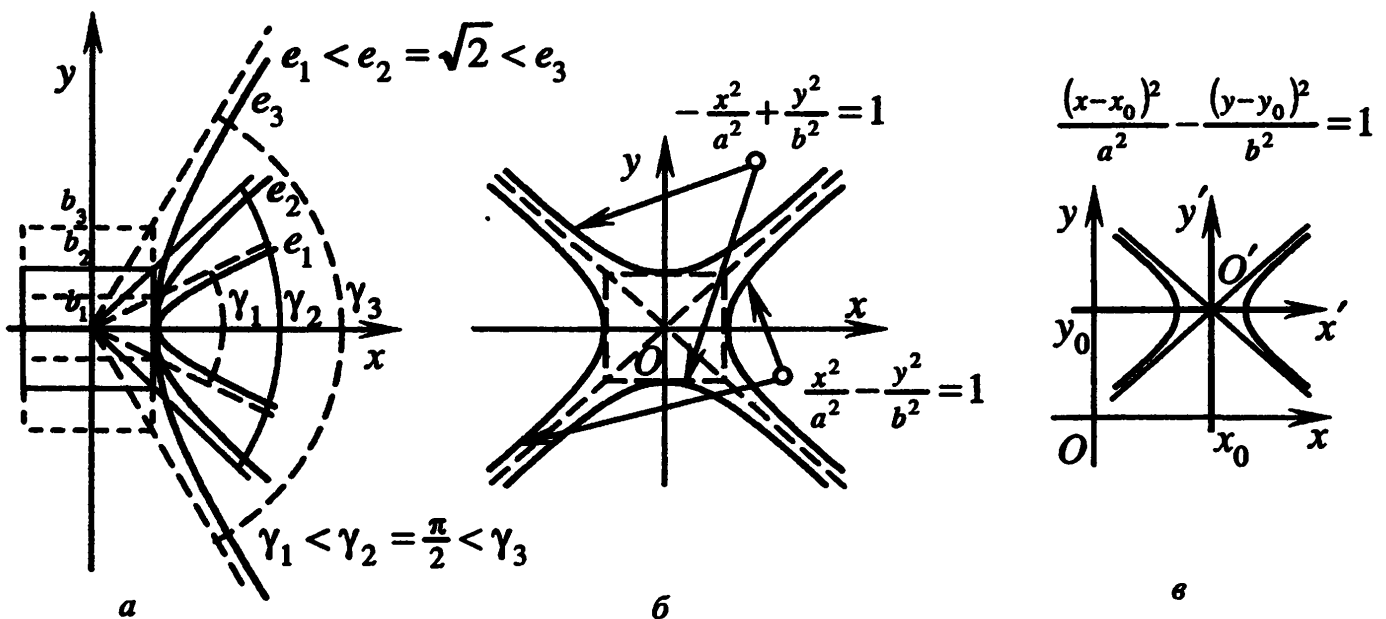


Рис.3.43

6. Две гиперболы, определяемые в одной и той же системе координат уравнениями $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, называются *сопряженными друг с другом*. Сопряженные гиперболы имеют одни и те же асимптоты (рис.3.43,б). Уравнение *сопряженной гиперболы* $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ приводится к каноническому при помощи переименования координатных осей (3.38).

7. Уравнение $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ определяет гиперболу с центром в точке $O'(x_0, y_0)$, оси которой параллельны координатным осям (рис.3.43,в). Это уравнение сводится к каноническому при помощи параллельного переноса (3.36). Уравнение $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ определяет сопряженную гиперболу с центром в точке $O'(x_0, y_0)$.

8. **Параметрическое уравнение гиперболы** в канонической системе координат имеет вид

$$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} t, \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in R,$$

где $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ – гиперболический косинус, а $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ – гиперболический синус.

Действительно, подставляя выражения координат в уравнение (3.50), приходим к основному гиперболическому тождеству $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

Пример 3.21. Изобразить гиперболу $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ в канонической системе координат Oxy . Найти полуоси, фокусное расстояние, эксцентриситет, фокальный параметр, уравнения асимптот и директрис.

□ Сравнивая заданное уравнение с каноническим, определяем полуоси: $a = 2$ – действительная полуось, $b = 3$ – мнимая полуось гиперболы. Строим основной прямоугольник со сторонами $2a = 4$, $2b = 6$ с центром в начале координат (рис.3.44). Проводим асимптоты, продлевая диагонали основного прямоугольника. Строим гиперболу, учитывая ее симметричность относительно координатных осей. При необходимости определяем координаты некоторых точек гиперболы. Например, подставляя $x = 4$ в уравнение гиперболы, получаем $\frac{4^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 27 \Leftrightarrow$

$y = \pm 3 \cdot \sqrt{3}$. Следовательно, точки с координатами $(4, 3 \cdot \sqrt{3})$, $(4, -3 \cdot \sqrt{3})$ принадлежат гиперболе. Вычисляем фокусное расстояние $2 \cdot c = 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \cdot \sqrt{2^2 + 3^2} = 2\sqrt{13}$; эксцентриситет $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$; фокаль-

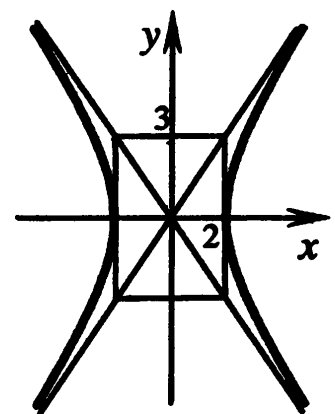


Рис.3.44

ный параметр $p = \frac{b^2}{a} = \frac{3^2}{2} = 4,5$. Составляем уравнения асимптот $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$, т.е. $y = \pm \frac{3}{2} \cdot x$, и уравнения директрис: $x = \pm \frac{a^2}{c} \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{\sqrt{13}}$. ■

3.3.4. Парабола

ДИРЕКТОРИАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ПАРАБОЛЫ

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки F и заданной прямой d , не проходящей через заданную точку. Это геометрическое определение выражает **директориальное свойство параболы**.

Точка F называется **фокусом параболы**, прямая d – **директрисой параболы**, середина O перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису, – **вершиной параболы**, расстояние p от фокуса до директрисы – **параметром параболы**, а расстояние $\frac{p}{2}$ от вершины параболы до ее фокуса – **фокусным расстоянием** (рис.3.45,а). Прямая, перпендикулярная директрисе и проходящая через фокус, называется **осью параболы (фокальной осью параболы)**. Отрезок FM , соединяющий произвольную точку M параболы с ее фокусом, называется **фокальным радиусом** точки M . Отрезок, соединяющий две точки параболы, называется **хордой параболы**.

Для произвольной точки параболы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы равно единице. Сравнивая директориальные свойства эллипса (см. разд.3.3.2), гиперболы (см. разд.3.3.3) и параболы, заключаем, что **эксцентриситет параболы** по определению равен единице ($e = 1$).

Геометрическое определение параболы, выражающее ее директориальное свойство, эквивалентно ее аналитическому определению – линии, задаваемой каноническим уравнением параболы:

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x. \quad (3.51)$$

Действительно, введем прямоугольную систему координат (рис.3.45,б). Вершину O параболы примем за начало системы координат; прямую, проходящую через фокус перпендикулярно директрисе, примем за ось абсцисс (положительное направление на ней от точки O к точке F); прямую, перпендикулярную оси абсцисс и проходящую через вершину параболы, примем за ось ординат (направление на оси ординат выбирается так, чтобы прямоугольная система координат Oxy оказалась правой).

Составим уравнение параболы, используя ее геометрическое определение, выражающее директориальное свойство параболы. В выбранной системе координат определяем координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и уравнение дирек-

трисы $x = -\frac{p}{2}$. Для произвольной точки $M(x, y)$, принадлежащей параболы, имеем:

$$FM = MM_d,$$

где $M_d\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ – ортогональная проекция точки $M(x, y)$ на директрису. Записываем это уравнение в координатной форме:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Возводим обе части уравнения в квадрат: $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + p \cdot x + \frac{p^2}{4}$. Приводя подобные члены, получаем каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x,$$

т.е. выбранная система координат является канонической.

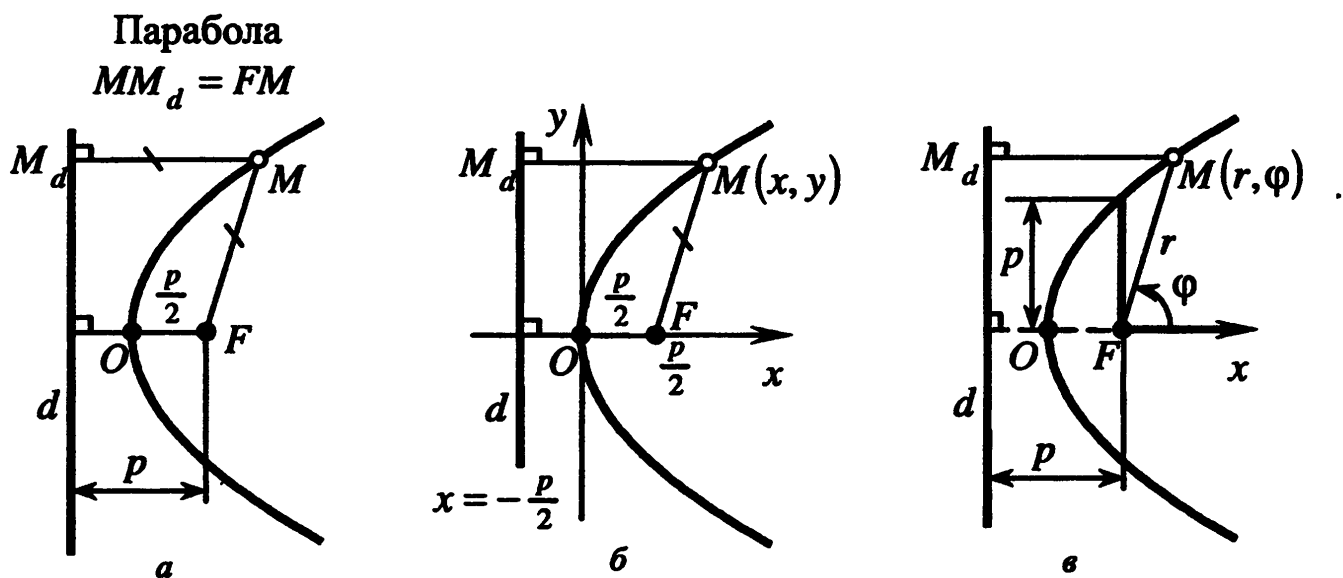


Рис.3.45

Проводя рассуждения в обратном порядке, можно показать, что все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (3.51), и только они, принадлежат геометрическому месту точек, называемому параболой. Таким образом, аналитическое определение параболы эквивалентно его геометрическому определению, выражающему директориальное свойство параболы.

УРАВНЕНИЕ ПАРАБОЛЫ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Уравнение параболы в полярной системе координат $F r \varphi$ (рис.3.45,в) имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi},$$

где p – параметр параболы, а $e = 1$ – ее эксцентриситет.

В самом деле, в качестве полюса полярной системы координат выберем фокус F параболы, а в качестве полярной оси – луч с началом в точке F , перпендикулярный директрисе и не пересекающий ее (рис.3.45,в). Тогда для произвольной точки $M(r, \varphi)$, принадлежащей параболе, согласно геометрическому определению (директориальному свойству) параболы, имеем $MM_d = r$. Поскольку $MM_d = p + r \cdot \cos \varphi$, получаем уравнение параболы в координатной форме:

$$p + r \cdot \cos \varphi = r \Leftrightarrow r = \frac{p}{1 - \cos \varphi},$$

что и требовалось доказать. Заметим, что в полярных координатах уравнения эллипса, гиперболы и параболы совпадают, но описывают разные линии, поскольку отличаются эксцентриситетами ($0 \leq e < 1$ для эллипса, $e = 1$ для параболы, $e > 1$ для гиперболы).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПАРАМЕТРА В УРАВНЕНИИ ПАРАБОЛЫ

Поясним *геометрический смысл параметра p* в каноническом уравнении параболы. Подставляя в уравнение (3.51) $x = \frac{p}{2}$, получаем $y^2 = p^2$, т.е. $y = \pm p$. Следовательно, параметр p – это половина длины хорды параболы, проходящей через ее фокус перпендикулярно оси параболы.

Фокальным параметром параболы, так же как для эллипса и для гиперболы, называется половина длины хорды, проходящей через ее фокус перпендикулярно фокальной оси (см. рис.3.45,в). Из уравнения параболы в полярных координатах при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получаем $r = p$, т.е. параметр параболы совпадает с ее фокальным параметром.

З а м е ч а н и я 3.11.

1. Параметр p параболы характеризует ее форму. Чем больше p , тем шире ветви параболы, чем ближе p к нулю, тем ветви параболы уже (рис.3.46).

2. Уравнение $y^2 = -2 \cdot p \cdot x$ (при $p > 0$) определяет параболу, которая расположена слева от оси ординат (рис. 3.47,а). Это уравнение сводится к каноническому при помощи изменения направления оси абсцисс (3.37). На рис. 3.47,а изображены заданная система координат Oxy и каноническая $Ox'y'$.

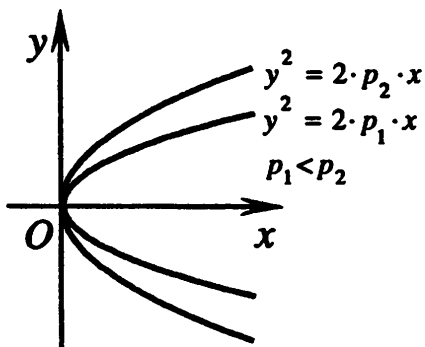


Рис.3.46

3. Уравнение $(y - y_0)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_0)$, $p > 0$, определяет параболу с вершиной $O'(x_0, y_0)$, ось которой параллельна оси абсцисс (рис.3.47,б). Это уравнение сводится к каноническому при помощи параллельного переноса (3.36).

Уравнение $(x - x_0)^2 = 2 \cdot p \cdot (y - y_0)$, $p > 0$, также определяет параболу с вершиной $O'(x_0, y_0)$, ось которой параллельна оси ординат (рис.3.47,в). Это уравнение сводится к каноническому при помощи параллельного переноса (3.36) и переименования координатных осей (3.38). На рис. 3.47,б,в изображены заданные системы координат Oxy и канонические системы координат $Ox'y'$.

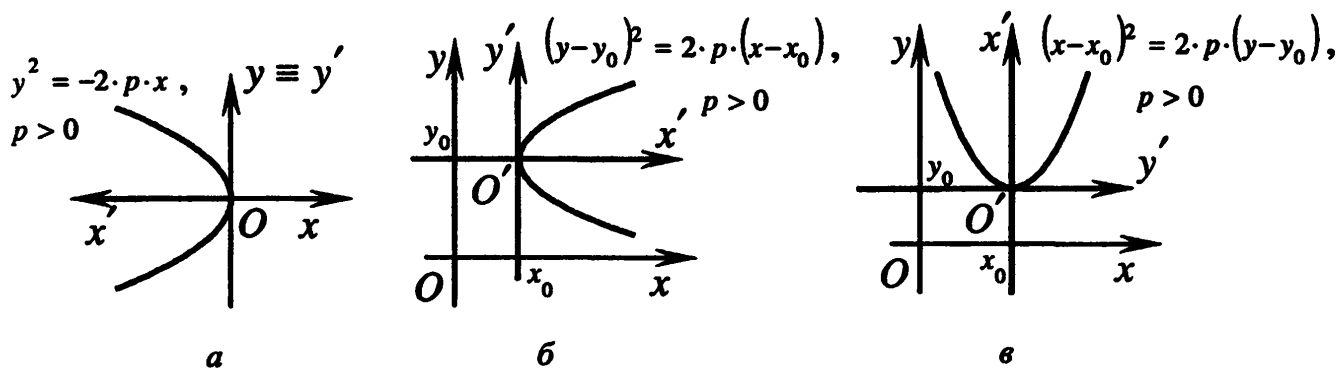


Рис.3.47

4. График квадратного трехчлена $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, $a \neq 0$, является параболой с вершиной в точке $O'(-\frac{b}{2 \cdot a}, -\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a})$, ось которой параллельна оси ординат, ветви параболы направлены вверх (при $a > 0$) или вниз (при $a < 0$). Действительно, выделяя полный квадрат, получаем уравнение

$$y = a \cdot \left(x + \frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 - \frac{b^2}{4 \cdot a} + c \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 = \frac{1}{a} \cdot \left(y + \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a}\right),$$

которое приводится к каноническому виду $(y')^2 = 2 \cdot p \cdot x'$, где $p = \left|\frac{1}{2 \cdot a}\right|$, при помощи замены $y' = x + \frac{b}{2 \cdot a}$, $x' = \pm \left(y + \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a}\right)$. Знак выбирается совпадающим со знаком старшего коэффициента a . Эта замена соответствует композиции: параллельного переноса (3.36) с $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$, $y_0 = -\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a}$, переименования координатных осей (3.38), а в случае $a < 0$ еще и изменения направления координатной оси (3.37). На рис.3.48,а,б изображены заданные системы координат Oxy и канонические системы координат $Ox'y'$ для случаев $a > 0$ и $a < 0$ соответственно.

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

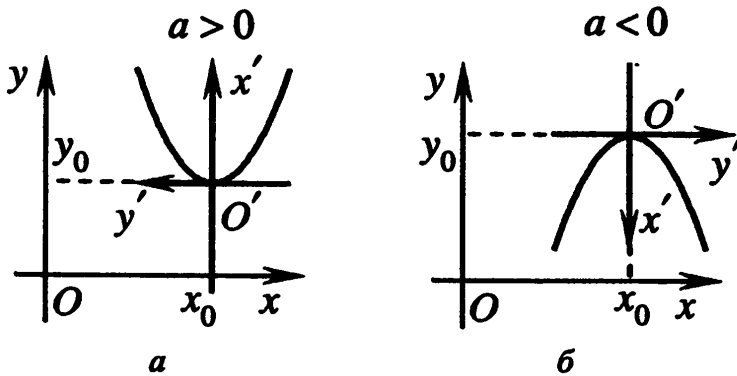


Рис.3.48

5. Ось абсцисс канонической системы координат является *осью симметрии параболы*, поскольку замена переменной y на $-y$ не изменяет уравнения (3.51). Другими словами, координаты точки $M(x, y)$, принадлежащей параболе, и координаты точки $M'(x, -y)$, симметричной точке M относительно оси абсцисс, удовлетворяют уравнению (3.51). Оси канонической системы координат называются *главными осями параболы*.

Пример 3.22. Изобразить параболу $y^2 = 2 \cdot x$ в канонической системе координат Oxy . Найти фокальный параметр, координаты фокуса и уравнение директрисы.

□ Строим параболу, учитывая ее симметрию относительно оси абсцисс (рис.3.49). При необходимости определяем координаты некоторых точек параболы. Например, подставляя $x = 2$ в уравнение параболы, получаем $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$. Следовательно, точки с координатами $(2, 2)$, $(2, -2)$ принадлежат параболе.

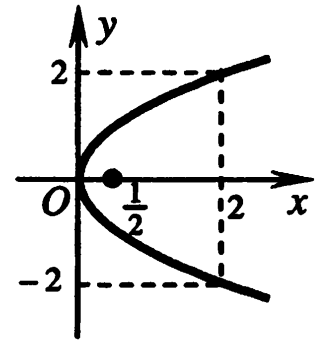


Рис.3.49

Сравнивая заданное уравнение с каноническим (3.51), определяем фокальный параметр: $p = 1$. Координаты фокуса $x_F = \frac{p}{2} = \frac{1}{2}$, $y_F = 0$, т.е. $F(\frac{1}{2}, 0)$. Составляем уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$, т.е. $x = -\frac{1}{2}$. ■

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА, ГИПЕРБОЛЫ, ПАРАБОЛЫ

1. Директориальное свойство может быть использовано как единое определение эллипса, гиперболы, параболы (см. рис.3.50): *геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до заданной точки F (фокуса) к расстоянию до заданной прямой d (директрисы), не проходящей через заданную точку, постоянно и равно эксцентриситету e , называется:*

- а) *эллипсом*, если $0 \leq e < 1$;
- б) *гиперболой*, если $e > 1$;
- в) *параболой*, если $e = 1$.

2. Эллипс, гипербола, парабола получают в сечениях кругового конуса плоскостями (см. разд.4.4.4) и поэтому называются *коническими сечениями*. Это свойство также может служить геометрическим определением эллипса, гиперболы, параболы.

3. К числу общих свойств эллипса, гиперболы и параболы можно отнести *биссекториальное свойство* их касательных [14]. Под *касательной* к линии в некоторой ее точке K понимается предельное положение секущей KM , когда точка M , оставаясь на рассматриваемой линии, стремится к точке K . Прямая, перпендикулярная касательной к линии и проходящая через точку касания, называется *нормалью* к этой линии.

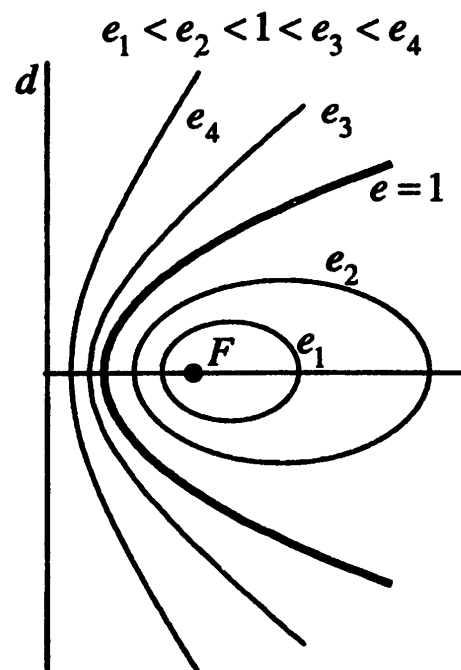


Рис.3.50

Биссекториальное свойство касательных (и нормалей) к эллипсу, гиперболе и параболе формулируется следующим образом: *касательная (нормаль) к эллипсу или к гиперболе образует равные углы с фокальными радиусами точки касания* (рис.3.51,а,б); *касательная (нормаль) к параболе образует равные углы с фокальным радиусом точки касания и перпендикуляром, опущенным из нее на директрису* (рис.3.51,в). Другими словами, касательная к эллипсу в точке K является биссектрисой внешнего угла треугольника F_1KF_2 (а нормаль – биссектрисой внутреннего угла F_1KF_2 треугольника); касательная к гиперболе является биссектрисой внутреннего угла треугольника F_1KF_2 (а нормаль – биссектрисой внешнего угла); касательная к параболе является биссектрисой внутреннего угла треугольника FKK_d (а нормаль – биссектрисой внешнего угла). Биссекториальное свойство касательной к параболе можно сформулировать так же, как для эллипса и гиперболы, если считать, что у параболы имеется второй фокус в бесконечно удаленной точке.

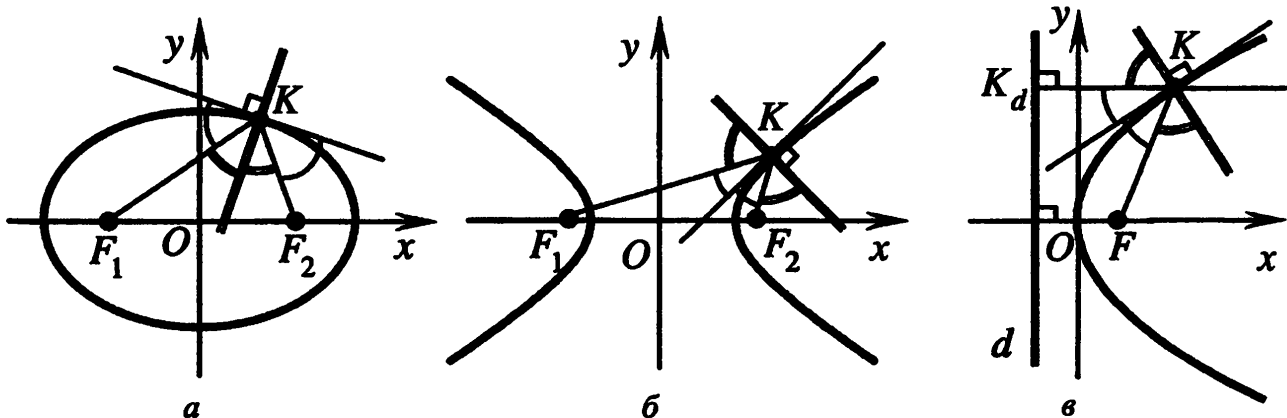


Рис.3.51

4. Из биссекториальных свойств следуют *оптические свойства* эллипса, гиперболы и параболы, поясняющие физический смысл термина "фокус". Представим себе поверхности, образованные вращением эллипса, гиперболы или параболы вокруг фокальной оси (см. разд.4.4.2; 4.4.3; 4.4.5). Если на эти поверхности нанести отражающее покрытие, то получаются эллиптическое, гиперболическое и параболическое зеркала. Согласно закону оптики, угол падения луча света на зеркало равен углу отражения, т.е. падающий и отраженный лучи образуют равные углы с нормалью к поверхности, причем оба луча и ось вращения находятся в одной плоскости. Отсюда получаем следующие свойства:

если источник света находится в одном из фокусов эллиптического зеркала, то лучи света, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе (рис.3.52,а);

если источник света находится в одном из фокусов гиперболического зеркала, то лучи света, отразившись от зеркала, расходятся так, как если бы они исходили из другого фокуса (рис.3.52,б);

если источник света находится в фокусе параболического зеркала, то лучи света, отразившись от зеркала, идут параллельно фокальной оси (рис.3.52,в).

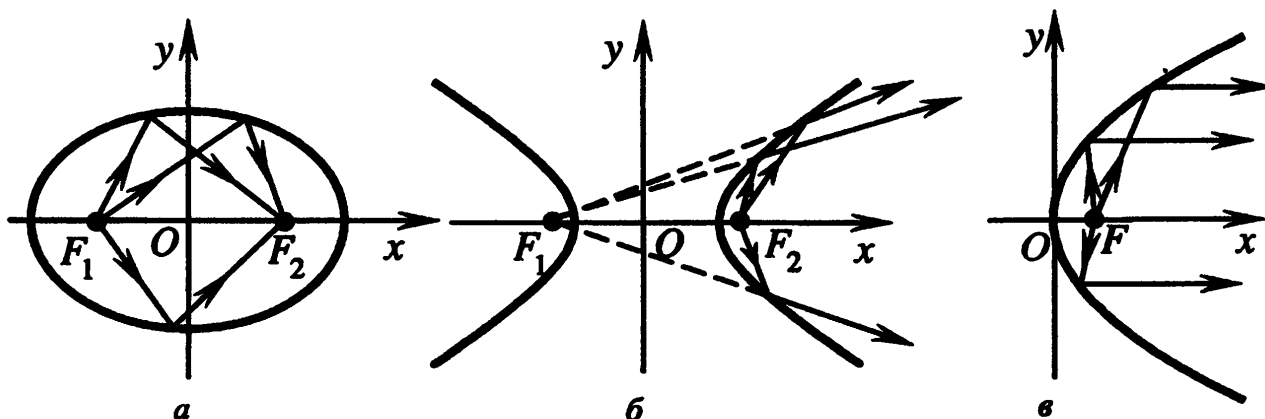


Рис.3.52

5. *Диаметральное свойство* эллипса, гиперболы и параболы можно сформулировать следующим образом [14]:

середины параллельных хорд эллипса (гиперболы) лежат на одной прямой, проходящей через центр эллипса (гиперболы);

середины параллельных хорд параболы лежат на прямой, коллинеарной оси симметрии параболы.

Геометрическое место середин всех параллельных хорд эллипса (гиперболы, параболы) называют *диаметром эллипса (гиперболы, параболы)*, сопряженным к этим хордам.

Это определение диаметра в узком смысле (см. пример 2.8). В разд.3.3.5 дано определение диаметра в широком смысле, где диаметром эллипса, гиперболы, параболы, а также других линий второго порядка назы-

вается прямая, содержащая середины всех параллельных хорд. В узком смысле диаметром эллипса является любая хорда, проходящая через его центр (рис.3.53,*а*); диаметром гиперболы является любая прямая, проходящая через центр гиперболы (за исключением асимптот), либо часть такой прямой (рис.3.53,*б*); диаметром параболы является любой луч, исходящий из некоторой точки параболы и коллинеарный оси симметрии (рис.3.53,*в*).

Два диаметра, каждый из которых делит пополам все хорды, параллельные другому диаметру, называются *сопряженными*. На рис.3.53 полужирными линиями изображены сопряженные диаметры эллипса, гиперболы, параболы.

Касательную к эллипсу (гиперболе, параболе) в точке K можно определить как предельное положение параллельных секущих M_1M_2 , когда точки M_1 и M_2 , оставаясь на рассматриваемой линии, стремятся к точке K . Из этого определения следует, что касательная, параллельная хордам, проходит через конец диаметра, сопряженного к этим хордам.

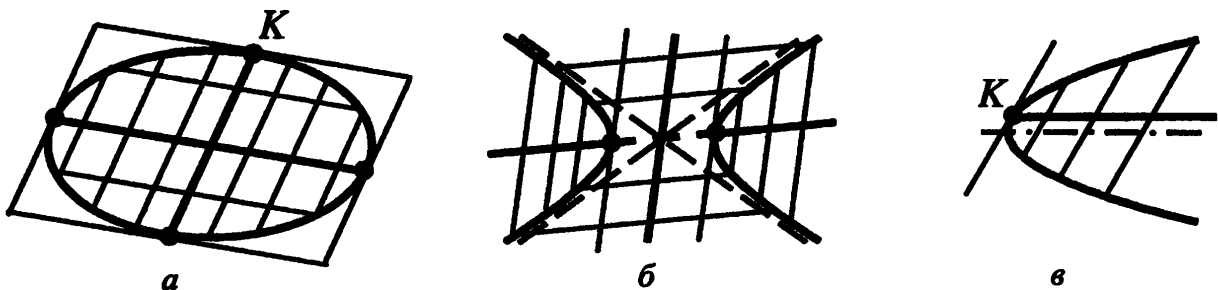


Рис.3.53

6. Эллипс, гипербола и парабола имеют, кроме приведенных выше, многочисленные геометрические свойства и физические приложения. Например, рис.3.50 может служить иллюстрацией траекторий движения космических объектов, находящихся в окрестности центра F притяжения.

3.3.5. Классификация линий второго порядка по инвариантам

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим преобразование квадратичной функции

$$p(x) = a_{11} \cdot x_1^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2^2 + 2 \cdot a_1 \cdot x_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x_2 + a_0 \quad (3.52)$$

при линейной невырожденной замене переменных:

$$\begin{cases} x_1 = s_1 + s_{11} \cdot x'_1 + s_{12} \cdot x'_2, \\ x_2 = s_2 + s_{21} \cdot x'_1 + s_{22} \cdot x'_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad x = s + S \cdot x', \quad (3.53)$$

где $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ – невырожденная матрица ($\det S \neq 0$).

При любой невырожденной замене переменных квадратичной функции $p(x)$ получаем снова квадратичную функцию $p'(x')$ (см. п.1 замечаний 3.1):

$$p'(x') = a'_{11} \cdot (x'_1)^2 + 2 \cdot a'_{12} \cdot x'_1 \cdot x'_2 + a'_{22} \cdot (x'_2)^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x'_1 + 2 \cdot a'_2 \cdot x'_2 + a'_0. \quad (3.54)$$

Найдем формулы, связывающие коэффициенты функций (3.52) и (3.54). Представим квадратичные функции в матричном виде (см. п.6 замечаний 3.1):

$$p(x) = \hat{x}^T \cdot P \cdot \hat{x}, \quad p'(x') = (\hat{x}')^T \cdot P' \cdot \hat{x}',$$

где $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a'_0 \end{pmatrix}$ — матрицы квадратичных функ-

ций, $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\hat{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ — расширенные (дополненные единицей) столбцы

переменных. Замену переменных (3.53) запишем для расширенных столбцов:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_1 \\ s_{21} & s_{22} & s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{т.е.} \quad \hat{x} = T \cdot \hat{x}', \quad \text{где} \quad T = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_1 \\ s_{21} & s_{22} & s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

невырожденная матрица, поскольку $\det T = \det S \neq 0$ (в этом можно убедиться, раскладывая определитель матрицы T по третьей строке).

Подставляя $\hat{x} = T \cdot \hat{x}'$ в $p(x)$, получаем, учитывая свойство транспонирования произведения матриц $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$:

$$p'(x') = (T \cdot \hat{x}')^T \cdot P \cdot (T \cdot \hat{x}') = (\hat{x}')^T \cdot T^T \cdot P \cdot T \cdot (\hat{x}').$$

Сравнивая с $p'(x') = (\hat{x}')^T \cdot P' \cdot (\hat{x}')$, заключаем, что

$$P' = T^T \cdot P \cdot T. \quad (3.55)$$

Получим аналогичные формулы для квадратичных функций (3.52), (3.54), представленных в виде суммы квадратичных и линейных форм (см. п.6 замечаний 3.1):

$$p(x) = x^T \cdot A \cdot x + 2 \cdot a^T \cdot x + a_0,$$

$$p'(x') = (x')^T \cdot A' \cdot x' + 2 \cdot (a')^T \cdot x' + a'_0,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix}$ – матрицы квадратичных форм;

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $a' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}$ – столбцы коэффициентов линейных форм функций

(3.52) и (3.54). Подставляя $x = s + S \cdot x'$ в $p(x)$, получаем

$$p'(x') = (s + S \cdot x')^T \cdot A \cdot (s + S \cdot x') + 2 \cdot a^T \cdot (s + S \cdot x') + a_0.$$

Учитывая свойства $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ и $(A + B)^T = A^T + B^T$ матричных операций, симметричность матрицы A (т.е. $A^T = A$), а также равенство

$$(x')^T \cdot S^T \cdot A \cdot s = (x'_1 \ x'_2) \cdot S^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = (s_1 \ s_2) \cdot A^T \cdot S \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = s^T \cdot A^T \cdot S \cdot x',$$

выражающее свойство транспонирования скалярного выражения (число, рассматриваемое как матрица размеров 1×1 , при транспонировании не изменяется), упростим квадратичную функцию

$$p'(x') = (x')^T \cdot S^T \cdot A \cdot S \cdot x' + 2 \cdot (a^T + s^T \cdot A) \cdot S \cdot x' + s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0.$$

Сравнивая с $p'(x') = (x')^T \cdot A' \cdot x' + 2 \cdot (a')^T \cdot x' + a'_0$, заключаем, что

$$A' = S^T \cdot A \cdot S; \quad a' = S^T \cdot (a + A \cdot s); \quad a'_0 = s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0. \quad (3.56)$$

Итак, формулы (3.55) и (3.56) выражают преобразования квадратичных функций при линейной невырожденной замене переменных (3.53).

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Выражения, составленные из коэффициентов квадратичной функции (3.52), которые не изменяются при линейной невырожденной замене переменных (3.53), называются *инвариантами относительно аффинной замены переменных* или, короче, *аффинными инвариантами* квадратичной функции. Например, знак определителя $\det A$ матрицы квадратичной формы функции (3.52) не изменяется при замене (3.53), так как, согласно (3.56),

$$\det A' = \det(S^T \cdot A \cdot S) = \det S^T \cdot \det A \cdot \det S = (\det S)^2 \cdot \det A,$$

поскольку определитель произведения матриц равен произведению их определителей и $\det S^T = \det S$ (см. разд. П.6). Аналогично, учитывая (3.55), получаем, что $\det P' = (\det T)^2 \cdot \det P$, т.е. знаки определителей $\det P'$ и $\det P$ совпадают при любой линейной невырожденной замене переменных.

Выражения, составленные из коэффициентов квадратичной функции (3.52), которые не изменяются при линейной невырожденной замене переменных (3.53) с ортогональной матрицей S ($S^T = S^{-1}$), называются *инва-*

риантами относительно ортогональной замены переменных или, короче, **ортогональными инвариантами** квадратичной функции. Эти алгебраические выражения являются важнейшими геометрическими характеристиками линий второго порядка и могут быть использованы как для их классификации, так и для построения, поскольку преобразование прямоугольной системы координат соответствует ортогональной замене переменных. Далее, если не оговорено противное, будем рассматривать преобразования квадратичных функций при ортогональных заменах переменных.

Обозначим через

$$\tau = a_{11} + a_{22}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

выражения, зависящие от коэффициентов функции

$$p(x, y) = a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot y + a_0, \quad (3.57)$$

а через τ' , δ' , Δ' – соответствующие выражения для функции

$$p(x', y') = a'_{11} \cdot (x')^2 + 2 \cdot a'_{12} \cdot x' \cdot y' + a'_{22} \cdot (y')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + a'_0,$$

которая получается из $p(x, y)$ при ортогональной замене переменных (см. п.9 замечаний 3.1):

$$\begin{cases} x = x_0 + s_{11} \cdot x' + s_{12} \cdot y', \\ y = y_0 + s_{21} \cdot x' + s_{22} \cdot y', \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s + S \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

где $s = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица ($S^T = S^{-1}$).

Теорема 3.4 (об ортогональных инвариантах). При любой ортогональной замене переменных (3.58) квадратичной функции (3.57) выражения τ , δ , Δ не изменяются: $\tau = \tau'$, $\delta = \delta'$, $\Delta = \Delta'$.

Выражения τ , δ , Δ называются **ортогональными инвариантами** квадратичной функции.

Действительно, из равенства (3.55) $P' = T^T \cdot P \cdot T$, учитывая, что определитель произведения равен произведению определителей, а также равенство $\det T^T = \det T$, получаем

$$\det P' = \det T^T \cdot \det P \cdot \det T = (\det T)^2 \cdot \det P.$$

Для ортогональной матрицы S : $S^T = S^{-1} \Leftrightarrow S^T \cdot S = E \Rightarrow \det S^T \cdot \det S = \det E = 1 \Rightarrow (\det S)^2 = 1$. Поскольку $\det T = \det S$ (как показано выше), получаем $(\det T)^2 = 1$. Следовательно, $\det P' = \det P$, т.е. $\Delta' = \Delta$.

Рассмотрим теперь квадратичную функцию

$$p(x, y) - \lambda \cdot x^2 - \lambda \cdot y^2$$

двух переменных x, y , зависящую от параметра λ . Матрица квадратичной формы этой функции

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

после замены переменных (3.58) преобразуется по закону (3.56):

$$S^T \cdot (A - \lambda \cdot E) \cdot S = S^T \cdot A \cdot S - \lambda \cdot \underbrace{S^T \cdot S}_E = A' - \lambda \cdot E.$$

Поскольку $(\det S)^2 = 1$, то

$$\begin{aligned} \det(A' - \lambda \cdot E) &= \det S^T \cdot \det(A - \lambda \cdot E) \cdot \det S = \\ &= (\det S)^2 \cdot \det(A - \lambda \cdot E) = \det(A - \lambda \cdot E). \end{aligned}$$

Следовательно, при любой ортогональной замене переменных (3.58)

$$\begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определители, с учетом введенных обозначений получаем тождественное равенство двух многочленов

$$\lambda^2 - \tau' \cdot \lambda + \delta' = \lambda^2 - \tau \cdot \lambda + \delta.$$

Приравнявая коэффициенты, имеем: $\tau = \tau'$ и $\delta' = \delta$. Таким образом, при любой ортогональной замене переменных (3.58) квадратичной функции (3.57) выражения τ, δ, Δ не изменяются: $\tau = \tau', \delta = \delta', \Delta = \Delta'$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я 3.12.

1. При любой однородной ($s = 0$) ортогональной замене переменных (3.58) квадратичной функции (3.57) выражение

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

не изменяется: $K = K'$.

Выражение K называется **ортогональным семиинвариантом (полуинвариантом)** квадратичной функции, поскольку K не изменяется только при однородных ортогональных преобразованиях [14], т.е. при наложении дополнительного условия $s = 0$ по сравнению с условиями теоремы 3.4.

2. Если у квадратичной функции (3.52) $\delta = 0$ и $\Delta = 0$, то при любой ортогональной замене ее переменных (3.53) выражение K не изменяется: $K = K'$, другими словами, выражение K является ортогональным инвариантом для квадратичной функции при $\delta = \Delta = 0$.

Доказательство утверждений п.1,2 приведено в [14].

3. **Характеристическим многочленом** квадратной матрицы A называется многочлен $\det(A - \lambda \cdot E)$. Уравнение $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ называется **характеристическим** для матрицы A .

4. Из доказательства теоремы 3.4 следует, что **характеристический многочлен матрицы квадратичной формы не изменяется при ортогональной замене переменных**, т.е. является ортогональным инвариантом.

5. **Корни характеристического многочлена матрицы квадратичной формы являются ортогональными инвариантами.**

Это следует из ортогональности инвариантности характеристического многочлена.

6. Из доказательства теоремы 3.3 следует, что для любой квадратичной функции (3.52) существует такая ортогональная замена переменных (3.53): $x = S \cdot x'$, где $S^T = S^{-1}$, при которой у функции (3.54) будет отсутствовать произведение переменных:

$$p'(x'_1, x'_2) = \lambda_1 \cdot (x'_1)^2 + \lambda_2 \cdot (x'_2)^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x'_1 + 2 \cdot a'_2 \cdot x'_2 + a_0,$$

т.е. матрица A' квадратичной формы функции (3.54) будет диагональной:

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Записывая характеристический многочлен этой матрицы, получаем

$$\det(\Lambda - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda),$$

т.е. числа λ_1, λ_2 являются его корнями. Из инвариантности характеристических многочленов $\det(A - \lambda \cdot E) = \det(\Lambda - \lambda \cdot E)$ следует, что

$$\lambda^2 - \tau \cdot \lambda + \delta = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

Отсюда получаем:

$$\tau = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

7. **Корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения**

$$\lambda^2 - \tau \cdot \lambda + \delta = 0$$

действительные, так как его дискриминант неотрицателен:

$$\tau^2 - 4 \cdot \delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4 \cdot a_{12}^2 \geq 0.$$

8. При линейной невырожденной замене переменных (соответственно, при преобразовании аффинных, не обязательно прямоугольных, систем координат) не изменяется знак выражений δ и Δ . Действительно, из (3.55) и (3.56) следует, что $\Delta' = (\det T)^2 \cdot \Delta$ и $\delta' = (\det S)^2 \cdot \delta$. Таким образом, знаки выражений δ и Δ являются аффинными инвариантами квадратичной функции.

9. При умножении квадратичной функции $p(x, y)$ на отличное от нуля число μ получаем квадратичную функцию $\tilde{p}(x, y) = \mu \cdot p(x, y)$, для которой выражения инвариантов $\tilde{\tau}$, $\tilde{\delta}$, $\tilde{\Delta}$, семиинварианта $\tilde{\kappa}$, а также корни $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ характеристического уравнения пропорциональны соответствующим выражениям τ , δ , Δ , κ , λ_1 , λ_2 для функции $p(x, y)$:

$$\tilde{\tau} = \mu \cdot \tau, \quad \tilde{\delta} = \mu^2 \cdot \delta, \quad \tilde{\Delta} = \mu^3 \cdot \Delta, \quad \tilde{\kappa} = \mu^2 \cdot \kappa, \quad \tilde{\lambda}_1 = \mu \cdot \lambda_1, \quad \tilde{\lambda}_2 = \mu \cdot \lambda_2.$$

Поскольку все коэффициенты функции $p(x, y)$ умножаются на число μ , то определители второго (δ , κ) и третьего порядков (Δ) умножаются на μ^2 и μ^3 соответственно.

Отсюда следует, например, что знаки выражений δ , κ и $\tau \cdot \Delta$ сохраняются. Для пропорциональных уравнений $p(x, y) = 0$ и $\mu \cdot p(x, y) = 0$ (при любом $\mu \neq 0$), определяющих одну и ту же линию второго порядка, постоянными характеристиками (инвариантами) являются $\text{sgn } \delta$, $\text{sgn } \kappa$, $\text{sgn}(\tau \cdot \Delta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДА КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ПОМОЩИ ИНВАРИАНТОВ

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy линия второго порядка описывается уравнением

$$p(x, y) = 0, \tag{3.59}$$

где $p(x, y)$ – квадратичная функция (3.57):

$$p(x, y) = a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot y + a_0.$$

Согласно теореме 3.3, в любой другой прямоугольной системе координат $O'x'y'$ уравнение этой же линии имеет вид

$$\tilde{p}(x', y') = 0, \tag{3.60}$$

где квадратичная функция

$$\tilde{p}(x', y') = \mu \cdot \left(a'_{11} \cdot (x')^2 + a'_{22} \cdot (y')^2 + 2 \cdot a'_{12} \cdot x' \cdot y' + 2 \cdot a'_1 \cdot x' + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + a'_0 \right) \tag{3.61}$$

получена из квадратичной функции $p(x, y)$ в результате умножения на отличный от нуля множитель μ и ортогональной замены переменных:

$$\begin{cases} x = x_0 + s_{11} \cdot x' + s_{12} \cdot y', \\ y = y_0 + s_{21} \cdot x' + s_{22} \cdot y', \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s + S \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

Здесь $s = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ – координатный столбец вектора $\bar{s} = \overline{OO'}$ переноса начала координат, $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица ($S^T = S^{-1}$) перехода от базиса \bar{i}, \bar{j} системы координат Oxy к базису системы координат $O'x'y'$.

Корни характеристических уравнений матриц квадратичных форм, инварианты и семиинварианты квадратичных функций $p(x, y)$, $\tilde{p}(x', y')$ обозначим соответственно

$$\lambda_1, \lambda_2, \tau, \delta, \Delta, \kappa; \quad \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\tau}, \tilde{\delta}, \tilde{\Delta}, \tilde{\kappa}.$$

По теореме 3.3 и п.9 замечаний 3.12 эти выражения связаны формулами

$$\tilde{\lambda}_1 = \mu \cdot \lambda_1, \tilde{\lambda}_2 = \mu \cdot \lambda_2; \quad \tilde{\tau} = \mu \cdot \tau; \quad \tilde{\delta} = \mu^2 \cdot \delta; \quad \tilde{\Delta} = \mu^3 \cdot \Delta; \quad \tilde{\kappa} = \mu^2 \cdot \kappa. \quad (3.63)$$

Используя эти связи, выясним признаки видов канонических уравнений, а также выразим коэффициенты канонических уравнений. Предполагаем, что система координат $O'x'y'$ каноническая, т.е. уравнение $\tilde{p}(x', y') = 0$ имеет один из девяти канонических видов, указанных в теореме 3.3. В этом случае матрица \tilde{A} квадратичной формы функции $\tilde{p}(x', y')$ имеет диагональный вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты при квадратах неизвестных в канонических уравнениях (1)–(9) равны корням $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ характеристического уравнения этой матрицы. В зависимости от знаков чисел $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ уравнения (1)–(9) разбиваются на три группы:

– корни $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2}, \tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{b^2}$ отличны от нуля и имеют одинаковые знаки ($\tilde{\delta} = \tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 > 0$ – *эллиптический* тип): уравнения эллипса (1), мнимого эллипса (2), пары мнимых пересекающихся прямых (3);

– корни $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2}, \tilde{\lambda}_2 = -\frac{1}{b^2}$ отличны от нуля и имеют разные знаки ($\tilde{\delta} = \tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 < 0$ – *гиперболический* тип): уравнения гиперболы (4) или пары пересекающихся прямых (5);

– один из корней $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ равен нулю ($\tilde{\lambda}_1 = 0, \tilde{\delta} = \tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 = 0$ – *параболический* тип): уравнения параболы (6), пары параллельных прямых (7), пары мнимых параллельных прямых (8) или пары совпадающих прямых (9).

Тип уравнения (3.59) не изменяется в ходе приведения его к каноническому виду (3.60), так как, согласно (3.63), выражения δ и $\tilde{\delta}$ для исходного (3.59) и канонического уравнений отличаются только положительным множителем $\tilde{\delta} = \mu^2 \cdot \delta$. Поэтому условия $\tilde{\delta} > 0$, $\tilde{\delta} < 0$, $\tilde{\delta} = 0$, определяющие тип канонического уравнения, равносильны условиям $\delta > 0$, $\delta < 0$, $\delta = 0$, определяющим тип исходного уравнения.

Рассмотрим уравнения эллиптического типа ($\delta > 0$).

Для уравнения (1) эллипса $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - 1 = 0$ имеем: $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2}$, $\tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{b^2}$,

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \quad \tilde{\delta} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2 \cdot b^2}, \quad \tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2 \cdot b^2} = -\tilde{\delta},$$

значит, $\tilde{\tau} \cdot \tilde{\Delta} < 0$, $\tilde{\Delta} = -\tilde{\delta}$, $0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2$, так как $a \geq b > 0$. Учитывая (3.63), получаем:

$$\mu \cdot \tau \cdot \mu^3 \cdot \Delta < 0; \quad \mu^3 \cdot \Delta = -\mu^2 \cdot \delta; \quad \mu \cdot \lambda_1 = \frac{1}{a^2}; \quad \mu \cdot \lambda_2 = \frac{1}{b^2}; \quad 0 < \mu \cdot \lambda_1 \leq \mu \cdot \lambda_2.$$

Следовательно, $\tau \cdot \Delta < 0$, $\mu = -\frac{\delta}{\Delta}$. Преобразуем неравенства $0 < \mu \cdot \lambda_1 \leq \mu \cdot \lambda_2$

$\Leftrightarrow 0 < |\mu \cdot \lambda_1| \leq |\mu \cdot \lambda_2| \Leftrightarrow 0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2|$, т.е. λ_1 – меньший (точнее, не больший) по модулю корень характеристического уравнения $\lambda^2 - \tau \cdot \lambda + \delta = 0$. Подставляя $\mu = -\frac{\delta}{\Delta}$ в равенства $\mu \cdot \lambda_1 = \frac{1}{a^2}$, $\mu \cdot \lambda_2 = \frac{1}{b^2}$, на-

$$\text{ходим } a = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}}, \quad b = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}}.$$

Таким образом, при $\delta > 0$, $\tau \cdot \Delta < 0$ уравнение (3.59) описывает эллипс с полуосями $a = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}}$, $b = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}}$.

Для уравнения (2) мнимого эллипса $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + 1 = 0$ аналогично получаем: $\delta > 0$, $\tau \cdot \Delta > 0$, $a = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}}$, $b = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}}$.

Для уравнения (3) пары мнимых пересекающихся прямых $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 0$ находим $\delta > 0$, $\Delta = 0$. В отличие от уравнений (1),(2) отсутствует связь: $\tilde{\Delta} = \pm \tilde{\delta}$. Поэтому коэффициент пропорциональности μ в (3.61) найти однозначно нельзя. Однако для справедливости отношения $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{b^2}{a^2}$

$$\text{достаточно положить } a = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_1|}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_2|}}.$$

Рассмотрим уравнения гиперболического типа ($\delta < 0$).

Для уравнения (4) гиперболы $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} - 1 = 0$ имеем: $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2}$,
 $\tilde{\lambda}_2 = -\frac{1}{b^2}$,

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}, \quad \tilde{\delta} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2 \cdot b^2}, \quad \tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2 \cdot b^2} = -\tilde{\delta},$$

значит, $\tilde{\Delta} \neq 0$, $\tilde{\Delta} = -\tilde{\delta}$, $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2} > 0$, $\tilde{\lambda}_2 = -\frac{1}{b^2} < 0$. Учитывая (3.63), получаем

$$\mu^3 \cdot \Delta \neq 0, \quad \mu^3 \cdot \Delta = -\mu^2 \cdot \delta, \quad \mu \cdot \lambda_1 = \frac{1}{a^2} > 0, \quad \mu \cdot \lambda_2 = -\frac{1}{b^2} < 0.$$

Следовательно, $\Delta \neq 0$ и $\mu = -\frac{\delta}{\Delta}$. Подставляя $\mu = -\frac{\delta}{\Delta}$ в соотношения для корней характеристического уравнения, получаем: $-\frac{\delta}{\Delta} \cdot \lambda_1 = \frac{1}{a^2} > 0$ и

$-\frac{\delta}{\Delta} \cdot \lambda_2 = -\frac{1}{b^2} < 0$. Отсюда $a = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}}$ и $b = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}}$. Так как $\delta < 0$, то λ_1 — тот корень характеристического уравнения, знак которого совпадает со знаком Δ , т.е. $\lambda_1 \cdot \Delta > 0$ (второй корень λ_2 противоположного знака).

Таким образом, при $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$ уравнение (3.59) описывает гиперболу с полуосями $a = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}}$, $b = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}}$.

Для уравнения (5) пары пересекающихся прямых $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 0$ аналогично получаем: $\Delta = 0$, $a = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\frac{1}{\lambda_2}}$, где λ_1 — положительный корень характеристического уравнения, а λ_2 — отрицательный.

Рассмотрим уравнения параболического типа ($\delta = 0$).

Для уравнения (6) параболы $(y')^2 - 2 \cdot p \cdot x' = 0$ имеем: $\tilde{\lambda}_1 = 0$, $\tilde{\lambda}_2 = 1$,

$$\tilde{\tau} = 1, \quad \tilde{\delta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix} = -p^2,$$

значит, $\tilde{\Delta} \neq 0$, $\tilde{\Delta} = -p^2$, $\tilde{\lambda}_2 = \tilde{\tau} = 1$. Учитывая (3.63), получаем $\mu^3 \cdot \Delta \neq 0$,

$\mu^3 \cdot \Delta = -p^2$, $\mu \cdot \lambda_2 = \mu \cdot \tau = 1$. Следовательно, $\Delta \neq 0$, $p = \sqrt{-\mu^3 \cdot \Delta}$, $\mu = \frac{1}{\tau}$,

т.е. $p = \sqrt{-\frac{\Delta}{\tau^3}}$.

Таким образом, при $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$ уравнение (3.59) описывает параболу с фокальным параметром $p = \sqrt{-\frac{\Delta}{\tau^3}}$.

Для уравнения (7) пары параллельных прямых $(y')^2 - b^2 = 0$ имеем: $\tilde{\lambda}_1 = 0$, $\tilde{\lambda}_2 = 1$, $\tilde{\tau} = 1$,

$$\tilde{\delta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \tilde{\kappa} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{vmatrix} = -b^2.$$

Значит, $\tilde{\Delta} = 0$, $\tilde{\lambda}_2 = \tilde{\tau} = 1$, $\tilde{\kappa} = -b^2 < 0$. Напомним (см. п.2 замечаний 3.12), что выражение κ является ортогональным инвариантом при условиях $\delta = \Delta = 0$. Учитывая (3.63), получаем $\Delta = 0$, $\lambda_2 = \tau = \frac{1}{\mu}$, $\kappa < 0$. Из равенства

$$\tilde{\kappa} = -b^2 \text{ имеем } \mu^2 \cdot \kappa = -b^2, \text{ т.е. } b = \sqrt{-\frac{\kappa}{\tau^2}}.$$

Таким образом, при $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $\kappa < 0$ уравнение (3.59) является уравнением пары параллельных прямых с коэффициентом $b = \sqrt{-\frac{\kappa}{\tau^2}}$.

Для уравнения (8) пары мнимых параллельных прямых $(y')^2 + b^2 = 0$ аналогично получаем: $\Delta = 0$, $\kappa > 0$, $b = \sqrt{\frac{\kappa}{\tau^2}}$.

Для уравнения (9) пары совпадающих прямых $(y')^2 = 0$ получаем: $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $\kappa = 0$.

Таким образом, классификацию поверхностей второго порядка можно записать, используя инварианты квадратичной функции (см. таблицу 3.2).

З а м е ч а н и я 3.13.

1. Матрица квадратичной формы для левой части канонических уравнений имеет диагональный вид $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, где λ_1 , λ_2 – корни характеристического уравнения $\lambda^2 - \tau \cdot \lambda + \delta = 0$, взятые согласно правилам:

- для эллиптического случая (при $\delta > 0$): $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$;
- для гиперболического случая (при $\delta < 0$): $\lambda_1 \cdot \Delta > 0$, если $\Delta \neq 0$, и $\lambda_1 > 0$, если $\Delta = 0$;
- для параболического случая (при $\delta = 0$): $\lambda_1 = 0$.

2. Отношения $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\frac{\Delta}{\lambda_2^3}$, где λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения, взятые согласно правилам п.1, не изменяются при умножении уравнения на отличный от нуля множитель и при ортогональной замене неизвестных.

Поскольку отношение $k = \frac{b}{a}$ сторон основного прямоугольника, эксцентриситет e и фокальный параметр p выражаются через указанные ин-

варианты: для эллипса $k = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$, $e = \sqrt{1 - k^2}$; для гиперболы

$k = \frac{b}{a} = \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$, $e = \sqrt{1 + k^2}$; для эллипса, гиперболы и параболы $p = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^3}}$,

так как $\frac{\Delta}{\lambda_2^3} = -\frac{1}{\frac{a^2 \cdot b^2}{b^6}} = -\frac{b^4}{a^2} = -p^2$, то они, в свою очередь, также являются

инвариантами.

3. Тип линии не изменяется при аффинном преобразовании координат (см. п.6 замечаний 3.12), так как сохраняется знак δ (условия $\delta > 0$, $\delta < 0$, $\delta = 0$ остаются справедливыми при аффинных преобразованиях координат и при умножении уравнения на любое отличное от нуля число). Следовательно, знак δ является *аффинным инвариантом* линии второго порядка.

Т а б л и ц а 3.2. Классификация линий второго порядка

		Признаки вида		Название линии	
Центральные линии	Эллиптический тип	$\delta > 0$ \updownarrow $(\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0)$	$\Delta \neq 0$	$\tau \cdot \Delta < 0$ Эллипс	
				$\tau \cdot \Delta > 0$ Эллипс мнимый	
			$\Delta = 0$	Пара мнимых пересекающихся прямых	
	Гиперболический тип	$\delta < 0$ \updownarrow $(\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0)$		$\Delta \neq 0$	Гипербола
			$\Delta = 0$	Пара пересекающихся прямых	
Нецентральные линии	Параболический тип	$\delta = 0$ \updownarrow $(\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0)$		$\Delta \neq 0$	Парабола
			$\Delta = 0$	$\kappa < 0$	Пара параллельных прямых
				$\kappa > 0$	Пара мнимых параллельных прямых
			$\kappa = 0$	Пара совпадающих прямых	

Пример 3.23. По ортогональным инвариантам определить виды алгебраических линий второго порядка, заданных в примере 3.19:

а) $x^2 - y^2 - 4 \cdot x + 6 \cdot y - 5 = 0$;

б) $x^2 - 4 \cdot x + 4 \cdot y + 4 = 0$;

в) $3 \cdot x^2 + 10 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2 + 8 = 0$;

г) $52 \cdot x^2 + 72 \cdot x \cdot y + 73 \cdot y^2 - 280 \cdot x - 290 \cdot y + 325 = 0$.

□ а) Для квадратичной функции $p(x, y) = x^2 - y^2 - 4 \cdot x + 6 \cdot y - 5$ (левой части заданного уравнения) вычисляем инварианты

$$\tau = 1 - 1 = 0, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 5 + 4 - 9 = 0.$$

По таблице 3.2 определяем, что уравнение задает пару пересекающихся прямых, так как $\delta < 0$, $\Delta = 0$.

б) Для квадратичной функции $p(x, y) = x^2 - 4 \cdot x + 4 \cdot y + 4$ (левой части заданного уравнения) вычисляем инварианты

$$\tau = 1 + 0 = 1, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

По таблице 3.2 определяем, что уравнение задает параболу, так как $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$.

в) Для квадратичной функции $p(x, y) = 3 \cdot x^2 + 10 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2 + 8$ (левой части заданного уравнения) вычисляем инварианты

$$\tau = 3 + 3 = 6, \quad \delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 25 = -16, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-16) = -128.$$

По таблице 3.2 определяем, что уравнение задает гиперболу, так как $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$.

г) Для квадратичной функции

$$p(x, y) = 52 \cdot x^2 + 72 \cdot x \cdot y + 73 \cdot y^2 - 280 \cdot x - 290 \cdot y + 325$$

(левой части заданного уравнения) вычисляем инварианты

$$\tau = 52 + 73 = 125, \quad \delta = \begin{vmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{vmatrix} = 2500, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 52 & 36 & -140 \\ 36 & 73 & -145 \\ -140 & -145 & 325 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 52 & 36 & -140 \\ 36 & 73 & -145 \\ 0 & 0 & -100 \end{vmatrix} = -100 \cdot \begin{vmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{vmatrix} = -250000$$

(к третьей строке определителя Δ прибавили вторую и удвоенную первую). По таблице 3.2 определяем, что уравнение задает эллипс, так как $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$, $\tau \cdot \Delta < 0$.

Классификация заданных линий совпадает с результатами примера 3.19. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО БАЗИСА ДЛЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ненулевой столбец s называется *собственным вектором* квадратной матрицы A , если выполняется равенство

$$A \cdot s = \lambda \cdot s.$$

Число λ в этом равенстве называется *собственным значением* матрицы A . Говорят, что собственный вектор s *соответствует (принадлежит)* собственному значению λ .

Ненулевой вектор \bar{s} , а также его координатный столбец $s = (x \ y)^T$, будем называть *собственным вектором линии второго порядка*

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot y + a_0 = 0,$$

если выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot s = \lambda \cdot s, \quad (3.64)$$

т.е. координатный столбец собственного вектора линии второго порядка является собственным вектором матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Собственный вектор,

соответствующий нулевому собственному значению ($A \cdot s = 0 \cdot s \Leftrightarrow A \cdot s = 0$), будем называть *особым* собственным вектором линии второго порядка.

Переносим неизвестные в левую часть, запишем систему уравнений (3.64) в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot E) \cdot s = 0.$$

Эта однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю (см. разд. П.10, а также [10]): $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$. Другими словами, *собственные значения матрицы A являются корнями характеристического уравнения $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$* , и наоборот.

Укажем следующие свойства собственных векторов линии второго порядка.

1. *Собственный вектор линии второго порядка не изменяется при ортогональном преобразовании координат и при умножении обеих частей уравнения линии на отличное от нуля число, другими словами, линии (3.59) и (3.60) имеют одинаковые собственные векторы.*

Покажем сначала, что собственный вектор не изменяется при однородном ортогональном преобразовании координат. Действительно, пусть s_1 – собственный вектор матрицы A (соответствующий собственному значению λ_1). Тогда вектор $s'_1 = S^{-1} \cdot s_1$ является собственным для матрицы $A' = S^T \cdot A \cdot S$, где S – ортогональная матрица. В самом деле, учитывая, что $S^T = S^{-1}$, $s_1 = S \cdot s'_1$ и $A \cdot s_1 = \lambda_1 \cdot s_1$, получаем

$$A' \cdot s'_1 = \underbrace{S^T \cdot A \cdot S}_{A'} \cdot \underbrace{S^{-1} \cdot s_1}_{s'_1} = S^T \cdot A \cdot \underbrace{S \cdot S^{-1}}_E \cdot s_1 = S^T \cdot \underbrace{A \cdot s_1}_{\lambda_1 \cdot s_1} = \lambda_1 \cdot \underbrace{S^{-1} \cdot s_1}_{s'_1} = \lambda_1 \cdot s'_1,$$

т.е. $A' \cdot s'_1 = \lambda_1 \cdot s'_1$. Следовательно, s'_1 – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1 .

При параллельном переносе системы координат матрица квадратичной формы не изменяется ($A' = S^T \cdot A \cdot S = A$, если $S = E$), поэтому не изменяются и ее собственные векторы. Если же обе части уравнения (3.59) умножаются на отличное от нуля число μ , то все элементы матрицы A , а также ее собственные значения, умножаются на число μ . Однако, собственный вектор линии не изменяется, поскольку условия $A \cdot s_1 = \lambda_1 \cdot s_1$ и $\mu \cdot A \cdot s_1 = \mu \cdot \lambda_1 \cdot s_1$ равносильны (при $\mu \neq 0$).

2. *Собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, взаимно ортогональны.*

В самом деле, пусть \bar{s}_1 и \bar{s}_2 – собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), т.е. координатные столбцы s_1 и s_2 этих векторов удовлетворяют условиям: $A \cdot s_1 = \lambda_1 \cdot s_1$ и $A \cdot s_2 = \lambda_2 \cdot s_2$. Первое равенство умножим слева на строку s_2^T , а второе – на s_1^T , и вычтем второе равенство из первого:

$$s_2^T \cdot A \cdot s_1 - s_1^T \cdot A \cdot s_2 = \lambda_1 \cdot s_2^T \cdot s_1 - \lambda_2 \cdot s_1^T \cdot s_2.$$

Поскольку при транспонировании число (рассматриваемое как матрица размеров 1×1) не изменяется (см. разд. П.4), то правую часть этого равенства можно преобразовать к виду

$$\lambda_1 \cdot s_2^T \cdot s_1 - \lambda_2 \cdot s_1^T \cdot s_2 = \lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s_2 - \lambda_2 \cdot s_1^T \cdot s_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot s_1^T \cdot s_2,$$

так как $s_2^T \cdot s_1 = (s_1^T \cdot s_2)^T = s_1^T \cdot s_2$, а левая часть рассматриваемого равенства, учитывая симметричность матрицы A ($A^T = A$), равна нулю, так как

$$s_2^T \cdot A \cdot s_1 = (s_1^T \cdot A^T \cdot s_2)^T = s_1^T \cdot A^T \cdot s_2 = s_1^T \cdot A \cdot s_2.$$

Следовательно, рассматриваемое равенство можно записать в виде

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot s_1^T \cdot s_2 = 0 \quad \text{или} \quad s_1^T \cdot s_2 = 0,$$

поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Последнее равенство означает, что $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = s_1^T \cdot s_2 = 0$ – скалярное произведение ненулевых векторов \bar{s}_1 и \bar{s}_2 равно нулю, т.е. они ортогональны.

3. Базисные векторы канонической системы координат являются единичными взаимно ортогональными собственными векторами линии.

Действительно, в канонической системе координат $O' \bar{s}_1 \bar{s}_2$ матрица A

квадратичной формы имеет диагональный вид $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, где λ_1 ,

λ_2 – корни характеристического уравнения (см. п.6 замечаний 3.12) или, что то же самое, собственные значения матрицы A . Записывая (3.64) для координатных столбцов $s_1 = (1 \ 0)^T$, $s_2 = (0 \ 1)^T$ базисных векторов \bar{s}_1 , \bar{s}_2 , получаем

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первое соотношение выполняется при $\lambda = \lambda_1$, второе – при $\lambda = \lambda_2$. Следовательно, базисные векторы \bar{s}_1 , \bar{s}_2 являются собственными, соответствующими собственным значениям $\lambda = \lambda_1$ для первого базисного вектора (\bar{s}_1), $\lambda = \lambda_2$ – для второго (\bar{s}_2). При этом не исключается случай равенства собственных значений.

Таким образом, для определения канонического базиса нужно найти два взаимно ортогональных единичных собственных вектора.

З а м е ч а н и я 3.14.

1. Собственные векторы матрицы определяются неоднозначно. Например, если s – собственный вектор матрицы (или линии), то столбец $\mu \cdot s$ при любом отличном от нуля числе μ также является собственным вектором, соответствующим тому же собственному значению λ , что и вектор s .

2. Матрицу S перехода от базиса \bar{i} , \bar{j} исходной системы координат Oxy к базису \bar{s}_1 , \bar{s}_2 канонической системы координат $O'x'y'$ образуют

координатные столбцы s_1, s_2 взаимно ортогональных единичных собственных векторов линии второго порядка.

В самом деле, пусть s_1, s_2 – координатные столбцы (относительно исходной системы координат Oxy) единичных взаимно ортогональных собственных векторов \bar{s}_1, \bar{s}_2 . Тогда по определению собственных векторов выполняются равенства $A \cdot s_1 = \lambda_1 \cdot s_1, A \cdot s_2 = \lambda_2 \cdot s_2$, а из условий нормировки и ортогональности: $(\bar{s}_1, \bar{s}_1) = s_1^T \cdot s_1 = 1, (\bar{s}_1, \bar{s}_2) = s_1^T \cdot s_2 = 0, (\bar{s}_2, \bar{s}_2) = s_2^T \cdot s_2 = 1$. Составим из координатных столбцов s_1, s_2 матрицу $S = (s_1 | s_2)$. Во-первых, эта матрица ортогональная ($S^T = S^{-1}$), так как

$$S^T \cdot S = \begin{pmatrix} s_1^T \\ s_2^T \end{pmatrix} \cdot (s_1 | s_2) = \begin{pmatrix} s_1^T \cdot s_1 & s_1^T \cdot s_2 \\ s_2^T \cdot s_1 & s_2^T \cdot s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Во-вторых, ортогональное преобразование координат с этой матрицей приводит матрицу A квадратичной формы к каноническому (диагональному) виду:

$$\begin{aligned} A' &= S^T \cdot A \cdot S = S^T \cdot A \cdot (s_1 | s_2) = S^T \cdot (A \cdot s_1 | A \cdot s_2) = \\ &= \begin{pmatrix} s_1^T \\ s_2^T \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1 \cdot s_1 | \lambda_2 \cdot s_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s_1 & \lambda_2 \cdot s_1^T \cdot s_2 \\ \lambda_1 \cdot s_2^T \cdot s_1 & \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 1 & \lambda_2 \cdot 0 \\ \lambda_1 \cdot 0 & \lambda_2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \Lambda. \end{aligned}$$

3. Два единичных взаимно ортогональных собственных вектора линии второго порядка определяются с точностью до множителя (-1) , т.е. каждый из них можно заменить на противоположный, тем самым изменить направление соответствующей координатной оси. Для всех линий, за исключением параболы (б), выбор положительного направления на координатных осях может быть произвольным, другими словами, если, например, вектор \bar{s}_1 базисный, то и противоположный вектор $(-\bar{s}_1)$ также можно взять в качестве базисного. Положительное направление оси $O'x'$ (базисный вектор \bar{s}_1) для параболы нельзя менять на противоположное. Правильный выбор этих базисных векторов описан далее в п.2 замечаний 3.16.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛА КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ДЛЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy поверхность второго порядка задана уравнением (3.59):

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot y + a_0 = 0. \quad (3.65)$$

Выбор начала O' канонической системы координат $O'x'y'$ определяется свойствами симметрии линии второго порядка. Например, координатная

ось $O'x'$ является осью симметрии любой линии второго порядка (см. разд. 3.4.2–3.4.4); ось ординат $O'y'$ служит осью симметрии любой линии, за исключением параболы, начало координат O' является центром симметрии линий (1) – (5), (7) – (9), т.е. всех линий, за исключением параболы.

Точка M_0 называется **центром симметрии** (или просто **центром**) линии второго порядка (3.65), если вместе с каждой своей точкой M линия содержит также и точку M' , симметричную точке M относительно M_0 (точка M_0 – середина отрезка MM').

Линия второго порядка называется **центральной**, если она имеет единственный центр. В противном случае, если центр отсутствует или не является единственным, линия называется **нецентральной**. Центральными линиями являются эллипсы, гипербола и пары пересекающихся прямых (рис.3.54), единственный центр этих линий – начало координат. Остальные линии – нецентральные.

Заметим, что линии эллиптического или гиперболического типов являются центральными, а линии параболического типа – нецентральными, как это указано в первом столбце таблицы 3.2.

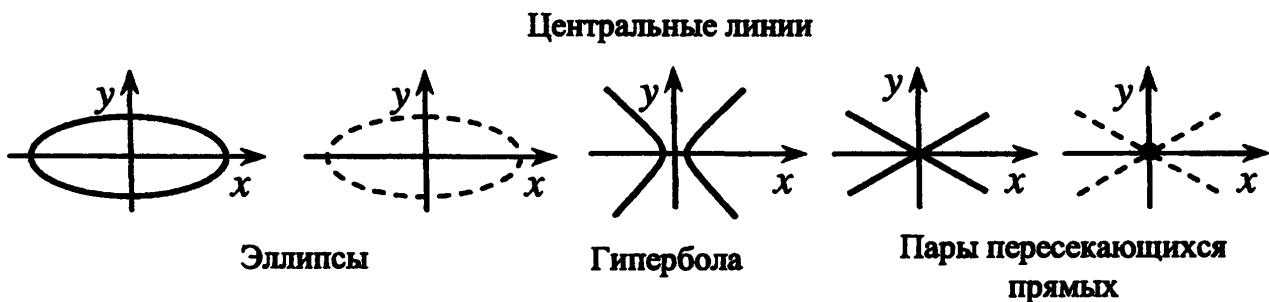


Рис.3.54

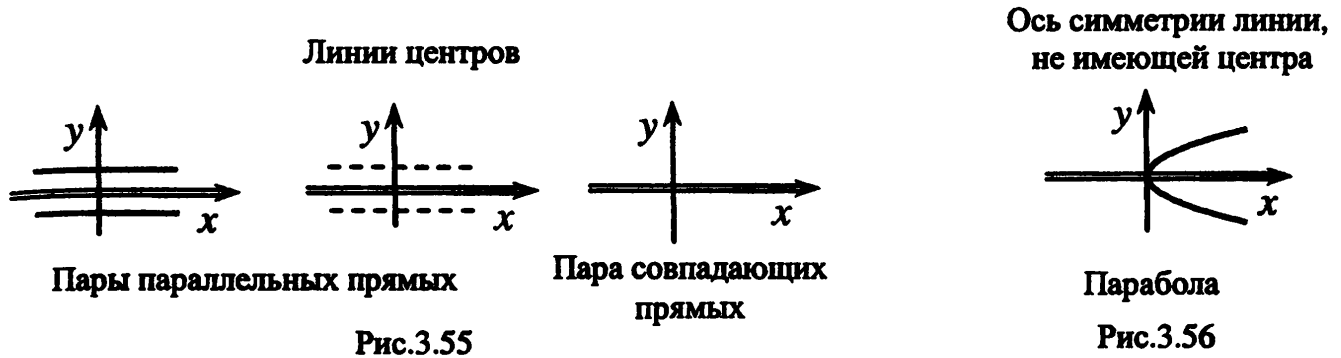
Прямая, каждая точка которой является центром симметрии, называется **прямой центров**. На рис.3.55 изображены линии, имеющие прямую центров (эта прямая совпадает с осью абсцисс канонической системы координат (двойная линия на рис.3.55)).

Прямая l_0 называется **осью симметрии** линии второго порядка (3.65), если вместе с каждой своей точкой M поверхность содержит также и точку M' , симметричную точке M относительно прямой l_0 (прямая l_0 перпендикулярна отрезку MM' и делит его пополам).

Оси симметрии имеют все линии второго порядка. Если линия центральная, то ось симметрии проходит через ее центр. Например, координатные оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипсов, гиперболы, пар пересекающихся прямых (рис.3.54). Если нецентральная линия имеет прямую центров, то эта прямая служит осью симметрии. Например, ось абсцисс канонической системы координат для пар параллельных или совпадающих прямых (рис.3.55). Ось ординат также являет-

ся осью симметрии этих линий. Ось Ox является единственной осью симметрии для параболы (рис.3.56).

Если линия (3.65) имеет хотя бы один центр, то этот центр можно принять за начало канонической системы координат (рис.3.54, 3.55). Если линия не имеет ни одного центра (является параболой), то началом канонической системы координат является точка пересечения этой параболы с ее осью симметрии (рис.3.56).



Составим уравнения для определения центра линии (3.65). Для этого сделаем ортогональное преобразование координат (3.58):

$$\begin{cases} x = x_0 + s_{11} \cdot x' + s_{12} \cdot y' \\ y = y_0 + s_{21} \cdot x' + s_{22} \cdot y' \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s + S \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

где $s = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ – координатный столбец вектора $\bar{s} = \overline{OO'}$ переноса системы

координат, а ортогональная матрица $S = (s_1 | s_2)$ составлена из единичных взаимно ортогональных собственных векторов линии (3.65), соответствующих собственным значениям λ_1, λ_2 . В новой системе координат $O'x'y'$ уравнение линии будет иметь вид

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + a'_0 = 0, \quad (3.66)$$

где, согласно (3.56) и п.6 замечаний 3.12, матрица $A' = S^T \cdot A \cdot S =$

$= \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ – диагональная, столбец коэффициентов линейной формы

$a' = S^T \cdot (A \cdot s + a)$, а свободный член $a'_0 = p(s) = s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0$.

Если в уравнении (3.66) отсутствуют линейные члены ($a' = 0$), то начало координат O' является центром симметрии, поскольку при одновременной замене неизвестных $x' \leftrightarrow (-x')$, $y' \leftrightarrow (-y')$ уравнение (3.66) не изменяется. Другими словами, если координаты точки $M(x', y')$ удовлетворяют уравнению, то и координаты $(-x', -y')$ точки, симметричной точке M относительно начала координат, также удовлетворяют уравнению.

Так как матрица S невырожденная, то равенство $a' = S^T \cdot (A \cdot s + a) = 0$ равносильно системе линейных уравнений (см. разд.3.2.6):

$$A \cdot s + a = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_{11} \cdot x_0 + a_{12} \cdot y_0 + a_1 = 0, \\ a_{12} \cdot x_0 + a_{22} \cdot y_0 + a_2 = 0, \end{cases} \quad (3.67)$$

которая определяет координаты x_0, y_0 центра симметрии, т.е. точки O' .

Эта система имеет единственное решение только тогда, когда $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ или $\text{rg } A = \text{rg}(A | a) = 2$. Следовательно, условие $\delta \neq 0$ является критерием наличия у линии единственного центра.

При $\text{rg } A = \text{rg}(A | a) = 1$ система (3.67) имеет бесконечно много решений, т.е. центры симметрии линии образуют прямую центров. При $\text{rg } A < \text{rg}(A | a)$ система не имеет решений, т.е. линия не имеет ни одного центра.

Таким образом, для линий второго порядка, имеющих хотя бы один центр симметрии, этот центр служит началом O' канонической системы координат системы $O'x'y'$. Координаты x_0, y_0 находятся как решение системы (3.67), причем это решение единственное для центральных поверхностей.

Рассмотрим теперь случай, когда система (3.67) несовместна. В этом случае линия (3.65) не имеет ни одного центра (см. рис.3.56), т.е. является параболой.

Получим уравнение оси симметрии линии (3.65). Для этого запишем столбец $a' = S^T \cdot (A \cdot s + a)$ коэффициентов линейных членов уравнения (3.66), учитывая, что матрица $S = (s_1 | s_2)$ составлена из собственных векторов матрицы A , т.е. $S^T \cdot A = \Lambda \cdot S^T$ (последнее равенство можно считать матричной формой записи (3.64)):

$$S^T \cdot A = \Lambda \cdot S^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1^T \\ s_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot s_1^T \\ \lambda_2 \cdot s_2^T \end{pmatrix}, \text{ т.е. } a' = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s + s_1^T \cdot a \\ \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda_1 \neq 0$, то уравнение $\lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s + s_1^T \cdot a = 0$, или, что то же самое, в координатной форме

$$\lambda_1 \cdot (s_{11} \cdot x_0 + s_{21} \cdot y_0) + s_{11} \cdot a_1 + s_{21} \cdot a_2 = 0,$$

имеет решение $s = (x_0 \ y_0)^T$, то, взяв точку $O'(x_0, y_0)$ в качестве начала системы координат $O'x'y'$, получим уравнение (3.66), в котором будет отсутствовать линейный член с неизвестной x' , так как $a'_1 = \lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s + s_1^T \cdot a = 0$. Такое уравнение при замене неизвестной

$x' \leftrightarrow (-x')$ не изменяется. Другими словами, если координаты точки $M(x', y')$ удовлетворяют уравнению (3.66), то и координаты $(-x', y')$ точки, симметричной точке M относительно оси $O'y'$, также удовлетворяют уравнению (3.66) (при $a'_1 = 0$). Следовательно, если уравнение

$$\lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s + s_1^T \cdot a = 0$$

имеет решения, то оно определяет ось симметрии $O'y'$ линии (3.65).

В случае параболы собственное значение λ_2 отлично от нуля ($\lambda_1 = 0$), поэтому уравнение

$$\lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a = 0 \quad (3.68)$$

имеет решения, которые определяют ось симметрии параболы. Заметим, что ось симметрии, определяемая уравнением (3.68), коллинеарна особому собственному вектору \bar{s}_1 (соответствующему нулевому собственному значению $\lambda_1 = 0$).

Обозначим через \bar{a} вектор с координатным столбцом a , составленным из коэффициентов линейных членов уравнения (3.65). Представим этот вектор (а также его координатный столбец) в виде

$$\bar{a} = \bar{a}_{np} + \bar{a}_\perp \Leftrightarrow a = a_{np} + a_\perp,$$

где $\bar{a}_{np} = (\bar{a}, \bar{s}_1) \cdot \bar{s}_1$ – ортогональная проекция вектора \bar{a} на ось симметрии (3.68), коллинеарную \bar{s}_1 (см. разд.1.4.2); $\bar{a}_\perp = \bar{a} - \bar{a}_{np}$ – ортогональная составляющая вектора \bar{a} относительно оси (3.68); a_{np} , a_\perp – координатные столбцы соответствующих векторов. Тогда для указанного разложения вектора \bar{a} справедливы равенства

$$s_1^T \cdot a_\perp = 0, \quad s_2^T \cdot a = s_2^T \cdot a_\perp,$$

поскольку $s_2^T \cdot a = (\bar{s}_2, \bar{a}) = (\bar{s}_2, \bar{a}_{np} + \bar{a}_\perp) = \underbrace{(\bar{s}_2, \bar{a}_{np})}_0 + (\bar{s}_2, \bar{a}_\perp) = (\bar{s}_2, \bar{a}_\perp) = s_2^T \cdot a_\perp$ и

$s_1^T \cdot a_\perp = (\bar{s}_1, \bar{a}_\perp) = 0$, что следует из ортогональности векторов \bar{s}_1 и \bar{a}_\perp .

Найдем координаты точки O' пересечения оси симметрии (3.68) с линией (3.65), т.е. найдем такой столбец s , удовлетворяющий (3.68), чтобы $s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0 = 0$. Для этого, учитывая (3.68), $\lambda_1 = 0$ и равенство $A = S \cdot \Lambda \cdot S^T$, преобразуем произведение

$$A \cdot s = S \cdot \Lambda \cdot S^T \cdot s = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s \\ \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -s_2^T \cdot a \end{pmatrix} =$$

$$= -S \cdot \begin{pmatrix} s_1^T \cdot a_{\perp} \\ s_2^T \cdot a_{\perp} \end{pmatrix} = -\underbrace{S \cdot S^T}_E \cdot a_{\perp} = -a_{\perp}.$$

Поскольку матрица A симметрическая, то $s^T \cdot A = -a_{\perp}^T$ и

$$s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0 = -a_{\perp}^T \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0 = (a + a_{np})^T \cdot s + a_0.$$

Добавляя уравнение $(a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0$ к уравнению (3.68), получаем систему уравнений, определяющую начало O' канонической системы координат для параболы:

$$\begin{cases} \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases} \quad (3.69)$$

где $\bar{a}_{np} = (\bar{a}, \bar{s}_1) \cdot \bar{s}_1$.

З а м е ч а н и я 3.15.

1. Определение центра или оси симметрии равным образом относится как к вещественным, так и мнимым линиям, т.е. включает случай комплексных решений. При этом оказывается [14], что координаты любого центра линии, любой точки оси симметрии являются вещественными.

2. Система уравнений $A \cdot s + a_{\perp} = 0$ всегда совместна: ее решениями являются координаты центра симметрии, если линия имеет центр; либо координаты оси симметрии (коллинеарной особому собственному вектору), если поверхность не имеет центра.

3. Если система уравнений $A \cdot s + a = 0$ не имеет решений, т.е. линия не имеет ни одного центра, то система

$$\begin{cases} A \cdot s + a_{\perp} = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0 \end{cases}$$

совместна и ее решение определяет начало канонической системы координат [9]. Другими словами, эта система равносильна системе (3.69) в случае параболы.

4. **Направлением** на координатной плоскости называют множество коллинеарных ненулевых векторов (а также множество координатных столбцов этих векторов). Все ненулевые векторы, коллинеарные, например, ненулевому вектору $\alpha \cdot \bar{i} + \beta \cdot \bar{j}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, имеют вид $\lambda \cdot (\alpha \cdot \bar{i} + \beta \cdot \bar{j})$ при $\lambda \neq 0$, т.е. зависят только от отношения координат $\alpha : \beta$. Поэтому направление обозначается отношением $\alpha : \beta$, при этом базисные векторы системы координат имеют направления $1:0$ и $0:1$, а отношение $0:0$ – недопустимо. Говорят, что прямая, отрезок, вектор **имеют направление** $\alpha : \beta$, если они

коллинеарны вектору $\alpha \cdot \bar{i} + \beta \cdot \bar{j}$. Направления, определяемые собственными векторами линии второго порядка, будем называть *собственными*.

5. Два направления $\alpha_1 : \beta_1$ и $\alpha_2 : \beta_2$ называются *взаимно сопряженными* относительно квадратичной формы

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 = (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

если

$$(\alpha_1 \ \beta_1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Направление $\alpha : \beta$, взаимно сопряженное самому себе, т.е.

$$(\alpha \ \beta) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0,$$

называется *самосопряженным (асимптотическим)*.

Любая прямая неасимптотического направления пересекает линию второго порядка в двух точках (быть может мнимых) [2,14]. Прямая асимптотического направления либо не пересекает линию второго порядка, либо пересекает ее в одной точке, либо целиком принадлежит линии второго порядка. На рис.3.57 двойными стрелками изображены асимптотические направления для гиперболы (а), пары пересекающихся прямых (б), параболы (в), пары параллельных прямых (г).

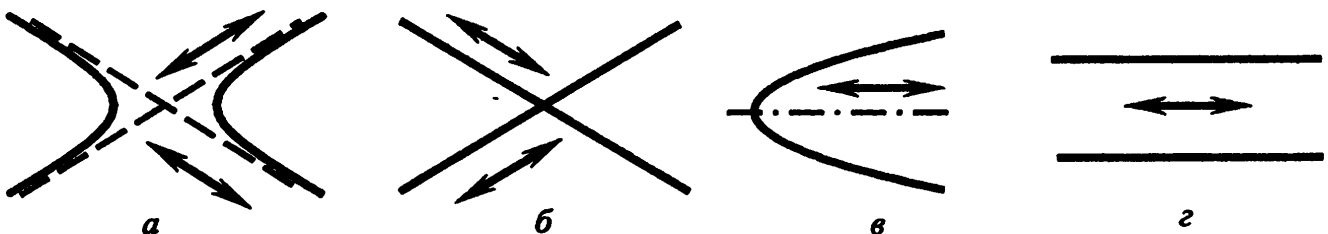


Рис.3.57

6. Середины всех хорд неасимптотического направления $\alpha : \beta$ лежат на одной прямой, имеющей сопряженное направление [2,14]. Эта прямая называется *диаметром линии второго порядка, сопряженным направлению $\alpha : \beta$* . На рис.3.58 изображены хорды и сопряженные им диаметры эллипса (а), гиперболы (б,в) и параболы (г). Два диаметра, имеющие сопряженные (неасимптотические) направления, называются *сопряженными диаметрами*. Каждый из них делит пополам все хорды, параллельные другому (на рис.3.58,а,б,в. полужирными прямыми изображены взаимно сопряженные диаметры эллипса и гиперболы).

7. Свойства сопряженных направлений используются в численных методах поиска минимума функций нескольких переменных [28].

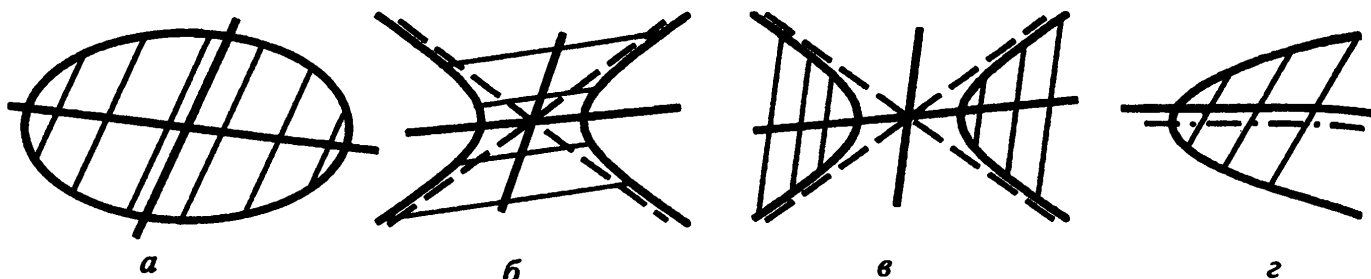


Рис.3.58

8. Направление называется *главным направлением* относительно линии второго порядка, если это направление и перпендикулярное к нему являются взаимно сопряженными. Главные направления являются собственными направлениями, определяющими направления осей канонических систем координат.

КВАДРАТИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Вещественная линия второго порядка $p(x, y) = 0$ разбивает координатную плоскость Oxy на области. В силу свойств многочленов второй степени (в частности, их непрерывности) для решения квадратичных неравенств $p(x, y) > 0$, $p(x, y) < 0$, $p(x, y) \geq 0$, $p(x, y) \leq 0$ достаточно определить знак многочлена $p(x, y)$ в одной внутренней точке какой-либо области. Знаки в других областях проставляются по правилу чередования знаков (аналогично методу интервалов): переходя через границу области, знак многочлена $p(x, y)$ меняется на противоположный, за исключением совпадающих прямых (при переходе через них знак многочлена не меняется). В случае мнимых линий знак многочлена сохраняется на всей координатной плоскости.

Для всех вещественных линий, за исключением пары пересекающихся прямых, назовем *внутренними* те точки, координаты которых (в канонической системе координат) удовлетворяют неравенствам

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1, \quad y^2 < 2 \cdot p \cdot x, \quad y^2 - b^2 < 0, \quad y^2 < 0$$

соответственно. Другими словами, во внутренних точках левая часть канонического уравнения линии меньше правой.

Внешними точками по отношению к каждой из перечисленных линий назовем точки, для которых значения левой части канонического уравнения больше правой его части. На рис.3.59 внутренние точки отмечены минусом, а внешние – плюсом. Заметим, что для совпадающих прямых все точки, кроме точек, принадлежащих линии, являются внешними.

Учитывая п.9 замечаний 3.12, для уравнения (3.59) линии второго порядка в прямоугольной системе координат Oxy можно сформулировать условия, равносильные определениям внутренних и внешних точек линии.

Внутренние и внешние точки

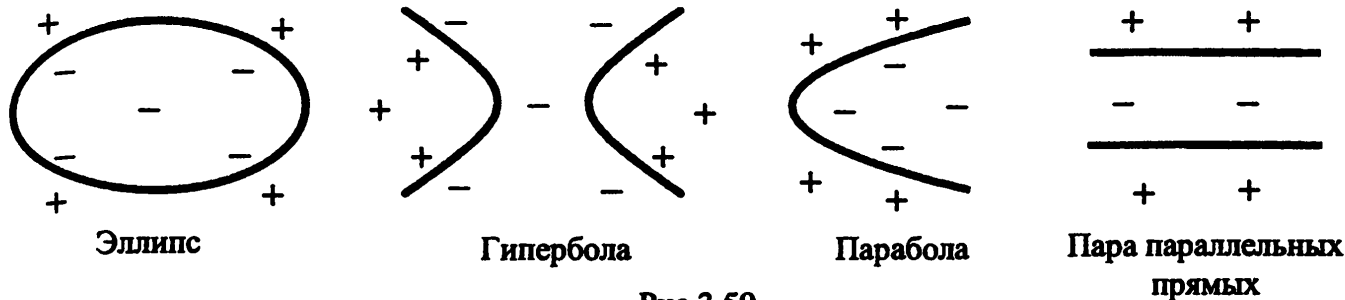


Рис.3.59

Теорема 3.5 (о внутренних и внешних точках линии второго порядка). Пусть уравнение $p(x, y) = 0$ определяет вещественную линию второго порядка, за исключением пары пересекающихся прямых.

1. Если уравнение $p(x, y) = 0$ определяет эллипс, параболу или пару параллельных прямых, то неравенству

$$\tau \cdot p(x, y) < 0 \quad (\tau \cdot p(x, y) > 0)$$

удовлетворяют координаты всех внутренних (внешних) точек этих линий.

2. Если уравнение $p(x, y) = 0$ определяет гиперболу, то неравенству

$$\Delta \cdot p(x, y) < 0 \quad (\Delta \cdot p(x, y) > 0)$$

удовлетворяют координаты всех внутренних (внешних) точек гиперболы.

Справедливы и обратные утверждения.

В самом деле, пусть уравнение $p(x, y) = 0$ определяет вещественную линию второго порядка, за исключением пары пересекающихся прямых. Тогда в канонической системе координат уравнение имеет вид (3.60): $\tilde{p}(x', y') = 0$, где квадратичная функция $\tilde{p}(x', y')$ получена из квадратичной функции $p(x, y)$ в результате умножения на отличный от нуля множитель μ и ортогональной замены переменных (3.62). По определению внутренние точки удовлетворяют неравенству $\tilde{p}(x', y') < 0$, которое равносильно неравенству $\mu \cdot p(x, y) < 0$ в исходной системе координат.

Если уравнение $p(x, y) = 0$ определяет эллипс, то $\mu = -\frac{\delta}{\Delta}$, $\delta > 0$ и $\tau \cdot \Delta < 0$ (см. определение вида канонического уравнения). Поэтому $\mu \cdot p(x, y) < 0 \Leftrightarrow -\frac{\delta}{\Delta} \cdot p(x, y) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\Delta} \cdot p(x, y) > 0 \Leftrightarrow \tau \cdot p(x, y) < 0$. Если уравнение $p(x, y) = 0$ определяет гиперболу, то $\mu = -\frac{\delta}{\Delta}$ и $\delta < 0$. Поэтому $\mu \cdot p(x, y) < 0 \Leftrightarrow -\frac{\delta}{\Delta} \cdot p(x, y) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\Delta} \cdot p(x, y) < 0 \Leftrightarrow \Delta \cdot p(x, y) < 0$. Если уравнение $p(x, y) = 0$ определяет параболу или пару параллельных прямых, то $\mu = \frac{1}{\tau}$. Поэтому $\mu \cdot p(x, y) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\tau} \cdot p(x, y) < 0 \Leftrightarrow \tau \cdot p(x, y) < 0$.

Утверждения для внешних точек и обратные утверждения доказываются от противного.

З а м е ч а н и я 3.16.

1. Для пары пересекающихся прямых предлагаемое определение внутренних и внешних точек не годится, поскольку эта пара разбивает плоскость на "похожие" области, каждую из которых равным образом можно считать внутренней или внешней. Например, пара пересекающихся прямых $x^2 - y^2 = 0$ разбивает плоскость на четыре прямых угла, т.е. на равные "четверти", которые "накладываются" одна на другую при помощи поворота вокруг начала координат на угол, кратный $\frac{\pi}{2}$.

2. При выборе положительного направления оси $O'x'$ канонической системы координат $O'x'y'$ для параболы, заданной уравнением (3.59) вида $p(x, y) = 0$, достаточно проверить, является ли точка M с координатами $x' = 1, y' = 0$ внутренней. Этой точке соответствует координатный столбец $(x_1 \ y_1)^T = s + s_1$ в исходной системе координат, где $s = (x_0 \ y_0)^T$ – координатный столбец точки O' . Вычислим значение квадратичной функции при подстановке координат $s + s_1$:

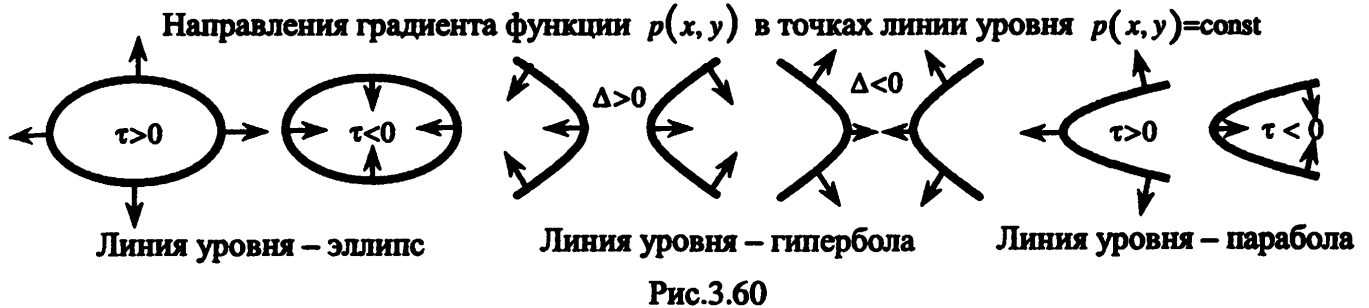
$$\begin{aligned} p(x_1, y_1) &= (s + s_1)^T \cdot A \cdot (s + s_1) + 2 \cdot a^T \cdot (s + s_1) + a_0 = \\ &= s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0 + s^T \cdot A \cdot s_1 + s_1^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s_1 = 2 \cdot a^T \cdot s_1, \end{aligned}$$

поскольку $s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0 = 0$ (точка O' принадлежит параболе), а также $A \cdot s_1 = 0$, так как s_1 – особый собственный вектор параболы. Из теоремы 3.5 следует, что точка M ($\overline{OM} = \bar{s} + \bar{s}_3$) является внутренней при условии $\tau \cdot p(x_1, y_1) < 0$, т.е. при условии $\tau \cdot a^T \cdot s_1 < 0$.

3. Из теоремы 3.5 следует, что градиент функции $p(x, y)$ в точках линии уровня $p(x, y) = 0$ направлен при $\tau > 0$ в сторону внешних точек эллипса или параболы, при $\Delta > 0$ – в сторону внешних точек гиперболы, в противном случае, при $\tau < 0$ для эллипса и параболы или при $\Delta < 0$ для гиперболы градиент направлен в сторону внутренних точек (рис.3.60).

4. Линии уровня $p(x, y) = \text{const}$ квадратичной функции (3.57) являются линиями второго порядка. При изменении величины параметра (const) меняется свободный член функции $p(x, y) - \text{const}$, однако при этом не изменяются выражения τ и δ , а, следовательно, и корни характеристического уравнения, поскольку они не зависят от свободного члена. Поэтому тип линии уровня (эллиптический, гиперболический или параболический) сохраняется. Для всех центральных линий уровня $p(x, y) = \text{const}$ сохраняется от-

ношение $a:b$ сторон основного прямоугольника, а также эксцентриситет и фокальный параметр для эллипсов, гипербол и парабол. Вид линии может измениться, поскольку выражения Δ и κ зависят от свободного члена. Например, при некоторых значениях постоянной (const) линия $p(x, y) = \text{const}$ может быть вещественным эллипсом, при других значениях – мнимым эллипсом, а при одном значении – парой мнимых пересекающихся прямых.



5. Линии уровня $p(x, y) = \text{const}$ заданной квадратичной функции при различных значениях параметра (const) имеют постоянные собственные направления, т.е. базисные векторы канонической системы координат не изменяются. Следовательно, если линии уровня $p(x, y) = \text{const}$ центральные, то все они имеют одну и ту же систему координат. При возрастании параметра (const) эллипсы и гиперболы изменяются гомотетично (центр гомотетии совпадает с центром линии) в направлениях, указанных на рис.3.60. Если линии уровня $p(x, y) = \text{const}$ параболические, то все они имеют одну и ту же ось абсцисс канонической системы координат. При возрастании параметра параболы перемещаются в направлениях, указанных на рис.3.60.

3.3.6. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Рассмотрим задачу приведения к каноническому виду линии второго порядка, заданной в прямоугольной системе координат Oxy уравнением (3.34):

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot y + a_0 = 0. \quad (3.70)$$

Квадратичную функцию в левой части (3.70) обозначим $p(x, y)$, ее матрицу и матрицу квадратичной формы, как и ранее, обозначим через P и A соответственно.

Требуется определить один из девяти возможных канонических видов линии (см. теорему 3.3), найти каноническую систему координат $O'x'y'$, в которой уравнение линии имеет канонический вид, а затем построить линию в канонической и исходной системах координат. Построение, разумеется, производится только для вещественных линий.

АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Для приведения уравнения (3.70) линии второго порядка, заданной в прямоугольной системе координат Oxy , к каноническому виду, нужно выполнить следующие действия.

1. По уравнению (3.70) линии второго порядка составить матрицу P квадратичной функции, матрицу A квадратичной формы и столбец a коэффициентов линейной формы:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

2. Составить характеристическое уравнение $\lambda^2 - \tau \cdot \lambda + \delta = 0$, либо вычисляя его коэффициенты по формулам: $\tau = a_{11} + a_{22}$, $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, либо

разлагая определитель $\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \tau \cdot \lambda + \delta$.

Найти корни λ_1, λ_2 (с учетом кратности) характеристического уравнения.

Вычислить инвариант $\Delta = \det P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$. Если $\delta = \Delta = 0$, то вычис-

лить семиинвариант $\kappa = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$.

3. По таблице 3.2 определить вид линии.

4. Занумеровать корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения в соответствии с правилами:

а) если линия эллиптического типа, то $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$;

б) если линия гиперболического типа, то:

– при $\Delta \neq 0$: $\lambda_1 \cdot \Delta > 0$ (знак λ_1 совпадает со знаком Δ);

– при $\Delta = 0$: $\lambda_1 > 0$;

в) если линия параболического типа, то $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$.

5. Найти взаимно ортогональные собственные направления l_1, l_2 , соответствующие корням λ_1, λ_2 характеристического уравнения:

а) если $\lambda_1 = \lambda_2$, то базисные векторы исходной системы имеют искомые направления $l_1 = (1 \ 0)^T$, $l_2 = (0 \ 1)^T$;

б) если корни λ_1, λ_2 простые ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), то для каждого корня найти ненулевое решение однородной системы уравнений $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot l_i = 0$, $i = 1, 2$. Например, собственное направление $l_2 = (x_2 \ y_2)^T$ для простого корня λ_2 находится как любое ненулевое решение системы

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2) \cdot x + a_{12} \cdot y = 0, \\ a_{12} \cdot x + (a_{22} - \lambda_2) \cdot y = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad (A - \lambda_2 \cdot E) \cdot l_2 = 0.$$

Если $\lambda_1 = 0$, то направление l_1 должно удовлетворять дополнительно условию $\tau \cdot a^T \cdot l_1 \leq 0$, в противном случае следует заменить столбец l_1 на противоположный ($-l_1$).

Нормируя полученные векторы l_1, l_2 , определить координатные столбцы $s_1 = \frac{1}{|l_1|} \cdot l_1$, $s_2 = \frac{1}{|l_2|} \cdot l_2$ векторов \bar{s}_1, \bar{s}_2 канонического базиса.

6. Найти координаты x_0, y_0 начала O' канонической системы координат:

а) для линий, имеющих хотя бы один центр (т.е. всех линий, за исключением параболы), найти любое решение $s = (x_0 \ y_0)^T$ системы уравнений

$$A \cdot s + a = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_1 = 0, \\ a_{12} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_2 = 0; \end{cases}$$

б) для параболы найти решение $s = (x_0 \ y_0)^T$ системы:

$$\begin{cases} \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases}$$

где $a_{np} = (a^T \cdot s_1) \cdot s_1$;

7. Вычислить коэффициенты канонического уравнения:

а) для линий эллиптического типа ($\delta > 0$):

(1) при $\tau \cdot \Delta < 0$ – уравнение эллипса $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ с коэффициентами $a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}$, $b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}$;

(2) при $\tau \cdot \Delta > 0$ – уравнение мнимого эллипса $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = -1$ с коэффициентами $a^2 = \frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}$, $b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}$;

(3) при $\Delta = 0$ – уравнение пары мнимых пересекающихся прямых $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 0$ с коэффициентами $a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$;

б) для линии гиперболического типа ($\delta < 0$):

(4) при $\Delta \neq 0$ – уравнение гиперболы $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ с коэффициентами $a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}$, $b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}$;

(5) при $\Delta = 0$ – уравнение пары пересекающихся прямых $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 0$ с коэффициентами $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}$, $b^2 = -\frac{1}{\lambda_2}$;

в) для линии параболического типа ($\delta = 0$):

(6) при $\Delta \neq 0$ – уравнение параболы $(y')^2 = 2 \cdot p \cdot x'$ с параметром $p = \sqrt{-\frac{\Delta}{\tau^3}}$;

(7) при $\Delta = 0$, $\kappa < 0$ – уравнение пары параллельных прямых $(y')^2 - b^2 = 0$ с коэффициентом $b^2 = -\frac{\kappa}{\tau^2}$;

(8) при $\Delta = 0$, $\kappa > 0$ – уравнение пары мнимых параллельных прямых $(y')^2 + b^2 = 0$ с коэффициентом $b^2 = \frac{\kappa}{\tau^2}$;

(9) при $\Delta = 0$, $\kappa = 0$ – уравнение пары совпадающих прямых $(y')^2 = 0$.

8. На координатной плоскости Oxy изобразить каноническую систему координат $O'x'y'$, координаты x_0 , y_0 начала O' которой найдены в п.6, а координаты базисных векторов – в п.5.

9. Построить линию второго порядка в канонической системе координат $O'x'y'$ по каноническому уравнению, найденному в п.7. Построение центральных линий (эллипса, гиперболы, пары пересекающихся прямых) удобно начинать с изображения основного прямоугольника (см. разд.3.3.1; 3.3.2). При построении параболических линий (параболы, пары параллельных прямых, пары совпадающих прямых) использовать разд.3.3.3; 3.2.4). Мнимые линии не изображаются, за исключением уравнения пары мнимых пересекающихся прямых, действительным решением которого является единственная точка O' .

Замечания 3.17.

1. Согласно п.3 замечаний 3.15 для нахождения начала канонической системы координат для параболы (см. п.6, "б" алгоритма) можно использовать систему

$$\begin{cases} A \cdot s + a_{\perp} = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases}$$

где $a_{np} = (a^T \cdot s_1) \cdot s_1$, $a_{\perp} = a - a_{np}$.

2. Систему уравнений в п.6, "б" алгоритма можно заменить системой

$$\begin{cases} \lambda_2 \cdot l_2^T \cdot s + l_2^T \cdot a = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases}$$

которая получена умножением обеих частей первого уравнения на $|l_2| = \sqrt{l_2^T \cdot l_2} \neq 0$.

3. В случае параболы ($\lambda_1 = 0$) в качестве собственного направления l_2 можно взять любой ненулевой столбец матрицы A (или ненулевой столбец, пропорциональный столбцу матрицы A).

Пример 3.24. В прямоугольной системе координат Oxy построить линию, заданную уравнением:

$$52 \cdot x^2 + 72 \cdot x \cdot y + 73 \cdot y^2 - 280 \cdot x - 290 \cdot y + 325 = 0.$$

□ 1. Составляем матрицу P квадратичной функции, матрицу A квадратичной формы и столбец a коэффициентов линейной формы:

$$P = \begin{pmatrix} 52 & 36 & -140 \\ 36 & 73 & -145 \\ -140 & -145 & 325 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -140 \\ -145 \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляем инварианты (см. пример 3.23,г):

$$\tau = 52 + 73 = 125, \quad \delta = \begin{vmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{vmatrix} = 2500, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 52 & 36 & -140 \\ 36 & 73 & -145 \\ -140 & -145 & 325 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 52 & 36 & -140 \\ 36 & 73 & -145 \\ 0 & 0 & -100 \end{vmatrix} = -100 \cdot \begin{vmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{vmatrix} = -250000$$

(к третьей строке определителя Δ прибавили вторую и удвоенную первую). Так как $\delta \neq 0$, то вычислять семиинвариант κ не нужно.

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 125 \cdot \lambda + 2500 = 0$, находим корни $\lambda = 25$ и $\lambda = 100$.

3. По таблице 3.2 определяем, что заданное уравнение является уравнением эллипса, так как $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$, $\tau \cdot \Delta < 0$.

4. Поскольку линия эллиптического типа, корни характеристического уравнения обозначим следующим образом (см. п.4, "а" алгоритма): $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 100$, чтобы выполнялось неравенство $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$.

5. Находим взаимно ортогональные собственные направления l_1, l_2 , соответствующие корням λ_1, λ_2 характеристического уравнения. Поскольку корни простые (п."б"), то находим ненулевые решения l_1, l_2 однородных систем $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot l_i = 0$, $i = 1, 2$:

для $\lambda_1 = 25$

$$\begin{pmatrix} 52-25 & 36 \\ 36 & 73-25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=-3, \end{cases} \Rightarrow l_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix};$$

для $\lambda_2 = 100$

$$\begin{pmatrix} 52-100 & 36 \\ 36 & 73-100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=4, \end{cases} \Rightarrow l_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Нормируя полученные векторы l_1, l_2 , определяем координатные столбцы векторов канонического базиса:

$$|l_1| = \sqrt{l_1^T \cdot l_1} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5, \quad |l_2| = \sqrt{l_2^T \cdot l_2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$s_1 = \frac{1}{|l_1|} \cdot l_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad s_2 = \frac{1}{|l_2|} \cdot l_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

6. Находим координаты x_0, y_0 начала O' канонической системы координат, решая систему уравнений (см. п.6, "а" алгоритма):

$$A \cdot s + a = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} 52 \cdot x + 36 \cdot y - 140 = 0, \\ 36 \cdot x + 73 \cdot y - 145 = 0. \end{cases}$$

Получаем $x_0 = 2$, $y_0 = 1$. Следовательно, вектор $\bar{s} = \overline{OO'}$ переноса начала координат имеет координаты $s = (2 \ 1)^T$ или, что то же самое, начало O' канонической системы координат имеет координаты $O'(2, 1)$ относительно исходной системы координат.

7. Вычисляем коэффициенты канонического уравнения (1) эллипса (см. п.7, "а" алгоритма):

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta} = -\frac{-250000}{25 \cdot 2500} = 4 \quad \text{и} \quad b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta} = -\frac{-250000}{100 \cdot 2500} = 1.$$

Следовательно, каноническое уравнение заданной линии имеет вид:

$$\frac{(x')^2}{2^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1.$$

8. На координатной плоскости Oxy изображаем каноническую систему координат $O'x'y'$ с началом в точке $O'(2;1)$, с базисными векторами $\bar{s}_1 = \frac{4}{5} \cdot \bar{i} - \frac{3}{5} \cdot \bar{j}$,

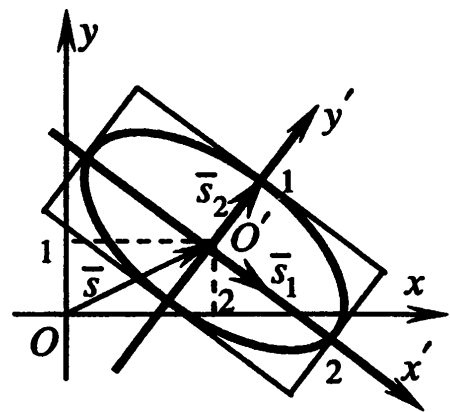


Рис.3.61

$\bar{s}_2 = \frac{3}{5} \cdot \bar{i} + \frac{4}{5} \cdot \bar{j}$ (см. рис.3.61).

9. В канонической системе координат строим основной прямоугольник (см. разд.3.3.2) со сторонами $2 \cdot a = 4$, $2 \cdot b = 2$, а затем эллипс $\frac{(x')^2}{2^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1$ (см. пример 3.20). ■

Пример 3.25. В прямоугольной системе координат Oxy построить линию, заданную уравнением:

$$-7 \cdot x^2 + 52 \cdot x \cdot y + 32 \cdot y^2 - 180 \cdot x - 360 \cdot y + 720 = 0.$$

□ 1. Составляем матрицу P квадратичной функции, матрицу A квадратичной формы и столбец a коэффициентов линейной формы:

$$P = \begin{pmatrix} -7 & 26 & -90 \\ 26 & 32 & -180 \\ -90 & -180 & 720 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -7 & 26 \\ 26 & 32 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляем инварианты: $\tau = -7 + 32 = 25$,

$$\delta = \det A = \begin{vmatrix} -7 & 26 \\ 26 & 32 \end{vmatrix} = -900, \quad \Delta = \det P = \begin{vmatrix} -7 & 26 & -90 \\ 26 & 32 & -180 \\ -90 & -180 & 720 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -7 & 10 & -90 \\ 40 & -20 & 0 \\ -146 & 28 & 0 \end{vmatrix} = -90 \cdot \begin{vmatrix} 40 & -20 \\ -146 & 28 \end{vmatrix} = 162000$$

(ко второй и к третьей строкам определителя Δ прибавили первую, умноженную на (-2) и на 8 соответственно, а затем разложили по третьему столбцу).

Так как $\delta \neq 0$, то вычислять семиинвариант k не нужно.

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 25 \cdot \lambda - 900 = 0$, находим корни $\lambda = -20$ и $\lambda = 45$.

3. По таблице 3.2 определяем, что заданное уравнение является уравнением гиперболы, так как $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$.

4. Поскольку линия гиперболического типа, корни характеристического уравнения обозначим следующим образом (см. п.4, "б" алгоритма): $\lambda_1 = 45$, $\lambda_2 = -20$, чтобы выполнялось условие $\lambda_1 \cdot \Delta > 0$.

5. Находим взаимно ортогональные собственные направления l_1, l_2 , соответствующие корням λ_1, λ_2 характеристического уравнения. Поскольку корни простые (п. "б"), то находим ненулевые решения l_1, l_2 однородных систем $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot l_i = 0$, $i = 1, 2$:

для $\lambda_1 = 45$

$$\begin{pmatrix} -7-45 & 26 \\ 26 & 32-45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases} \Rightarrow l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

для $\lambda_2 = -20$

$$\begin{pmatrix} -7+20 & 26 \\ 26 & 32+20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-1, \end{cases} \Rightarrow l_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя полученные векторы l_1, l_2 , определяем координатные столбцы векторов канонического базиса:

$$|l_1| = \sqrt{l_1^T \cdot l_1} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad |l_2| = \sqrt{l_2^T \cdot l_2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5},$$

$$s_1 = \frac{1}{|l_1|} \cdot l_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad s_2 = \frac{1}{|l_2|} \cdot l_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

6. Находим координаты x_0, y_0 начала O' канонической системы координат, решая систему уравнений (см. п.6, "а" алгоритма):

$$A \cdot s + a = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} -7 \cdot x + 26 \cdot y - 90 = 0, \\ 26 \cdot x + 32 \cdot y - 180 = 0. \end{cases}$$

Получаем $x_0 = 2$, $y_0 = 4$. Следовательно, вектор $\bar{s} = \overline{OO'}$ переноса начала координат имеет координаты $s = (2 \ 4)^T$ или, что то же самое, начало O' канонической системы координат имеет координаты $O'(2, 4)$ относительно исходной системы координат.

7. Вычисляем коэффициенты канонического уравнения (4) гиперболы (см. п.7, "б" алгоритма):

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta} = -\frac{162000}{45 \cdot (-900)} = 4 \quad \text{и} \quad b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta} = \frac{162000}{(-20) \cdot (-900)} = 9.$$

Следовательно, каноническое уравнение заданной линии имеет вид:

$$\frac{(x')^2}{2^2} - \frac{(y')^2}{3^2} = 1.$$

8. На координатной плоскости Oxy изображаем каноническую систему координат $O'x'y'$ с началом в точке $O'(2, 4)$, с базисными векторами

$$\bar{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \bar{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \bar{j};$$

$$\bar{s}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \bar{i} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \bar{j} \quad (\text{рис.3.62}).$$

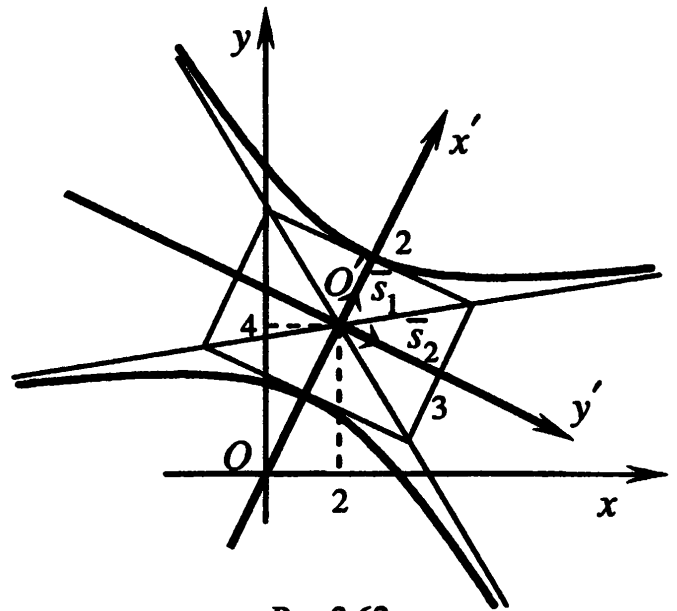


Рис.3.62

9. В канонической системе координат строим основной прямоугольник (см. разд.3.3.3) со сторонами $2 \cdot a = 4$, $2 \cdot b = 6$, затем – асимптоты (продлевая диагонали прямоугольника) и, наконец, – гиперболу $\frac{(x')^2}{2^2} - \frac{(y')^2}{3^2} = 1$ (см. пример 3.21). ■

Пример 3.26. В прямоугольной системе координат Oxy построить линию, заданную уравнением:

$$25 \cdot x^2 - 120 \cdot x \cdot y + 144 \cdot y^2 - 78 \cdot x + 1066 \cdot y + 845 = 0.$$

□ 1. Составляем матрицу P квадратичной функции, матрицу A квадратичной формы и столбец a коэффициентов линейной формы:

$$P = \begin{pmatrix} 25 & -60 & -39 \\ -60 & 144 & 533 \\ -39 & 533 & 845 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 25 & -60 \\ -60 & 144 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -39 \\ 533 \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляем инварианты: $\tau = 25 + 144 = 169$,

$$\delta = \det A = \begin{vmatrix} 25 & -60 \\ -60 & 144 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \det P = \begin{vmatrix} 25 & -60 & -39 \\ -60 & 144 & 533 \\ -39 & 533 & 845 \end{vmatrix} =$$

$$= -39 \cdot \begin{vmatrix} -60 & -39 \\ 144 & 533 \end{vmatrix} - 533 \cdot \begin{vmatrix} 25 & -39 \\ -60 & 533 \end{vmatrix} + 845 \cdot \delta = -4826809$$

(раскладываем определитель Δ по третьей строке, учитывая, что $\delta = 0$). Так как $\Delta \neq 0$, то вычислять семиинвариант K не нужно.

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 169 \cdot \lambda = 0$, находим корни $\lambda = 0$ и $\lambda = 169$.

3. По таблице 3.2 определяем, что заданное уравнение является уравнением параболы, так как $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$.

4. Поскольку линия параболического типа, корни характеристического уравнения обозначим следующим образом (см. п.4, "в" алгоритма): $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 169$, чтобы выполнялись условия $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

5. Находим взаимно ортогональные собственные направления l_1, l_2 , соответствующие корням λ_1, λ_2 характеристического уравнения. Поскольку корни простые (п."б"), то находим ненулевые решения l_1, l_2 однородных систем $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot l_i = 0$, $i = 1, 2$:

для $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 25 & -60 \\ -60 & 144 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 12, \\ y = 5, \end{cases} \Rightarrow l_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix};$$

согласно п.3 замечаний 3.17, в качестве l_2 возьмем ненулевой столбец $l_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$, пропорциональный первому столбцу матрицы A .

Условие $\tau \cdot a^T \cdot l_1 \leq 0$ для направления l_1 не выполняется: $\tau \cdot a^T \cdot l_1 = 169 \cdot (-39 \ 533) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = 371293 > 0$. Поэтому заменяем столбец l_1 на противоположный, полагая $l_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Нормируя полученные векторы l_1, l_2 , определяем координатные столбцы векторов канонического базиса:

$$|l_1| = \sqrt{l_1^T \cdot l_1} = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = 13, \quad |l_2| = \sqrt{l_2^T \cdot l_2} = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13,$$

$$s_1 = \frac{1}{|l_1|} \cdot l_1 = \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}, \quad s_2 = \frac{1}{|l_2|} \cdot l_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ -\frac{12}{13} \end{pmatrix}.$$

6. Находим координаты x_0, y_0 начала O' канонической системы координат. Поскольку линия является параболой, вычисляем

$$a^T \cdot s_1 = (-39 \ 533) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix} = -169, \quad a_{np} = (a^T \cdot s_1) \cdot s_1 = -169 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 156 \\ 65 \end{pmatrix},$$

$$a + a_{np} = \begin{pmatrix} -39 \\ 533 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 156 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 117 \\ 598 \end{pmatrix}.$$

Составляем систему уравнений с учетом п.2 замечаний 3.17:

$$\begin{cases} \lambda_2 \cdot l_2^T \cdot s + l_2^T \cdot a = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 169 \cdot (5 \ -12) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (5 \ -12) \cdot \begin{pmatrix} -39 \\ 533 \end{pmatrix} = 0, \\ (117 \ 598) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 845 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 845 \cdot x - 2028 \cdot y - 6591 = 0, \\ 117 \cdot x + 598 \cdot y + 845 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \cdot x - 12 \cdot y - 39 = 0, \\ 9 \cdot x + 46 \cdot y + 65 = 0. \end{cases}$$

Получаем $x_0 = 3$, $y_0 = -2$. Следовательно, вектор $\bar{s} = \overline{OO'}$ переноса начала координат имеет координаты $s = (3 \ -2)^T$ или, что то же самое, начало O' канонической системы координат имеет координаты $O'(3, -2)$ относительно исходной системы координат.

7. Вычисляем коэффициент канонического уравнения (6) параболы (см. п.7, "в" алгоритма): $p = \sqrt{-\frac{\Delta}{\tau^3}} = \sqrt{-\frac{-4826809}{169^3}} = 1$. Следовательно, каноническое уравнение заданной линии имеет вид: $(y')^2 = 2 \cdot 1 \cdot x'$.

8. На координатной плоскости Oxy изображаем каноническую систему координат $O'x'y'$ с началом в точке $O'(3, -2)$, с базисными векторами $\bar{s}_1 = -\frac{12}{13} \cdot \bar{i} - \frac{5}{13} \cdot \bar{j}$;

$\bar{s}_2 = \frac{5}{13} \cdot \bar{i} - \frac{12}{13} \cdot \bar{j}$ (рис.3.63).

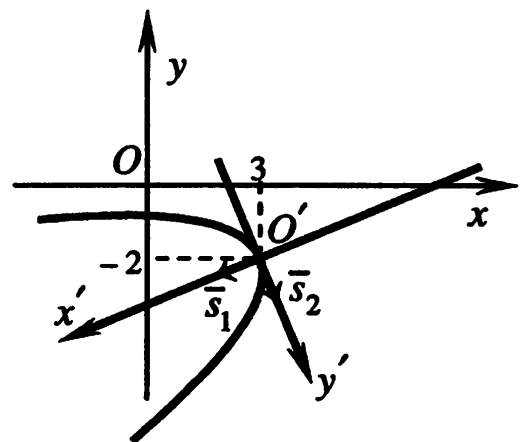


Рис.3.63

9. В канонической системе координат строим параболу $(y')^2 = 2 \cdot 1 \cdot x'$ (см. пример 3.22 в разд.3.3.4). ■

Пример 3.27. В прямоугольной системе координат Oxy линии второго порядка заданы уравнениями:

а) $52 \cdot x^2 + 72 \cdot x \cdot y + 73 \cdot y^2 - 280 \cdot x - 290 \cdot y + 325 = 0$;

б) $-7 \cdot x^2 + 52 \cdot x \cdot y + 32 \cdot y^2 - 180 \cdot x - 360 \cdot y + 720 = 0$;

в) $25 \cdot x^2 - 120 \cdot x \cdot y + 144 \cdot y^2 - 78 \cdot x + 1066 \cdot y + 845 = 0$.

Определить расположение начала координат $O(0,0)$ относительно заданных линий.

□ а) Вычисляем инварианты (см. пример 3.24): $\tau = 125$, $\delta = 2500$, $\Delta = -250000$ и находим по таблице 3.2, что заданное уравнение определяет эллипс. Вычисляем значение квадратичной функции

$$p(x, y) = 52 \cdot x^2 + 72 \cdot x \cdot y + 73 \cdot y^2 - 280 \cdot x - 290 \cdot y + 325$$

в точке $O(0,0)$: $p(0,0) = 325$. Так как $\tau \cdot p(0,0) = 125 \cdot 325 > 0$, то делаем вывод, что точка $O(0,0)$ лежит вне эллипса, т.е. является внешней для заданного эллипса (см. п.1. теоремы 3.5).

б) Вычисляем инварианты (см. пример 3.25): $\tau = 25$, $\delta = -900$, $\Delta = 162000$ и находим по таблице 3.2, что заданное уравнение определяет гиперболу. Вычисляем значение квадратичной функции

$$p(x, y) = -7 \cdot x^2 + 52 \cdot x \cdot y + 32 \cdot y^2 - 180 \cdot x - 360 \cdot y + 720$$

в точке $O(0,0)$: $p(0,0) = 720$. Так как $\Delta \cdot p(0,0) = 162000 \cdot 720 > 0$, то делаем вывод, что точка $O(0,0)$ внешняя точка гиперболы (см. п.2. теоремы 3.5).

в) Вычисляем инварианты (см. пример 3.26): $\tau = 169$, $\delta = 0$, $\Delta = -4826809$ и находим по таблице 3.2, что заданное уравнение определяет параболу. Вычисляем значение квадратичной функции

$$p(x, y) = 25 \cdot x^2 - 120 \cdot x \cdot y + 144 \cdot y^2 - 78 \cdot x + 1066 \cdot y + 845$$

в точке $O(0,0)$: $p(0,0) = 845$. Так как $\tau \cdot p(0,0) = 125 \cdot 845 > 0$, то делаем вывод, что точка $O(0,0)$ лежит вне параболы (см. п.1 теоремы 3.5).

Полученные выводы подтверждаются рис.3.61, 3.62, 3.63. ■

3.3.7. Применение линий первого и второго порядков в задачах на экстремум функций

Рассмотрим задачу поиска *минимума* функции двух переменных [28].

Пусть заданы:

а) функция $f(x) = f(x_1, x_2)$ двух переменных ($x \in R^2$);

б) множество допустимых решений M ($M \subset R^2$).

Требуется найти такую точку x^* из множества допустимых решений, которой соответствует минимальное значение функции $f(x)$ на этом множестве:

$$f(x^*) = \min_{x \in M} f(x).$$

Аналогично формулируется задача поиска максимума. Задача поиска минимума и максимума называется задачей поиска *экстремума*. Множество допустимых решений M задается условиями (ограничениями) на x , как правило, уравнениями или неравенствами. В этом случае поставленная задача называется задачей поиска *условного экстремума*. Если множество допустимых решений совпадает со всей плоскостью ($M = R^2$), т.е. ограничения отсутствуют, решается задача поиска *безусловного экстремума*.

Постановки задач поиска экстремума функции принято записывать в сокращенной форме, например:

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \min, \\ g_1(x) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \rightarrow \max, \\ g_1(x) = 0, \\ g_2(x) \leq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \rightarrow \text{extr}, \\ x \in R^2, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \rightarrow \text{extr}.$$

Последние две записи относятся к одной и той же задаче поиска безусловного экстремума, а первые две – к задаче поиска условного экстремума с ограничениями, задаваемыми функциями $g_1(x), g_2(x)$.

Напомним, что линией уровня функции $f(x) = f(x_1, x_2)$ называется геометрическое место точек плоскости, в которых функция принимает постоянное значение, т.е. $f(x_1, x_2) = \text{const}$.

Ниже рассматриваются задачи, в которых функция $f(x)$ и функции, задающие ограничения, являются многочленами двух переменных первой или второй степени. В этом случае построение множества допустимых решений M и линий уровня функции $f(x)$ сводится к построению алгебраических линий первого или второго порядков (см. разд.3.2, 3.3).

В основе графического метода решения задачи поиска условного экстремума лежит следующее соображение. Если линия уровня $f(x) = \text{const}$ имеет с множеством допустимых решений M хотя бы одну общую точку, то это значение постоянной (const) является *допустимым*, так как функция достигает его на множестве M . Если же линия уровня $f(x) = \text{const}$ не имеет общих точек с множеством M , то это значение постоянной (const) является *недопустимым*, поскольку функция не достигает его на множестве M .

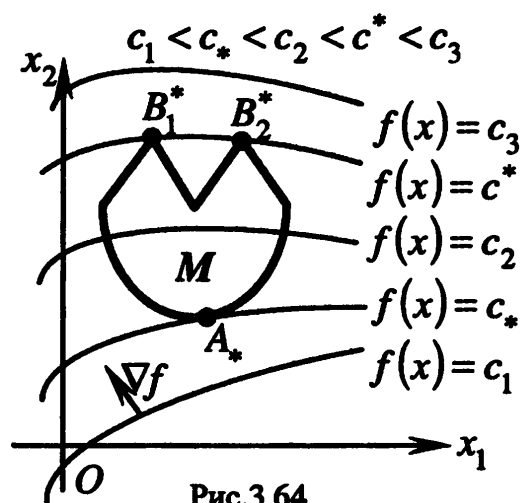


Рис.3.64

В частности, функция $f(x)$, линии уровня которой изображены на рис.3.64, на множестве M принимает, например, значения c_*, c_2, c^* (они являются допустимыми) и не принимает значений c_1 и c_3 (они являются недопустимыми).

АЛГОРИТМ ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОИСКА УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

1. Построить на координатной плоскости R^2 множество допустимых решений M .
2. Построить семейство линий уровня $f(x) = \text{const}$.

3. По линиям уровня определить все допустимые на множестве M значения функции: $c_* \leq f(x) \leq c^*$.

4. Для наименьшего значения $c_* = \min_{x \in M} f(x)$ найти координаты общих точек линии уровня $f(x) = c_*$ и множества допустимых решений M . В результате получим точки условного минимума функции. Для наибольшего значения $c^* = \max_{x \in M} f(x)$ аналогичным образом найти точки условного максимума функции. Например, на рис.3.64: точка A_* – точка условного минимума, а точки B_1^*, B_2^* – точки условного максимума.

З а м е ч а н и я 3.17.

1. Возможны случаи, когда на множестве M функция $f(x)$ не ограничена сверху ($c^* = +\infty$) или снизу ($c_* = -\infty$), тогда точек условного максимума или минимума нет.

2. Для решения задачи поиска безусловного экстремума допустимые значения постоянной (const) в п.3 алгоритма определяются так: если линия уровня $f(x) = \text{const}$ имеет хотя бы одну точку (вещественную) на плоскости R^2 , то это значение постоянной (const) является *допустимым*, в противном случае – *недопустимым*.

3. За исключением простых задач, графическое решение требует проверки аналитическими методами теории оптимизации [28].

Пример 3.28. Графическим методом найти экстремумы:

$$\text{а) } f(x) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \rightarrow \text{extr}; \quad \text{б) } \begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}, \\ g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}, \\ g_1(x) = x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} f(x) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}, \\ g_1(x) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} f(x) = x_2 \rightarrow \text{extr}, \\ g_1(x) = -x_1 - x_2 \geq -5, \\ g_2(x) = x_1 - x_2 \geq -1, \\ g_3(x) = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \geq 11, \\ g_4(x) = -x_1 + 2 \cdot x_2 \geq -1; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} f(x) = 4 \cdot x_1 - x_2^2 \rightarrow \text{extr}, \\ g_1(x) = x_1 - x_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

□ а) 1. Множество M допустимых решений строить не нужно, так как оно совпадает со всей плоскостью: $M = R^2$.

2. Линия уровня $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = \text{const}$ при $\text{const} > 0$ представляет собой эллипс (см. рис.3.65,а), при $\text{const} = 0$ – пару мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке $O(0, 0)$, при $\text{const} < 0$ – мнимый эллипс. При увеличении постоянной полуоси эллипса пропорционально увеличиваются. На рис.3.65,а изображены эллипсы $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1$ ($a = 2$, $b = 1$) и $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = \frac{9}{4}$ или $\frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} = 1$ ($a = 3$, $b = \frac{3}{2}$). Стрелками указаны направления наискорейшего возрастания функции (градиента).

3. Из п.2 следует, что допустимые значения функции определяются неравенством $0 \leq f(x) < +\infty$.

4. В точке $O(0, 0)$ достигается безусловный минимум функции, так как в этой точке функция принимает наименьшее значение по сравнению со значениями в других точках плоскости, а наибольшего значения функция не достигает.

б) Решается задача поиска условного экстремума с ограничением типа равенств.

1. Строим множество M допустимых решений – прямую $x_1 + x_2 - 1 = 0$ (см. рис.3.65,б).

2. Линии уровня $x_1^2 + x_2^2 = \text{const}$ представляют собой семейство концентрических окружностей (при $\text{const} > 0$). При $\text{const} > \frac{1}{2}$ окружность $x_1^2 + x_2^2 = \text{const}$ пересекает прямую $x_1 + x_2 - 1 = 0$, при $\text{const} = \frac{1}{2}$ – касается этой прямой в точке $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, при $0 < \text{const} < \frac{1}{2}$ – не пересекает прямую.

3. Из п.2 следует, что допустимые значения функции определяются неравенством $\frac{1}{2} \leq f(x) < +\infty$.

4. Наименьшее значение на множестве M , равное $\frac{1}{2}$, функция достигает в точке $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Наибольшего значения на множестве M функция не достигает.

в) Решается задача поиска условного экстремума с ограничением типа равенств.

1. Строим множество M допустимых решений – гиперболу $x_1^2 - x_2^2 = 1$ (см. рис.3.65,в).

2. Линии уровня $x_1^2 + x_2^2 = \text{const}$ представляют собой семейство концентрических окружностей (при $\text{const} > 0$). При $\text{const} > 1$ окружность

$x_1^2 + x_2^2 = \text{const}$ пересекает гиперболу в четырех точках, при $\text{const} = 1$ – касается гиперболы в точках $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, при $0 < \text{const} < 1$ – не пересекает гиперболу.

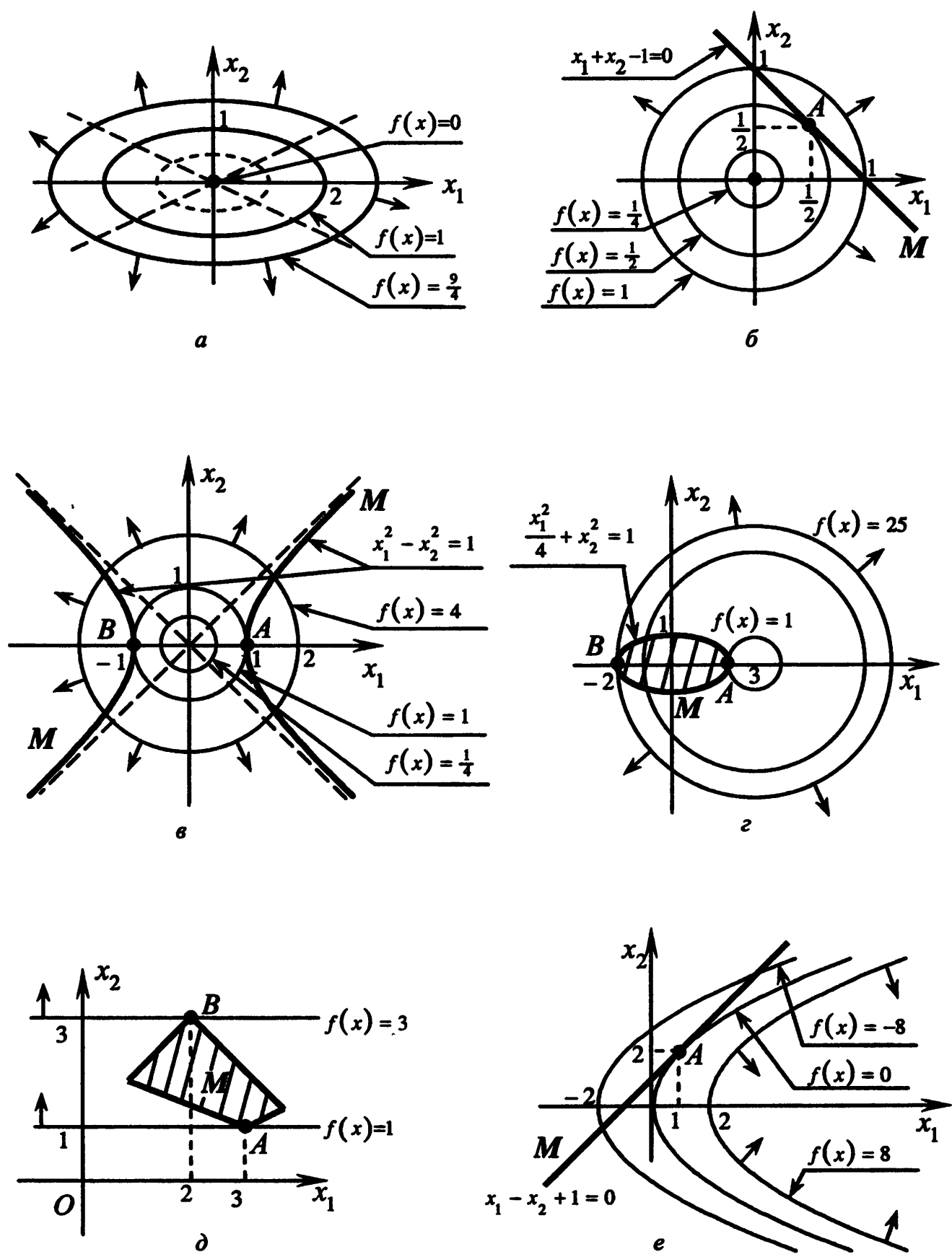


Рис.3.65

3. Из п.2 следует, что допустимые значения функции определяются неравенством $1 \leq f(x) < +\infty$.

4. Наименьшее значение на множестве M , равное 1, функция достигает в точках $A(1, 0)$ и $B(-1, 0)$. Наибольшего значения на множестве M функция не достигает.

г) Решается задача поиска условного экстремума с ограничением типа неравенств.

1. Строим множество M допустимых решений: множество, ограниченное эллипсом $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1$, включая внутренние точки эллипса (см. рис.3.65,з).

2. Линии уровня $(x_1 - 3)^2 + x_2^2 = \text{const}$ представляют собой семейство концентрических окружностей (при $\text{const} > 0$) с центром в точке $Q(3, 0)$. При $1 < \text{const} < 25$ окружность $x_1^2 + x_2^2 = \text{const}$ пересекает множество M , при $\text{const} = 1$ – касается эллипса в точке $A(2, 0)$, при $\text{const} = 25$ – касается эллипса в точке $B(-2, 0)$, при $0 < \text{const} < 1$ или $\text{const} > 25$ окружность не имеет общих точек с множеством M .

3. Из п.2 следует, что допустимые значения функции определяются неравенством $1 \leq f(x) \leq 25$.

4. Наименьшее значение на множестве M , равное 1, функция достигает в точке $A(2, 0)$. Наибольшее значение на множестве M , равное 25, функция достигает в точке $B(-2, 0)$.

д) Решается задача поиска условного экстремума с ограничениями типа неравенств. Данная задача относится к классу задач линейного программирования [28] (функция $f(x)$ и все функции, задающие ограничения, линейные).

1. Строим множество M допустимых решений: в данном случае выпуклый четырехугольник (см. рис.3.65,д и рис.3.35,з к примеру 3.18).

2. Линии уровня $x_2 = \text{const}$ представляют собой семейство параллельных прямых. При $1 < \text{const} < 3$ прямая $x_2 = \text{const}$ пересекает множество M , при $\text{const} = 1$ прямая проходит через вершину $A(3, 1)$ четырехугольника, при $\text{const} = 3$ прямая проходит через вершину $B(2, 3)$ четырехугольника, при $\text{const} < 1$ или $\text{const} > 3$ прямая не пересекает четырехугольник M .

3. Из п.2 следует, что допустимые значения функции определяются неравенством $1 \leq f(x) \leq 3$.

4. Наименьшее значение на множестве M , равное 1, функция достигает в точке $A(3, 1)$. Наибольшее значение на множестве M , равное 3, функция достигает в точке $B(2, 3)$.

е) Решается задача поиска условного экстремума с ограничением типа равенств.

1. Строим множество M допустимых решений – прямую $x_1 - x_2 + 1 = 0$ (см. рис.3.65,е).

2. Линии уровня $4 \cdot x_1 - x_2^2 = \text{const}$ представляют собой семейство парабол, симметричных относительно оси Ox_1 . При увеличении постоянной (const) параболы перемещаются вдоль оси Ox_1 в сторону ее положительного направления. При $\text{const} < 0$ парабола $4 \cdot x_1 - x_2^2 = \text{const}$ пересекает прямую M в двух точках, при $\text{const} = 0$ парабола касается прямой в точке $A(1, 2)$, при $\text{const} > 0$ парабола не имеет общих точек с M .

3. Из п.2 следует, что допустимые значения функции определяются неравенством $-\infty < f(x) \leq 0$.

4. Наибольшее значение на множестве M , равное 0, функция достигает в точке $A(1, 2)$. Наименьшего значения на множестве M функция не достигает. ■

Задачи для самостоятельного решения

Во всех задачах предполагается, что на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy . Коэффициенты в общем, параметрическом, каноническом уравнениях прямых, указанные в ответах, определяются неоднозначно.

3.1. Для прямой, проходящей через точки $A(1, 4)$ и $B(2, 0)$, составить: а) общее уравнение; б) параметрическое уравнение; в) каноническое уравнение; г) уравнение "в отрезках"; д) уравнение с угловым коэффициентом.

Ответ: а) $4 \cdot x + y - 8 = 0$; б) $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 4 - 4 \cdot t, \end{cases} t \in R$; в) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-4}$;

г) $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$; д) $y = -4 \cdot x + 8$.

3.2. Заданы координаты вершин $A(1, 2)$, $B(-3, 5)$, $C(5, 2)$ треугольника ABC . Составить уравнения прямых, проходящих через вершину A и содержащих медиану, высоту и биссектрису треугольника, а также уравнение серединного перпендикуляра к стороне BC .

Ответ: $x - 1 = 0$; $8 \cdot x - 3 \cdot y - 2 = 0$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3}$; $16 \cdot x - 6 \cdot y + 5 = 0$.

3.3. Составить общее уравнение прямой, симметричной прямой $3 \cdot x - y + 5 = 0$ относительно прямой $x + y - 1 = 0$.

Ответ: $x - 3 \cdot y + 7 = 0$.

3.4. Даны координаты двух вершин $A(-10, 4)$, $B(4, 3)$ треугольника ABC и точки $H(4, -2)$ пересечения его высот. Найти координаты вершины C треугольника.

Ответ: $C\left(\frac{31}{7}, 4\right)$.

3.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, -1)$ и образующей с прямой $x - 2 \cdot y + 2 = 0$ угол величиной $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $3 \cdot x - y - 4 = 0$ или $x + 3 \cdot y + 2 = 0$.

3.6. Найти величину и составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $3 \cdot x - y - 4 = 0$ и $2 \cdot x + 6 \cdot y + 3 = 0$, в котором лежит начало координат.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$; $8 \cdot x + 4 \cdot y - 5 = 0$.

3.7. Используя ортогональные инварианты, показать, что линия, заданная уравнением $34 \cdot x^2 + 24 \cdot x \cdot y + 41 \cdot y^2 - 44 \cdot x + 58 \cdot y + 1 = 0$, является эллипсом. Найти полуоси и эксцентриситет этого эллипса.

Ответ: $\sqrt{2}$; 1 ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.8. Используя ортогональные инварианты, показать, что линия, заданная уравнением $7 \cdot x^2 + 48 \cdot x \cdot y - 7 \cdot y^2 - 62 \cdot x - 34 \cdot y + 98 = 0$, является гиперболой. Найти полуоси и эксцентриситет этой гиперболы.

Ответ: $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$.

3.9. Используя ортогональные инварианты, показать, что линия, заданная уравнением $x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 + x = 0$, является параболой. Найти параметр этой параболы.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

3.10. Привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду, определить название линии и указать соответствующую ортогональную замену неизвестных, построить линию в исходной и канонической системах координат:

а) $9 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 - 18 \cdot x + 16 \cdot y - 11 = 0$;

б) $x^2 - 4 \cdot y^2 + 2 \cdot x + 16 \cdot y + 1 = 0$;

$$в) y^2 - 10 \cdot x - 2 \cdot y - 19 = 0;$$

$$г) x^2 - y^2 - 4 \cdot x + 6 \cdot y - 5 = 0;$$

$$д) 5 \cdot x^2 + 12 \cdot x \cdot y + 10 \cdot y^2 - 6 \cdot x + 4 \cdot y - 1 = 0;$$

$$е) 3 \cdot x^2 + 10 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2 - 2 \cdot x - 14 \cdot y - 13 = 0;$$

$$ж) 25 \cdot x^2 - 30 \cdot x \cdot y + 9 \cdot y^2 + 68 \cdot x + 19 = 0;$$

$$з) 8 \cdot x^2 + 6 \cdot x \cdot y + 6 \cdot x + 3 \cdot y + 1 = 0;$$

$$и) 4 \cdot x^2 + 12 \cdot x \cdot y + 9 \cdot y^2 - 8 \cdot x - 12 \cdot y - 5 = 0;$$

Ответ: а) эллипс $\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1$; $x = y' + 1$, $y = x' - 2$; б) гипербола $\frac{(x')^2}{2^2} - \frac{(y')^2}{4^2} = 1$; $x = y' - 1$, $y = x' + 2$; в) парабола $(y')^2 = 2 \cdot 5 \cdot x'$; $x = x' - 2$, $y = y' + 1$; г) пара пересекающихся прямых $(x')^2 - (y')^2 = 0$; $x = x' + 2$, $y = y' + 3$; д) эллипс $\frac{(x')^2}{(\sqrt{14})^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1$; $x = 3 - \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot x' - \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot y'$, $y = -2 + \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot x' - \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot y'$; е) гипербола $\frac{(x')^2}{1^2} - \frac{(y')^2}{2^2} = 1$; $x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y'$, $y = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y'$; ж) парабола $(y')^2 = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot x'$; $x = -\frac{11}{17} - \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot x' + \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot y'$, $y = \frac{10}{17} - \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot x' - \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot y'$; з) пара пересекающихся прямых $\frac{(x')^2}{(\frac{1}{3})^2} - \frac{(y')^2}{1^2} = 0$, $x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot x' - \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot y'$, $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot x' + \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot y'$; и) пара параллельных прямых $(y')^2 - \left(\sqrt{\frac{9}{13}}\right)^2 = 0$, $x = \frac{4}{13} - \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot x' - \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot y'$, $y = \frac{6}{13} + \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot x' - \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot y'$.

Замены неизвестных определяются неоднозначно.

3.11. Привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду, определить название линии, найти каноническую систему координат и построить линию в исходной и канонической системах координат:

$$а) (m-n)^2 \cdot x^2 + (m+n)^2 \cdot y^2 - 2 \cdot m \cdot (m-n)^2 \cdot x + 2 \cdot n \cdot (m+n)^2 \cdot y + 2 \cdot m \cdot n \cdot (n^2 + 2 \cdot m \cdot n - m^2) = 0;$$

$$б) n \cdot x^2 - m^2 \cdot y^2 + 2 \cdot n \cdot x + 2 \cdot m \cdot y + n - m = 0;$$

$$в) n^2 \cdot x^2 + 2 \cdot m \cdot n \cdot x \cdot y + m^2 \cdot y^2 + 4 \cdot m \cdot n \cdot x + 2 \cdot m^2 \cdot y + m = 0.$$

ГЛАВА 4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пространственные фигуры изображаются на рисунках в виде проекций. Как правило, используются проекции фигуры на плоскость вдоль заданной прямой (см. разд.1.2.2, 1.2.3). Проекция, разумеется, не дает полного представления о фигуре, кроме того, измеряемые величины (длины отрезков и величины углов) искажаются (см. свойства проекций в разд.1.2.2). Поэтому рисунки пространственных фигур в стереометрии играют вспомогательную роль. В аналитической геометрии, как это было отмечено ранее (см. введение к разд.3), решение любой геометрической задачи сводится к алгебраическим методам и вычислительным процедурам, при выполнении которых изображения фигур не используются. Такие методы и процедуры без труда переводятся на алгоритмический язык и реализуются на компьютере. Во всех разбираемых ниже примерах геометрическая иллюстрация фигур приводится для наглядности, но не используется в ходе решения.

4.1. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ

В стереометрии любую пространственную фигуру можно рассматривать как *геометрическое место точек (г.м.т.)*, т.е. как множество точек, каждая из которых удовлетворяет заданному характеристическому свойству (точка, не принадлежащая этому множеству, не удовлетворяет этому свойству). Например, в элементарной геометрии сфера определяется как г.м.т., равноудаленных от заданной точки (центра сферы), круговая цилиндрическая поверхность как г.м.т., равноудаленных от заданной прямой (оси цилиндрической поверхности) и т.п.

В аналитической геометрии пространственные геометрические фигуры задаются как множества решений соответствующих уравнений. Рассмотрим, например, уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

с тремя неизвестными x, y, z . Его *решением* называется тройка чисел, при подстановке которых вместо неизвестных уравнение превращается в верное числовое равенство. Каждое решение x, y, z уравнения $F(x, y, z) = 0$ можно рассматривать как точку $M(x, y, z)$ в координатном пространстве с абсциссой x , ординатой y и аппликатой z . Таким образом, множество F точек $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, образуют в координатном пространстве некоторую фигуру

$$F = \{ M(x, y, z) : F(x, y, z) = 0 \}.$$

Например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (или $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$) в прямоугольной системе координат $Oxyz$ задает сферу единичного радиуса с центром O (рис.4.2,в).

Переход к этому способу описания геометрических фигур базируется на введении системы координат в пространстве, которая позволяет вместо точек (элементарных геометрических объектов) оперировать с числами (элементарными алгебраическими объектами). В разд.2 подчеркивалось, что введение системы координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками пространства и их координатами (упорядоченными наборами из трех чисел), т.е. соответствие, удовлетворяющее двум условиям:

1) разным точкам пространства соответствуют разные наборы координат, отличающиеся хотя бы одной координатой;

2) любому набору координат соответствует некоторая точка.

Введение системы координат позволяет задать любую геометрическую фигуру уравнением, связывающим координаты таким образом, что координаты любой точки, принадлежащей заданной фигуре, удовлетворяют этому уравнению, а координаты точки, не принадлежащей фигуре, не удовлетворяют уравнению. Такой способ описания геометрических фигур применяется в аналитической геометрии.

4.1.1. Общие уравнения геометрических мест точек

Уравнением множества F точек (уравнением г.м.т.) в координатном пространстве называется равенство, связывающее координаты точек, верное для координат точек, принадлежащих множеству F , и неверное для координат точек, не принадлежащих F . Например, уравнение множества в аффинной системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеет вид:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (4.1)$$

в частности, в прямоугольной системе координат $Oxyz$:

$$F(x, y, z) = 0,$$

в цилиндрической системе координат $O r \varphi z$:

$$G(r, \varphi, z) = 0, \quad (4.2)$$

в сферической системе координат $O \rho \varphi \theta$:

$$H(\rho, \varphi, \theta) = 0, \quad (4.3)$$

где F , G и H – некоторые функции трех аргументов.

Уравнения (4.1)–(4.3) представляют собой аналитическую запись функциональной зависимости между координатами точек в пространстве, образующих геометрическое место точек. В частных случаях одна из координат может быть выражена через другую, т.е. одна координата задается как

явная функция другой координаты. Тогда получается уравнение, разрешенное относительно этой координаты, например:

$$z = f(x, y), \quad z = g(r, \varphi), \quad \rho = h(\varphi, \theta).$$

Заметим, что уравнениями вида $z = f(x, y)$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$ задаются графики функций двух переменных.

Пример 4.1. Изобразить в координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим уравнениям:

а) $x - 1 = 0$; б) $x^2 - y^2 = 0$; в) $x^2 + y^2 = 0$;

г) $x^2 + y^2 - 1 = 0$; д) $|x| + |y| + |z| - x - y - z = 0$.

□ а) Уравнению $x - 1 = 0$ удовлетворяют только те точки пространства, у которых абсцисса равна единице ($x = 1$), а ординаты и аппликаты могут принимать любые значения. Эти точки принадлежат плоскости, параллельной координатной плоскости Oyz и пересекающей ось абсцисс в точке $x = 1$ (рис.4.1,а).

б) На плоскости Oxy заданное уравнение определяет две пересекающиеся прямые $y = \pm x$, при этом аппликата z не входит в уравнение и поэтому может принимать любые значения. Следовательно, заданное уравнение определяет две пересекающиеся по оси Oz плоскости, проходящие через прямые $y = x$ и $y = -x$ на плоскости Oxy (рис.4.1,б).

в) Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

которая определяет прямую, совпадающую с осью аппликат (рис.4.1,в).

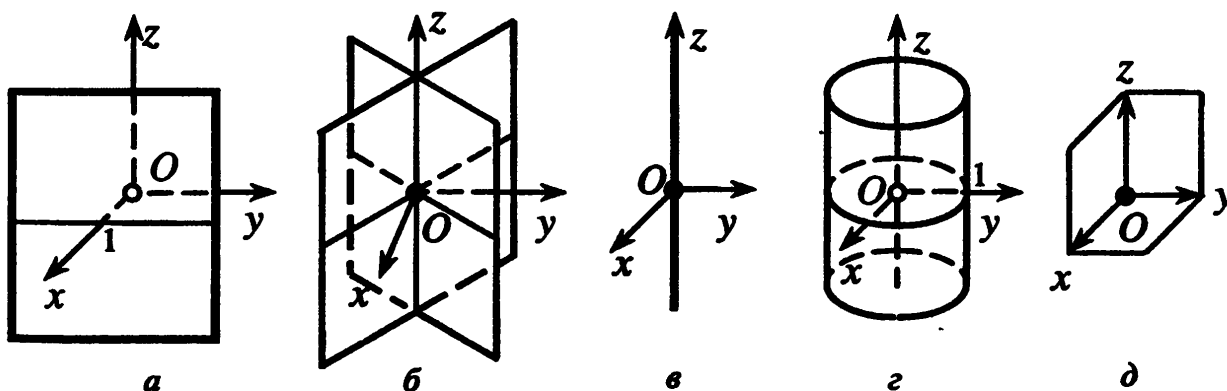


Рис.4.1

г) Выражение $x^2 + y^2$ есть квадрат расстояния от точки (x, y, z) до ее ортогональной проекции $(0, 0, z)$ на ось Oz . Поэтому уравнению $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (или $x^2 + y^2 = 1$) удовлетворяют только те точки, которые

удалены от оси аппликат на расстояние, равное 1. Это множество точек является круговой цилиндрической поверхностью радиуса 1 (рис.4.1,з).

д) Учитывая неравенства: $|x| \geq x$, $|y| \geq y$, $|z| \geq z$, делаем вывод, что левая часть заданного уравнения неотрицательна и равна нулю только при одновременном выполнении условий $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Следовательно, заданное уравнение определяет множество точек первого октанта системы координат $Oxyz$ (рис.4.1,д). ■

Пример 4.2. Применяя цилиндрические или сферические координаты, изобразить множества точек, заданных в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнениями:

а) $x^2 + y^2 - z = 0$; б) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; в) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

□ а) Запишем уравнение в цилиндрической системе координат $O r \varphi z$ (см. разд. 2.3.2): $z = r^2$, где $r^2 = x^2 + y^2$. Это уравнение не зависит от полярного угла φ . При любом фиксированном значении φ уравнение $z = r^2$ определяет параболу. Например, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($x = r \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$, $y = r \cdot \sin \frac{\pi}{2} = r$) получаем параболу $z = y^2$ в плоскости Oyz . Следовательно, описываемое множество точек можно получить, вращая параболу $z = y^2$ вокруг ее оси симметрии Oz (рис.4.2,а). Получаемая при этом поверхность называется параболоидом вращения.

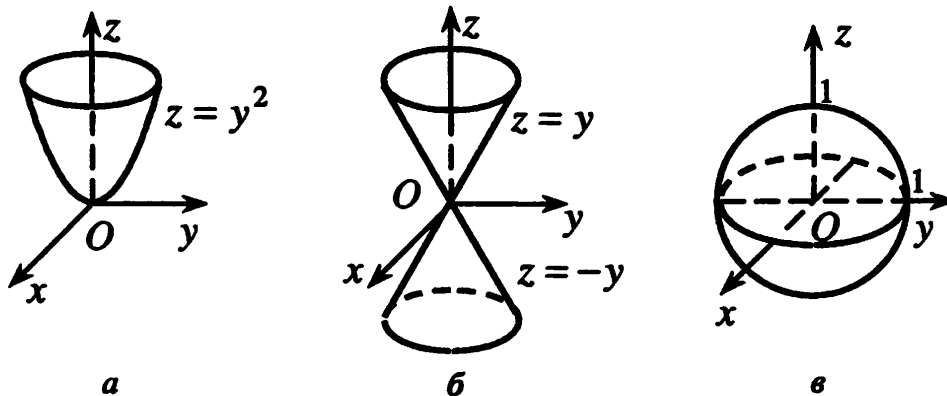


Рис.4.2

б) Запишем уравнение в цилиндрической системе координат $O r \varphi z$ (см. разд. 2.3.2): $z^2 = r^2 \Leftrightarrow |z| = r$ (напомним, что полярный радиус $r \geq 0$ по определению). Это уравнение не зависит от полярного угла φ . При любом фиксированном значении φ уравнение $|z| = r$ определяет угол, составленный из двух лучей $z = r$, $z = -r$ ($r \geq 0$). Например, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получаем два луча $z = y$, $z = -y$ ($y \geq 0$) в плоскости Oyz . Следовательно, описываемое множество точек можно получить, вращая угол вокруг оси Oz , про-

ходящей через вершину угла. При этом получаем коническую поверхность (рис.4.2,б).

в) Запишем уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ в сферической системе координат $O\rho\varphi\theta$ (см. разд. 2.3.3): $\rho^2 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1$ (напомним, что радиус $\rho \geq 0$ по определению). Это уравнение не зависит от широты φ и долготы θ . Следовательно, это множество точек, равноудаленных от начала координат, т.е. сфера (рис.4.2,в). ■

Пример 4.3. В координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) отмечены точки $A(0, 2, 0)$ и $B(0, 8, 0)$. Вывести уравнение геометрического места точек M , отношение расстояний от каждой из которых до двух заданных точек равно k :

- а) для $k = 1$, т.е. $MB : MA = 1$;
- б) для $k = 2$, т.е. $MB : MA = 2$.

□ а) Точка $M(x, y, z)$ равноудалена от заданных точек. Запишем уравнение $MB = MA$ в координатной форме:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-8)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2}.$$

Отсюда получаем $y = \frac{8+2}{2}$, т.е. $y = 5$. Следовательно, искомое г.м.т. – это плоскость, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину (рис.4.3,а).

б) Запишем уравнение $MB = 2 \cdot MA$ в координатной форме:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-8)^2 + (z-0)^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2}.$$

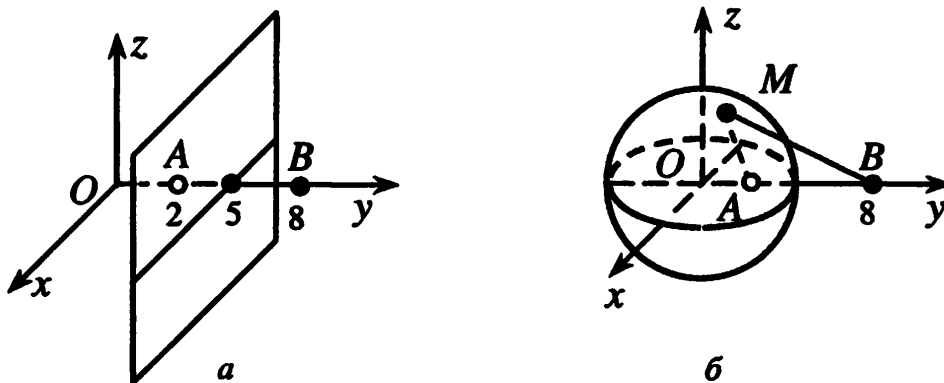


Рис.4.3

Возводя обе части уравнения в квадрат и приводя подобные члены, получаем $3 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4^2$, т.е. уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом 4.

Заметим, что при любом положительном $k \neq 1$ искомое геометрическое место точек является сферой (*сферой Аполлония*). ■

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ И ОБЪЕДИНЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК

Рассмотрим основные операции с множествами точек, заданными своими уравнениями в координатном пространстве.

Пусть множества F и G в аффинной системе координат $Ox_1x_2x_3$ заданы общими уравнениями $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ и $G(x_1, x_2, x_3) = 0$ соответственно.

Пересечение $F \cap G$ множеств F и G состоит из точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ G(x_1, x_2, x_3) = 0. \end{cases}$$

Не трудно составить одно уравнение, равносильное этой системе, например:

$$[F(x_1, x_2, x_3)]^2 + [G(x_1, x_2, x_3)]^2 = 0.$$

Объединение $F \cup G$ множеств F и G состоит из точек, координаты которых удовлетворяют совокупности уравнений

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ G(x_1, x_2, x_3) = 0, \end{cases}$$

равносильной одному уравнению, например:

$$F(x_1, x_2, x_3) \cdot G(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Включение $F \subset G$ с алгебраической точки зрения означает, что уравнение $G(x_1, x_2, x_3) = 0$ является следствием уравнения $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, т.е.

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \Rightarrow G(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Равенство $F = G$ означает, что уравнения $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ и $G(x_1, x_2, x_3) = 0$ равносильны (эквивалентны), т.е.

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow G(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

В частности, равносильные уравнения, описывающие одно и то же геометрическое место точек, получаются при тождественных алгебраических преобразованиях, например при умножении обеих частей уравнения на отличное от нуля число, при приведении подобных членов, при переносе членов из одной части уравнения в другую с изменением знака на противоположный и т.п.

Полученные соотношения, сводящие операции с множествами в пространстве к алгебраическим операциям с уравнениями этих геометрических мест точек, не зависят от выбора системы координат. Например, в прямоугольной системе координат $Oxyz$ аналогичные соотношения получаем, по-

лагая $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, в цилиндрической системе координат $O r \varphi z$ при $x_1 = r$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = z$, в сферической $O \rho \varphi \theta$ при $x_1 = \rho$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = \theta$.

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ фигура F определяется уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \quad (4.4)$$

Подставляя в уравнение некоторое фиксированное значение $z = \text{const}$, получаем уравнение с двумя неизвестными x, y :

$$F(x, y, \text{const}) = 0.$$

Это уравнение описывает некоторое множество на координатной плоскости Oxy (см. разд.3.1.1). Запишем уравнение в виде равносильной ему системы уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ z = \text{const}. \end{cases} \quad (4.5)$$

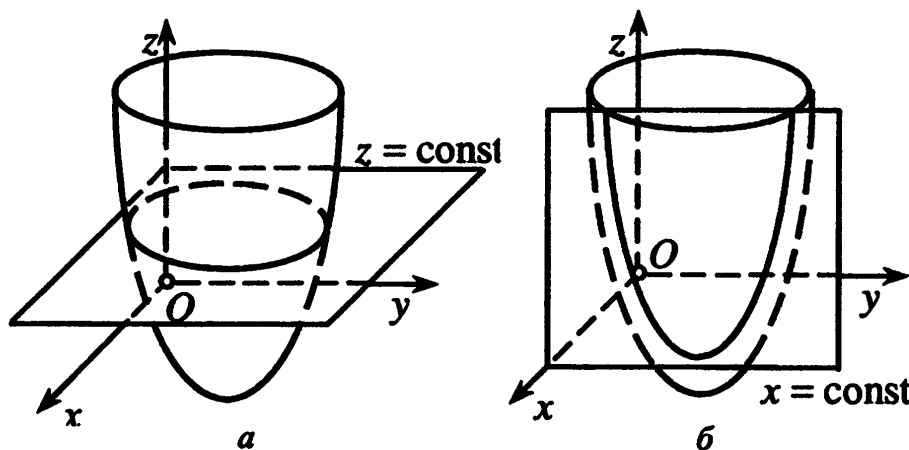


Рис.4.4

Второе уравнение системы определяет плоскость, параллельную координатной плоскости Oxy . Следовательно, система (4.5) описывает множество точек фигуры F , принадлежащих плоскости $z = \text{const}$ (см. рис.4.4,а), т.е. **плоское сечение фигуры F** . Каждую фигуру F , заданную уравнением $F(x, y, z) = 0$, можно представить как совокупность ее плоских сечений (4.5) при всех значениях постоянной (const). Тем самым исследование и построение пространственной фигуры сводится к исследованию и построению ее плоских сечений. В этом состоит идея **метода сечений**. Разумеется, можно рассматривать сечения фигуры F плоскостями $x = \text{const}$ (рис.4.4,б) или $y = \text{const}$, параллельными координатным плоскостям Oyz или Oxz соответственно.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Фигура, состоящая из параллельных прямых, называется *цилиндрической*. Прямые называются *образующими* цилиндрической фигуры.

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ фигура F определяется уравнением

$$F(x, y) = 0, \quad (4.6)$$

в котором неизвестная z отсутствует. Обозначим через M множество решений этого уравнения как уравнения с двумя неизвестными x и y , а также соответствующее множество точек на координатной плоскости Oxy (при $z = 0$). Тогда вместе с любой точкой $M(x_0, y_0, 0) \in M$ уравнению (4.6) удовлетворяют также и все точки прямой, параллельной оси аппликат Oz и проходящей через точку $M(x_0, y_0, 0)$. Таким образом, фигура F является цилиндрической, ее образующие параллельны оси Oz и пересекают плоскость Oxy в точках множества M (рис.4.5,а). Уравнения $F(x, z) = 0$ или $F(y, z) = 0$ также описывают цилиндрические фигуры, образующие которых параллельны оси ординат или абсцисс соответственно.

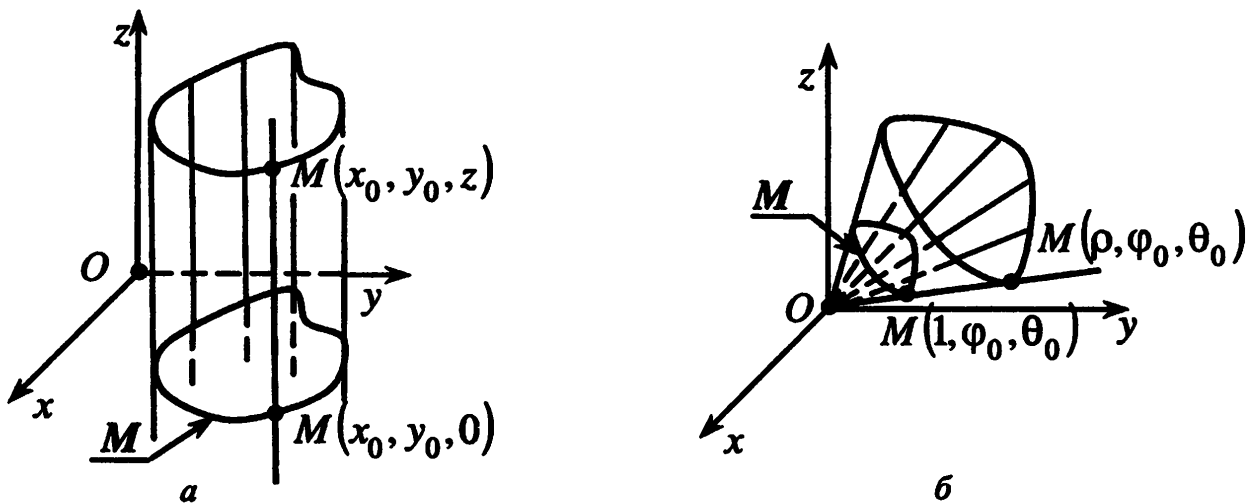


Рис.4.5

КОНИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Фигура, состоящая из лучей, имеющих общее начало, называется *конической*. Лучи называются *образующими*, а их общее начало – *вершиной* конической фигуры.

Пусть в сферической системе координат $O\rho\varphi\theta$ фигура F определяется уравнением вида (4.3):

$$F(\varphi, \theta) = 0, \quad (4.7)$$

в котором неизвестная ρ отсутствует. Обозначим через M множество решений этого уравнения как уравнения с двумя неизвестными φ и θ , а также соответствующее множество точек на сфере $\rho = 1$. Тогда вместе с любой точкой $M(1, \varphi_0, \theta_0) \in M$ уравнению (4.7) удовлетворяют также и все точки луча OM , исходящего из начала O системы координат. Таким образом, фигура F является конической, ее вершина совпадает с началом координат, а образующие пересекают множество M (рис.4.5,б).

ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Пусть в цилиндрической системе координат $Or\varphi z$ фигура F определяется уравнением вида (4.2):

$$F(r, z) = 0, \quad (4.8)$$

в котором неизвестная φ отсутствует. Обозначим через M множество решений этого уравнения как уравнения с двумя неизвестными r и z , а также соответствующее множество точек на плоскости $\varphi = 0$ (т.е. на плоскости Oxz , соответствующей прямоугольной системе координат). Тогда вместе с любой точкой $M(r_0, 0, z_0) \in M$ уравнению (4.8) удовлетворяют также и все точки $M(r_0, \varphi, z_0)$ окружности радиуса r_0 с центром в точке $z = z_0$ на оси аппликат Oz , плоскость, содержащая окружность, перпендикулярна этой оси (рис.4.6). Таким образом, фигуру F можно представить как **фигуру вращения**, полученную путем вращения множества M вокруг оси аппликат (**оси вращения**).

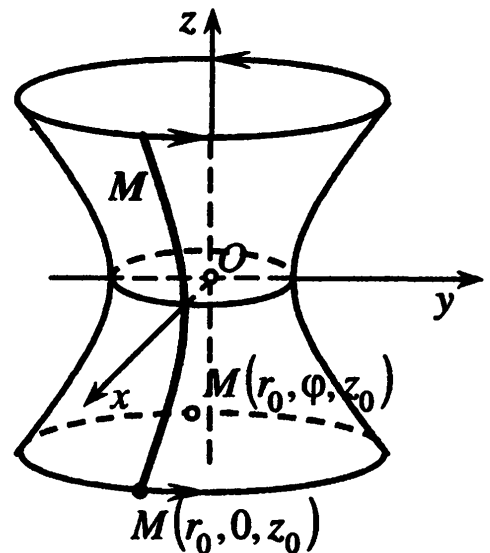


Рис.4.6

4.1.2. Параметрические уравнения геометрических мест точек

Функциональная зависимость между координатами точек пространства, например в прямоугольной системе координат $Oxyz$, может быть задана в **параметрической форме**, в которой координаты выражаются в виде функций вспомогательной переменной, называемой **параметром**:

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \\ z = h(t), \end{cases} \quad (4.9)$$

где t – параметр, принимающий действительные значения. В общем случае при задании множества не обязательно использовать один параметр, т.е. вспомогательных переменных может быть несколько, например, двухпараметрическое множество точек описывается системой:

$$\begin{cases} x = f(t_1, t_2), \\ y = g(t_1, t_2), \\ z = h(t_1, t_2), \end{cases} \quad (4.10)$$

где t_1, t_2 – параметры, принимающие действительные значения. Каждую из систем (4.9), (4.10) называют **параметрическим уравнением** геометрического места точек.

Пример 4.4. Изобразить в координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим параметрическим уравнениям:

$$\text{а) } \begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = -t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \quad t \geq 0; \\ z = t, \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x = t_1, \\ y = t_2, \\ z = 1 - t_1 - t_2. \end{cases}$$

□ а) Из первого уравнения следует, что все точки заданного множества принадлежат координатной плоскости Oyz . Из двух последних уравнений следует, что $z = -y$. Таким образом, заданное множество – это прямая $z = -y$ в плоскости Oyz (рис.4.7,а).

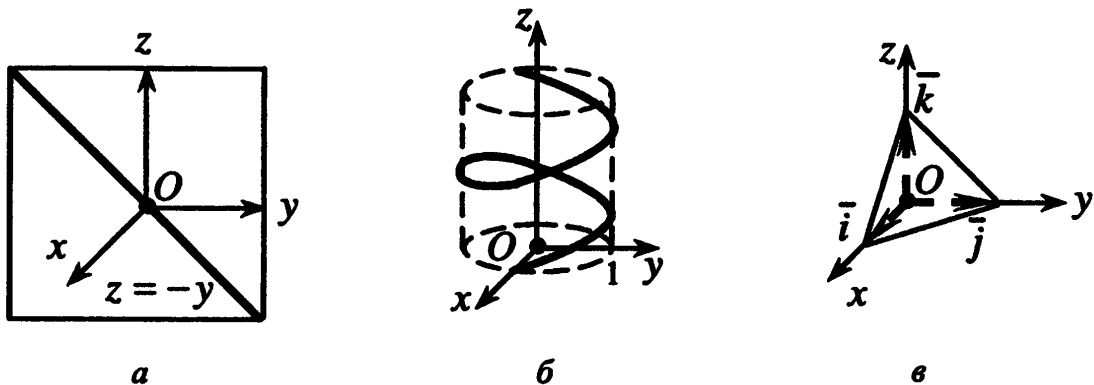


Рис.4.7

б) Исключим из первых двух уравнений параметр t . Возведя обе части каждого уравнения в квадрат и сложив почленно результаты, получим уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$. Параметром t служит величина угла поворота радиус-вектора изображающей точки, измеряемого от положительного направления оси абсцисс (см. рис.3.4,а). При равномерном увеличении угла поворота t равномерно увеличивается аппликата изображающей точки, так как $z = t$. Следовательно, заданная система описывает винтовую линию (рис.4.7,б) при $t \geq 0$.

в) Запишем заданное параметрическое уравнение в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-t_1-t_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а затем в векторной форме $\vec{r} = t_1 \cdot \vec{i} + t_2 \cdot \vec{j} + (1-t_1-t_2) \cdot \vec{k}$, где $\vec{r} = \overline{OM}$ – радиус-вектор произвольной точки $M(x, y, z)$. Полученное уравнение является аффинным уравнением плоскости (см. разд.1.6.1), проходящей через концы базисных векторов \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} (рис.4.7,в). ■

4.1.3. Алгебраические уравнения поверхностей

Напомним, что *многочленом степени n одной переменной x* называется выражение вида

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0,$$

где a_0, a_1, \dots, a_n – действительные числа (*коэффициенты многочлена*), $a_n \neq 0$ – *старший коэффициент*, a_0 – *свободный член*. Степень многочлена обозначается $\deg p(x) = n$.

Многочленом трех переменных x_1, x_2, x_3 называется выражение вида

$$p(x_1, x_2, x_3) = a_1 \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{l_1} \cdot x_3^{m_1} + a_2 \cdot x_1^{k_2} \cdot x_2^{l_2} \cdot x_3^{m_2} + \dots + a_n \cdot x_1^{k_n} \cdot x_2^{l_n} \cdot x_3^{m_n},$$

где a_1, a_2, \dots, a_n – действительные числа (*коэффициенты многочлена*), k_1, \dots, k_n ; l_1, \dots, l_n ; m_1, \dots, m_n – целые неотрицательные числа. Число $\deg p(x_1, x_2, x_3) = \max\{k_1 + l_1 + m_1; k_2 + l_2 + m_2; \dots; k_n + l_n + m_n\}$ называется *степенью многочлена*.

Алгебраической поверхностью называется множество точек, которое в какой-либо аффинной системе координат $Ox_1x_2x_3$ может быть задано уравнением вида

$$p(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (4.11)$$

где $p(x_1, x_2, x_3)$ – многочлен трех переменных x_1, x_2, x_3 .

Уравнение вида (4.11) называется *алгебраическим уравнением с тремя неизвестными*. *Степенью уравнения* (4.11) называется степень многочлена $p(x_1, x_2, x_3)$. Одна и та же поверхность может быть задана уравнением вида (4.11) с многочленами разных степеней. *Порядком* алгебраической поверхности называется наименьшая из степеней этих многочленов.

Всякую неалгебраическую поверхность называют *трансцендентной*.

В примере 4.1,а,б,в,г – поверхности алгебраические: а – первого порядка, б,в,г – второго порядка. Примером трансцендентной поверхности служит

цилиндрическая поверхность $y = \sin x$, образующие которой, параллельные оси Oz , пересекают координатную плоскость Oxy в точках синусоиды $y = \sin x$. Эту линию нельзя задать уравнением вида (4.11).

Теорема 4.1 (об инвариантности порядка алгебраической поверхности). *Если в некоторой аффинной системе координат в пространстве поверхность задана уравнением (4.11), то и в любой другой аффинной системе координат эта поверхность задается уравнением того же вида (4.11) и той же степени. Другими словами, порядок алгебраической поверхности является инвариантом (остается неизменным в любой аффинной системе координат).*

Теорема доказывается аналогично теореме 3.1.

В аналитической геометрии в пространстве изучаются:

– **алгебраические поверхности первого порядка**, описываемые алгебраическим уравнением первой степени с тремя неизвестными

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + a_4 = 0;$$

– **алгебраические поверхности второго порядка**, описываемые алгебраическим уравнением второй степени с тремя неизвестными

$$a_1 \cdot x_1^2 + a_2 \cdot x_2^2 + a_3 \cdot x_3^2 + a_4 \cdot x_1 \cdot x_2 + a_5 \cdot x_1 \cdot x_3 + a_6 \cdot x_2 \cdot x_3 + a_7 \cdot x_1 + a_8 \cdot x_2 + a_9 \cdot x_3 + a_{10} = 0.$$

З а м е ч а н и я 4.1.

1. Теорема 4.1 фактически выражает свойство многочленов: *при линейной невырожденной замене переменных*

$$\begin{cases} x_1 = s_1 + s_{11} \cdot x'_1 + s_{12} \cdot x'_2 + s_{13} \cdot x'_3, \\ x_2 = s_2 + s_{21} \cdot x'_1 + s_{22} \cdot x'_2 + s_{23} \cdot x'_3, \\ x_3 = s_3 + s_{31} \cdot x'_1 + s_{32} \cdot x'_2 + s_{33} \cdot x'_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad x = s + S \cdot x',$$

где $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$, $\det S \neq 0$, степень многочлена $p(x_1, x_2, x_3)$

не изменяется.

2. Алгебраическое уравнение (4.11) может не иметь действительных решений. Например, в пространстве $Ox_1x_2x_3$ нет точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$. Однако в области комплексных чисел, согласно основной теореме алгебры [3,8,10], любое алгебраическое уравнение имеет решения. Поэтому каждое алгебраическое уравнение (4.11) вида $p(z_1, z_2, z_3) = 0$, где $z_1 = x_1 + i \cdot y_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 = x_2 + i \cdot y_2 \in \mathbb{C}$, $z_3 = x_3 + i \cdot y_3 \in \mathbb{C}$, задает некоторую алгебраическую поверхность в трехмерном комплексном пространстве \mathbb{C}^3 (см. п.2 замечаний 2.9). Если все

точки этой поверхности вещественные (действительные), т.е. $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_3$, а $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, то поверхность называют **вещественной (действительной)**. В противном случае поверхность называют **мнимой**.

3. Алгебраическими неравенствами с тремя неизвестными называются неравенства вида

$$p(x_1, x_2, x_3) \geq 0, \quad p(x_1, x_2, x_3) \leq 0, \quad p(x_1, x_2, x_3) > 0, \quad p(x_1, x_2, x_3) < 0,$$

где $p(x_1, x_2, x_3)$ – многочлен трех переменных x_1, x_2, x_3 . **Степенью алгебраического неравенства** называется степень многочлена $p(x_1, x_2, x_3)$.

4. Многочлены первой степени и алгебраические уравнения (неравенства) первой степени называются **линейными**.

5. Многочлен второй степени

$$p(x_1, x_2, x_3) = a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + a_{33} \cdot x_3^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + 2 \cdot a_1 \cdot x_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x_2 + 2 \cdot a_3 \cdot x_3 + a_0$$

называется также **квадратичной функцией трех переменных**; многочлен

$$a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + a_{33} \cdot x_3^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3$$

называется **квадратичной формой (квадратичной частью функции)**, многочлен $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3$ – **линейной формой (линейной частью функции)**, коэффициент a_0 – **свободным членом**. По сравнению со стандартной

записью многочлена некоторые коэффициенты квадратичной функции удвоены для удобства выполнения алгебраических преобразований.

6. Квадратичную функцию (см. п.5) можно записать:

а) в матричном виде

$$p(x) = p(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{x}^T \cdot P \cdot \hat{x},$$

где $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной функции; $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$

– **расширенный (дополненный единицей) столбец переменных**;

б) выделяя квадратичную и линейную части:

$$p(x) = p(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + a_0 = x^T \cdot A \cdot x + 2 \cdot a^T \cdot x + a_0,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ –

столбец коэффициентов линейной формы, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – столбец перемен-

ных. Матрицы A и P называются также матрицами *малой* и *большой квадратичных форм* квадратичной функции $p(x)$.

7. Многочлены второй степени и алгебраические уравнения (неравенства) второй степени называются *квадратичными (квадратными)*.

8. Теорема 4.1, разумеется, справедлива для прямоугольных систем координат на плоскости. Напомним, что преобразования прямоугольных систем координат (см. разд.2.2.3) являются ортогональными (см. п.5 замечаний 2.3). Поэтому соответствующие этим преобразованиям линейные замены переменных $x = s + S \cdot x'$ (см. п.1) с ортогональной матрицей S ($S^T = S^{-1}$) называются *ортогональными (неоднородными при $s \neq 0$ или однородными при $s = 0$)*. Далее, как правило, будут рассматриваться уравнения, записанные в прямоугольной системе координат $Oxyz$.

4.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (ПЛОСКОСТИ)

4.2.1. Уравнения плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Ненулевой вектор \bar{n} , перпендикулярный заданной плоскости, называется *нормальным вектором* (или, короче, *нормалью*) для этой плоскости.

Пусть в координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) заданы:

а) точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

б) ненулевой вектор $\bar{n} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j} + C \cdot \bar{k}$ (рис.4.8,а).

Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору \bar{n} .

Общее уравнение плоскости: $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$,

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, \quad D = -A \cdot x_0 - B \cdot y_0 - C \cdot z_0.$$

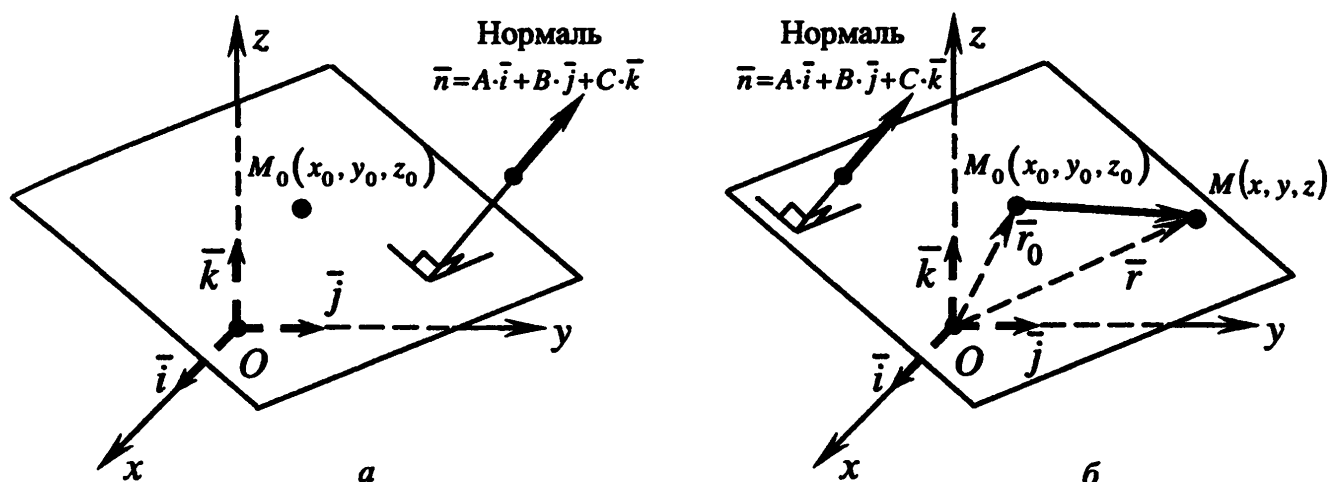


Рис.4.8

Выберем в пространстве произвольную точку $M(x, y, z)$. Обозначим $\bar{r} = \overline{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$, $\bar{r}_0 = \overline{OM_0} = x_0 \cdot \bar{i} + y_0 \cdot \bar{j} + z_0 \cdot \bar{k}$ – радиус-векторы точек $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Точка M принадлежит заданной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и \bar{n} перпендикулярны (рис.4.8,б). Условие ортогональности запишем при помощи скалярного произведения (см. разд.1.6.2):

$$(\overline{M_0M}, \bar{n}) = 0.$$

Учитывая, что $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$, получаем **векторное уравнение плоскости**:

$$(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{n}) = 0. \quad (4.12)$$

Это уравнение можно записать в другой форме. Преобразуем левую часть $(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{n}) = (\bar{r}, \bar{n}) - (\bar{r}_0, \bar{n})$, используя свойства скалярного произведения (см. разд.1.4.2). Обозначая $c = (\bar{r}_0, \bar{n})$, получаем уравнение $(\bar{r}, \bar{n}) - c = 0$, или

$$(\bar{r}, \bar{n}) = c, \quad (4.13)$$

выражающее постоянство проекций на нормаль радиус-векторов точек, принадлежащих плоскости.

Получим координатную форму записи векторного уравнения плоскости (4.12). Так как $\bar{r} - \bar{r}_0 = (x - x_0) \cdot \bar{i} + (y - y_0) \cdot \bar{j} + (z - z_0) \cdot \bar{k}$, $\bar{n} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j} + C \cdot \bar{k}$, по формуле (1.10) находим

$$(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{n}) = (x - x_0) \cdot A + (y - y_0) \cdot B + (z - z_0) \cdot C = 0, \text{ или}$$

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \quad (4.14)$$

Полученное соотношение (4.14) позволяет по координатам точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и координатам A, B, C нормали \bar{n} сразу записать искомое уравнение плоскости.

Обозначив $D = -A \cdot x_0 - B \cdot y_0 - C \cdot z_0$, получим уравнение

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0, \quad (4.15)$$

которое называется *общим уравнением плоскости*. Поскольку коэффициенты A, B, C не равны нулю одновременно (это координаты ненулевого вектора \bar{n}), уравнение (4.15) является алгебраическим уравнением первой степени, т.е. линейным уравнением с тремя неизвестными. Следовательно, плоскость является алгебраической поверхностью первого порядка.

Проводя рассуждения в обратном порядке, делаем вывод о том, что линейное уравнение (4.15) задает в координатном пространстве плоскость. Полученные выводы сделаны для прямоугольной системы координат, но, учитывая теорему 4.1 (см. разд.4.1.3), они переносятся (без изменений) и на любую аффинную систему координат.

Теорема 4.2 (об алгебраической поверхности первого порядка). *Всякое уравнение первой степени с тремя неизвестными задает в аффинной системе координат плоскость, и наоборот, всякая плоскость в любой аффинной системе координат может быть задана уравнением первой степени с тремя неизвестными. Другими словами, алгебраическая поверхность первого порядка есть плоскость.*

З а м е ч а н и я 4.2.

1. При составлении общего уравнения плоскости нормаль выбирается неоднозначно: можно выбрать любую, отличную от нуля, длину нормали \bar{n} , а также одно из двух возможных направлений (противоположный вектор $(-\bar{n})$ также является нормалью). Например, вместо нормали \bar{n} можно взять нормаль $-7 \cdot \bar{n}$, что соответствует умножению обеих частей уравнения (4.15) на число -7 .

2. Если в общем уравнении плоскости (4.15) коэффициент при неизвестной равен нулю, то плоскость параллельна координатной оси. Например, если $A = 0$, то плоскость (4.15) параллельна оси абсцисс Ox (рис.4.9,а); если $A = B = 0$, то плоскость (4.15) параллельна координатным осям Ox и Oy , т.е. параллельна координатной плоскости Oxy (рис.4.9,б).

Если в общем уравнении плоскости (4.15) свободный член равен нулю ($D = 0$), то плоскость проходит через начало координат (рис.4.9,в).

3. Нормаль $\bar{n} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j} + C \cdot \bar{k}$ к плоскости $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ совпадает с градиентом функции $f(x, y, z) = A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D$:

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \cdot \bar{k} = \\ &= A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j} + C \cdot \bar{k} = \bar{n}. \end{aligned}$$

В курсе математического анализа [19] доказывается, что градиент направлен в сторону наискорейшего возрастания функции в данной точке.

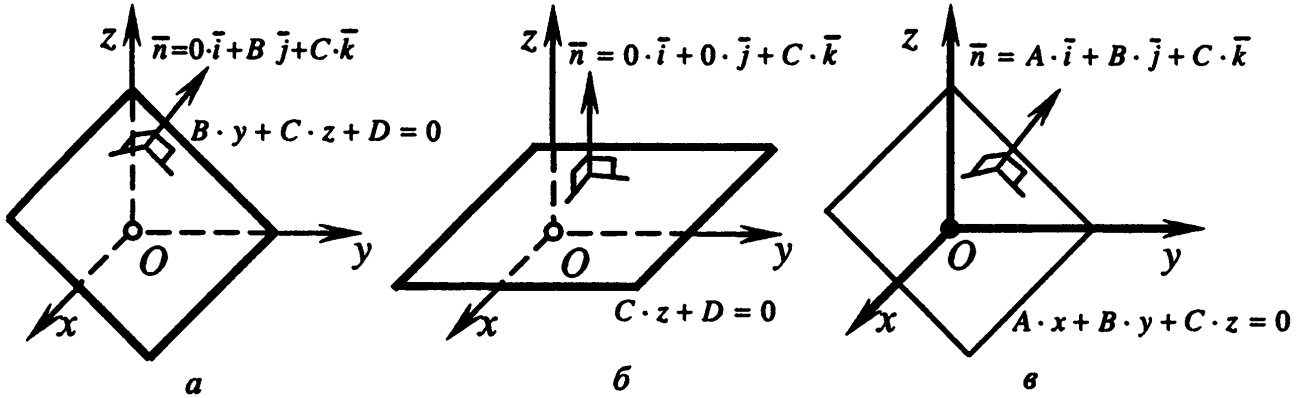


Рис.4.9

4. Плоскость $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ разбивает пространство на два полупространства (рис.4.10): **положительное**, координаты всех точек которого удовлетворяют неравенству $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D \geq 0$, и **отрицательное**, для точек которого $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D \leq 0$. Нормаль $\bar{n} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j} + C \cdot \bar{k}$, приложенная к произвольной точке плоскости $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, указывает на положительное полупространство (рис.4.10).

Это свойство следует из п.3.

5. Абсолютное значение $|A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D|$ пропорционально расстоянию от точки $M(x, y, z)$ до плоскости $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, т.е. отношение расстояний от точек

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ до плоскости $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ равно

отношению
$$\frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D|}{|A \cdot x_2 + B \cdot y_2 + C \cdot z_2 + D|}.$$

Доказательство аналогично доказательству п.5 замечаний 3.2.

6. В аффинной системе координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ линейное уравнение $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + a_4 = 0$ задает, согласно теореме 4.2, плоскость. Вы-

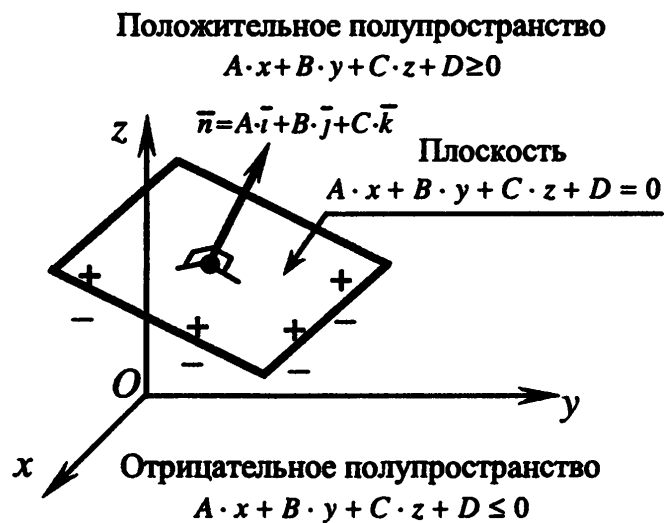


Рис.4.10

воды, полученные в п.2,3,4,5, остаются справедливыми с тем лишь исключением, что вектор $\bar{n} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2 + a_3 \cdot \bar{e}_3$ не является нормалью.

Пример 4.5. В координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) заданы точки $K(1,2,3)$ и $L(5,0,1)$. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной отрезку KL и проходящей через его середину (рис.4.11).

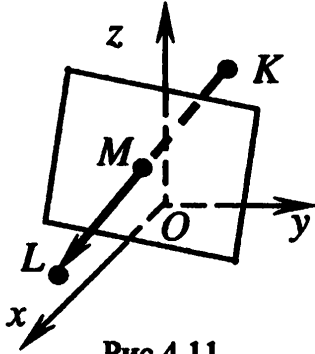


Рис.4.11

□ Находим координаты середины M отрезка KL (см. п.3 замечаний 2.1 в разд.2.1.1):

$$M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{3+1}{2}\right), \text{ т.е. } M(3,1,2). \text{ Вектор } \overline{KL}$$

можно взять в качестве нормали к плоскости. Находим координаты этого вектора, вычитая из координат его конца соответствующие координаты его начала:

$$\overline{KL} = (5-1) \cdot \bar{i} + (0-2) \cdot \bar{j} + (1-3) \cdot \bar{k} = 4 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} - 2 \cdot \bar{k} = \bar{n}.$$

Следовательно, уравнение (4.15) искомой плоскости имеет вид

$$4 \cdot x - 2 \cdot y - 2 \cdot z + D = 0.$$

Осталось найти величину свободного члена D . Поскольку точка $M(3,1,2)$ принадлежит плоскости, то ее координаты $x=3, y=1, z=2$ должны удовлетворять уравнению этой плоскости, следовательно, $4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + D = 0$. Отсюда $D = -6$. Таким образом, искомая плоскость задается уравнением

$$4 \cdot x - 2 \cdot y - 2 \cdot z - 6 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x - y - z - 3 = 0.$$

Уравнение этой прямой можно было получить в виде (4.14), подставляя координаты нормали $\bar{n} = 4 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} - 2 \cdot \bar{k}$ и точки $M(3,1,2)$: $4 \cdot (x-3) - 2 \cdot (y-1) - 2 \cdot (z-2) = 0$. ■

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Пусть заданы:

а) плоскость, описываемая общим уравнением (4.15):

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0;$$

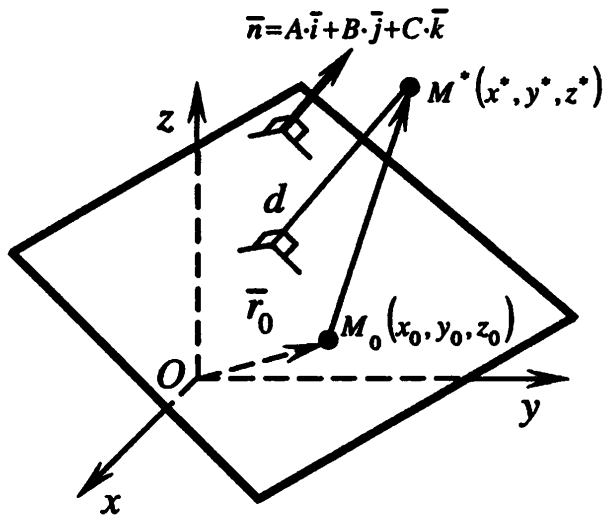
б) точка $M^*(x^*, y^*, z^*)$ в пространстве.

Требуется найти расстояние d от точки до плоскости.

Искомое расстояние равняется длине ортогональной проекции вектора $\overline{M_0 M^*}$ на направление нормали \bar{n} (рис.4.12) и находится по формуле п.7 в разд.1.6.2:

$$d = \left| \overline{np_{\bar{n}} M_0 M^*} \right| = \frac{\left| \left(\overline{\bar{n}}, \overline{M_0 M^*} \right) \right|}{|\bar{n}|},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – любая точка на заданной плоскости.



Расстояние d от точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$ до плоскости $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$:

$$d = \frac{|A \cdot x^* + B \cdot y^* + C \cdot z^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Рис.4.12

Запишем правую часть в координатной форме, выражая скалярное произведение и длину через координаты векторов $\bar{n} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j} + C \cdot \bar{k}$,

$\overline{M_0 M^*} = (x^* - x_0) \cdot \bar{i} + (y^* - y_0) \cdot \bar{j} + (z^* - z_0) \cdot \bar{k}$ (см. разд.1.6.2):

$$\begin{aligned} d &= \frac{|A \cdot (x^* - x_0) + B \cdot (y^* - y_0) + C \cdot (z^* - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|A \cdot x^* + B \cdot y^* + C \cdot z^* - (A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

Поскольку координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяют уравнению (4.15), то $A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 = -D$. Подставляя это выражение, получаем

$$d = \frac{|A \cdot x^* + B \cdot y^* + C \cdot z^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4.16)$$

Пример 4.6. В координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) заданы точки $K(1, 2, 3)$ и $L(5, 0, 1)$. Требуется найти, в каком отношении плоскость $\pi: 3 \cdot x - 4 \cdot y + z - 13 = 0$ делит отрезок KL (рис.4.13).

□ Найдем значения линейного четырехчлена $p(x, y, z) = 3 \cdot x - 4 \cdot y + z - 13$ в точках $K(1, 2, 3)$ и $L(5, 0, 1)$: $p(1, 2, 3) = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 3 - 13 = -15$;

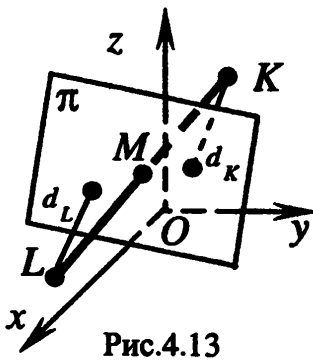


Рис.4.13

$p(5, 0, 1) = 3$. Получили значения разных знаков. Следовательно, точки K и L лежат по разные стороны от плоскости π (согласно п.4 замечаний 4.2, эти точки лежат в разных полупространствах), т.е. плоскость π действительно пересекает отрезок KL (в точке M на рис.4.13). Так как эти значения по абсолютной величине пропорциональны расстояниям от точек K и L до плоскости π , то

$$\frac{KM}{ML} = \frac{|P(1, 2, 3)|}{|P(5, 0, 1)|} = \frac{|-15|}{|3|} = \frac{5}{1}.$$

Этот же результат можно получить по формуле (4.16). Находим расстояния d_K и d_L от точек K и L до плоскости π :

$$d_K = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 3 - 13|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{26}}; \quad d_L = \frac{|3 \cdot 5 - 4 \cdot 0 + 1 - 13|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{26}}.$$

Следовательно, $\frac{KM}{ML} = \frac{d_K}{d_L} = \frac{5}{1}$. ■

НОРМИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Преобразуем общее уравнение плоскости $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ следующим образом. Если свободный член $D < 0$, то разделим обе части на длину нормали $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, а если $D \geq 0$, то разделим на $-|\vec{n}| = -\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Коэффициенты при неизвестных при этом станут равными направляющим косинусам нормали (см. разд.1.3.5, а также п.9 в разд.1.6.2):

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

а свободный член $\frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, в силу описанного выбора знака, будет неположительным. Обозначим его через $-\rho = \frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Тогда уравнение

принимает вид

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - \rho = 0, \quad \rho \geq 0, \quad (4.17)$$

и называется *нормированным уравнением плоскости*.

Замечания 4.3.

1. Свободный член ρ нормированного уравнения (4.17) равен расстоянию от начала координат до плоскости. Это следует из формулы (4.16).

2. Нормированное уравнение плоскости (4.17) можно записать в виде (4.13): $(\vec{r}, \vec{n}) = \rho$, если в качестве нормали \vec{n} выбрать единичный вектор $\vec{n} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$, так как $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma = (\vec{r}, \vec{n})$. Из двух возможных единичных нормалей условию $\rho > 0$ отвечает нормаль \vec{n} , направленная к плоскости (рис.4.14), если вектор \vec{n} приложить к началу координат. При выборе противоположного вектора $(-\vec{n})$ получилось бы отрицательное значение ρ , которое не допускается в уравнении (4.17).

Нормированное уравнение плоскости:

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \gamma - \rho = 0, \quad \rho \geq 0.$$

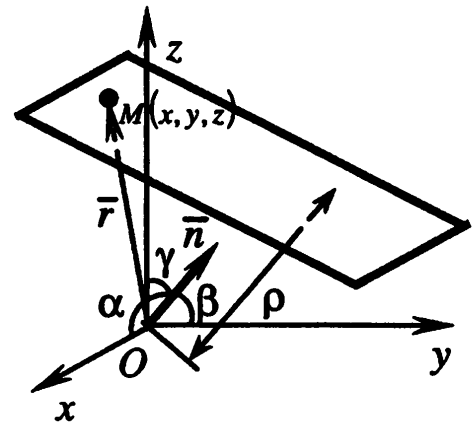


Рис.4.14

3. Коэффициенты общего уравнения плоскости (4.15) определяются неоднозначно в силу неоднозначного выбора нормали (см. п.1 замечаний 4.2). При составлении нормированного уравнения (4.17) плоскости такого произвола нет. Здесь все коэффициенты определены однозначно (при $\rho > 0$) или с точностью до знака (при $\rho = 0$).

4. Нормированное уравнение плоскости имеет смысл только в прямоугольной системе координат.

Пример 4.7. В координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) заданы точки $K(1, 2, 3)$ и $L(5, 0, 1)$ (см. рис.4.11). Требуется:

- составить нормированное уравнение плоскости, перпендикулярной отрезку KL и проходящей через его середину;
- найти расстояние от начала координат до этой плоскости.

□ а) Общее уравнение искомой плоскости было получено в примере 4.5: $2 \cdot x - y - z - 3 = 0$. Найдем длину нормали $\vec{n} = 2 \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j} - 1 \cdot \vec{k}$: $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$. Так как свободный член отрицательный, разделим уравнение на $\sqrt{6}$: $\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot x - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot y - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot z - \frac{3}{\sqrt{6}} = 0$. Нормированное уравнение плоскости получено.

б) По нормированному уравнению определяем расстояние $\rho = \frac{3}{\sqrt{6}}$ от начала координат до плоскости (см. п.1 замечаний 4.3). ■

4.2.2. Уравнения плоскости, проходящей через заданную точку и компланарной двум неколлинеарным векторам

Напомним, что три или более векторов называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны. Эту плоскость будем называть *компланарной заданным векторам*.

Направляющими векторами плоскости называются два неколлинеарных вектора, *компланарных этой плоскости*, т.е. принадлежащих плоскости или параллельных ей.



Рис.4.15

Пусть в координатном пространстве $Oxyz$ заданы:

а) точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

б) два неколлинеарных вектора

$$\bar{p}_1 = a_1 \cdot \bar{i} + b_1 \cdot \bar{j} + c_1 \cdot \bar{k},$$

$$\bar{p}_2 = a_2 \cdot \bar{i} + b_2 \cdot \bar{j} + c_2 \cdot \bar{k} \quad (\text{рис.4.15}).$$

Требуется составить уравнение плоскости, компланарной векторам \bar{p}_1, \bar{p}_2 и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Выберем на плоскости произвольную точку $M(x, y, z)$. Обозначим $\bar{r} = \overline{OM}$, $\bar{r}_0 = \overline{OM_0}$ – радиус-векторы точек $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис.4.16).

Условие компланарности векторов $\overline{M_0M}, \bar{p}_1, \bar{p}_2$ (рис.4.16) можно записать, используя свойства смешанного произведения $(\overline{M_0M}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) = 0$. Применяя формулу (1.17), получаем *уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и компланарной двум неколлинеарным векторам*:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.18)$$

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Пусть в координатном пространстве $Oxyz$ заданы:

а) точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

б) два неколлинеарных вектора $\bar{p}_1 = a_1 \cdot \bar{i} + b_1 \cdot \bar{j} + c_1 \cdot \bar{k}$, $\bar{p}_2 = a_2 \cdot \bar{i} + b_2 \cdot \bar{j} + c_2 \cdot \bar{k}$ (рис.4.15).

Требуется составить параметрическое уравнение вида (4.10) плоскости, компланарной векторам \bar{p}_1 , \bar{p}_2 и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

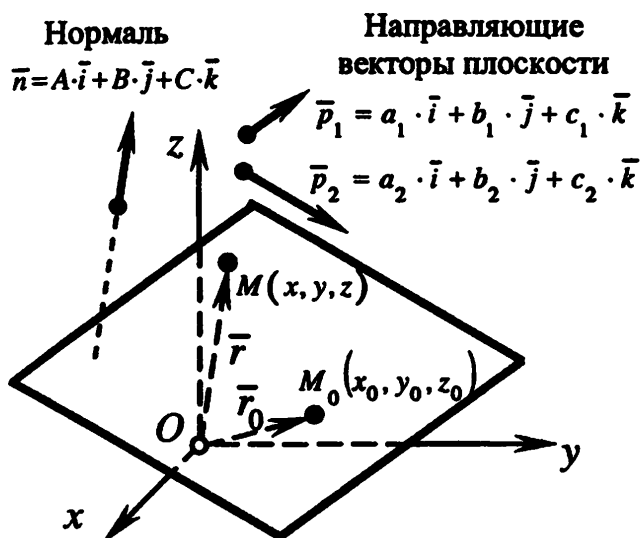


Рис.4.16

Векторное параметрическое уравнение плоскости:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t_1 \cdot \bar{p}_1 + t_2 \cdot \bar{p}_2, \quad t_1, t_2 \in R.$$

Параметрическое уравнение плоскости:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 \cdot t_1 + a_2 \cdot t_2, \\ y = y_0 + b_1 \cdot t_1 + b_2 \cdot t_2, \\ z = z_0 + c_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot t_2, \end{cases} \quad t_1, t_2 \in R.$$

Уравнение плоскости, компланарной двум неколлинеарным векторам:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Выберем на плоскости произвольную точку $M(x, y, z)$. Обозначим $\bar{r} = \overline{OM}$, $\bar{r}_0 = \overline{OM_0}$ – радиус-векторы точек $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис.4.16).

Точка M принадлежит заданной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$, \bar{p}_1 , \bar{p}_2 компланарны (см. разд.1.3.2). Запишем условие компланарности: $\overline{M_0M} = t_1 \cdot \bar{p}_1 + t_2 \cdot \bar{p}_2$, где t_1, t_2 – некоторые действительные числа (параметры). Учитывая, что $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$, получим **векторное параметрическое уравнение плоскости**:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t_1 \cdot \bar{p}_1 + t_2 \cdot \bar{p}_2, \quad t_1, t_2 \in R, \quad (4.19)$$

где \bar{p}_1, \bar{p}_2 – направляющие векторы плоскости, а \bar{r}_0 – радиус-вектор точки, принадлежащей плоскости.

Координатная форма записи уравнения (4.19) называется **параметрическим уравнением плоскости**:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 \cdot t_1 + a_2 \cdot t_2, \\ y = y_0 + b_1 \cdot t_1 + b_2 \cdot t_2, \\ z = z_0 + c_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot t_2, \end{cases} \quad t_1, t_2 \in R, \quad (4.20)$$

где a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 – координаты направляющих векторов \bar{p}_1 и \bar{p}_2 соответственно. Параметры t_1, t_2 в уравнениях (4.19), (4.20) имеют следующий геометрический смысл: величины t_1, t_2 пропорциональны расстоянию от заданной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости.

кости. При $t_1 = t_2 = 0$ точка $M(x, y, z)$ совпадает с заданной точкой M_0 . При возрастании t_1 (или t_2) точка $M(x, y, z)$ перемещается в направлении вектора \bar{p}_1 (или \bar{p}_2), а при убывании t_1 (или t_2) – в противоположном направлении.

Замечания 4.4.

1. Поскольку направляющие векторы плоскости неколлинеарны, то они ненулевые.

2. Любой вектор $\bar{p} = a \cdot \bar{i} + b \cdot \bar{j} + c \cdot \bar{k}$, коллинеарный плоскости, ортогонален нормальному вектору $\bar{n} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j} + C \cdot \bar{k}$ для этой плоскости. Поэтому их скалярное произведение равно нулю:

$$(\bar{p}, \bar{n}) = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0.$$

Следовательно, координаты a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 направляющих векторов \bar{p}_1 и \bar{p}_2 плоскости и ее нормали связаны однородными уравнениями:

$$a_1 \cdot A + b_1 \cdot B + c_1 \cdot C = 0, \quad a_2 \cdot A + b_2 \cdot B + c_2 \cdot C = 0.$$

3. Направляющие векторы плоскости определяются неоднозначно.

4. Для перехода от общего уравнения плоскости (4.15) $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ к параметрическому (4.20) нужно выполнить следующие действия:

1) найти любое решение (x_0, y_0, z_0) уравнения $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, определяя тем самым координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей плоскости;

2) найти любые два линейно независимых решения (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) однородного уравнения $A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c = 0$, определяя тем самым координаты a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 направляющих векторов \bar{p}_1 и \bar{p}_2 плоскости;

3) записать параметрическое уравнение (4.20).

5. Чтобы перейти от параметрического уравнения плоскости к общему, достаточно либо записать уравнение (4.18) и раскрыть определитель, либо найти нормаль как результат векторного произведения направляющих векторов (см. разд.1.5.1):

$$\bar{n} = [\bar{p}_1, \bar{p}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}_A \cdot \bar{i} - \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}_B \cdot \bar{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}_C \cdot \bar{k},$$

и записать общее уравнение плоскости в форме (4.14):

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0.$$

6. Векторное параметрическое уравнение плоскости (4.19), полученное в прямоугольной системе координат, имеет тот же вид в любой другой аффинной системе координат. Геометрический смысл коэффициентов в уравнении остается прежним.

Пример 4.8. В координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) заданы точки $K(1,2,3)$ и $L(5,0,1)$ (см. рис.4.11). Требуется:

а) составить параметрическое уравнение плоскости, перпендикулярной отрезку KL и проходящей через его середину;

б) составить общее уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка KL и компланарной радиус-векторам \overline{OK} и \overline{OL} .

□ а) Общее уравнение искомой плоскости было получено в примере 4.5: $2 \cdot x - y - z - 3 = 0$. Составим параметрическое уравнение:

1) находим любое решение уравнения $2 \cdot x - y - z - 3 = 0$, например, $x_0 = y_0 = 0, z_0 = -3$, следовательно, точка $M_0(0,0,-3)$ принадлежит плоскости;

2) находим два линейно независимых (непропорциональных) решения однородного уравнения $2 \cdot x - y - z = 0$, например $(1,1,1)$ и $(0,1,-1)$, следовательно, векторы $\overline{p}_1 = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{p}_2 = \overline{j} - \overline{k}$ являются направляющими для плоскости;

3) записываем параметрическое уравнение плоскости (4.20):

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2, \\ y = 0 + 1 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2, \\ z = -3 + 1 \cdot t_1 + (-1) \cdot t_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t_1, \\ y = t_1 + t_2, \\ z = -3 + t_1 - t_2, \end{cases} \quad t_1, t_2 \in R.$$

б) Координаты середины $M(3,1,2)$ отрезка KL были найдены в примере 4.5. Нормаль к искомой плоскости получим как векторное произведение ее направляющих векторов $\overline{OK} = 1 \cdot \overline{i} + 2 \cdot \overline{j} + 3 \cdot \overline{k}$, $\overline{OL} = 5 \cdot \overline{i} + 0 \cdot \overline{j} + 1 \cdot \overline{k}$:

$$\overline{n} = [\overline{OK}, \overline{OL}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \overline{i} + 14 \cdot \overline{j} - 10 \cdot \overline{k}.$$

Составляем уравнение (4.14):

$$2 \cdot (x-3) + 14 \cdot (y-1) - 10 \cdot (z-2) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x + 14 \cdot y - 10 \cdot z = 0.$$

Тот же результат можно получить, записывая уравнение (4.18):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x + 14 \cdot y - 10 \cdot z = 0. \quad \blacksquare$$

4.2.3. Уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки

Пусть в координатном пространстве $Oxyz$ заданы три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой (рис.4.17). Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через заданные точки.

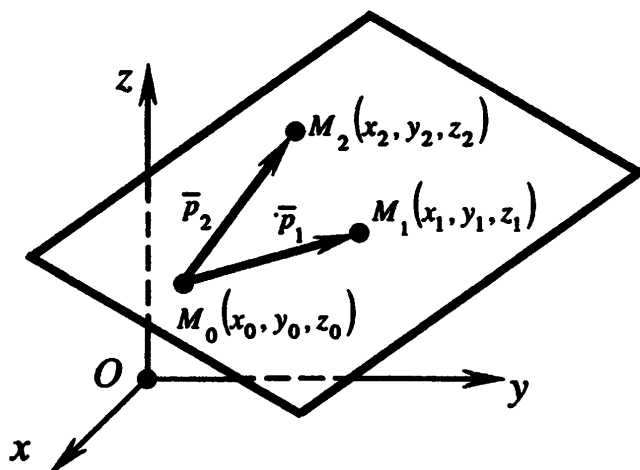


Рис.4.17

Аффинное уравнение плоскости

$$\overline{OM} = (1-t_1-t_2) \cdot \overline{OM_0} + t_1 \cdot \overline{OM_1} + t_2 \cdot \overline{OM_2};$$

$$\begin{cases} x = (1-t_1-t_2) \cdot x_0 + t_1 \cdot x_1 + t_2 \cdot x_2, \\ y = (1-t_1-t_2) \cdot y_0 + t_1 \cdot y_1 + t_2 \cdot y_2, \\ z = (1-t_1-t_2) \cdot z_0 + t_1 \cdot z_1 + t_2 \cdot z_2, \end{cases} \quad t_1, t_2 \in R.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Как показано в разд.1.6.1, точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости, проходящей через точки M_0, M_1, M_2 тогда и только тогда, когда ее радиус-вектор \overline{OM} удовлетворяет условию:

$$\overline{OM} = (1-t_1-t_2) \cdot \overline{OM_0} + t_1 \cdot \overline{OM_1} + t_2 \cdot \overline{OM_2},$$

где t_1, t_2 – некоторые действительные числа (параметры). Это уравнение, а также его координатную форму

$$\begin{cases} x = (1-t_1-t_2) \cdot x_0 + t_1 \cdot x_1 + t_2 \cdot x_2, \\ y = (1-t_1-t_2) \cdot y_0 + t_1 \cdot y_1 + t_2 \cdot y_2, \\ z = (1-t_1-t_2) \cdot z_0 + t_1 \cdot z_1 + t_2 \cdot z_2, \end{cases}$$

будем называть *аффинным уравнением плоскости, проходящей через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$* .

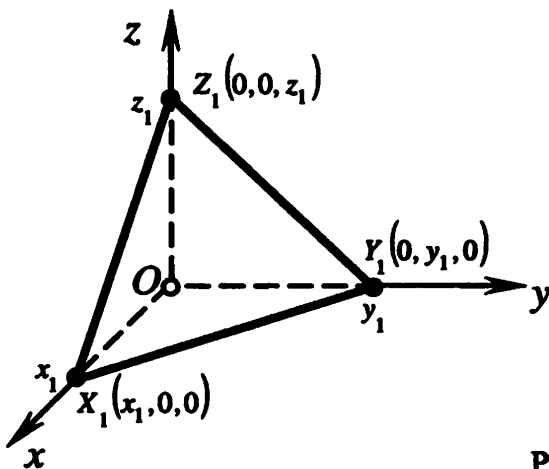
Используя векторы $\overline{p_1} = \overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0) \cdot \vec{i} + (y_1 - y_0) \cdot \vec{j} + (z_1 - z_0) \cdot \vec{k}$ и $\overline{p_2} = \overline{M_0M_2} = (x_2 - x_0) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_0) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_0) \cdot \vec{k}$ в качестве направляющих векторов плоскости, составим уравнение вида (4.18):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0, \quad (4.21)$$

которое называется **уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки**.

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ "В ОТРЕЗКАХ"

Пусть на координатных осях заданы точки $X_1(x_1, 0, 0)$, $Y_1(0, y_1, 0)$ и $Z_1(0, 0, z_1)$, причем $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, $z_1 \neq 0$ (рис.4.18). Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через эти три точки.



Уравнение плоскости "в отрезках":

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1, \\ x_1 \neq 0, y_1 \neq 0, z_1 \neq 0.$$

Рис.4.18

Подставляя в уравнение (4.21) координаты заданных точек X_1, Y_1, Z_1 , получаем:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-0 & z-0 \\ 0-x_1 & y_1-0 & 0-0 \\ 0-x_1 & 0-0 & z_1-0 \end{vmatrix} = x \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot z - x_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = 0.$$

Разделив уравнение на $x_1 \cdot y_1 \cdot z_1 \neq 0$, получаем уравнение

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1, \quad x_1 \neq 0, y_1 \neq 0, z_1 \neq 0, \quad (4.22)$$

которое называется **уравнением плоскости "в отрезках"**. Говорят, что плоскость, проходящая через точки $X_1(x_1, 0, 0)$, $Y_1(0, y_1, 0)$ и $Z_1(0, 0, z_1)$, **отсекает на координатных осях "отрезки"**: x_1 на оси абсцисс, y_1 на оси ординат и z_1 на оси аппликат. Разумеется, длины отрезков OX_1, OY_1 и OZ_1 равны $|x_1|, |y_1|$ и $|z_1|$ соответственно.

Замечания 4.5.

1. Перейти от общего уравнения плоскости (4.15) $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ к уравнению "в отрезках" (4.22) можно при условии, что все коэффициенты общего уравнения отличны от нуля. Для этого нужно перенести свободный член в правую часть уравнения: $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = -D$, а затем разделить обе части уравнения на $-D$: $\frac{A}{-D} \cdot x + \frac{B}{-D} \cdot y + \frac{C}{-D} \cdot z = 1$. Обозначив $x_1 = -\frac{D}{A}$, $y_1 = -\frac{D}{B}$, $z_1 = -\frac{D}{C}$, получим уравнение в отрезках (4.22): $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1$.

2. Уравнения (4.21), (4.22), полученные в прямоугольной системе координат, имеют тот же вид в любой другой аффинной системе координат. Геометрический смысл коэффициентов в уравнениях остается прежним, однако величины $|x_1|$, $|y_1|$ и $|z_1|$ в общем случае не равны длинам отсекаемых отрезков OX_1 , OY_1 и OZ_1 .

Пример 4.9. В координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) заданы точки $K(2, 3, 4)$, $L(6, -3, 4)$, $M(-4, 6, -4)$. Требуется:

- составить общее уравнение плоскости треугольника KLM ;
- составить уравнение в "отрезках" для плоскости треугольника KLM ;
- определить точки пересечения этой плоскости с координатными осями.

□ а) Составим уравнение (4.21):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 6-2 & -3-3 & 4-4 \\ -4-2 & 6-3 & -4-4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 4 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и приводя подобные члены, получаем

$$48 \cdot (x-2) + 32 \cdot (y-3) - 24 \cdot (z-4) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot x + 4 \cdot y - 3 \cdot z - 12 = 0.$$

б) Переносим свободный член общего уравнения плоскости (см. п. "а") в правую часть и делим уравнение на 12: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4} = 1$. Получили уравнение плоскости в "отрезках".

в) По уравнению плоскости в "отрезках" заключаем, что плоскость (см. п. "б") проходит через точки $X(2, 0, 0)$, $Y(0, 3, 0)$, $Z(0, 0, -4)$ на координатных осях. ■

4.2.4. Взаимное расположение плоскостей

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

Получим условия параллельности или совпадения двух плоскостей π_1 и π_2 , заданных общими уравнениями:

$$\pi_1: A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0; \quad \pi_2: A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0. \quad (4.23)$$

Необходимым и достаточным условием параллельности или совпадения плоскостей (4.23) является условие коллинеарности их нормалей $\bar{n}_1 = A_1 \cdot \bar{i} + B_1 \cdot \bar{j} + C_1 \cdot \bar{k}$, $\bar{n}_2 = A_2 \cdot \bar{i} + B_2 \cdot \bar{j} + C_2 \cdot \bar{k}$. Следовательно, если плоскости (4.23) параллельны или совпадают, то $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$, т.е. существует такое число $\lambda \neq 0$, что

$$\bar{n}_1 = \lambda \cdot \bar{n}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \lambda \cdot A_2, \\ B_1 = \lambda \cdot B_2, \\ C_1 = \lambda \cdot C_2, \end{cases}$$

и наоборот.

Плоскости совпадают, если помимо этих условий справедливо $D_1 = \lambda \cdot D_2$. Тогда первое уравнение в (4.23) имеет вид $\lambda \cdot (A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2) = 0$, т.е. равносильно второму, поскольку $\lambda \neq 0$.

Таким образом, плоскости (4.23) параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты при неизвестных в их уравнениях пропорциональны, т.е. существует такое число $\lambda \neq 0$, что $A_1 = \lambda \cdot A_2$, $B_1 = \lambda \cdot B_2$, $C_1 = \lambda \cdot C_2$, но $D_1 \neq \lambda \cdot D_2$. Плоскости (4.23) совпадают тогда и только тогда, когда все соответствующие коэффициенты в их уравнениях пропорциональны: $A_1 = \lambda \cdot A_2$, $B_1 = \lambda \cdot B_2$, $C_1 = \lambda \cdot C_2$, $D_1 = \lambda \cdot D_2$.

Условия параллельности и совпадения плоскостей (4.23) можно записать в виде

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}; \quad \pi_1 \equiv \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Отсюда следует критерий параллельности или совпадения двух плоскостей (4.23):

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \text{ или } \pi_1 \equiv \pi_2 \Leftrightarrow \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Поверхностью уровня функции $f(x, y, z)$ трех переменных называется геометрическое место точек координатного пространства $Oxyz$, в которых функция принимает постоянное значение, т.е. $f(x, y, z) = \text{const}$ (см. [19,28,40]).

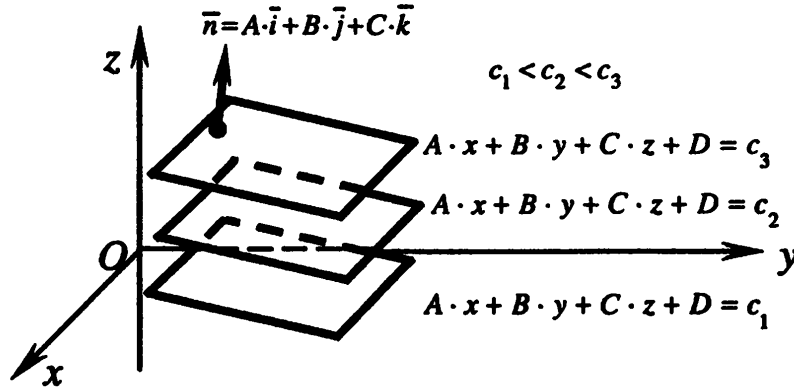


Рис.4.19

Для линейного четырехчлена $p(x, y, z) = A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D$ уравнение поверхности уровня $p(x, y, z) = \text{const}$ имеет вид

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = \text{const} . \quad (4.24)$$

При любом фиксированном значении постоянной уравнение (4.24) описывает плоскость. Рассмотрим поведение семейства поверхностей уровня, отличающихся значением постоянной. Поскольку коэффициенты A , B и C не изменяются, то у всех плоскостей (4.24) будет одна и та же нормаль $\bar{n} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j} + C \cdot \bar{k}$. Следовательно, поверхности уровня линейного четырехчлена $p(x, y, z) = A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D$ представляют собой семейство параллельных плоскостей (рис.4.19). Поскольку нормаль совпадает с градиентом (см. п.3 замечаний 4.2), а градиент направлен в сторону наискорейшего возрастания функции, то при увеличении постоянной поверхности уровня (4.24) переносятся параллельно в направлении нормали.

ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПЛОСКОСТИ

Необходимым и достаточным условием пересечения двух плоскостей (4.22) является условие неколлинеарности их нормалей, или, что то же самое, условие непропорциональности коэффициентов при неизвестных:

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2 . \quad (4.25)$$

При этом условии система уравнений

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 , \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений [10], которые определяют прямую пересечения плоскостей, заданных уравнениями (4.23).

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Угол между двумя плоскостями можно определить как угол между их нормальными векторами. По этому определению получаются не один угол, а два смежных угла, дополняющих друг друга до π . В элементарной геометрии из двух смежных углов, как правило, выбирается меньший, т.е. величина φ угла между двумя плоскостями удовлетворяет условию $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Если $\bar{n}_1 = A_1 \cdot \bar{i} + B_1 \cdot \bar{j} + C_1 \cdot \bar{k}$ и $\bar{n}_2 = A_2 \cdot \bar{i} + B_2 \cdot \bar{j} + C_2 \cdot \bar{k}$ – нормали к плоскостям π_1 и π_2 соответственно (рис.4.20,а), то величина φ угла между этими плоскостями вычисляется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{|(\bar{n}_1, \bar{n}_2)|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности плоскостей (4.23) является условие ортогональности их нормалей, т.е. $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

При пересечении двух плоскостей образуются четыре двугранных угла (рис.4.20). Величина φ двугранного угла удовлетворяет условию $0 < \varphi < \pi$.

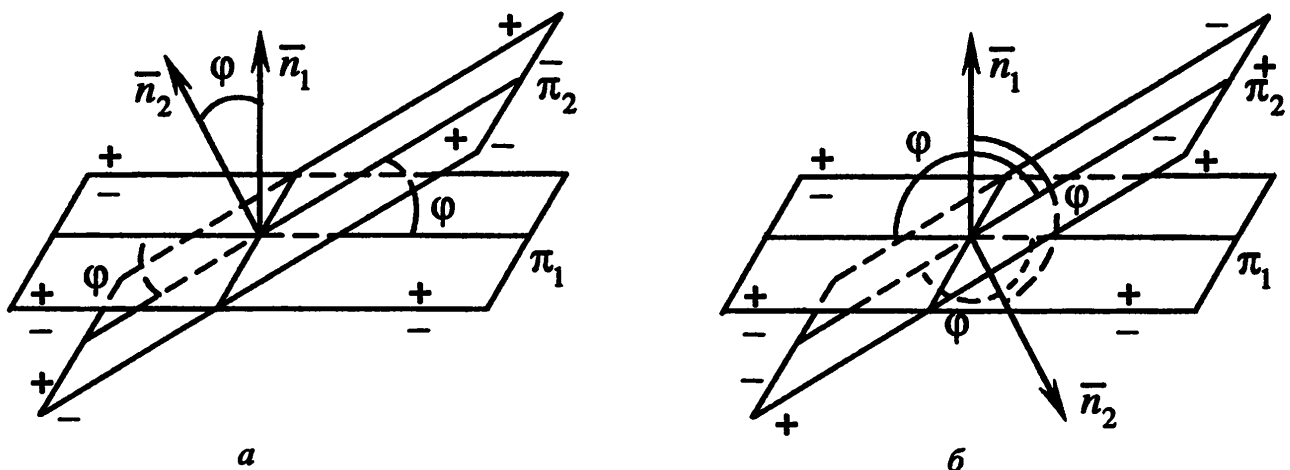


Рис.4.20

По формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (4.26)$$

получаем острый двугранный угол φ , образованный плоскостями (4.23), если $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 > 0$ (рис.4.20,а), и тупой в противном случае:

$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 < 0$ (рис.4.20,б). Другими словами, по формуле (4.26) находится тот двугранный угол, образованный плоскостями, в котором лежат точки, принадлежащие разноименным полупространствам, определяемым данными плоскостями. На рис.4.20 изображены пересекающиеся плоскости, положительные и отрицательные полупространства отмечены знаками + или – соответственно.

Пример 4.10. Найти величину того угла, образованного плоскостями $\pi_1: 5 \cdot x - 3 \cdot y + 4 \cdot z - 3 = 0$ и $\pi_2: 2 \cdot x + y + 2 \cdot z + 4 = 0$, внутри которого лежит точка $M(5, 2, 1)$.

□ По уравнениям плоскостей находим нормали $\bar{n}_1 = 5 \cdot \bar{i} - 3 \cdot \bar{j} + 4 \cdot \bar{k}$, $\bar{n}_2 = 2 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$, а также величину φ угла между нормальными, используя (4.26):

$$\cos \varphi = \frac{5 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{15}{3 \cdot \sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Подставляя координаты точки $M(5, 2, 1)$ в левые части уравнений плоскостей, выясняем, каким полупространством принадлежит эта точка. Для плоскости π_1 имеем $5 \cdot 5 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 3 > 0$, значит, точка M лежит в положительном полупространстве, определяемом плоскостью π_1 . Для плоскости π_2 имеем $2 \cdot 5 + 2 + 2 \cdot 1 + 4 > 0$, значит, точка M лежит также в положительном полупространстве, определяемом плоскостью π_2 . Поскольку точка M принадлежит одноименным полупространствам (положительным), то искомый угол – это угол ψ , смежный найденному углу $\varphi = \frac{\pi}{4}$:

$$\psi = \pi - \varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}. \blacksquare$$

ПУЧКИ ПЛОСКОСТЕЙ

Собственным пучком плоскостей называется совокупность всех плоскостей, проходящих через фиксированную прямую (*ось пучка*).

Несобственным пучком плоскостей называется совокупность плоскостей, параллельных фиксированной плоскости (осью несобственного пучка плоскостей считается бесконечно удаленная прямая).

Любые две плоскости π_1 и π_2 определяют *пучок плоскостей, содержащий заданные плоскости* π_1 и π_2 . Если плоскости π_1 и π_2 пересекаются, то прямая t пересечения является осью собственного пучка (рис.4.21,а). Если плоскости π_1 и π_2 параллельны, то они определяют несобственный пучок параллельных плоскостей (рис.4.21,б).

Пусть заданы уравнения двух плоскостей (4.23):

$$\pi_1: A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0; \quad \pi_2: A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0.$$

Линейной комбинацией этих уравнений называется уравнение

$$\lambda_1 \cdot (A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1) + \lambda_2 \cdot (A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2) = 0, \quad (4.27)$$

где числа λ_1, λ_2 – *коэффициенты* линейной комбинации. Его можно записать в форме

$$(\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2) \cdot x + (\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2) \cdot y + (\lambda_1 \cdot C_1 + \lambda_2 \cdot C_2) \cdot z + \lambda_1 \cdot D_1 + \lambda_2 \cdot D_2 = 0.$$

Заметим, что линейная комбинация уравнений является уравнением первой степени для любых значений коэффициентов, кроме случая, когда все коэффициенты при неизвестных равны нулю, т.е. при одновременном выполнении условий

$$\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 = 0, \quad \lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 = 0, \quad \lambda_1 \cdot C_1 + \lambda_2 \cdot C_2 = 0.$$

Эти значения параметров λ_1, λ_2 считаются недопустимыми.

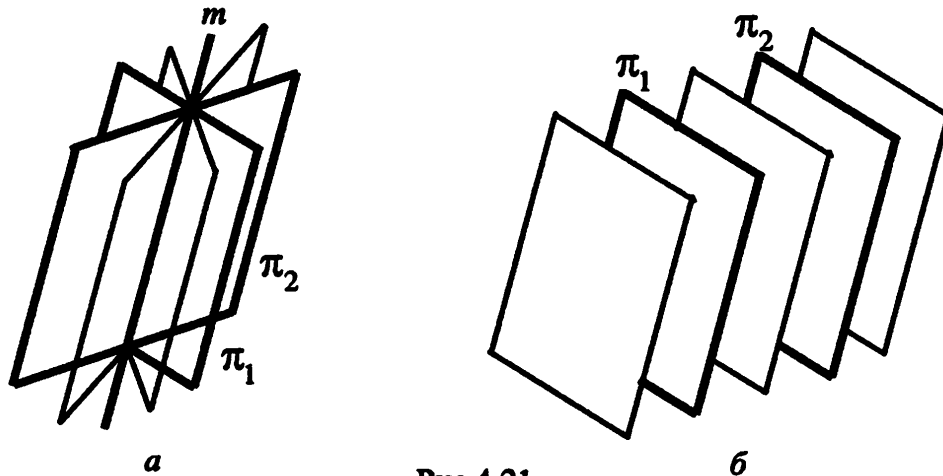


Рис.4.21

Уравнение (4.27) называется *уравнением пучка плоскостей, содержащего плоскости*

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0.$$

При любых допустимых значениях параметров λ_1, λ_2 уравнение (4.27) задает плоскость, принадлежащую пучку, и наоборот, для любой плоскости пучка найдутся такие значения параметров λ_1, λ_2 , что уравнение (4.27) будет задавать эту плоскость.

Доказательство утверждения аналогично доказательству свойства пучка прямых (см. разд.3.2.5).

Пример 4.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2 \cdot x + 2 \cdot y - z + 3 = 0$, $6 \cdot x - 3 \cdot y + 2 \cdot z + 1 = 0$ и через точку $M^*(2, 3, 1)$.

□ Искомая плоскость входит в пучок плоскостей, задаваемый уравнением (4.27)

$$\lambda_1 \cdot (2 \cdot x + 2 \cdot y - z + 3) + \lambda_2 \cdot (6 \cdot x - 3 \cdot y + 2 \cdot z + 1) = 0.$$

Подставляя координаты точки $M^*(2, 3, 1)$, получаем:

$$\lambda_1 \cdot (2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 1 + 3) + \lambda_2 \cdot (6 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1) = 0 \Leftrightarrow 12 \cdot \lambda_1 + 6 \cdot \lambda_2 = 0.$$

Возьмем, например, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ и подставим в уравнение пучка:

$$-1 \cdot (2 \cdot x + 2 \cdot y - z + 3) + 2 \cdot (6 \cdot x - 3 \cdot y + 2 \cdot z + 1) = 0 \Leftrightarrow 10 \cdot x - 8 \cdot y + 5 \cdot z - 1 = 0.$$

Искомое уравнение получено. ■

СВЯЗКИ ПЛОСКОСТЕЙ

Собственной связкой плоскостей называется совокупность всех плоскостей, проходящих через фиксированную точку (**центр связки**).

Несобственной связкой плоскостей называется совокупность плоскостей, параллельных фиксированной прямой (центром несобственной связки плоскостей считается бесконечно удаленная точка).

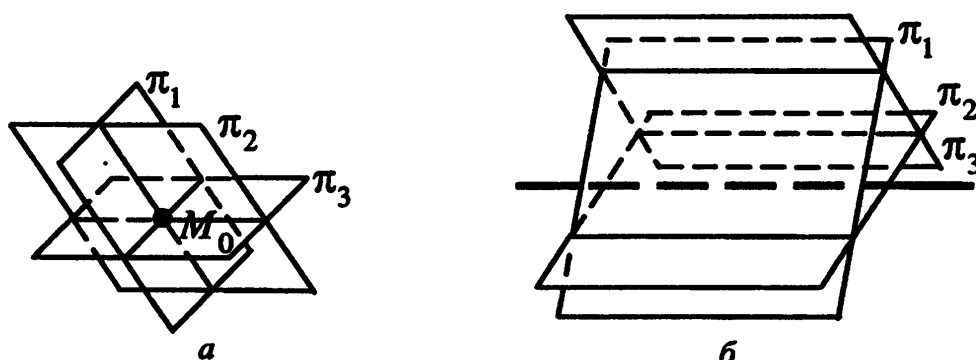


Рис.4.22

Уравнение собственной связки плоскостей с центром $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0,$$

где A , B , C – произвольные параметры, одновременно не равные нулю.

Уравнение связки плоскостей (собственной (рис.4.22,а) или несобственной (рис.4.22,б)) можно получить в виде линейной комбинации уравнений трех плоскостей:

$$\lambda_1 \cdot (A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1) + \lambda_2 \cdot (A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2) + \lambda_3 \cdot (A_3 \cdot x + B_3 \cdot y + C_3 \cdot z + D_3) = 0, \quad (4.28)$$

где λ_1 , λ_2 , λ_3 – коэффициенты линейной комбинации. Заметим, что линейная комбинация уравнений является уравнением первой степени для любых значений коэффициентов, кроме случая, когда все коэффициенты при неизвестных равны нулю. Эти значения параметров λ_1 , λ_2 , λ_3 считаются недопустимыми.

Уравнение (4.28) называется **уравнением связки плоскостей, содержащей три плоскости** $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$, $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$, $A_3 \cdot x + B_3 \cdot y + C_3 \cdot z + D_3 = 0$.

При любых допустимых значениях параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ уравнение (4.28) задает плоскость, принадлежащую связке, и наоборот, для любой плоскости связки найдутся такие значения параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, что уравнение (4.28) будет задавать эту плоскость.

Доказательство утверждения аналогично доказательству свойства пучка прямых (см. разд.3.2.5).

4.2.5. Типовые задачи с плоскостями

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОСТЕЙ

Разнообразие видов уравнений плоскостей порождается многообразием геометрических способов их задания. По любому набору геометрических данных, однозначно определяющих плоскость, можно составить уравнение этой плоскости, причем геометрические данные будут отражены в коэффициентах уравнения. И наоборот, коэффициенты любого уравнения плоскости имеют геометрический смысл, соответствующий способу задания плоскости.

Для удобства решения типовых задач, связанных с плоскостями, все основные типы уравнений плоскостей и соответствующие геометрические способы задания этих плоскостей отражены в таблице 4.1.

Примеры составления плоскостей по геометрическим данным, указанным в таблице 4.1, разбирались в разд.4.2.1–4.2.3.

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОСТЕЙ

Перечислим формулы для вычисления длин отрезков (расстояний) и величин углов по уравнениям образующих их плоскостей.

1. Расстояние d от точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$ до плоскости $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|A \cdot x^* + B \cdot y^* + C \cdot z^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2. Расстояние между параллельными плоскостями $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$ и $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$ находится как расстояние d_1 от точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$, координаты которой удовлетворяют уравнению $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$, до плоскости $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$ по формуле:

$$d_1 = \frac{|A_1 \cdot x_2 + B_1 \cdot y_2 + C_1 \cdot z_2 + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Т а б л и ц а 4.1. Основные типы уравнений плоскостей

Название	Уравнение	Способ задания плоскости	Геометрический смысл коэффициентов
Общее уравнение плоскости	$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0,$ $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$	Плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j} + C \cdot \vec{k}$ (рис.4.8,а)	Коэффициенты A, B, C – координаты нормали $\vec{n} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j} + C \cdot \vec{k}$; свободный член $D = -A \cdot x_0 - B \cdot y_0 - C \cdot z_0$
Параметрическое уравнение плоскости	$\begin{cases} x = x_0 + a_1 \cdot t_1 + a_2 \cdot t_2, \\ y = y_0 + b_1 \cdot t_1 + b_2 \cdot t_2, \\ z = z_0 + c_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot t_2, \end{cases}$ $t_1 \in R, t_2 \in R,$ $\text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$	Плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ компланарно неколлинеарным векторам $\vec{p}_1 = a_1 \cdot \vec{i} + b_1 \cdot \vec{j} + c_1 \cdot \vec{k}$, $\vec{p}_2 = a_2 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + c_2 \cdot \vec{k}$ (рис.4.15)	Коэффициенты $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – координаты направляющих векторов $\vec{p}_1 = a_1 \cdot \vec{i} + b_1 \cdot \vec{j} + c_1 \cdot \vec{k}$, $\vec{p}_2 = a_2 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + c_2 \cdot \vec{k}$; x_0, y_0, z_0 – координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей плоскости
Уравнение плоскости, проходящей через точку и компланарной двум неколлинеарным векторам	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$	См. параметрическое уравнение	См. параметрическое уравнение
Уравнение плоскости, проходящей через три точки	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$	Прямая проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис.4.17)	Коэффициенты $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ – координаты точек $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$
Уравнение плоскости "в отрезках"	$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1,$ $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0, z_1 \neq 0$	Плоскость отсекает на координатных осях "отрезки" x_1, y_1 и z_1 (рис.4.18)	Коэффициенты x_1, y_1, z_1 определяют на координатных осях точки, через которые проходит плоскость

3. а) Угол φ между двумя плоскостями

$\pi_1: A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$ и $\pi_2: A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$
находится по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

где $\bar{n}_1 = A_1 \cdot \bar{i} + B_1 \cdot \bar{j} + C_1 \cdot \bar{k}$ и $\bar{n}_2 = A_2 \cdot \bar{i} + B_2 \cdot \bar{j} + C_2 \cdot \bar{k}$ – нормали к плоскостям π_1 и π_2 соответственно.

б) По формуле

$$\cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

находится величина φ того двугранного угла, образованного плоскостями π_1 и π_2 , в котором лежат точки, принадлежащие разноименным полупространствам, определяемым данными плоскостями.

При решении задач свойства 1–3 используются наряду с метрическими приложениями векторной алгебры (см. разд. 1.6.2).

Пример 4.12. В координатном пространстве $Oxyz$ заданы вершины $A(1, 3, -1)$, $B(2, 1, -2)$, $C(4, 2, -6)$ треугольной пирамиды $OABC$. Требуется:

- составить общее уравнение плоскости, содержащей грань ABC ;
- найти расстояние d от вершины C до плоскости грани OAB ;
- найти величину φ угла между плоскостями граней ABC и OAB ;
- найти величину ψ двугранного угла, образованного гранями ABC и

OAB пирамиды.

□ а) По формуле (4.21) составим уравнение плоскости π_{ABC} , проходящей через три точки A, B, C :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-(-1) \\ 2-1 & 1-3 & -2-(-1) \\ 4-1 & 2-3 & -6-(-1) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по первой строке, получаем

$$9 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-3) + 5 \cdot (z+1) = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot x + 2 \cdot y + 5 \cdot z - 10 = 0.$$

Искомое уравнение составлено.

б) Для нахождения расстояния d составим уравнение плоскости, проходящей через точки O, A, B (см. п. "а"):

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 3-0 & -1-0 \\ 2-0 & 1-0 & -2-0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+z=0.$$

Расстояние находим по формуле п.1 (см. метрические приложения) для $M^* \equiv C$:

$$d = \frac{|1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-6) + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

в) Острый угол φ между плоскостями

$$9 \cdot x + 2 \cdot y + 5 \cdot z - 10 = 0 \text{ и } x + z = 0$$

находим по формуле п.3, "а":

$$\cos \varphi = \frac{|9 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1|}{\sqrt{9^2 + 2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{220}} = \frac{7}{\sqrt{55}}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos \frac{7}{\sqrt{55}}$.

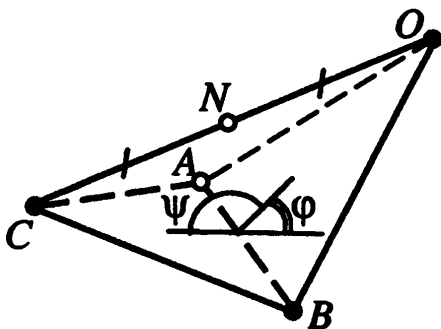


Рис.4.23

г) Двугранный угол ψ , образованный гранями ABC и OAB пирамиды либо равен острому углу φ между плоскостями граней, либо дополняет его до π : $\psi = \pi - \varphi$. Вычисляя угол φ по формуле п.3, "б", получаем тот же результат, что и в п."в": $\varphi = \arccos \frac{7}{\sqrt{55}}$,

т.е. острому углу принадлежат точки, принадлежащие разноименным полупространствам.

Выясним, в каких полупространствах (одноименных или разноименных) относительно плоскостей граней ABC и OAB лежит пирамида. Для этого достаточно проверить одну точку пирамиды, не принадлежащую граням ABC и OAB . Возьмем точку N – середину ребра OC : $N(2, 1, -3)$ (рис.4.23). Вычислим значения линейных четырехчленов в этой точке:

$$9 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) - 10 = -5 < 0 \text{ и } 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 0 = -1 < 0.$$

Следовательно, точка N принадлежит одноименным полупространствам. Поэтому двугранный угол при ребре AB не острый, а тупой, т.е. $\psi = \pi - \varphi = \pi - \arccos \frac{7}{\sqrt{55}}$. ■

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Системой m линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2, \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 = b_m. \end{cases} \quad (4.29)$$

Числа a_{ij} , $i=1, \dots, m$, $j=1, 2, 3$ называются *коэффициентами системы*; b_1, b_2, \dots, b_m – *свободными членами*; x_1, x_2, x_3 – *неизвестными*.

Решением системы называется такая упорядоченная тройка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, что после замены неизвестных x_1, x_2, x_3 соответственно числами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ каждое уравнение системы превращается в верное числовое равенство. На системы с тремя неизвестными переносятся все термины, применяемые к системам с двумя неизвестными (см. разд.3.2.6).

Матричная запись неоднородной системы уравнений (4.29) имеет вид

$$Ax = b, \quad (4.30)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{pmatrix}$ – *матрица системы*, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – *столбец свободных членов*, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – *столбец неизвестных*.

Рангом системы уравнений (4.29) называется ранг матрицы A системы: $r = \text{rg } A$, т.е. максимальное число линейно независимых строк матрицы A (максимальное число линейно независимых уравнений системы).

Рассматривается случай, когда все уравнения системы первой степени, т.е. коэффициенты при неизвестных каждого уравнения не равны нулю одновременно. Поэтому матрица A системы ненулевая, более того, все ее строки ненулевые.

Поскольку матрица системы (4.29) ненулевая и содержит три столбца, то ее ранг $r = \text{rg } A \leq 3$. Ранг может быть равен либо единице ($r = 1$, если все строки матрицы A пропорциональны), либо двум ($r = 2$, если имеются две линейно независимые строки), либо трем ($r = 3$, если имеются три линейно независимые строки).

Выясним геометрический смысл и свойства решений системы уравнений (4.29).

Пусть в пространстве задана аффинная система координат $Ox_1x_2x_3$. Как показано в разд.3.2.1, множество точек $X(x_1, x_2, x_3)$, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению с тремя неизвестными

$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + a_{i3} \cdot x_3 = b_i$, или $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + a_{i3} \cdot x_3 - b_i = 0$, представля-
ет собой плоскость. Поэтому множество решений системы уравнений явля-
ется пересечением плоскостей $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + a_{i3} \cdot x_3 - b_i = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим примеры пересечения плоскостей.

Если ранг системы (4.29) равен 1, то коэффициенты при неизвестных
всех уравнений пропорциональны. В этом случае любые две плоскости па-
раллельны (система уравнений несовместна (рис.4.24,а)) или совпадают (в
этом случае вся система (4.29) равносильна одному, например, первому ее
уравнению (рис.4.24,б)).

Если ранг системы равен 2, то в системе имеются два линейно незави-
симых уравнения. Плоскости, соответствующие этим уравнениям, пересе-
каются, например, по прямой l (рис. 4.24,в,г). Поэтому множеством реше-
ний системы (4.29) является либо эта прямая (система совместна, все плос-
кости проходят через прямую l , т.е. все плоскости принадлежат собствен-
ному пучку плоскостей (рис. 4.24,в)), либо пустое множество (система несо-
вместна (рис.4.24,г)).

Если ранг системы равен 3, то в системе имеются три линейно незави-
симых уравнения. Плоскости, соответствующие этим уравнениям, пересе-
каются в одной точке, например, в точке X_0 (рис. 4.24,д,е). Поэтому множе-
ством решений системы (4.29) является либо одна точка X_0 (система со-
вместна, все плоскости проходят через точку X_0 , т.е. все плоскости при-
надлежат собственной связке плоскостей (рис. 4.24,д)), либо пустое множе-
ство (система несовместна (рис. 4.24,е)).

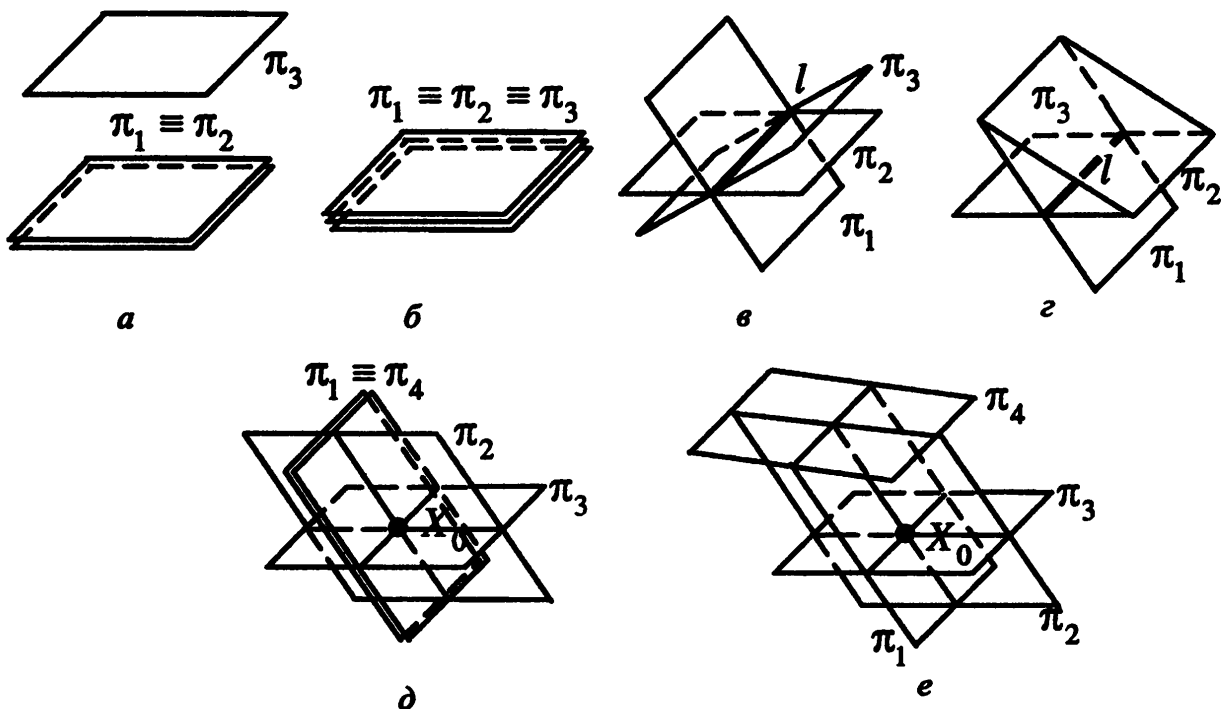


Рис.4.24

4.3. УРАВНЕНИЯ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.3.1. Уравнение прямой как линии пересечения двух плоскостей

Пусть в координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) две плоскости заданы общими уравнениями

$$\pi_1: A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0; \quad \pi_2: A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0,$$

в которых коэффициенты при неизвестных непропорциональны, т.е.

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2. \text{ Это условие означает, что плоскости } \pi_1 \text{ и } \pi_2 \text{ пересекаются (см. условие (4.25)), поскольку их нормали } \bar{n}_1 = A_1 \cdot \bar{i} + B_1 \cdot \bar{j} + C_1 \cdot \bar{k} \text{ и } \bar{n}_2 = A_2 \cdot \bar{i} + B_2 \cdot \bar{j} + C_2 \cdot \bar{k} \text{ неколлинеарны (рис.4.25). Тогда линия пересечения плоскостей описывается системой уравнений}$$

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0, \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

Система (4.31) называется *общим уравнением прямой в пространстве*.

$$\text{Общее уравнение прямой: } \begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0, \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0, \end{cases} \quad \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\text{Нормаль к плоскости } \pi_2: \bar{n}_2 = A_2 \cdot \bar{i} + B_2 \cdot \bar{j} + C_2 \cdot \bar{k}$$

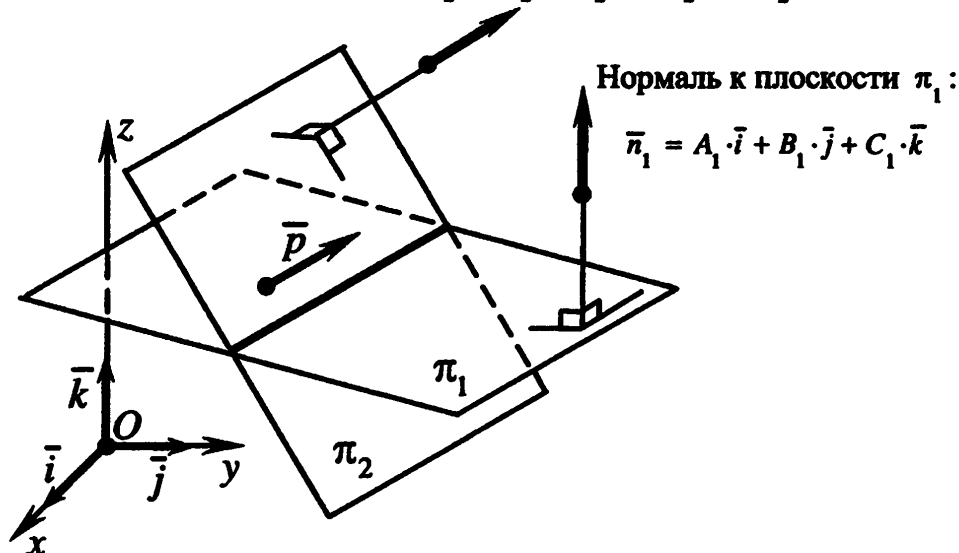


Рис.4.25

Пример 4.13. В координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) заданы вершины $A(1, 2, 3)$, $B(3, 0, 2)$, $C(7, 4, 6)$ треугольника (рис.4.26). Требуется составить уравнение прямой, содержащей высоту $АН$ треугольника.

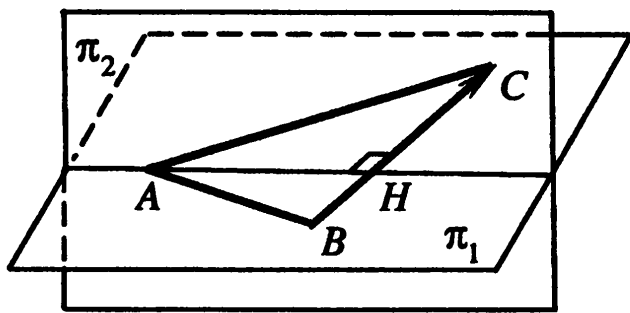


Рис.4.26

□ Прямая AH является линией пересечения двух плоскостей: плоскости π_1 треугольника ABC и плоскости π_2 , проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overline{BC} (рис.4.26). По формуле (4.21) составим уравнение плоскости π_1 , проходящей через три

точки A, B, C :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3-1 & 0-2 & 2-3 \\ 7-1 & 4-2 & 6-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+3 \cdot y-4 \cdot z+5=0.$$

По формуле (4.14) составим уравнение плоскости π_2 , проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC} = (7-3) \cdot \bar{i} + (4-0) \cdot \bar{j} + (6-2) \cdot \bar{k} = 4 \cdot \bar{i} + 4 \cdot \bar{j} + 4 \cdot \bar{k}$:

$$4 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y-2) + 4 \cdot (z-3) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 6 = 0.$$

Следовательно, общее уравнение (4.31) прямой AH имеет вид

$$\begin{cases} x+3 \cdot y-4 \cdot z+5=0, \\ x+y+z-6=0. \end{cases} \blacksquare$$

4.3.2. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку коллинеарно заданному вектору

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Напомним, что *направляющим вектором* прямой называется ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой, т.е. принадлежащий или параллельный ей.

Пусть в координатном пространстве $Oxyz$ заданы:

а) точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

б) ненулевой вектор $\bar{p} = a \cdot \bar{i} + b \cdot \bar{j} + c \cdot \bar{k}$ (рис.4.27).

Требуется составить уравнение прямой, коллинеарной вектору \bar{p} и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Направляющий вектор прямой
 $\bar{p} = a \cdot \bar{i} + b \cdot \bar{j} + c \cdot \bar{k}$

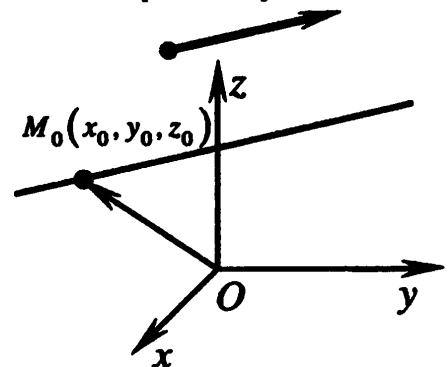


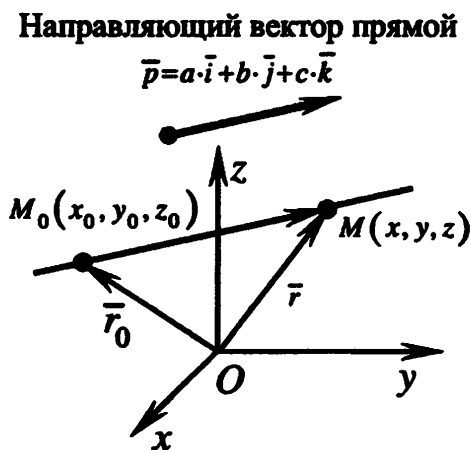
Рис.4.27

Выберем на прямой произвольную точку $M(x, y, z)$. Обозначим $\vec{r} = \overline{OM}$, $\vec{r}_0 = \overline{OM_0}$ – радиус-векторы точек $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис.4.28).

Точка M принадлежит заданной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и \vec{p} коллинеарны. Запишем условие коллинеарности (см. разд.1.2.1): $\overline{M_0M} = t \cdot \vec{p}$, где t – некоторое действительное число (параметр). Учитывая, что $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, получим **векторное параметрическое уравнение прямой в пространстве**:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{p}, \quad t \in R, \quad (4.32)$$

где \vec{p} – направляющий вектор прямой, а \vec{r}_0 – радиус-вектор заданной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей прямой.



Векторное параметрическое уравнение прямой:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{p}, \quad t \in R.$$

Параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t, \\ y = y_0 + b \cdot t, \\ z = z_0 + c \cdot t, \end{cases} \quad t \in R.$$

Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Рис.4.28

Координатная форма записи уравнения (4.32) называется **параметрическим уравнением прямой в пространстве**

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t, \\ y = y_0 + b \cdot t, \\ z = z_0 + c \cdot t, \end{cases} \quad t \in R, \quad (4.33)$$

где a, b, c – координаты направляющего вектора \vec{p} прямой. Параметр t в уравнениях (4.32), (4.33) имеет следующий геометрический смысл: величина t пропорциональна расстоянию от заданной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до точки $M(x, y, z) \equiv M(x_0 + a \cdot t, y_0 + b \cdot t, z_0 + c \cdot t)$. Физический смысл параметра t в параметрических уравнениях (4.32), (4.33) – это время при равномерном и прямолинейном движении точки $M(x, y, z)$ по прямой. При $t = 0$ точка

$M(x, y, z)$ совпадает с заданной точкой M_0 . При возрастании t движение происходит в направлении направляющего вектора.

КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Выразим параметр t из каждого уравнения системы (4.33): $t = \frac{x-x_0}{a}$,

$t = \frac{y-y_0}{b}$, $t = \frac{z-z_0}{c}$, а затем исключим этот параметр:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0. \quad (4.34)$$

Уравнение (4.34) называется *каноническим уравнением прямой в пространстве*. В этом уравнении коэффициенты a, b, c не равны нулю одновременно, так как это координаты направляющего вектора прямой.

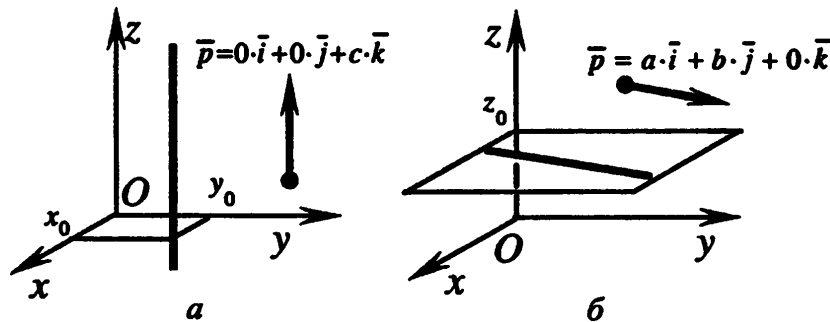


Рис.4.29

З а м е ч а н и я 4.6.

1. Если один или два из трех знаменателей дробей в (4.34) равны нулю, то считается, что соответствующий числитель дроби равен нулю. Например:

а) каноническое уравнение $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{c}$ – это уравнение

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 \end{cases} \text{ прямой, параллельной оси аппликат (рис.4.29,а);}$$

б) каноническое уравнение $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{0}$ – это уравнение

$$\begin{cases} z = z_0, \\ \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \end{cases} \text{ прямой, параллельной координатной плоскости } Oxy$$

(рис.4.29,б).

2. Направляющий вектор \bar{p} прямой определяется неоднозначно. Например, любой ненулевой вектор $\lambda \cdot \bar{p}$, где $\lambda \in R$, также является направляющим вектором для той же прямой.

3. Для перехода от общего уравнения прямой (4.31) к каноническому (4.34) нужно выполнить следующие действия:

1) найти любое решение (x_0, y_0, z_0) системы

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0, \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0, \end{cases}$$

определяя тем самым координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей прямой;

2) найти направляющий вектор \vec{p} прямой как векторное произведение нормалей $\vec{n}_1 = A_1 \cdot \vec{i} + B_1 \cdot \vec{j} + C_1 \cdot \vec{k}$, $\vec{n}_2 = A_2 \cdot \vec{i} + B_2 \cdot \vec{j} + C_2 \cdot \vec{k}$ заданных плоскостей:

$$\vec{p} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

3) записать каноническое уравнение (4.34) с учетом п.1 и 2.

4. Чтобы перейти от канонического уравнения к общему, достаточно двойное равенство (4.34) записать в виде системы

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, \\ \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}, \end{cases}$$

и привести подобные члены.

5. Чтобы перейти от канонического уравнения к параметрическому, следует приравнять каждую дробь в уравнении (4.34) параметру t и записать полученные равенства в виде системы (4.33):

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t, \\ y = y_0 + b \cdot t, \\ z = z_0 + c \cdot t, \end{cases} t \in R.$$

6. Если в каноническом уравнении (4.34) прямой фиксировать координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0 , а коэффициентам a, b, c придавать произвольные значения (не равные нулю одновременно), то получим уравнение *связки прямых с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$* , т.е. совокупность всех прямых, проходящих через точку M_0 .

7. Параметрическое (4.33) и каноническое (4.34) уравнения прямой, полученные в прямоугольной системе координат, имеют тот же вид в любой другой аффинной системе координат. Геометрический смысл коэффициентов в уравнениях остается прежним.

Пример 4.14. В координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) заданы вершины $A(1,2,3)$, $B(3,0,2)$, $C(7,4,6)$ треугольника (рис.4.30). Требуется:

а) составить каноническое уравнение прямой, содержащей высоту AH треугольника;

б) составить общее уравнение прямой, содержащей биссектрису AL треугольника.

□ а) Общее уравнение прямой AH получено в примере 4.13:

$$\begin{cases} x+3\cdot y-4\cdot z+5=0, \\ x+y+z-6=0. \end{cases}$$

Перейдем от общего уравнения к каноническому.

1) Найдем любое решение (x_0, y_0, z_0) системы, например, $x_0=1$, $y_0=2$, $z_0=3$ (это координаты точки $A(1,2,3)$).

2) Найдем направляющий вектор \bar{p} прямой как векторное произведение нормалей $\bar{n}_1=1\cdot\bar{i}+3\cdot\bar{j}-4\cdot\bar{k}$, $\bar{n}_2=1\cdot\bar{i}+1\cdot\bar{j}+1\cdot\bar{k}$ заданных плоскостей

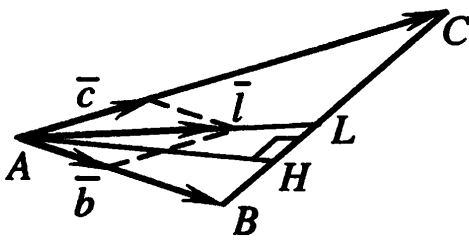


Рис.4.30

$$\bar{p}=[\bar{n}_1, \bar{n}_2]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=7\cdot\bar{i}-5\cdot\bar{j}-2\cdot\bar{k}.$$

3) Запишем каноническое уравнение (4.34): $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-3}{-2}$.

б) Сначала составим каноническое уравнение прямой AL . Для этого нужно найти направляющий вектор \bar{l} этой прямой. Учитывая, что диагональ ромба является биссектрисой, $\bar{l}=\bar{b}+\bar{c}$, где \bar{b} и \bar{c} – единичные векторы, одинаково направленные с векторами \overline{AB} и \overline{AC} соответственно. Найдим

$$\overline{AB}=2\cdot\bar{i}-2\cdot\bar{j}-1\cdot\bar{k}, \quad |\overline{AB}|=3, \quad \bar{b}=\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}=\frac{2}{3}\cdot\bar{i}-\frac{2}{3}\cdot\bar{j}-\frac{1}{3}\cdot\bar{k};$$

$$\overline{AC}=6\cdot\bar{i}+2\cdot\bar{j}+3\cdot\bar{k}, \quad |\overline{AC}|=7, \quad \bar{c}=\frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|}=\frac{6}{7}\cdot\bar{i}+\frac{2}{7}\cdot\bar{j}+\frac{3}{7}\cdot\bar{k};$$

$$\bar{l}=\bar{b}+\bar{c}=\left(\frac{2}{3}\cdot\bar{i}-\frac{2}{3}\cdot\bar{j}-\frac{1}{3}\cdot\bar{k}\right)+\left(\frac{6}{7}\cdot\bar{i}+\frac{2}{7}\cdot\bar{j}+\frac{3}{7}\cdot\bar{k}\right)=\frac{32}{21}\cdot\bar{i}-\frac{8}{21}\cdot\bar{j}+\frac{2}{21}\cdot\bar{k}.$$

Составляем каноническое уравнение прямой AL : $\frac{x-1}{\frac{32}{21}}=\frac{y-2}{-\frac{8}{21}}=\frac{z-3}{\frac{2}{21}}$.

Записывая двойное равенство в виде системы, получаем общее уравнение прямой AL :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{\frac{32}{21}} = \frac{y-2}{-\frac{8}{21}}, \\ \frac{y-2}{-\frac{8}{21}} = \frac{z-3}{\frac{2}{21}}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \cdot y-9=0, \\ y+4 \cdot z-14=0. \end{cases} \blacksquare$$

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Найдем расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой l , заданной каноническим уравнением (рис.4.31):

$$l: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

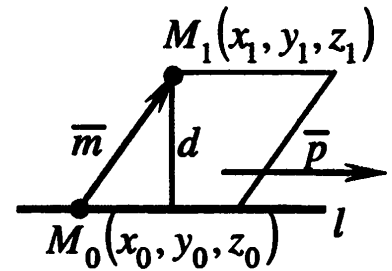


Рис.4.31

Искомое расстояние равно высоте параллелограмма (см. разд.1.6.2), построенного на векторах

$\vec{p} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$ и $\vec{m} = \overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0) \cdot \vec{i} + (y_1 - y_0) \cdot \vec{j} + (z_1 - z_0) \cdot \vec{k}$, т.е.

$$d = \frac{|[\vec{m}, \vec{p}]|}{|\vec{p}|} = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ a & b \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ b & c \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1-x_0 & z_1-z_0 \\ a & c \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \quad (4.35)$$

4.3.3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть в координатном пространстве $Oxyz$ заданы две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Требуется составить уравнение прямой, проходящей через заданные точки.

Как показано в разд.1.6.1, точка $M(x, y, z)$ принадлежит прямой M_0M_1 тогда и только тогда, когда ее радиус-вектор \overline{OM} удовлетворяет условию (рис.4.32):

$$\overline{OM} = (1-t) \cdot \overline{OM_0} + t \cdot \overline{OM_1},$$

где t – некоторое действительное число (параметр). Это уравнение, а также его координатную форму

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1-t) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1-t) \cdot x_0 + t \cdot x_1, \\ y = (1-t) \cdot y_0 + t \cdot y_1, \\ z = (1-t) \cdot z_0 + t \cdot z_1, \end{cases} t \in R \quad (4.36)$$

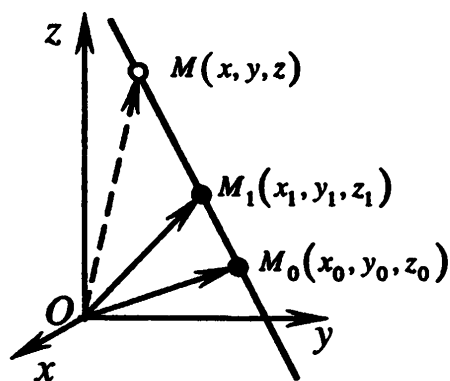
будем называть **аффинным уравнением прямой, проходящей через две точки** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Выражая параметр t из каждого уравнения системы (4.36), получаем:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} = t. \text{ Исключая параметр } t, \text{ приходим к уравнению}$$

прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \quad (4.37)$$



Аффинное уравнение прямой:

$$\overline{OM} = (1-t) \cdot \overline{OM_0} + t \cdot \overline{OM_1};$$

$$\begin{cases} x = (1-t) \cdot x_0 + t \cdot x_1, \\ y = (1-t) \cdot y_0 + t \cdot y_1, \\ z = (1-t) \cdot z_0 + t \cdot z_1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки M_0 и M_1 :

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

Рис.4.32

Уравнение (4.37) можно получить из канонического уравнения (4.34), выбирая в качестве направляющего вектора $\vec{p} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$ вектор $\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0) \cdot \vec{i} + (y_1 - y_0) \cdot \vec{j} + (z_1 - z_0) \cdot \vec{k}$, т.е. подставляя $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$, $c = z_1 - z_0$.

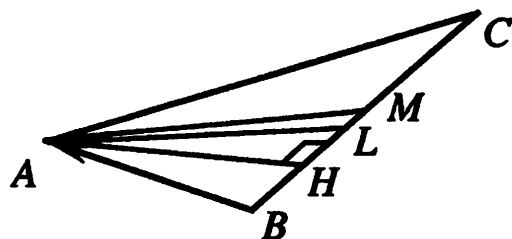


Рис.4.33

Пример 4.15. В координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) заданы вершины $A(1, 2, 3)$, $B(3, 0, 2)$, $C(7, 4, 6)$ треугольника (рис.4.33). Требуется:

а) составить уравнение прямой BC ;

б) составить уравнение прямой, содержащей медиану AM треугольника;

в) найти высоту h треугольника, опущенную на сторону BC .

□ а) Записываем уравнение (4.37) прямой, проходящей через точки $B(3, 0, 2)$, $C(7, 4, 6)$:

$$\frac{x-3}{7-3} = \frac{y-0}{4-0} = \frac{z-2}{6-2} \Leftrightarrow \frac{x-3}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{4} \Leftrightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

б) Находим координаты середины M стороны BC : $M(5,2,4)$. Составляем уравнение (4.37) прямой AM :

$$\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-2}{2-2} = \frac{z-3}{4-3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}.$$

в) Искомую высоту h находим по формуле (4.35), полагая $\vec{m} = \overline{BA} = -2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$, $\vec{p} = 1 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$:

$$h = \frac{|[\vec{m}, \vec{p}]|}{|\vec{p}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{16+1+9}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}. \blacksquare$$

4.3.4. Взаимное расположение прямых в пространстве

Возможны четыре различных случая расположения двух прямых в пространстве:

- прямые скрещивающиеся, т.е. не лежат в одной плоскости;
- прямые пересекаются, т.е. лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку;
- прямые параллельные, т.е. лежат в одной плоскости и не пересекаются;
- прямые совпадают.

Получим признаки этих случаев взаимного расположения прямых, заданных каноническими уравнениями

$$l_1: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}, \quad l_2: \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2},$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – точки, принадлежащие прямым l_1 и l_2 соответственно, а $\vec{p}_1 = a_1 \cdot \vec{i} + b_1 \cdot \vec{j} + c_1 \cdot \vec{k}$, $\vec{p}_2 = a_2 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + c_2 \cdot \vec{k}$ – направляющие векторы (рис.4.34). Обозначим через

$$\vec{m} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k}$$

вектор, соединяющий заданные точки.

Перечисленным выше случаям взаимного расположения прямых l_1 и l_2 соответствуют следующие признаки:

- прямые l_1 и l_2 скрещивающиеся \Leftrightarrow векторы \vec{m} , \vec{p}_1 , \vec{p}_2 не компланарны;
- прямые l_1 и l_2 пересекаются \Leftrightarrow векторы \vec{m} , \vec{p}_1 , \vec{p}_2 компланарны, а векторы \vec{p}_1 , \vec{p}_2 не коллинеарны;

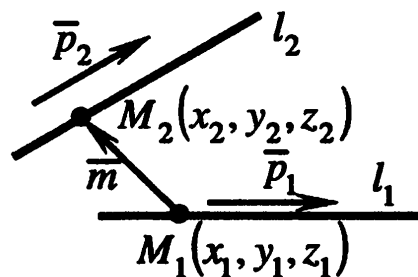


Рис.4.34

– прямые l_1 и l_2 параллельные \Leftrightarrow векторы \bar{p}_1, \bar{p}_2 коллинеарны, а векторы \bar{m}, \bar{p}_1 не коллинеарны;

– прямые l_1 и l_2 совпадают \Leftrightarrow векторы $\bar{m}, \bar{p}_1, \bar{p}_2$ коллинеарны.

Эти условия можно записать, используя свойства смешанного и векторного произведений (см. разд.1.6.2). Напомним, что смешанное произведение векторов в правой прямоугольной системе координат находится по формуле:

$$(\bar{m}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Равенство нулю смешанного произведения векторов является необходимым и достаточным условием их компланарности (см. разд.1.6.2).

Поэтому:

– прямые l_1 и l_2 скрепляющиеся \Leftrightarrow определитель отличен от нуля;

– прямые l_1 и l_2 пересекаются \Leftrightarrow определитель равен нулю, а вторая

и третья его строки не пропорциональны, т.е. $\text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$;

– прямые l_1 и l_2 параллельные \Leftrightarrow вторая и третья строки определителя пропорциональны, т.е. $\text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$, а первые две строки не про-

порциональны, т.е. $\text{rg} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = 2$;

– прямые l_1 и l_2 совпадают \Leftrightarrow все строки определителя пропорциональны, т.е. $\text{rg} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$.

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ

Найдем расстояние d между параллельными прямыми, заданными каноническими уравнениями (рис.4.35)

$$l: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \quad l_1: \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольные точки на прямых l и l_1 соответственно, а координаты направляющих векторов прямых пропорцио-

нальны: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$.

Искомое расстояние d равно высоте параллелограмма, построенного на векторах

$\bar{p} = a \cdot \bar{i} + b \cdot \bar{j} + c \cdot \bar{k}$ и $\bar{m} = \overline{M_0 M_1} = (x_1 - x_0) \cdot \bar{i} + (y_1 - y_0) \cdot \bar{j} + (z_1 - z_0) \cdot \bar{k}$,
и может быть найдено по формуле (4.35).

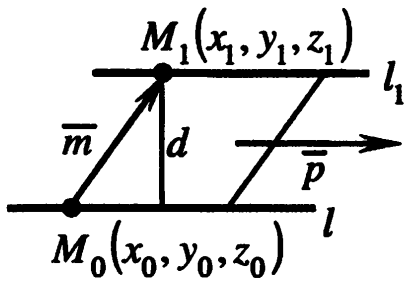


Рис.4.35

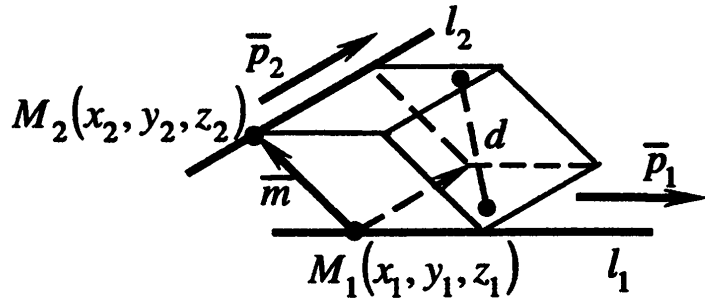


Рис.4.36

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Напомним, что *расстоянием между скрещивающимися прямыми* называется длина их общего перпендикуляра, т.е. кратчайшее расстояние между точками этих прямых.

Найдем расстояние d между скрещивающимися прямыми, заданными каноническими уравнениями

$$l_1: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}; \quad l_2: \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2},$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – произвольные точки на прямых l_1 и l_2 соответственно.

Искомое расстояние d равно высоте параллелепипеда (см. разд.1.6.2), построенного на векторах $\bar{m} = \overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_1) \cdot \bar{j} + (z_2 - z_1) \cdot \bar{k}$,
 $\bar{p}_1 = a_1 \cdot \bar{i} + b_1 \cdot \bar{j} + c_1 \cdot \bar{k}$, $\bar{p}_2 = a_2 \cdot \bar{i} + b_2 \cdot \bar{j} + c_2 \cdot \bar{k}$ (рис.4.36), т.е.

$$d = \frac{|(\bar{m}, \bar{p}_1, \bar{p}_2)|}{|[\bar{p}_1, \bar{p}_2]|}, \quad (4.38)$$

где $(\bar{m}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $[\bar{p}_1, \bar{p}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ – смешанное и век-

торное произведения векторов (см. разд.1.5.1–1.5.3). Как показано выше, прямые l_1 и l_2 скрещивающиеся тогда и только тогда, когда векторы \bar{m} , \bar{p}_1 , \bar{p}_2 некопланарные, т.е.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отсюда следует, что вторая и третья строки не пропорциональны. Поэтому векторы \bar{p}_1, \bar{p}_2 неколлинеарны, т.е. $|\bar{p}_1, \bar{p}_2| \neq 0$, и знаменатель в правой части (4.38) отличен от нуля.

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Угол между прямыми определяется как угол между их направляющими векторами. Поэтому величина φ острого угла между прямыми

$$l_1: \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|(\bar{p}_1, \bar{p}_2)|}{|\bar{p}_1| \cdot |\bar{p}_2|} = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \quad (4.39)$$

Пример 4.16. Найти расстояние d между прямой, проходящей через точки $B(3, 0, 2)$, $C(7, 4, 6)$, и осью абсцисс. Найти величину φ острого угла между этими прямыми.

□ Каноническое уравнение оси абсцисс имеет вид $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$, так как ось проходит через точку $O(0, 0, 0)$, а \bar{i} — ее направляющий вектор. Каноническое уравнение прямой BC получено в примере 4.15, "а":

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

Полагая $\bar{m} = \overline{OB} = (3-0) \cdot \bar{i} + (0-0) \cdot \bar{j} + (2-0) \cdot \bar{k} = 3 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$, $\bar{p}_1 = 1 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}$, $\bar{p}_2 = 1 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} + 1 \cdot \bar{k}$, по формуле (4.38) получаем:

$$(\bar{m}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad [\bar{p}_1, \bar{p}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{i} - 1 \cdot \bar{j} + 1 \cdot \bar{k},$$

$$d = \frac{|(\bar{m}, \bar{p}_1, \bar{p}_2)|}{|[\bar{p}_1, \bar{p}_2]|} = \frac{2}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \sqrt{2}.$$

Острый угол φ находим по формуле (4.39):

$$\cos \varphi = \frac{|(\bar{p}_1, \bar{p}_2)|}{|\bar{p}_1| \cdot |\bar{p}_2|} = \frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

т.е. $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

4.3.5. Взаимное расположение прямой и плоскости

Возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости:

- прямая и плоскость пересекаются, т.е. имеют одну общую точку;
- прямая и плоскость параллельны, т.е. не имеют общих точек;
- прямая лежит в плоскости, т.е. все точки прямой принадлежат плоскости.

Получим признаки для всех этих случаев. Пусть прямая l и плоскость π заданы уравнениями:

$$l: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}; \quad \pi: A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0,$$

т.е. прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ коллинеарно вектору $\bar{p} = a \cdot \bar{i} + b \cdot \bar{j} + c \cdot \bar{k}$, а плоскость π перпендикулярна вектору $\bar{n} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j} + C \cdot \bar{k}$.

Перечисленным выше случаям взаимного расположения прямой l и плоскости π соответствуют следующие признаки:

- прямая l и плоскость π пересекаются \Leftrightarrow векторы \bar{p} и \bar{n} не ортогональны (рис.4.37,а);
- прямая l и плоскость π параллельны \Leftrightarrow векторы \bar{p} и \bar{n} ортогональны, а точка M_0 не принадлежит плоскости π (рис.4.37,б);
- прямая l лежит в плоскости π \Leftrightarrow векторы \bar{p} и \bar{n} ортогональны, а точка M_0 принадлежит плоскости π (рис.4.37,в).

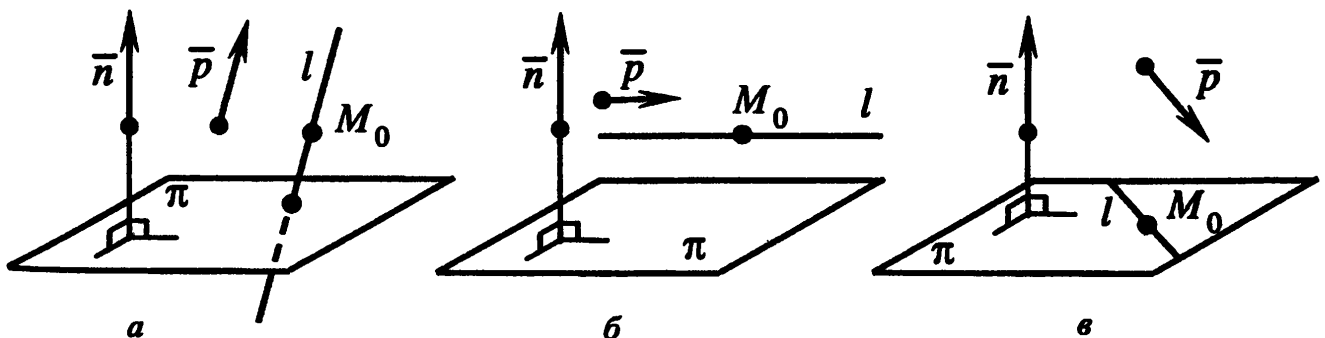


Рис.4.37

Учитывая свойство скалярного произведения векторов $(\vec{p}, \vec{n}) = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C$, получаем:

– прямая l и плоскость π пересекаются $\Leftrightarrow a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \neq 0$;

– прямая l и плоскость π параллельны $\Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0, \\ A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D \neq 0; \end{cases}$

– прямая l лежит в плоскости π $\Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0, \\ A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D = 0. \end{cases}$

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

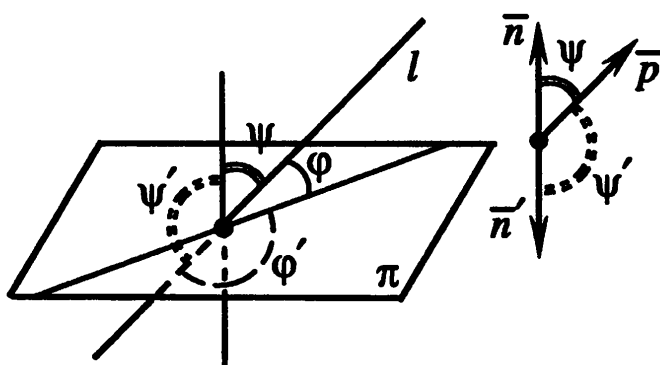


Рис.4.38

Угол между прямой l и плоскостью π определяется как угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость (рис.4.38). Из двух смежных углов φ и φ' , как правило, выбирают меньший. Если прямая l перпендикулярна плоскости (ее ортогональная проекция на плоскость является точкой), то угол считается

равным $\frac{\pi}{2}$. Если обозначить ψ и ψ' углы, образованные наклонной l с перпендикуляром к плоскости, то

$$\sin \varphi = \sin \varphi' = |\cos \psi| = |\cos \psi'|.$$

Поскольку угол ψ (или ψ') равен углу между направляющим вектором \vec{p}

прямой l и нормалью \vec{n} к плоскости π , то $\sin \varphi = |\cos \psi| = \frac{|(\vec{p}, \vec{n})|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{n}|}$. Запи-

сывая скалярное произведение через координаты множителей, получаем формулу вычисления угла φ между прямой и плоскостью:

$$\sin \varphi = \frac{|a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4.40)$$

Отсюда, например, следует полученное ранее необходимое условие $a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$ параллельности прямой и плоскости.

4.3.6. Типовые задачи с прямыми в пространстве

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРЯМЫХ

Разнообразие видов уравнений прямых в пространстве порождается многообразием геометрических способов их задания. По любому набору геометрических данных, однозначно определяющих прямую в пространстве, можно составить уравнение этой прямой, причем геометрические данные будут отражены в коэффициентах уравнения. И наоборот, коэффициенты любого уравнения прямой имеют геометрический смысл, соответствующий способу задания прямой в пространстве.

Для удобства решения типовых задач, связанных с прямыми в пространстве, все основные типы уравнений прямых и соответствующие геометрические способы задания этих прямых отражены в таблице 4.2.

Примеры составления уравнений прямых в пространстве по геометрическим данным, указанным в таблице 4.2, разбирались в разд.4.3.1–4.3.3.

Т а б л и ц а 4.2. Основные типы уравнений прямых в пространстве

Название	Уравнение	Способ задания прямой	Геометрический смысл коэффициентов
Общее уравнение прямой	$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0, \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0, \end{cases}$ $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$	Прямая определяется как линия пересечения двух плоскостей $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$ и $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$ (рис.4.25)	Коэффициенты $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ – координаты нормалей $\vec{n}_1 = A_1 \cdot \vec{i} + B_1 \cdot \vec{j} + C_1 \cdot \vec{k},$ $\vec{n}_2 = A_2 \cdot \vec{i} + B_2 \cdot \vec{j} + C_2 \cdot \vec{k}$
Параметрическое уравнение прямой	$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t, \\ y = y_0 + b \cdot t, \\ z = z_0 + c \cdot t, \end{cases}$ $t \in R,$ $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$	Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ коллинеарно вектору $\vec{p} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$ (рис.4.27)	Коэффициенты a, b, c – координаты направляющего вектора $\vec{p} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$; x_0, y_0, z_0 – координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей прямой
Каноническое уравнение прямой	$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$	См. параметрическое уравнение	См. параметрическое уравнение
Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$	Прямая проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис.4.32)	Коэффициенты $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ – координаты точек $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1)$

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПРЯМЫХ

Перечислим формулы для вычисления длин отрезков (расстояний) и величин углов по уравнениям образующих их прямых.

1. Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой

$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{\sqrt{\left| \frac{x_1-x_0}{a} \quad \frac{y_1-y_0}{b} \right|^2 + \left| \frac{y_1-y_0}{b} \quad \frac{z_1-z_0}{c} \right|^2 + \left| \frac{x_1-x_0}{a} \quad \frac{z_1-z_0}{c} \right|^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

По этой же формуле вычисляется расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ и $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$, координаты

направляющих векторов которых пропорциональны: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$.

2. Расстояние d между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$$

вычисляется по формуле

$$d = \frac{|(\bar{m}, \bar{p}_1, \bar{p}_2)|}{|[\bar{p}_1, \bar{p}_2]|},$$

где $(\bar{m}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$, $[\bar{p}_1, \bar{p}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ – смешанное и

векторное произведения векторов $\bar{m} = (x_2 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_1) \cdot \bar{j} + (z_2 - z_1) \cdot \bar{k}$,

$\bar{p}_1 = a_1 \cdot \bar{i} + b_1 \cdot \bar{j} + c_1 \cdot \bar{k}$, $\bar{p}_2 = a_2 \cdot \bar{i} + b_2 \cdot \bar{j} + c_2 \cdot \bar{k}$.

3. Угол φ между двумя прямыми

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$$

вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

4. Угол φ между прямой $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ и плоскостью $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ вычисляется по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

При решении задач свойства 1–4 используются наряду с метрическими приложениями векторной алгебры (см. разд. 1.6.2).

Пример 4.17. В координатном пространстве $Oxyz$ (в прямоугольной системе координат) заданы вершины $A(1, 3, -1)$, $B(2, 1, -2)$, $C(3, -2, 4)$ треугольной пирамиды $OABC$ (рис. 4.39). Требуется:

а) найти угол φ между ребром OA и плоскостью грани ABC ;

б) составить каноническое уравнение прямой OM , где M – точка пересечения медиан треугольника ABC ;

в) найти проекцию H точки O на плоскость грани ABC ;

г) составить каноническое уравнение прямой $O'M$, симметричной прямой OM относительно плоскости грани ABC ;

д) найти угол ψ между прямыми OM и AB ;

е) найти расстояние d между прямыми OM и AB ;

ж) найти проекцию C' точки C на прямую OA ;

з) составить уравнение прямой, содержащей ортогональную проекцию высоты ON грани OBC на плоскость грани ABC .

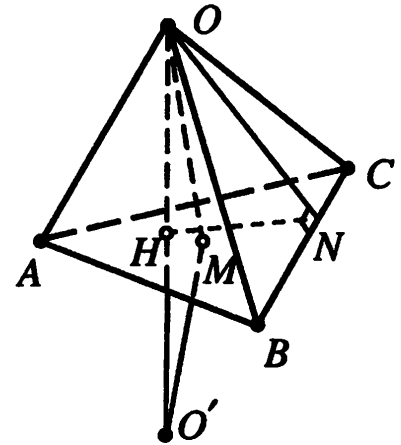


Рис. 4.39

□ а) Составим уравнение прямой OA : $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$. Уравнение плоскости грани ABC было найдено в примере 4.12: $15 \cdot x + 7 \cdot y + z - 35 = 0$. Вычисляем искомый угол φ (формула п.4):

$$\sin \varphi = \frac{|1 \cdot 15 + 3 \cdot 7 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{15^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{35}{55} = \frac{7}{11}.$$

Следовательно, угол $\varphi = \arcsin \frac{7}{11}$.

б) Координаты точки пересечения медиан треугольника ABC находим как среднее арифметическое координат его вершин: $M\left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{3+1-2}{3}, \frac{-1-2+4}{3}\right)$, т.е. $M\left(2, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Теперь составляем уравнение прямой, проходящей через две точки O и M (см. таблицу 4.2):

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{\frac{2}{3}-0} = \frac{z-0}{\frac{1}{3}-0} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

в) Составим параметрическое уравнение прямой OH (см. таблицу 4.2). Направляющим вектором этой прямой служит нормаль $\vec{n} = 15 \cdot \vec{i} + 7 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$ к плоскости ABC (см. п."а"). Поэтому

$$\begin{cases} x = 15 \cdot t, \\ y = 7 \cdot t, \\ z = t. \end{cases}$$

Подставляя эти соотношения в уравнение плоскости грани ABC (см. п."а"), находим значение параметра t , соответствующее точке H :

$$15 \cdot 15 \cdot t + 7 \cdot 7 \cdot t + 1 \cdot 1 \cdot t - 35 = 0 \Leftrightarrow 275 \cdot t - 35 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{55}.$$

Координаты точки H вычисляем по параметрическому уравнению прямой OH , подставляя найденное значение параметра t :

$$x = 15 \cdot \frac{7}{55} = \frac{21}{11}, \quad y = 7 \cdot \frac{7}{55} = \frac{49}{55}, \quad z = \frac{7}{55},$$

т.е. $H\left(\frac{21}{11}, \frac{49}{55}, \frac{7}{55}\right)$.

г) Координаты точки O' , симметричной точке O относительно плоскости грани ABC , находим, подставляя в параметрическое уравнение прямой OH значение $t = 2 \cdot \frac{7}{55} = \frac{14}{55}$. Получим $O'\left(\frac{42}{11}, \frac{98}{55}, \frac{14}{55}\right)$. Теперь составляем уравнение прямой, проходящей через точки M и O' (см. таблицу 4.2):

$$\frac{x-2}{\frac{42}{11}-2} = \frac{y-\frac{2}{3}}{\frac{98}{55}-\frac{2}{3}} = \frac{z-\frac{1}{3}}{\frac{14}{55}-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{x-2}{300} = \frac{y-\frac{2}{3}}{184} = \frac{z-\frac{1}{3}}{-13}.$$

д) Угол ψ между прямыми OM и AB находим как угол между их направляющими векторами $\vec{OM} = 2 \cdot \vec{i} + \frac{2}{3} \cdot \vec{j} + \frac{1}{3} \cdot \vec{k}$, $\vec{AB} = 1 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - 1 \cdot \vec{k}$ (формула п.3):

$$\cos \psi = \frac{\left| 2 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot (-2) + \frac{1}{3} \cdot (-1) \right|}{\sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{246}},$$

т.е. $\psi = \arccos \frac{1}{\sqrt{246}}$.

е) Расстояние d между прямыми OM и AB находим по формуле п.2, полагая $\vec{p}_1 = \vec{OM} = 2 \cdot \vec{i} + \frac{2}{3} \cdot \vec{j} + \frac{1}{3} \cdot \vec{k}$, $\vec{p}_2 = \vec{AB} = 1 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - 1 \cdot \vec{k}$, $\vec{m} = \vec{OA} =$

$= 1 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} - 1 \cdot \bar{k}$ (на прямой OM выбираем точку O , а на прямой AB – точку A):

$$(\bar{m}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{35}{3}, \quad [\bar{p}_1, \bar{p}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{i} + \frac{7}{3} \cdot \bar{j} - \frac{14}{3} \cdot \bar{k};$$

$$d = \frac{|(\bar{m}, \bar{p}_1, \bar{p}_2)|}{|[\bar{p}_1, \bar{p}_2]|} = \frac{|\frac{35}{3}|}{\sqrt{0^2 + (\frac{7}{3})^2 + (-\frac{14}{3})^2}} = \sqrt{5}.$$

ж) Составим уравнение (4.14) плоскости, проходящей через точку $C(3, -2, 4)$ перпендикулярно прямой OA (нормалью к этой плоскости служит вектор $\overline{OA} = 1 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} - 1 \cdot \bar{k}$):

$$1 \cdot (x-3) + 3 \cdot (y+2) - 1 \cdot (z-4) = 0 \Leftrightarrow x + 3 \cdot y - z + 7 = 0.$$

Найдем точку пересечения этой плоскости с прямой OA . Для этого подставим в уравнение плоскости соотношения из параметрического уравнения

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 3 \cdot t, \\ z = -t \end{cases}$$

прямой OA , получаемого из канонического: $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1} = t$ (см. п."а").

Получим $t + 3 \cdot 3 \cdot t + t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{7}{11}$. Подставляя теперь значение параметра в уравнение прямой OA , находим координаты точки C' : $x = -\frac{7}{11}$,

$$y = -\frac{21}{11}, \quad z = \frac{7}{11}, \quad \text{т.е. } C'(-\frac{7}{11}, -\frac{21}{11}, \frac{7}{11}).$$

з) Составим общее уравнение искомой прямой HN (см. рис.4.39) как линии пересечения плоскости основания ABC пирамиды и плоскости, проходящей через точку O и перпендикулярной прямой BC . Уравнение плоскости грани ABC было найдено в примере 4.12: $15 \cdot x + 7 \cdot y + z - 35 = 0$ (см. п."а"). Общее уравнение плоскости, проходящей через точку $O(0,0,0)$ с нормалью $\overline{BC} = (3-2) \cdot \bar{i} + (-2-1) \cdot \bar{j} + (4-(-2)) \cdot \bar{k} = 1 \cdot \bar{i} - 3 \cdot \bar{j} + 6 \cdot \bar{k}$ имеет вид: $1 \cdot x - 3 \cdot y + 6 \cdot z = 0$. Записывая уравнения плоскостей в систему, получаем общее уравнение искомой прямой HN :

$$\begin{cases} 15 \cdot x + 7 \cdot y + z - 35 = 0, \\ 1 \cdot x - 3 \cdot y + 6 \cdot z = 0. \end{cases} \blacksquare$$

4.4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

4.4.1. Канонические уравнения поверхностей второго порядка

Рассмотрим задачу приведения уравнения поверхности второго порядка к наиболее простому (каноническому) виду.

Напомним (см. разд.4.1.3), что алгебраической поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в какой-либо аффинной системе координат $Ox_1x_2x_3$ может быть задано уравнением вида

$$a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + a_{33} \cdot x_3^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + 2 \cdot a_1 \cdot x_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x_2 + 2 \cdot a_3 \cdot x_3 + a_0 = 0, \quad (4.41)$$

где левая часть – многочлен трех переменных x_1, x_2, x_3 второй степени.

Коэффициенты при первых степенях переменных x_1, x_2, x_3 , а также при их произведениях $x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_3, x_2 \cdot x_3$ взяты удвоенными просто для удобства дальнейших преобразований.

Уравнение (4.41) можно записать в матричном виде:

$$x^T \cdot A \cdot x + 2 \cdot a^T \cdot x + a_0 = 0,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ – столбец

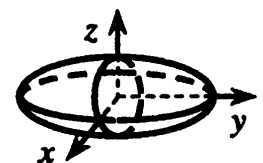
коэффициентов линейной формы (см. п.5 и п.6, "б" замечаний 4.1).

Требуется найти прямоугольную систему координат $Oxyz$, в которой уравнение поверхности приняло бы наиболее простой вид.

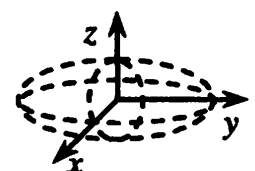
Результатом решения поставленной задачи является следующая основная теорема.

Теорема 4.3 (классификация алгебраических поверхностей второго порядка). Для любой алгебраической поверхности второго порядка существует прямоугольная система координат $Oxyz$, в которой уравнение этой поверхности принимает один из следующих семнадцати канонических видов:

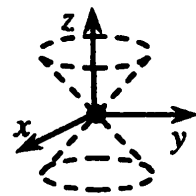
1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ уравнение эллипсоида;



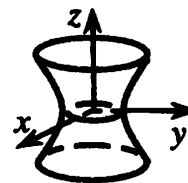
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ уравнение мнимого эллипсоида;



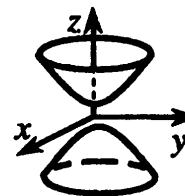
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ *уравнение мнимого конуса;*



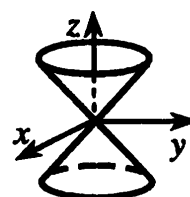
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ *уравнение однополостного гиперboloида;*



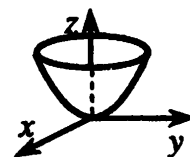
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ *уравнение двуполостного гиперboloида;*



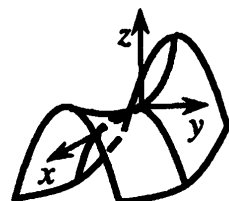
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ *уравнение конуса;*



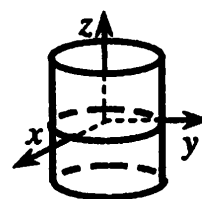
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z$ *уравнение эллиптического параболоида;*



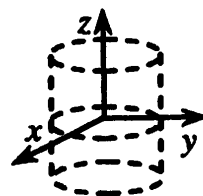
8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z$ *уравнение гиперболического параболоида;*



9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *уравнение эллиптического цилиндра;*



10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ *уравнение мнимого эллиптического цилиндра;*

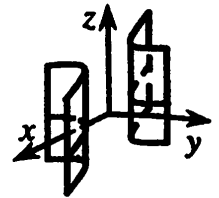


11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ *уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей;*



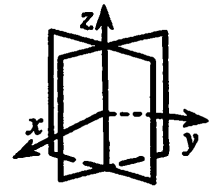
$$12. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

уравнение гиперболического цилиндра;



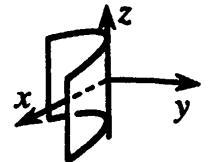
$$13. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

уравнение пары пересекающихся плоскостей;



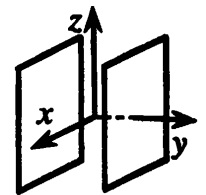
$$14. y^2 = 2 \cdot p \cdot x$$

уравнение параболического цилиндра;



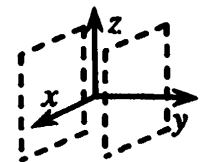
$$15. y^2 - b^2 = 0$$

уравнение пары параллельных плоскостей;



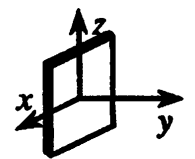
$$16. y^2 + b^2 = 0$$

уравнение пары мнимых параллельных плоскостей;



$$17. y^2 = 0$$

уравнение пары совпадающих плоскостей.



В этих уравнениях $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $p > 0$, причем $a \geq b \geq c$ в уравнениях 1,2; $a \geq b$ в уравнениях 3,4,5,6,7,9,10.

Теорема 4.3 дает *аналитические определения* поверхностей второго порядка. Согласно п.2 замечаний 4.1, поверхности (1),(4),(5),(6),(7),(8),(9),(12),(13),(14),(15),(17) называются *вещественными (действительными)*, а поверхности (2),(3),(10),(11),(16) – *мнимыми*.

Поясним доказательство теоремы. Оно аналогично доказательству теоремы 3.3 и фактически содержит алгоритм решения поставленной задачи.

Без ограничения общности можно предполагать, что уравнение поверхности второго порядка задано в прямоугольной системе координат. В противном случае можно перейти от непрямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ к прямоугольной $Oxyz$ (см. разд.2.2.2), при этом уравнение линии будет иметь тот же вид и ту же степень согласно теореме 4.1 (см. разд.4.1.3).

Пусть в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ алгебраическая поверхность второго порядка задана уравнением (4.41), в котором хотя бы один из старших коэффициентов a_{11} , a_{22} , a_{33} , a_{12} , a_{13} , a_{23} отличен от нуля,

поскольку левая часть уравнения – многочлен трех переменных x_1, x_2, x_3 второй степени.

Упрощение общего уравнения (4.41) производится в два этапа. На *первом этапе* при помощи однородного ортогонального преобразования координат "уничтожаются" члены с произведением неизвестных, как и в случае уравнения линии второго порядка (см. разд.3.3.1), при этом достаточно сделать три поворота (см. углы Эйлера в разд.2.2.3).

Докажем, что *существует однородная ортогональная замена переменных*

$$\begin{cases} x_1 = s_{11} \cdot x'_1 + s_{12} \cdot x'_2 + s_{13} \cdot x'_3, \\ x_2 = s_{21} \cdot x'_1 + s_{22} \cdot x'_2 + s_{23} \cdot x'_3, \\ x_3 = s_{31} \cdot x'_1 + s_{32} \cdot x'_2 + s_{33} \cdot x'_3, \end{cases} \text{ или } x = S \cdot x', \quad (4.42)$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ – столбцы старых и новых переменных,

$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица ($S^T = S^{-1}$), при которой

квадратичная форма

$$x^T \cdot A \cdot x = a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + a_{33} \cdot x_3^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3$$

приводится к каноническому виду

$$(x')^T \cdot \Lambda \cdot x' = \lambda_1 \cdot (x'_1)^2 + \lambda_2 \cdot (x'_2)^2 + \lambda_3 \cdot (x'_3)^2,$$

для которого матрица квадратичной формы диагональная: $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Действительно, подставляя $x = S \cdot x'$ в квадратичную форму $x^T \cdot A \cdot x$, получаем

$$x^T \cdot A \cdot x = (S \cdot x')^T \cdot A \cdot S \cdot x' = (x')^T \cdot S^T \cdot A \cdot S \cdot x' = (x')^T \cdot A' \cdot x',$$

т.е. при однородной ортогональной замене переменных (4.42) матрица квадратичной формы преобразуется по закону

$$A' = S^T \cdot A \cdot S. \quad (4.43)$$

Составим характеристическое уравнение для матрицы A (см. п.3 замечаний 3.12):

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Так как это уравнение третьей степени, то оно имеет хотя бы один действительный корень [10]. Обозначим его λ_3 . Однородная система уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_3) \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = 0, \\ a_{12} \cdot x_1 + (a_{22} - \lambda_3) \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = 0, \text{ или } (A - \lambda_3 \cdot E) \cdot x = 0, \\ a_{13} \cdot x_1 + a_{23} \cdot x_2 + (a_{33} - \lambda_3) \cdot x_3 = 0, \end{cases}$$

определитель которой равен нулю, имеет бесконечно много ненулевых решений (см. разд. П.10). Обозначим через \bar{s}_3 вектор, координатный столбец

которого совпадает с ненулевым решением $s_3 = \begin{pmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{pmatrix}$ системы, удовлетво-

ряющим условию нормировки $|\bar{s}_3| = \sqrt{(\bar{s}_3, \bar{s}_3)} = \sqrt{s_3^T \cdot s_3} = 1$. Дополним этот единичный вектор \bar{s}_3 векторами \bar{s}_1, \bar{s}_2 до ортонормированного базиса $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$ пространства. Координатные столбцы s_1, s_2, s_3 векторов $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} (\bar{s}_1, \bar{s}_1) = s_1^T \cdot s_1 = 1, \quad (\bar{s}_2, \bar{s}_2) = s_2^T \cdot s_2 = 1, \quad (\bar{s}_3, \bar{s}_3) = s_3^T \cdot s_3 = 1, \\ (\bar{s}_1, \bar{s}_2) = s_1^T \cdot s_2 = 0, \quad (\bar{s}_1, \bar{s}_3) = s_1^T \cdot s_3 = 0, \quad (\bar{s}_2, \bar{s}_3) = s_2^T \cdot s_3 = 0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

кроме того столбец s_3 удовлетворяет равенству $(A - \lambda_3 \cdot E) \cdot s_3 = 0$ или, что то же самое, $A \cdot s_3 = \lambda_3 \cdot s_3$. Из координатных столбцов s_1, s_2, s_3 базисных векторов составим матрицу $S = (s_1 | s_2 | s_3)$, которая в силу (4.44) является ортогональной, так как

$$S^T \cdot S = \begin{pmatrix} \frac{s_1^T}{s_1^T} \\ \frac{s_2^T}{s_2^T} \\ \frac{s_3^T}{s_3^T} \end{pmatrix} \cdot (s_1 | s_2 | s_3) = \begin{pmatrix} \frac{s_1^T \cdot s_1}{s_1^T \cdot s_1} & \frac{s_1^T \cdot s_2}{s_1^T \cdot s_2} & \frac{s_1^T \cdot s_3}{s_1^T \cdot s_3} \\ \frac{s_2^T \cdot s_1}{s_2^T \cdot s_2} & \frac{s_2^T \cdot s_2}{s_2^T \cdot s_2} & \frac{s_2^T \cdot s_3}{s_2^T \cdot s_3} \\ \frac{s_3^T \cdot s_1}{s_3^T \cdot s_3} & \frac{s_3^T \cdot s_2}{s_3^T \cdot s_3} & \frac{s_3^T \cdot s_3}{s_3^T \cdot s_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

и, следовательно, $S^T = S^{-1}$. Сделаем в квадратичной форме $x^T \cdot A \cdot x$ замену переменных $x = S \cdot x'$ с ортогональной матрицей $S = (s_1 | s_2 | s_3)$. По закону (4.43) находим

$$A' = S^T \cdot A \cdot S = S^T \cdot A \cdot (s_1 | s_2 | s_3) = (S^T \cdot A \cdot s_1 | S^T \cdot A \cdot s_2 | S^T \cdot A \cdot s_3).$$

Последний столбец этой матрицы, учитывая равенство $A \cdot s_3 = \lambda_3 \cdot s_3$ и ортогональность S , имеет вид

$$S^T \cdot A \cdot s_3 = \lambda_3 \cdot S^T \cdot s_3 = \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{s_1^T}{s_2^T} \\ \frac{s_2^T}{s_3^T} \\ s_3^T \end{pmatrix} \cdot s_3 = \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{s_1^T \cdot s_3}{s_2^T \cdot s_3} \\ \frac{s_2^T \cdot s_3}{s_3^T \cdot s_3} \\ s_3^T \cdot s_3 \end{pmatrix} = \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в матрице A' элементы $a'_{13} = a'_{23} = 0$ и $a'_{33} = \lambda_3$. Поэтому квадратичная форма имеет вид

$$(x')^T \cdot A' \cdot x' = a'_{11} \cdot (x'_1)^2 + 2 \cdot a'_{11} \cdot x'_1 \cdot x'_2 + a'_{22} \cdot (x'_2)^2 + \lambda_3 \cdot (x'_3)^2.$$

Как показано при доказательстве теоремы 3.3, многочлен $a'_{11} \cdot (x'_1)^2 + 2 \cdot a'_{11} \cdot x'_1 \cdot x'_2 + a'_{22} \cdot (x'_2)^2$ двух переменных при помощи поворота системы координат $Ox'_1x'_2$ можно привести к виду $\lambda_1 \cdot (x''_1)^2 + \lambda_2 \cdot (x''_2)^2$. Этот поворот соответствует повороту найденной системы координат $O\bar{s}_1\bar{s}_2\bar{s}_3$ вокруг оси аппликат.

Таким образом, существует преобразование прямоугольной системы координат, приводящее квадратичную форму к каноническому виду. При этом уравнение (4.41) не содержит членов с произведением неизвестных:

$$\lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot y^2 + \lambda_3 \cdot z^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x + 2 \cdot a'_2 \cdot y + 2 \cdot a'_3 \cdot z + a_0 = 0. \quad (4.45)$$

На *втором этапе*, при помощи параллельного переноса "уничтожаются" один, два или все три члена первой степени. В результате всех преобразований получаем систему координат $O'x'y'z'$, в которой уравнение (4.45) становится *приведенным* (одного из следующих пяти типов):

$$(I): \lambda_2 \cdot (y')^2 + a'_0 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0;$$

$$(II): \lambda_2 \cdot (y')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' = 0, \quad \lambda_2 \neq 0, a'_1 \neq 0;$$

$$(III): \lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + a'_0 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0;$$

$$(IV): \lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + a'_3 \cdot z' = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, a'_3 \neq 0;$$

$$(V): \lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + \lambda_3 \cdot (z')^2 + a'_0 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0.$$

Уравнения (I),(II),(III) совпадают с приведенными уравнениями линии второго порядка, поскольку не зависят от неизвестной z . В разд.3.3.1 показано, что они сводятся к каноническим уравнениям эллипсов, гиперболы, параболы или пар прямых. Поэтому уравнения (I),(II),(III) соответственно сводятся к каноническим уравнениям *цилиндров* (9),(10),(12),(14): эллиптического, гиперболического, параболического, или *пар плоскостей* (11), (13), (15), (16), (17).

Уравнение (IV) в зависимости от знаков коэффициентов сводится к каноническим уравнениям *параболоидов* (7) или (8). Например, если все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, a'_3$ положительны, то, перенося линейный член $a'_3 \cdot z'$

в правую часть и разделив обе части уравнения на $\frac{1}{2}a'_3$, получим

$$\frac{2 \cdot \lambda_1}{a'_3} \cdot (x')^2 + \frac{2 \cdot \lambda_2}{a'_3} \cdot (y')^2 = -2 \cdot z'.$$

Обозначим положительные величины

$$a^2 = \frac{a'_3}{2 \cdot \lambda_1}, \quad b^2 = \frac{a'_3}{2 \cdot \lambda_2}$$

и изменим направление оси аппликат, т.е. сделаем замену:

$x' = x''$, $y' = y''$, $z' = -z''$. В результате получим уравнение эллиптического параболоида (7):

$$\frac{(x'')^2}{a^2} + \frac{(y'')^2}{b^2} = 2 \cdot z''$$

Если окажется, что $a < b$, то переименуем координатные оси: $x'' = y'''$, $y'' = x'''$.

Уравнение (V) в зависимости от знаков коэффициентов сводится к каноническим уравнениям эллипсоидов (1),(2), гиперболоидов (4),(5) или конусов (3),(6).

З а м е ч а н и я 4.7.

1. Система координат, в которой уравнение алгебраической поверхности второго порядка имеет канонический вид, называется *канонической*. Каноническая система координат определяется неоднозначно. Например, изменяя направление оси ординат на противоположное, снова получаем каноническую систему координат, так как замена переменной y на $(-y)$ не изменяет уравнений (1)–(17).

2. Поверхности второго порядка, приведенные в формулировке теоремы 4.3, изображены в канонической системе координат. Изображение мнимых поверхностей дается штриховыми линиями только для иллюстрации.

3. В случаях (11),(13),(15)–(17) поверхности называются *распадающимися*, поскольку соответствующие им многочлены второй степени разлагаются в произведение многочленов первой степени.

4. Напомним, что ненулевой столбец $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$, удовлетворяющий равенству

$$A \cdot x = \lambda \cdot x,$$

называется *собственным вектором* матрицы A , а число λ – *собственным значением* этой матрицы. Говорят, что собственный вектор x *соответствует (принадлежит) собственному значению* λ .

Как показано при доказательстве теоремы 4.3, при помощи однородной ортогональной замены переменных (4.42) $x = S \cdot x'$ или, что то же самое, при помощи поворотов прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ вокруг ее начала O , квадратичную форму

$$x^T \cdot A \cdot x = a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + a_{33} \cdot x_3^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3$$

можно привести к *каноническому виду*

$$(x')^T \cdot \Lambda \cdot x' = \lambda_1 \cdot (x'_1)^2 + \lambda_2 \cdot (x'_2)^2 + \lambda_3 \cdot (x'_3)^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные числа матрицы A квадратичной формы, т.е. корни характеристического уравнения: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$, а матрица $S = (s_1 | s_2 | s_3)$ замены переменных составлена из попарно ортогональных единичных собственных векторов s_1, s_2, s_3 матрицы A , соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Другими словами, для любой квадратичной формы $x^T \cdot A \cdot x$ (трех переменных) существует ортонормированный базис $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$, составленный из собственных векторов матрицы A , в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

5. При ортогональном преобразовании координат собственные векторы матрицы A квадратичной формы не изменяются, а именно, если s_1 собственный вектор матрицы A (соответствующий собственному значению λ_1), то вектор $s'_1 = S^{-1} \cdot s_1$ является собственным для матрицы $A' = S^T \cdot A \cdot S$, где S – ортогональная матрица.

Действительно, учитывая, что $S^T = S^{-1}$, $s_1 = S \cdot s'_1$ и $A \cdot s_1 = \lambda_1 \cdot s_1$, получаем

$$A' \cdot s'_1 = \underbrace{S^T \cdot A \cdot S}_A \cdot \underbrace{S^{-1} \cdot s_1}_{s'_1} = S^T \cdot A \cdot \underbrace{S \cdot S^{-1}}_E \cdot s_1 = S^T \cdot \underbrace{A \cdot s_1}_{\lambda_1 \cdot s_1} = \lambda_1 \cdot \underbrace{S^{-1} \cdot s_1}_{s'_1} = \lambda_1 \cdot s'_1,$$

т.е. $A' \cdot s'_1 = \lambda_1 \cdot s'_1$. Следовательно, s'_1 – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1 .

6. При однородной невырожденной замене переменных $x = S \cdot x'$ линейная форма $a^T \cdot x = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3$ меняется следующим образом $a^T \cdot S \cdot x' = (a')^T x'$, т.е. столбец коэффициентов линейной формы изменяется по закону $a' = S^T \cdot a$. Свободный член квадратичной функции при однородной замене переменных $x = S \cdot x'$ не изменяется.

ПОРЯДОК ПРИВЕДЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ поверхность второго порядка задана уравнением

$$a_{11} \cdot x^2 + a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \cdot z^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + 2 \cdot a_{13} \cdot x \cdot z + 2 \cdot a_{23} \cdot y \cdot z + 2 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot y + 2 \cdot a_3 \cdot z + a_0 = 0.$$

Чтобы привести уравнение к каноническому виду, нужно выполнить следующие действия.

1. Составить матрицу квадратичной формы и столбец коэффициентов линейной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Если матрица квадратичной формы диагональная, т.е. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, то

положить $S = E$ и перейти к п.4.

2. Составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

и найти его корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (с учетом кратности).

3. Найти взаимно перпендикулярные единичные собственные векторы s_1, s_2, s_3 , соответствующие корням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения, и составить из них матрицу $S = (s_1 | s_2 | s_3)$:

а) если уравнение имеет один тройной корень $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то базис исходной системы координат является каноническим. Поэтому полагаем $S = E$ и переходим к п.4;

б) если все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ простые, то для каждого корня найти ненулевое решение однородной системы уравнений $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot l_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Например, собственный вектор $l_3 = (x_3 \ y_3 \ z_3)^T$ для простого корня λ_3 находится как любое ненулевое решение системы

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_3) \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = 0, \\ a_{12} \cdot x + (a_{22} - \lambda_3) \cdot y + a_{23} \cdot z = 0, \\ a_{13} \cdot x + a_{23} \cdot y + (a_{33} - \lambda_3) \cdot z = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad (A - \lambda_3 \cdot E) \cdot l_3 = 0;$$

в) если имеется двойной корень, например $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то для простого корня λ_3 найти соответствующий собственный вектор l_3 – любое ненулевое решение системы $(A - \lambda_3 \cdot E) \cdot l_3 = 0$. Для кратного корня $\lambda_1 = \lambda_2$ в качестве l_2 взять любой ненулевой столбец матрицы $A - \lambda_3 \cdot E$, а координатный столбец l_1 найти, используя векторное произведение $\bar{l}_1 = [\bar{l}_2, \bar{l}_3]$.

Нормируя найденные в п. "б" или "в" собственные векторы l_1, l_2, l_3 , получаем координатные столбцы

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{l_1^T \cdot l_1}} \cdot l_1, \quad s_2 = \frac{1}{\sqrt{l_2^T \cdot l_2}} \cdot l_2, \quad s_3 = \frac{1}{\sqrt{l_3^T \cdot l_3}} \cdot l_3$$

базисных векторов новой прямоугольной системы координат $Ox'y'z'$. Составляем матрицу S перехода к новому базису, записывая собственные векторы s_1, s_2, s_3 по столбцам: $S = (s_1 \mid s_2 \mid s_3)$.

4. Вычислить столбец коэффициентов линейной формы $a' = S^T \cdot a$ и составить "почти" приведенное уравнение поверхности второго порядка:

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + \lambda_3 \cdot (z')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + 2 \cdot a'_3 \cdot z' + a_0 = 0.$$

В зависимости от вида этого уравнения выполнить следующие действия.

а) Если в уравнении нет линейных членов, то переходим к п.5.

б) Если в уравнении имеется линейный член с какой-либо неизвестной и квадратичный член с этой же неизвестной, то, дополняя эти члены до полного квадрата, делаем замену, чтобы в уравнении не стало линейного члена с этой неизвестной. Например, если в уравнении $\lambda_1 \neq 0$ и $a'_1 \neq 0$, то выполняем преобразования:

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' = \lambda_1 \cdot \left[(x')^2 + 2 \cdot \frac{a'_1}{\lambda_1} \cdot x' + \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 \right] - \lambda_1 \cdot \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 = \lambda_1 \cdot \left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2,$$

а затем замену неизвестных $x'' = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $y'' = y'$, $z'' = z'$, после которой в уравнении не будет линейного члена с неизвестной x'' .

в) Если в уравнении имеются два линейных члена с двумя неизвестными, а квадраты одноименных неизвестных отсутствуют, то делаем ортогональную замену этих неизвестных так, чтобы заменить их одной неизвестной. Например, если в уравнении $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $a'_1 = 0$, $a'_2 \neq 0$, $a'_3 \neq 0$, т.е. уравнение имеет вид

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + 2 \cdot a'_3 \cdot z' + a_0 = 0,$$

то нужно выполнить замену неизвестных

$$x'' = x', \quad y'' = \frac{1}{\mu} \cdot (a'_2 \cdot y' + a'_3 \cdot z' + \frac{1}{2} \cdot a_0), \quad z'' = \frac{1}{\mu} \cdot (-a'_3 \cdot y' + a'_2 \cdot z'),$$

где $\mu = \sqrt{(a'_2)^2 + (a'_3)^2}$. Эта ортогональная замена неизвестных приводит уравнение к виду

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + 2 \cdot \mu \cdot y'' = 0.$$

г) Если в уравнении имеется только один линейный член с какой-либо неизвестной, а квадрат этой неизвестной отсутствует, то при помощи замены этой переменной надо сделать равным нулю свободный член уравнения. Например, если уравнение имеет вид

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + 2 \cdot a'_3 \cdot z' + a_0 = 0,$$

то, выполняя замену неизвестных $x'' = x'$, $y'' = y'$, $z'' = z' + \frac{a_0}{2 \cdot a'_3}$, получаем

уравнение без свободного члена:

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 + 2 \cdot a'_3 \cdot z'' = 0.$$

5. Полученное в результате упрощений (п.4) уравнение имеет "почти" канонический вид [9]. Для окончательного упрощения "почти" канонического уравнения применяются при необходимости следующие преобразования:

а) переименование координатных осей, например, $x' = y''$, $y' = x''$, $z' = z''$;

б) изменение направления координатной оси, например: $x' = -x''$, $y' = y''$, $z' = z''$;

в) умножение обеих частей уравнения на отличный от нуля множитель;

г) перенос членов из одной части уравнения в другую.

В результате этих преобразований уравнение приводится к каноническому виду. Замену неизвестных, приводящую уравнение поверхности к каноническому виду, определяем как композицию всех замен, применяемых в ходе решения.

Пример 4.18. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ заданы уравнения алгебраических поверхностей второго порядка:

а) $x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + 2 \cdot z + 1 = 0$;

б) $x^2 + 6 \cdot y - 8 \cdot z + 10 = 0$;

в) $3 \cdot x^2 - 7 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2 + 8 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x \cdot z - 8 \cdot y \cdot z + 10 \cdot x - 14 \cdot y - 6 \cdot z - 8 = 0$.

Каждое уравнение привести к каноническому виду. Указать связь между исходной и канонической системами координат.

□ а) 1. Составляем матрицу A квадратичной формы и столбец коэффициентов линейной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Матрица A диагональная ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$), а уравнение имеет "почти" приведенный вид. Поэтому полагаем, что $S = E$ и переходим к п.4.

4. В заданном уравнении имеются линейные члены всех неизвестных, а также квадраты неизвестных x и y . Дополняем члены с этими неизвестными до полных квадратов (см.п.4, "б" алгоритма):

$$\begin{aligned} (x^2 + 2 \cdot x + 1) - 1 + (y^2 - 4 \cdot y + 4) - 4 + 2 \cdot z + 1 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + 2 \cdot z - 4 = 0. \end{aligned}$$

Сделаем замену $x' = x+1, y' = y-2, z' = z: (x')^2 + (y')^2 + 2 \cdot z' - 4 = 0$. Получили уравнение, в котором имеется один линейный член с неизвестной z' , а квадрата этой неизвестной нет (см.п.4, "г" алгоритма). Сделаем замену $z'' = z' - 2$, чтобы в уравнении исчез свободный член (для единообразия обозначим $x'' = x', y'' = y'$):

$$(x'')^2 + (y'')^2 + 2 \cdot z'' = 0.$$

5. Полученное уравнение $(x'')^2 + (y'')^2 + 2 \cdot z'' = 0$ имеет простейший вид (IV). Переносим линейный член в правую часть: $(x'')^2 + (y'')^2 = -2 \cdot z''$, и делаем замену $z''' = -z''$, меняя направление оси аппликат (для единообразия обозначаем $x''' = x'', y''' = y''$):

$$(x''')^2 + (y''')^2 = 2 \cdot z''.$$

Получили каноническое уравнение (7) эллиптического параболоида с коэффициентами $a = b = 1$.

Найдем замену неизвестных, приводящую данное уравнение к каноническому виду. В п.4,5 решения были сделаны следующие замены: $x' = x+1, y' = y-2, z' = z; x'' = x', y'' = y', z'' = z' - 2; x''' = x'', y''' = y'', z''' = -z''$.

Выражая заменяемые неизвестные, получаем цепочки замен:

$$x = x' - 1, x' = x'', x'' = x''' \Rightarrow x = x' - 1 = x'' - 1 = x''' - 1;$$

$$y = y' + 2, y' = y'', y'' = y''' \Rightarrow y = y' + 2 = y'' + 2 = y''' + 2;$$

$$z = z', z' = z'' + 2, z'' = -z''' \Rightarrow z = z' = z'' + 2 = -z''' + 2.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = x''' - 1, \\ y = y''' + 2, \\ z = -z''' + 2, \end{cases} \text{ или } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s + S \cdot \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}.$$

Таким образом, найдены координатный столбец s вектора $\vec{s} = \overline{OO''}$ переноса начала координат и матрица S перехода к каноническому базису:

$$s = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) 1. Составляем матрицу A квадратичной формы и столбец коэффициентов линейной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. Матрица A диагональная ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$), а уравнение имеет "почти" приведенный вид. Поэтому полагаем, что $S = E$ и переходим к п.4.

4. В заданном уравнении имеются линейные члены двух неизвестных y и z , а также квадрат другой неизвестной x . Поэтому заменяем неизвестные (см. п.4, "в" алгоритма):

$$x' = x, \quad y' = \frac{1}{\mu} \cdot (3 \cdot y - 4 \cdot z + \frac{1}{2} \cdot 10), \quad z' = \frac{1}{\mu} \cdot (4 \cdot y + 3 \cdot z),$$

где $\mu = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. После такой замены уравнение принимает вид

$$(x')^2 + 2 \cdot 5 \cdot y' = 0.$$

5. Полученное уравнение $(x')^2 + 2 \cdot 5 \cdot y' = 0$ имеет простейший вид (II).

Переносим линейный член в правую часть: $(x')^2 = -2 \cdot 5 \cdot y'$, и делаем замену $x'' = -y'$, $y'' = x'$, $z'' = z'$, после которой получаем уравнение $(y'')^2 = 2 \cdot 5 \cdot x''$. Это уравнение (14) параболического цилиндра с параметром $p = 5$.

Найдем замену неизвестных, приводящую данное уравнение к каноническому виду. В п.4,5 решения были сделаны следующие замены: $x' = x$, $y' = \frac{3}{5} \cdot y - \frac{4}{5} \cdot z + 1$, $z' = \frac{4}{5} \cdot y + \frac{3}{5} \cdot z$; $x'' = -y'$, $y'' = x'$, $z'' = z'$. Выражая заменяемые неизвестные, получаем цепочки замен:

$$x = x', \quad x' = y'' \Rightarrow x = x' = y'';$$

$$y = \frac{3}{5} \cdot y' + \frac{4}{5} \cdot z' - \frac{3}{5}, \quad y' = -x'' \Rightarrow y = \frac{3}{5} \cdot y' + \frac{4}{5} \cdot z' - \frac{3}{5} = -\frac{3}{5} \cdot x'' + \frac{4}{5} \cdot z'' - \frac{3}{5};$$

$$z = -\frac{4}{5} \cdot y' + \frac{3}{5} \cdot z' + \frac{4}{5}, \quad z' = z'' \Rightarrow z = -\frac{4}{5} \cdot y' + \frac{3}{5} \cdot z' + \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot x'' + \frac{3}{5} \cdot z'' + \frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = y'', \\ y = -\frac{3}{5} \cdot x'' + \frac{4}{5} \cdot z'' - \frac{3}{5}, \\ z = \frac{4}{5} \cdot x'' + \frac{3}{5} \cdot z'' + \frac{4}{5}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

Таким образом, найдены координатный столбец s вектора $\bar{s} = \overline{OO''}$ переноса начала координат и матрица S перехода к каноническому базису:

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

в) 1. Составляем матрицу A квадратичной формы и столбец коэффициентов линейной формы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -4 \\ 4 & -7-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем (см. разд. П.6)

$$\begin{aligned} (3-\lambda)^2 \cdot (-7-\lambda) + 128 - 16 \cdot (-7-\lambda) - 32 \cdot (3-\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 + 81 \cdot \lambda + 81 &= 0 \Leftrightarrow (\lambda+1) \cdot (81-\lambda^2) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$.

3. Поскольку все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ простые, то для каждого корня найдем ненулевое решение однородной системы уравнений $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot l_i = 0$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{pmatrix} 3+1 & 4 & -4 \\ 4 & -7+1 & -4 \\ -4 & -4 & 3+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 0, \\ 4 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 0, \\ -4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3-9 & 4 & -4 \\ 4 & -7-9 & -4 \\ -4 & -4 & 3-9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 0, \\ 4 \cdot x_1 - 16 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 0, \\ -4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow l_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3+9 & 4 & -4 \\ 4 & -7+9 & -4 \\ -4 & -4 & 3+9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 0, \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 0, \\ -4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow l_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя собственные векторы l_1, l_2, l_3 , получаем координатные столбцы s_1, s_2, s_3 базисных векторов новой прямоугольной системы координат $Ox'y'z'$ и составляем матрицу $S = (s_1 | s_2 | s_3)$:

$$s_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем столбец коэффициентов линейной формы $a' = S^T \cdot a$:

$$a' = S^T \cdot a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \\ -6\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Составляем "почти" приведенное уравнение:

$$-1 \cdot (x')^2 + 9 \cdot (y')^2 - 9 \cdot (z')^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x' + 2 \cdot 3 \cdot y' - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} \cdot z' - 8 = 0.$$

Поскольку для каждой неизвестной имеются линейный и квадратичный члены, то дополняем их до полного квадрата:

$$\begin{aligned} & -1 \cdot \left[(x')^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x' + 2 \right] + 2 + 9 \cdot \left[(y')^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot y' + \frac{1}{9} \right] - 1 - \\ & - 9 \cdot \left[(z')^2 + 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot z' + \frac{8}{9} \right]^2 + 8 - 8 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & -1 \cdot (x' - \sqrt{2})^2 + 9 \cdot (y' + \frac{1}{3})^2 - 9 \cdot (z' + \frac{2\sqrt{2}}{3})^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ & -1 \cdot (x'')^2 + 9 \cdot (y'')^2 - 9 \cdot (z'')^2 + 1 = 0, \end{aligned}$$

где $x'' = x' - \sqrt{2}$, $y'' = y' + \frac{1}{3}$, $z'' = z' + \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

5. Для окончательного упрощения умножим уравнение на (-1) и перенесем свободный член в правую часть:

$$(x'')^2 - 9 \cdot (y'')^2 + 9 \cdot (z'')^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x'')^2}{1^2} - \frac{(y'')^2}{(\frac{1}{3})^2} + \frac{(z'')^2}{(\frac{1}{3})^2} = 1.$$

Делаем замену $x''' = x''$, $y''' = z''$, $z''' = y''$, переименовывая координатные оси:

$$\frac{(x''')^2}{1^2} + \frac{(y''')^2}{(\frac{1}{3})^2} - \frac{(z''')^2}{(\frac{1}{3})^2} = 1.$$

Получили каноническое уравнение (4) однополостного гиперболоида.

Найдем замену неизвестных, приводящую исходное уравнение к каноническому виду. В п.3,4,5 были сделаны следующие замены:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' + \sqrt{2} \\ y'' - \frac{1}{3} \\ z'' - \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}$$

Таким образом, начало канонической системы координат относительно исходной системы координат имеет координаты 1, -1, 1, а матрица перехода от исходного базиса к каноническому имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Проверим ортогональность этой матрицы. Поскольку

$$S \cdot S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

найденная матрица является ортогональной. ■

4.4.2. Эллипсоиды

Эллипсоидом называется поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (4.46)$$

где a, b, c – положительные параметры, удовлетворяющие неравенствам $a \geq b \geq c$.

Если точка $M(x, y, z)$ принадлежит эллипсоиду (4.46), то координаты точек $(\pm x, \pm y, \pm z)$ при любом выборе знаков также удовлетворяют уравнению (4.46). Поэтому эллипсоид (4.46) симметричен относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Начало координат называют **центром** эллипсоида (4.46). Шесть точек $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ пересечения эллипсоида с координатными осями называются его **вершинами**, а три отрезка координатных осей, соединяющих вершины, – **осями** эллипсоида. Оси эллипсоида, принадлежащие координатным осям Ox, Oy, Oz , имеют длины $2 \cdot a, 2 \cdot b, 2 \cdot c$ соответственно. Если $a > b > c$, то число a называется **большой полуосью**, число b – **средней полуосью**, число c – **малой полуосью** эллипсоида. Если полуоси не удовлетворяют условиям $a \geq b \geq c$, то уравнение (4.46) не является каноническим. Однако при помощи переименования неизвестных можно всегда добиться выполнения неравенств $a \geq b \geq c$.

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА

Подставляя $z = 0$ в уравнение (4.46), получаем уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ линии пересечения эллипсоида с координатной плоскостью Oxy . Это уравнение в плоскости Oxy определяет эллипс (см. разд.3.3.2). Линии пересечения эллипсоида с другими координатными плоскостями также являются эллипсами. Они называются **главными сечениями** (**главными эллипсами**) эллипсоида.

Рассмотрим теперь сечение эллипсоида плоскостью, параллельной какой-нибудь координатной плоскости, например Oxy . Подставляя $z = h$, где h – произвольная постоянная (параметр), в уравнение (4.46), получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}. \quad (4.47)$$

При $|h| > c$ уравнение не имеет действительных решений (правая часть уравнения отрицательная, а левая неотрицательная), т.е. плоскость $z = h$ не пересекает эллипсоид. При $h = \pm c$ уравнение (4.47) имеет нулевое решение $x = y = 0$. Следовательно, плоскости $z = \pm c$ касаются эллипсоида в его вершинах $(0, 0, \pm c)$. При $|h| < c$, разделив обе части уравнения (4.47) на $1 - \frac{h^2}{c^2} > 0$, получаем уравнение эллипса $\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1$ с полуосями $a' = a \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, $b' = b \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$. Следовательно, сечение эллипсоида плоскостью $z = h$ при $|h| < c$ представляет собой эллипс.

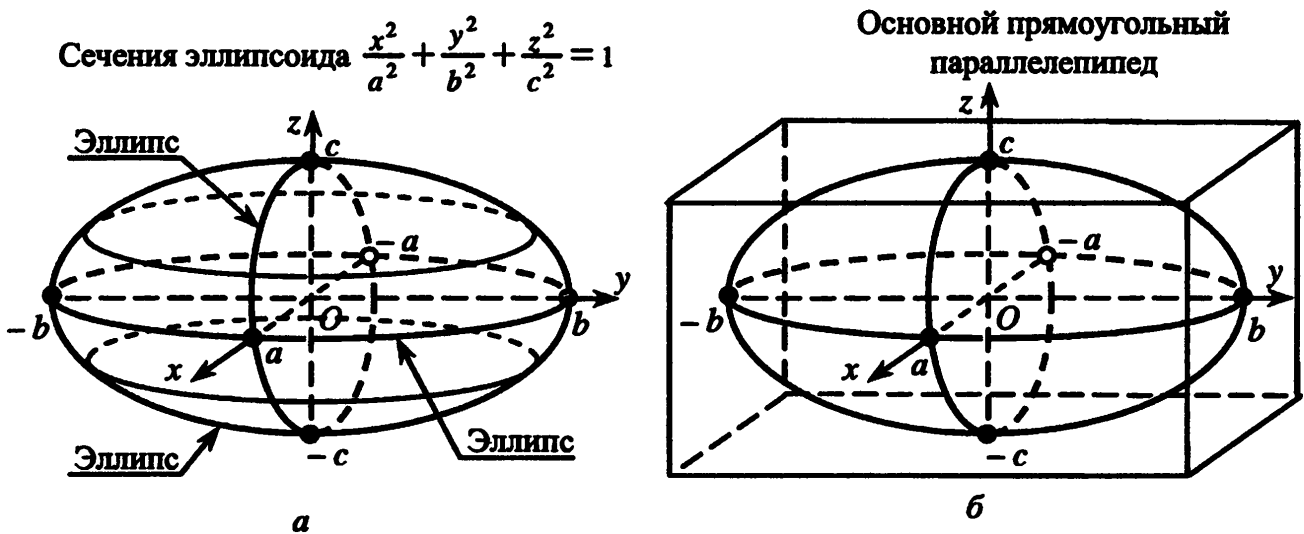


Рис.4.40

Плоские сечения дают возможность составить полное представление о виде эллипсоида (рис.4.40,а)

ЭЛЛИПСОИДЫ ВРАЩЕНИЯ

Эллипсоид, у которого две полуоси равны, называется *эллипсоидом вращения* (или *сфероидом*). Такой эллипсоид является поверхностью вращения (см. разд.4.1.1). Например, если $a = b$, то линии (4.47) при $|h| < c$ являются окружностями. Следовательно, сечения эллипсоида плоскостями $z = h$, $|h| < c$ представляют собой окружности с центрами на оси аппликат. Такую поверхность можно получить, вращая вокруг оси Oz эллипс $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, заданный в плоскости Oyz (рис.4.41,а).

Если $b = c$, то все сечения эллипсоида (4.46) плоскостями $x = h$ при $|h| < a$ будут окружностями с центрами на оси абсцисс. Такой эллипсоид можно получить, вращая вокруг оси Ox эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис.4.41,б).

Если все полуоси эллипсоида равны ($a = b = c = R$), то он представляет собой *сферу* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ радиуса R , которую можно получить, например, вращая окружность такого же радиуса вокруг любого диаметра.

Эллипсоид вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a = b$$

Эллипсоид вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad b = c$$

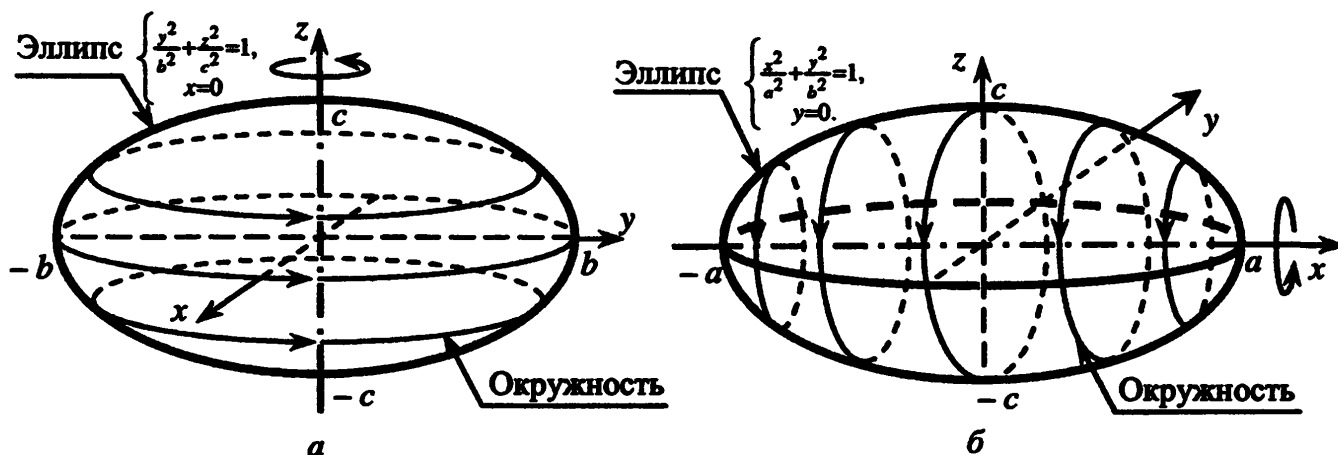


Рис.4.41

Эллипсоид, у которого полуоси попарно различны ($a > b > c$), называется *трехосным* (или *общим*).

Замечания 4.8.

1. Плоскости $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$ определяют в пространстве *основной прямоугольный параллелепипед*, внутри которого находится эллипсоид (см. рис.4.40,б). Грани параллелепипеда касаются эллипсоида в его вершинах.

2. Эллипсоид можно определить, как *геометрическое место точек, получаемое в результате трех сжатий (растяжений) сферы единичного радиуса к трем взаимно перпендикулярным плоскостям*.

3. Начало канонической системы координат является центром симметрии эллипсоида, координатные оси – осями симметрии эллипсоида, координатные плоскости – плоскостями симметрии эллипсоида.

В самом деле, если точка $M(x, y, z)$ принадлежит эллипсоиду, то точки с координатами $(\pm x, \pm y, \pm z)$ при любом выборе знаков также принадлежат эллипсоиду, поскольку их координаты удовлетворяют уравнению (4.46).

4.4.3. Гиперboloиды

Однополостным гиперboloидом называется поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxuz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.48)$$

Двуполостным гиперboloидом называется поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxuz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (4.49)$$

В уравнениях (4.48), (4.49) a, b, c – положительные параметры, характеризующие гиперboloиды, причем $a \geq b$.

Начало координат называют **центром** гиперboloида. Точки пересечения гиперboloида с координатными осями называются его **вершинами**. Это четыре точки $(\pm a, 0, 0), (0, \pm b, 0)$ однополостного гиперboloида (4.48) и две точки $(0, 0, \pm c)$ двуполостного гиперboloида (4.49). Три отрезка координатных осей, соединяющих вершины гиперboloидов, называются **осями** гиперboloидов. Оси гиперboloидов, принадлежащие координатным осям Ox, Oy , называются **поперечными осями** гиперboloидов, а ось, принадлежащая оси аппликат Oz , – **продольной осью** гиперboloидов. Числа a, b, c , равные половинам длин осей, называются **полуосями** гиперboloидов.

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

Подставляя $z = 0$ в уравнение (4.48), получаем уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ линии пересечения однополостного гиперboloида с координатной плоскостью Oxy . Это уравнение в плоскости Oxy определяет эллипс (см. разд.3.3.2), который называется **горловым**. Линии пересечения однополостного гиперboloида с другими координатными плоскостями являются гиперболами. Они называются **главными гиперболами**. Например, при $x = 0$ получаем главную гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, а при $y = 0$ – главную гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Рассмотрим теперь сечение однополостного гиперboloида плоскостями, параллельными плоскости Oxy . Подставляя $z = h$, где h – произвольная постоянная (параметр), в уравнение (4.48), получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

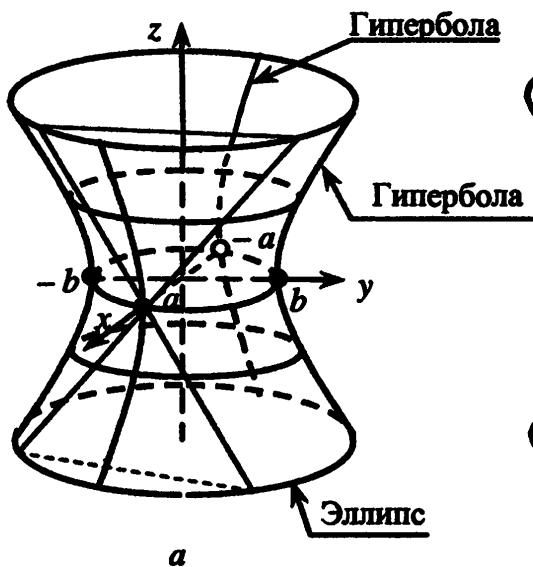
При любом значении параметра h уравнение определяет эллипс $\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1$ с полуосями $a' = a \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$, $b' = b \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$. Следовательно,

сечение однополостного гиперboloида плоскостью $z = h$ представляет собой эллипс, центр которого лежит на оси аппликат, а вершины – на главных гиперболах. Среди всех эллипсов, получающихся в сечениях плоскостями $z = h$ при различных значениях параметра h , горловой эллипс (при $h = 0$) является эллипсом с наименьшими полуосями.

Таким образом, однополостный гиперboloид можно представить как поверхность, образованную эллипсами, вершины которых лежат на главных гиперболах (рис.4.42,а)

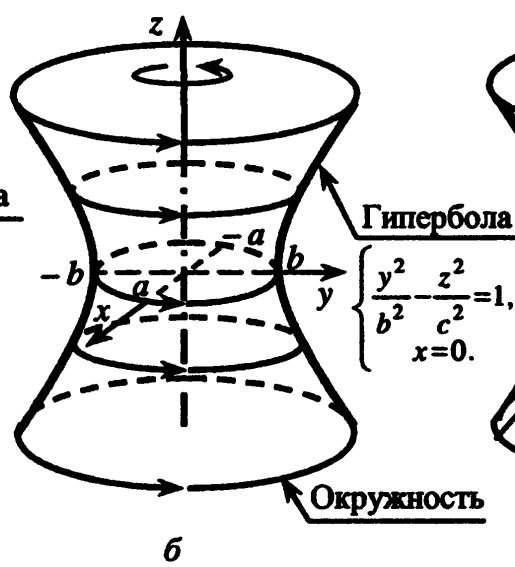
Сечения однополостного гиперboloида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Однополостный гиперboloид вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a = b$$



Прямолинейные образующие однополостного гиперboloида

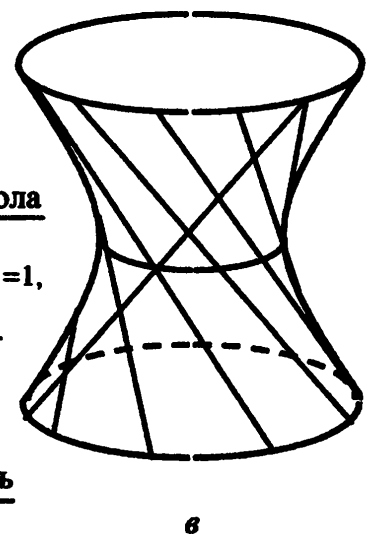


Рис.4.42

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ДВУПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

Сечения двуполостного гиперboloида координатными плоскостями Oyz и Oxz представляют собой гиперболы (*главные гиперболы*).

Рассмотрим теперь сечения двуполостного гиперboloида плоскостями, параллельными плоскости Oxy . Подставляя $z = h$, где h – произвольная постоянная (параметр), в уравнение (4.49), получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1.$$

При $|h| < c$ уравнение не имеет действительных решений (правая часть уравнения отрицательная, а левая неотрицательная), т.е. плоскость $z = h$ не пересекает двуполостный гиперболоид. При $h = \pm c$ уравнение имеет нулевое решение $x = y = 0$. Следовательно, плоскости $z = \pm c$ касаются двуполостного гиперболоида в его вершинах $(0, 0, \pm c)$. При $|h| > c$ получаем

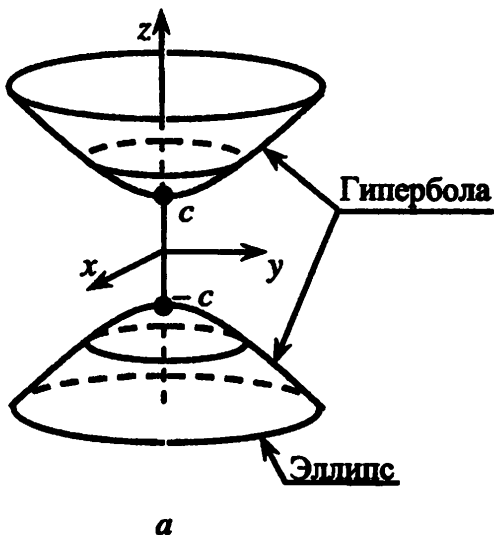
уравнение эллипса $\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1$ с полуосями $a' = a \cdot \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$,

$b' = b \cdot \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$. Следовательно, сечение двуполостного гиперболоида плоскостью $z = h$ при $|h| > c$ представляет собой эллипс с центром на оси аппликат, вершины которого лежат на главных гиперболах.

Таким образом, двуполостный гиперболоид можно представить как поверхность образованную эллипсами, вершины которых лежат на главных гиперболах (рис.4.43,а)

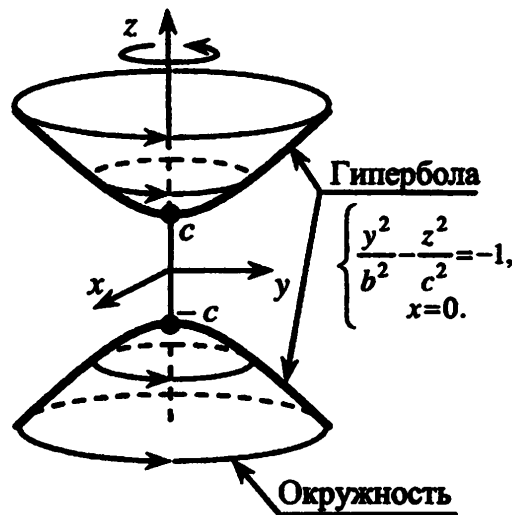
Сечения двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



Двуполостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a=b$$



Основной прямоугольный параллелепипед

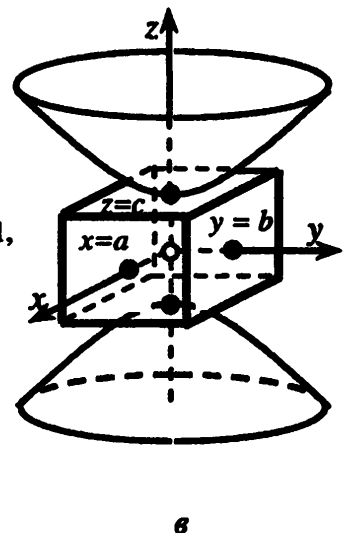


Рис.4.43

ГИПЕРБОЛОИДЫ ВРАЩЕНИЯ

Гиперболоид, у которого поперечные полуоси равны ($a = b$), называется *гиперболоидом вращения*. Такой гиперболоид является поверхностью вращения (см. разд.4.1.1), а его сечения плоскостями $z = h$ (для двуполостного гиперболоида при $|h| > c$) представляют собой окружности с центрами

на оси аппликат. Однополостный или двуполостный гиперboloиды можно получить, вращая вокруг оси Oz гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис.4.42,б) или сопряженную гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (рис.4.43,б) соответственно. Заметим, что уравнение последней можно записать в форме $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (см. разд.3.3.3)

Гиперboloид, у которого поперечные оси различны ($a \neq b$), называется *трехосным* (или *общим*).

З а м е ч а н и я 4.9.

1. Плоскости $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$ определяют в пространстве *основной прямоугольный параллелепипед*, вне которого находится двуполостный гиперboloид (рис.4.43,в). Две грани ($z = \pm c$) параллелепипеда касаются гиперboloида в его вершинах.

2. Сечение однополостного гиперboloида плоскостью, параллельной оси аппликат и имеющей одну общую точку с горловым эллипсом (т.е. касающейся его), представляет собой две прямые, пересекающиеся в точке касания. Например, подставляя $x = \pm a$ в уравнение (4.48), получаем уравнение $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ двух пересекающихся прямых (см. рис.4.42,а).

3. Однополостный гиперboloид является *линейчатой* поверхностью, т.е. поверхностью, образованной движением прямой (см. рис.4.42,в). Например, однополостный гиперboloид вращения можно получить, вращая прямую вокруг другой прямой, скрещивающейся с ней (но не перпендикулярной).

4. Начало канонической системы координат является центром симметрии гиперboloида, координатные оси – осями симметрии гиперboloида, координатные плоскости – плоскостями симметрии гиперboloида.

В самом деле, если точка $M(x, y, z)$ принадлежит гиперboloиду, то точки с координатами $(\pm x, \pm y, \pm z)$ при любом выборе знаков также принадлежат гиперboloиду, поскольку их координаты удовлетворяют уравнению (4.48) или (4.49) соответственно.

4.4.4. Конусы

Конусом называется поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (4.50)$$

где a, b, c – положительные параметры, характеризующие конус, причем $a \geq b$.

Начало координат называется *центром* конуса (рис.4.44,а).

Конус является конической фигурой (см. разд.4.1.1), поскольку вместе с любой своей точкой $M(x, y, z)$ уравнению (4.50) удовлетворяют также все точки $(t \cdot x, t \cdot y, t \cdot z)$ при $t \geq 0$ луча OM . Точка O является *вершиной* конуса (4.50), а любой луч OM , принадлежащий конусу, является его *образующей*.

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ КОНУСА

Сечения конуса координатными плоскостями Oxz , Oyz представляют собой пары пересекающихся прямых, удовлетворяющих в этих плоскостях уравнениям $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (при $y = 0$) или $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (при $x = 0$) соответственно.

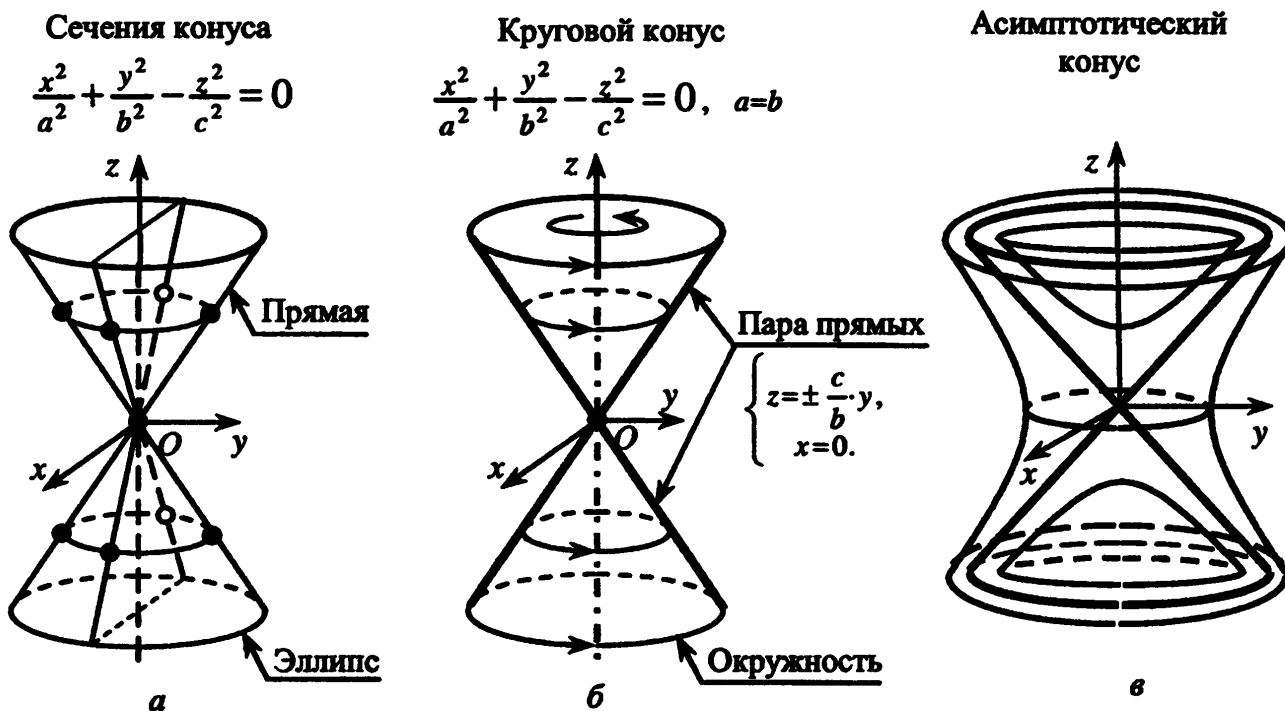


Рис.4.44

Рассмотрим теперь сечение конуса плоскостями, параллельными плоскости Oxy . Подставляя $z = h$, где h – произвольная постоянная (параметр), в уравнение (4.50), получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}.$$

При $h = 0$ этому уравнению удовлетворяет одна вещественная точка – начало координат. При любом отличном от нуля значении параметра h

уравнение определяет эллипс $\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1$ с полуосями $a' = \frac{a}{c} \cdot |h|$,

$b' = \frac{b}{c} \cdot |h|$. Следовательно, сечение конуса плоскостью $z = h$ представляет собой эллипс, центр которого лежит на оси аппликат, а вершины принадлежат координатным плоскостям Oxz и Oyz .

Таким образом, конус можно представить как поверхность, образованную эллипсами, центры которых лежат на оси аппликат, а вершины принадлежат координатным плоскостям Oxz и Oyz (см. рис.4.44,а).

КРУГОВОЙ КОНУС

При $a = b$ все сечения конуса плоскостями $z = h$ ($h \neq 0$) становятся окружностями. Такой конус является фигурой вращения и называется **прямым круговым конусом**. Он может быть получен в результате вращения, например, прямой $z = \frac{c}{b} \cdot y$ (**образующей**) вокруг оси аппликат (рис.4.44,б).

З а м е ч а н и я 4.10.

1. Конус является **линейчатой** поверхностью, поскольку может быть получен при помощи перемещения прямой [14].

2. Конус, образованный асимптотами гипербола, получающихся при пересечении гиперboloида плоскостями, проходящими через ось Oz , называется **асимптотическим конусом** этого гиперboloида. На рис.4.44,в изображен асимптотический конус для однополостного и двуполостного гиперboloидов.

3. Конус (4.50) может быть получен из прямого кругового конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (у которого $a = b = c = 1$) в результате двух сжатий (растяжений) к координатным плоскостям Oxz и Oyz .

4. Начало канонической системы координат является центром симметрии конуса, координатные оси – осями симметрии конуса, координатные плоскости – плоскостями симметрии конуса.

В самом деле, если точка $M(x, y, z)$ принадлежит конусу, то точки с координатами $(\pm x, \pm y, \pm z)$ при любом выборе знаков также принадлежат конусу, поскольку их координаты удовлетворяют уравнению (4.50).

5. Рассмотрим сечение прямого кругового конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ плоскостями, не проходящими через его вершину, например, плоскостями $z = k \cdot y + 1$, где k – произвольная постоянная (параметр) – угловой коэффициент прямой $z = k \cdot y + 1$ в плоскости Oyz . Заметим, что образующие рассматриваемого конуса в плоскости Oyz описываются уравнением $z = k \cdot y$

с угловым коэффициентом $k = \pm 1$. Подставляя $z = k \cdot y + 1$ в уравнение конуса, получаем

$$x^2 + y^2 - (k \cdot y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (1 - k^2) \cdot y^2 - 2 \cdot k \cdot y - 1 = 0.$$

Это уравнение проекции на координатную плоскость Oxy линии пересечения плоскости с конусом. Вычисляем инварианты (см. разд.3.3.5)

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - k^2 \end{vmatrix} = 1 - k^2; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - k^2 & -k \\ 0 & -k & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad \tau = 2 - k^2.$$

При $|k| < 1$ имеем $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$, $\tau \cdot \Delta = k^2 - 2 < 0$. По таблице 3.2 определяем, что рассматриваемое сечение, которое пересекает все образующие пря-

Конические сечения

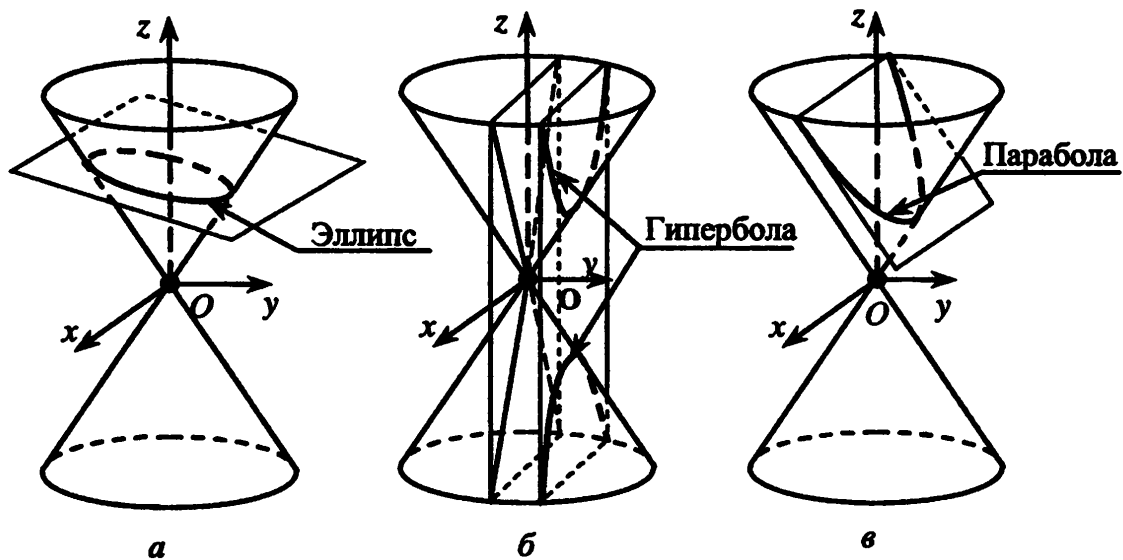


Рис.4.45

мого кругового конуса, является эллипсом. При $|k| > 1$ имеем $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$.

По таблице 3.2 определяем, что рассматриваемое сечение, которое параллельно двум образующим кругового конуса, является гиперболой. При

$k = \pm 1$ имеем $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$. По таблице 3.2 определяем, что рассматриваемое сечение, которое параллельно одной образующей кругового конуса, является параболой. Поскольку при аффинных преобразованиях тип линий не изменяется, такой же вывод можно сделать для произвольного конуса (4.50):

– сечение конуса плоскостью, пересекающей все его образующие, является эллипсом (рис.4.45,а);

– сечение конуса плоскостью, параллельной двум его образующим, является гиперболой (рис.4.45,б);

– сечение конуса плоскостью, параллельной одной его образующей, является параболой (рис.4.45,в).

6. Конические сечения могут быть взяты в качестве эквивалентных определений эллипса, гиперболы, параболы.

4.4.5. Параболоиды

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z. \quad (4.51)$$

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z. \quad (4.52)$$

В уравнениях (4.51), (4.52) a и b – положительные параметры, характеризующие параболоиды, причем для эллиптического параболоида $a \geq b$.

Начало координат называют **вершиной** каждого из параболоидов ((4.50) или (4.51)).

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

Плоскость Oxz пересекает эллиптический параболоид (4.51) по линии, имеющей в этой плоскости уравнение $\frac{x^2}{a^2} = 2 \cdot z$, которое равносильно уравнению $x^2 = 2 \cdot p \cdot z$ параболы с фокальным параметром $p = a^2$. Сечение параболоида плоскостью Oyz получаем, подставляя $x = 0$ в уравнение (4.51): $\frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z$. Это уравнение равносильно уравнению $y^2 = 2 \cdot q \cdot z$ параболы с фокальным параметром $q = b^2$. Эти сечения называются **главными параболоидами** эллиптического параболоида (4.51).

Рассмотрим теперь сечение эллиптического параболоида плоскостями, параллельными плоскости Oxy . Подставляя $z = h$, где h – произвольная постоянная (параметр), в уравнение (4.51), получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot h.$$

При $h < 0$ уравнение не имеет действительных решений, т.е. плоскость $z = h$ при $h < 0$ не пересекает параболоид (4.51). При $h = 0$ уравнению (4.51) удовлетворяет одна вещественная точка O – вершина параболоида.

При $h > 0$ уравнение определяет эллипс $\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1$ с полуосями

$a' = a \cdot \sqrt{2 \cdot h}$, $b' = b \cdot \sqrt{2 \cdot h}$. Следовательно, сечение эллиптического параболоида плоскостью $z = h$ (при $h > 0$) представляет собой эллипс, центр которого лежит на оси аппликат, а вершины – на главных параболах.

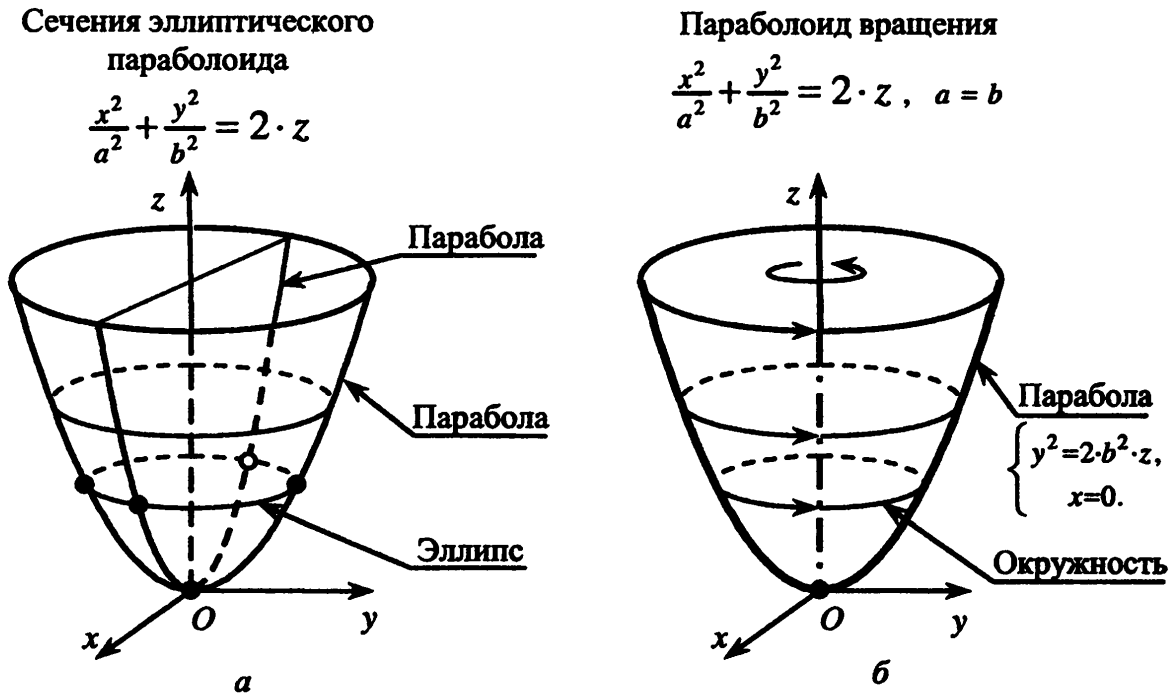


Рис.4.46

Таким образом, эллиптический параболоид можно представить как поверхность, образованную эллипсами, вершины которых лежат на главных параболах (рис.4.46,а).

ПАРАБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ

Эллиптический параболоид, у которого $a = b$, называется *параболоидом вращения*. Такой параболоид является поверхностью вращения (см. разд.4.1.1). Сечения параболоида вращения плоскостями $z = h$ (при $h > 0$), представляют собой окружности с центрами на оси аппликат (рис.4.46,б). Его можно получить, вращая вокруг оси Oz параболу $y^2 = 2 \cdot q \cdot z$, где $q = a^2 = b^2$.

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

Сечения гиперболического параболоида координатными плоскостями Oxz и Oyz представляют собой параболы (*главные параболы*) $x^2 = 2 \cdot p \cdot z$ или $y^2 = -2 \cdot q \cdot z$ с параметрами $p = a^2$ или $q = b^2$ соответственно. Поскольку оси симметрии главных парабол направлены в противоположные стороны, гиперболический параболоид называют *седловой поверхностью*.

Рассмотрим теперь сечения гиперболического параболоида плоскостями, параллельными плоскости Oxy . Подставляя $z = h$, где h – произвольная постоянная (параметр), в уравнение (4.52), получаем

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot h.$$

При $h > 0$ уравнение равносильно уравнению гиперболы $\frac{x^2}{(a')^2} - \frac{y^2}{(b')^2} = 1$ с

полуосями $a' = a \cdot \sqrt{2 \cdot h}$, $b' = b \cdot \sqrt{2 \cdot h}$, т.е. сечение гиперболического параболоида плоскостью $z = h$ при $h > 0$ представляет собой гиперболу с центром на оси аппликат, вершины которой лежат на главной параболе $x^2 = 2 \cdot p \cdot z$. При $h < 0$ получаем уравнение сопряженной гиперболы

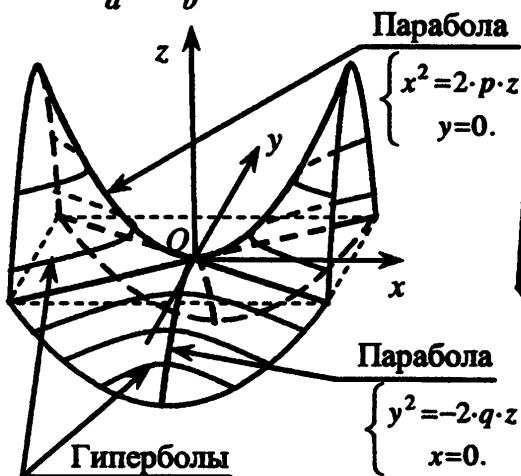
$$-\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1 \quad \text{с полуосями} \quad a' = a \cdot \sqrt{-2 \cdot h}, \quad b' = b \cdot \sqrt{-2 \cdot h} \quad (\text{см.}$$

разд.3.3.3), т.е. сечение гиперболического параболоида плоскостью $z = h$ при $h < 0$ представляет собой сопряженную гиперболу с центром на оси аппликат, вершины которой лежат на главной параболе $y^2 = -2 \cdot q \cdot z$. При

$h = 0$ получаем уравнение пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, т.е. сечение гиперболического параболоида плоскостью $z = 0$ представляет собой пару пересекающихся в начале координат прямых.

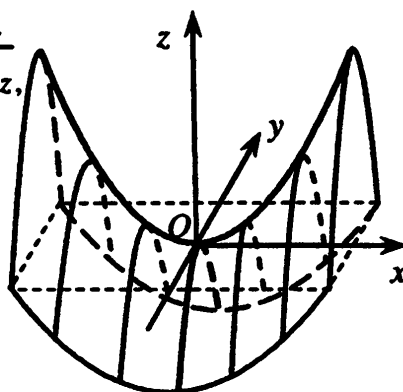
Сечения гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z$$



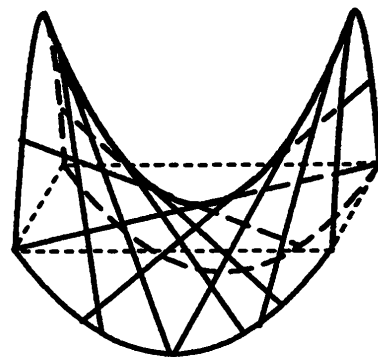
а

Параболические образующие гиперболического параболоида



б

Прямолинейные образующие гиперболического параболоида



в

Рис.4.47

Таким образом, гиперболический параболоид можно представить как поверхность, образованную гиперболами (включая и "крест" из их асимптот), вершины которых лежат на главных параболах (рис.4.47,а).

Сечение параболоида плоскостью $x = h$, где h – произвольная постоянная, представляет собой параболу

$$\frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z \Leftrightarrow y^2 = -2 \cdot q \cdot \left(z - \frac{h^2}{2 \cdot a^2} \right),$$

равную главной параболе $y^2 = -2 \cdot q \cdot z$ с параметром $q = b^2$, вершина которой лежит на другой главной параболе $x^2 = 2 \cdot p \cdot z$ с параметром $p = a^2$. Поэтому гиперболический параболоид можно представить как поверхность, получающуюся при перемещении одной главной параболы так, чтобы ее вершина "скользила" по другой главной параболе (рис.4.47,б).

З а м е ч а н и я 4.11.

1. Гиперболический параболоид является *линейчатой* поверхностью [14], т.е. поверхностью, образованной движением прямой (рис.4.47,в).

2. Ось аппликат канонической системы координат является осью симметрии параболоида, а координатные плоскости Oyz , Oxz – плоскостями симметрии параболоида.

В самом деле, если точка $M(x, y, z)$ принадлежит параболоиду (эллиптическому или гиперболическому), то точки с координатами $(\pm x, \pm y, z)$ при любом выборе знаков также принадлежат параболоиду, поскольку их координаты удовлетворяют уравнению (4.51) или (4.52) соответственно. Поэтому параболоид симметричен относительно координатных плоскостей Oyz , Oxz и координатной оси Oz .

4.4.6. Классификация поверхностей второго порядка по инвариантам

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим преобразование квадратичной функции трех переменных

$$p(x) = a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + a_{33} \cdot x_3^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + 2 \cdot a_1 \cdot x_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x_2 + 2 \cdot a_3 \cdot x_3 + a_0 \quad (4.53)$$

при линейной невырожденной замене переменных:

$$\begin{cases} x_1 = s_1 + s_{11} \cdot x'_1 + s_{12} \cdot x'_2 + s_{13} \cdot x'_3, \\ x_2 = s_2 + s_{21} \cdot x'_1 + s_{22} \cdot x'_2 + s_{23} \cdot x'_3, \\ x_3 = s_3 + s_{31} \cdot x'_1 + s_{32} \cdot x'_2 + s_{33} \cdot x'_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad x = s + S \cdot x', \quad (4.54)$$

где $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$ – невырожденная матрица ($\det S \neq 0$). На-

помним, что замена переменных (4.54) называется **аффинной**, а если матрица S ортогональная ($S^T = S^{-1}$) – **ортогональной**.

При любой аффинной замене переменных квадратичной функции $p(x)$ получаем снова квадратичную функцию $p'(x')$ (см. п.1 замечаний 4.1):

$$p'(x') = a'_{11} \cdot (x'_1)^2 + a'_{22} \cdot (x'_2)^2 + a'_{33} \cdot (x'_3)^2 + 2 \cdot a'_{12} \cdot x'_1 \cdot x'_2 + 2 \cdot a'_{13} \cdot x'_1 \cdot x'_3 + 2 \cdot a'_{23} \cdot x'_2 \cdot x'_3 + 2 \cdot a'_1 \cdot x'_1 + 2 \cdot a'_2 \cdot x'_2 + 2 \cdot a'_3 \cdot x'_3 + a'_0. \quad (4.55)$$

Выделим в функциях $p(x)$ и $p'(x')$ квадратичные и линейные формы (см. п.5,6 замечаний 4.1):

$$p(x) = x^T \cdot A \cdot x + 2 \cdot a^T \cdot x + a_0,$$

$$p'(x') = (x')^T \cdot A' \cdot x' + 2 \cdot (a')^T \cdot x' + a'_0,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}$ – матрицы квадратичных

форм; $a = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T$, $a' = (a'_1 \ a'_2 \ a'_3)^T$ – столбцы коэффициентов линейных форм функций (4.53), (4.55).

Аналогично случаю двух переменных (см. разд.3.3.5) получаем формулы, связывающие коэффициенты функций (4.53), (4.55):

$$A' = S^T \cdot A \cdot S; \quad a' = S^T \cdot (a + A \cdot s); \quad a'_0 = s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0. \quad (4.56)$$

Квадратичные функции (4.53), (4.55) можно представить в матричном виде

$$p(x) = \hat{x}^T \cdot P \cdot \hat{x}, \quad p'(x') = (\hat{x}')^T \cdot P' \cdot \hat{x}',$$

где $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_1 \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} & a'_2 \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_0 \end{pmatrix}$ – матрицы квадратичных

функций, $\hat{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ 1)^T$, $\hat{x}' = (x'_1 \ x'_2 \ x'_3 \ 1)^T$ – расширенные (дополненные единицей) столбцы переменных. Замену переменных (4.54) можно записать для расширенных столбцов

$$\hat{x} = T \cdot \hat{x}',$$

где $T = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_1 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_2 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — невырожденная матрица, поскольку

$$\det T = \det S \neq 0.$$

Выполняя такую замену, получаем

$$P' = T^T \cdot P \cdot T. \quad (4.57)$$

Итак, формулы (4.56) и (4.57) выражают преобразования квадратичных функций трех переменных при линейной невырожденной замене (4.54).

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Выражения, составленные из коэффициентов квадратичной функции, которые не изменяются при линейной невырожденной замене переменных (4.54), называются *инвариантами относительно аффинной замены переменных*, или, короче, *аффинными инвариантами* квадратичной функции. Например, знак определителя $\det A$ матрицы квадратичной формы функции (4.53) не изменяется при замене (4.54), так как, согласно (4.56):

$$\det A' = \det(S^T \cdot A \cdot S) = \det S^T \cdot \det A \cdot \det S = (\det S)^2 \cdot \det A.$$

Аналогично, учитывая (4.57), получаем, что $\det P' = (\det T)^2 \cdot \det P$, т.е. знаки определителей $\det P'$ и $\det P$ совпадают при любой линейной невырожденной замене переменных.

Выражения, составленные из коэффициентов квадратичной функции, которые не изменяются при линейной невырожденной замене переменных (4.54) с ортогональной матрицей S ($S^T = S^{-1}$), называются *инвариантами относительно ортогональной замены переменных*, или, короче, *ортогональными инвариантами* квадратичной функции. Эти алгебраические выражения являются важнейшими геометрическими характеристиками поверхности второго порядка и могут быть использованы как для их классификации, так и для построения, поскольку преобразование прямоугольной системы координат соответствует ортогональной замене переменных. Далее, если не оговорено противное, будем рассматривать преобразования квадратичных функций при ортогональных заменах переменных.

Для функции (4.53) введем обозначения

$$\tau_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad \tau_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \det P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix},$$

где τ_1 – след матрицы A (сумма диагональных элементов матрицы A), а τ_2 – сумма главных миноров второго порядка матрицы A , δ – определитель матрицы A квадратичной формы, Δ – определитель матрицы P квадратичной функции. Обозначим через τ'_1 , τ'_2 , $\delta' = \det A'$, $\Delta' = \det P'$ аналогичные выражения для функции (4.55).

Теорема 4.4 (об ортогональных инвариантах). При любой ортогональной замене переменных (4.54) квадратичной функции (4.53) выражения τ_1 , τ_2 , δ , Δ не изменяются: $\tau'_1 = \tau_1$, $\tau'_2 = \tau_2$, $\delta' = \delta$, $\Delta' = \Delta$.

В самом деле, согласно формуле (4.56), при замене переменных (4.54) с ортогональной матрицей S ($S^T = S^{-1}$) не изменяется определитель квадратичной формы:

$$\det A' = \det(S^T \cdot A \cdot S) = \det S^T \cdot \det S \cdot \det A = (\det S)^2 \cdot \det A = \det A,$$

так как $(\det S)^2 = \det S^T \cdot \det S = \det S^{-1} \cdot \det S = \det(S^{-1} \cdot S) = \det E = 1$.

Аналогично из (4.57) получаем $\det P' = (\det T)^2 \cdot \det P = \det P$, поскольку $\det T = \det S$ (в этом можно убедиться, раскладывая определитель матрицы T по последней строке) и $(\det S)^2 = 1$.

Таким образом, определители матриц квадратичных форм не изменяются при ортогональной замене переменных:

$$\det A' = \det A, \quad \det P' = \det P.$$

Эти равенства $\delta' = \delta$, $\Delta' = \Delta$ устанавливают ортогональную инвариантность выражений δ и Δ .

Рассмотрим теперь квадратичную функцию

$$p_\lambda(x) = a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + a_{33} \cdot x_3^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + 2 \cdot a_1 \cdot x_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x_2 + 2 \cdot a_3 \cdot x_3 + a_0 - \lambda \cdot x_1^2 - \lambda \cdot x_2^2 - \lambda \cdot x_3^2,$$

где λ – некоторая постоянная (параметр). Матрица квадратичной формы этой квадратичной функции имеет вид

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix}.$$

При ортогональной замене переменных (4.54) матрица квадратичной формы преобразуется по закону (4.56):

$$S^T \cdot (A - \lambda \cdot E) \cdot S = S^T \cdot A \cdot S - \lambda \cdot S^T \cdot S = A' - \lambda \cdot S^T \cdot S = A' - \lambda \cdot E,$$

а ее определитель не изменяется, т.е.

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \det(A' - \lambda \cdot E).$$

Напомним, что определитель $\det(A - \lambda \cdot E)$ представляет собой многочлен переменной λ , который называется *характеристическим многочленом матрицы A*:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \tau_1 \cdot \lambda^2 - \tau_2 \cdot \lambda + \delta,$$

где $\delta = \det A$, $\tau_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ – след матрицы A (сумма диагональных

элементов матрицы A), а $\tau_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ – сумма

главных миноров второго порядка матрицы A . Из ортогональной инвариантности характеристического многочлена, т.е. из равенства $\det(A - \lambda \cdot E) = \det(A' - \lambda \cdot E)$, следуют равенства соответствующих коэффициентов:

$$\tau'_1 = \tau_1, \quad \tau'_2 = \tau_2,$$

что означает ортогональную инвариантность выражений τ_1 и τ_2 .

Замечания 4.12.

1. При любой однородной ($s = 0$) ортогональной замене переменных (4.54) квадратичной функции (4.53) выражения

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix},$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix},$$

не изменяются: $K_1 = K'_1$, $K_2 = K'_2$.

Выражения K_1 , K_2 называются *ортогональными семиинвариантами (полуинвариантами)* квадратичной функции (см. п.1 замечаний 3.12). Для доказательства [14] нужно рассмотреть характеристический многочлен матрицы P квадратичной функции.

2. Если у квадратичной функции (4.53) $\delta = \Delta = 0$, то при любой ортогональной замене ее переменных (4.54) выражение K_2 не изменяется:

$K_2 = K'_2$, другими словами, выражение K_2 является ортогональным инвариантом для квадратичной функции при $\delta = \Delta = 0$.

3. Если у квадратичной функции (4.53) $\delta = \Delta = 0$ и $\tau_1 = \tau_2 = 0$, то при любой ортогональной замене ее переменных (4.54) выражение K_1 не изме-

няется: $\kappa_1 = \kappa_1'$, другими словами, выражение κ_1 является ортогональным инвариантом для квадратичной функции при $\delta = \Delta = 0$ и $\tau_1 = \tau_2 = 0$.

Доказательство утверждений п.2,3 (теоремы Моденова П.С.) приведено в [14].

4. Из доказательства теоремы 4.4 следует, что *характеристический многочлен матрицы квадратичной формы является ортогональным инвариантом.*

5. *Корни характеристического многочлена матрицы квадратичной формы являются ортогональными инвариантами.*

Это следует из ортогональной инвариантности характеристического многочлена.

6. Из доказательства теоремы 4.3 следует (см. п.4 замечаний 4.7), что существует такая ортогональная замена переменных $x = S \cdot x'$ ($S^T = S^{-1}$) функции (4.53), при которой у функции (4.55) будут отсутствовать произведения переменных:

$$p'(x'_1, x'_2, x'_3) = \lambda_1 \cdot (x'_1)^2 + \lambda_2 \cdot (x'_2)^2 + \lambda_3 \cdot (x'_3)^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x'_1 + 2 \cdot a'_2 \cdot x'_2 + 2 \cdot a'_3 \cdot x'_3 + a_0,$$

т.е. матрица A' квадратичной формы функции (4.55) будет диагональной:

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Записывая характеристический многочлен этой матрицы, получаем

$$\det(\Lambda - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot (\lambda_3 - \lambda),$$

т.е. числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ являются его корнями. Из инвариантности характеристических многочленов $\det(A - \lambda \cdot E) = \det(\Lambda - \lambda \cdot E)$ следует, что

$$\begin{aligned} -\lambda^3 + \tau_1 \cdot \lambda^2 - \tau_2 \cdot \lambda + \delta &= (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot (\lambda_3 - \lambda) = \\ &= -\lambda^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot \lambda^2 - (\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_1 \cdot \lambda_3) \cdot \lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\tau_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \tau_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_1 \cdot \lambda_3, \quad \delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3.$$

7. *Корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения*

$$\lambda^3 - \tau_1 \cdot \lambda^2 + \tau_2 \cdot \lambda - \delta = 0$$

действительные.

В самом деле, диагональная матрица $\Lambda = S^{-1} \cdot A \cdot S$ действительная, так как матрицы A и S действительные.

8. Корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения имеют одинаковые знаки (все положительные или все отрицательные) тогда и только тогда, когда $\tau_2 > 0$ и $\tau_1 \cdot \delta > 0$.

Необходимость условий легко проверяется по теореме Виета для кубического уравнения (см. п.б):

$$\tau_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_1 > 0, \quad \tau_1 \cdot \delta = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0,$$

если все числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ положительные, либо все отрицательные. Докажем достаточность. Покажем, что при условиях $\tau_2 > 0$ и $\tau_1 \cdot \delta > 0$ выполняется неравенство $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, т.е. числа λ_1 и λ_2 имеют одинаковые знаки. В самом деле, так как $\tau_2 > 0$, то

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \frac{\tau_1 \cdot \delta}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot \lambda_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3^2 = \tau_2 + \lambda_3^2 > 0.$$

Величины $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ и $\frac{\tau_1 \cdot \delta}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}$ имеют одинаковые знаки (в силу неравенства $\tau_1 \cdot \delta > 0$) и их сумма положительна, поэтому они положительные, т.е. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Аналогично показывается, что и $\lambda_1 \cdot \lambda_3 > 0$. Следовательно, все числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одного знака.

9. При умножении квадратичной функции (4.53) на отличный от нуля множитель μ собственные значения матрицы A умножаются также на μ , а инварианты и семиинварианты (см. п.1) умножаются на μ, μ^2, μ^3 или μ^4 , согласно свойству определителей: $\mu \cdot \tau_1, \mu^2 \cdot \tau_2, \mu^3 \cdot \delta, \mu^4 \cdot \Delta, \mu^2 \cdot \kappa_1, \mu^3 \cdot \kappa_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДА КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ПОМОЩИ ИНВАРИАНТОВ

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ поверхность второго порядка описывается уравнением

$$p(x, y, z) = 0, \tag{4.58}$$

где $p(x, y, z)$ – квадратичная функция:

$$p(x, y, z) = a_{11} \cdot x^2 + a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \cdot z^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + 2 \cdot a_{13} \cdot x \cdot z + 2 \cdot a_{23} \cdot y \cdot z + 2 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot y + 2 \cdot a_3 \cdot z + a_0. \tag{4.59}$$

Согласно теореме 4.3, в любой другой прямоугольной системе координат $O'x'y'z'$ уравнение этой же поверхности имеет вид

$$\tilde{p}(x', y', z') = 0, \quad (4.60)$$

где квадратичная функция

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x', y', z') = \mu \cdot (& a'_{11} \cdot (x')^2 + a'_{22} \cdot (y')^2 + a'_{33} \cdot (z')^2 + 2 \cdot a'_{12} \cdot x' \cdot y' + \\ & + 2 \cdot a'_{13} \cdot x' \cdot z' + 2 \cdot a'_{23} \cdot y' \cdot z' + 2 \cdot a'_1 \cdot x' + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + 2 \cdot a'_3 \cdot z' + a'_0) \end{aligned} \quad (4.61)$$

получена из квадратичной функции $p(x, y, z)$ в результате умножения на отличный от нуля множитель μ и ортогональной замены переменных:

$$\begin{cases} x = x_0 + s_{11} \cdot x' + s_{12} \cdot y' + s_{13} \cdot z', \\ y = y_0 + s_{21} \cdot x' + s_{22} \cdot y' + s_{23} \cdot z', \\ z = z_0 + s_{31} \cdot x' + s_{32} \cdot y' + s_{33} \cdot z', \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s + S \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Здесь $s = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ – координатный столбец вектора $\bar{s} = \overline{OO'}$ переноса начала

координат, $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица ($S^T = S^{-1}$) перехо-

да от базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ системы координат $Oxyz$ к базису системы координат $O'x'y'z'$. Собственные значения матриц квадратичных форм, инварианты и семиинварианты квадратичных функций $p(x, y, z)$, $\tilde{p}(x', y', z')$ обозначим соответственно

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \tau_1, \tau_2, \delta, \Delta, \kappa_1, \kappa_2; \quad \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{\delta}, \tilde{\Delta}, \tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_2.$$

По теореме 4.3 и п.9 замечаний 4.12 эти выражения связаны формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= \mu \cdot \lambda_1; \quad \tilde{\lambda}_2 = \mu \cdot \lambda_2; \quad \tilde{\lambda}_3 = \mu \cdot \lambda_3; \quad \tilde{\tau}_1 = \mu \cdot \tau_1; \quad \tilde{\tau}_2 = \mu^2 \cdot \tau_2; \\ \tilde{\delta} &= \mu^3 \cdot \delta; \quad \tilde{\Delta} = \mu^4 \cdot \Delta; \quad \tilde{\kappa}_1 = \mu^2 \cdot \kappa_1; \quad \tilde{\kappa}_2 = \mu^3 \cdot \kappa_2. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Используя эти связи, выясним признаки видов канонических уравнений, а также выразим коэффициенты канонических уравнений. Предполагаем, что система координат $O'x'y'z'$ каноническая, т.е. уравнение $\tilde{p}(x', y', z') = 0$ имеет один из семнадцати канонических видов, указанных в теореме 4.3. В этом случае матрица \tilde{A} квадратичной формы функции $\tilde{p}(x', y', z')$ имеет диагональный вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_3 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты при квадратах неизвестных в канонических уравнениях (1)–(17) равны собственным значениям $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ этой матрицы (или, что то же самое, корням характеристического уравнения). В зависимости от знаков чисел $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ уравнения (1)–(17) разбиваются на три группы:

– корни $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2}, \tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{b^2}, \tilde{\lambda}_3 = \frac{1}{c^2}$ отличны от нуля ($\tilde{\delta} = \tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 \cdot \tilde{\lambda}_3 \neq 0$) и имеют одинаковые знаки (*эллиптический* тип): уравнения эллипсоида, мнимого эллипсоида, мнимого конуса;

– корни $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2}, \tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{b^2}, \tilde{\lambda}_3 = -\frac{1}{c^2}$ отличны от нуля ($\tilde{\delta} = \tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 \cdot \tilde{\lambda}_3 \neq 0$) и имеют разные знаки (*гиперболический* тип): уравнения однополостного или двуполостного гиперболоидов, конуса;

– хотя бы один из корней $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ равен нулю ($\tilde{\lambda}_3 = 0, \tilde{\delta} = \tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 \cdot \tilde{\lambda}_3 = 0$) (*параболический* тип): уравнения эллиптического или гиперболического параболоидов, а также цилиндры и пары плоскостей.

Тип уравнения (4.58) не изменяется в ходе приведения его к каноническому виду (4.60), так как, согласно п.9 замечаний 4.12, корни характеристических уравнений связаны формулами $\tilde{\lambda}_1 = \mu \cdot \lambda_1, \tilde{\lambda}_2 = \mu \cdot \lambda_2, \tilde{\lambda}_3 = \mu \cdot \lambda_3$, т.е. отличаются только множителем $\mu \neq 0$. Поэтому, если $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ имеют одинаковые знаки (что равносильно условиям $\tilde{\tau}_2 > 0$ и $\tilde{\tau}_1 \cdot \tilde{\delta} > 0$ (см. п.8 замечаний 4.12)), то и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ имеют одинаковые знаки (что равносильно условиям $\tau_2 > 0$ и $\tau_1 \cdot \delta > 0$). Если $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ имеют разные знаки (что равносильно условиям $\tilde{\tau}_2 \leq 0$ или $\tilde{\tau}_1 \cdot \tilde{\delta} \leq 0$), то и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ имеют разные знаки (что равносильно условиям $\tau_2 \leq 0$ или $\tau_1 \cdot \delta \leq 0$). При этом выражения $\tilde{\tau}_2$ и τ_2 , а также $\tilde{\tau}_1 \cdot \tilde{\delta}$ и $\tau_1 \cdot \delta$ имеют одинаковые знаки, что следует из (4.63).

Для уравнений эллиптического типа ($\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2} > 0, \tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{b^2} > 0, \tilde{\lambda}_3 = \frac{1}{c^2} > 0, \tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 \cdot \tilde{\lambda}_3 > 0$):

$$(1) \text{ эллипсоида } \tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 + \tilde{\lambda}_3 \cdot (z')^2 - 1 = 0;$$

$$(2) \text{ мнимого эллипсоида } \tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 + \tilde{\lambda}_3 \cdot (z')^2 + 1 = 0;$$

$$(3) \text{ мнимого конуса } \tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 + \tilde{\lambda}_3 \cdot (z')^2 = 0,$$

определитель $\tilde{\Delta}$ матрицы \tilde{P} квадратичной функции $\tilde{p}(x', y', z')$ имеет один из следующих видов:

$$\tilde{\Delta} = \left| \begin{array}{ccc|c} \tilde{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right|, \quad \tilde{\Delta} = \left| \begin{array}{ccc|c} \tilde{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|, \quad \tilde{\Delta} = \left| \begin{array}{ccc|c} \tilde{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|, \quad (4.64)$$

т.е. для уравнений эллипсоида $\tilde{\Delta} < 0$, мнимого эллипсоида $\tilde{\Delta} > 0$ и мнимого конуса – $\tilde{\Delta} = 0$.

Для уравнений гиперболического типа ($\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2} > 0$, $\tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{b^2} > 0$, $\tilde{\lambda}_3 = -\frac{1}{c^2} < 0$, $\tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 \cdot \tilde{\lambda}_3 < 0$):

(4) однополостного гиперболоида $\tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 + \tilde{\lambda}_3 \cdot (z')^2 - 1 = 0$;

(5) двуполостного гиперболоида $\tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 + \tilde{\lambda}_3 \cdot (z')^2 + 1 = 0$;

(6) конуса $\tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 + \tilde{\lambda}_3 \cdot (z')^2 = 0$,

определитель $\tilde{\Delta}$ матрицы \tilde{P} квадратичной функции $\tilde{p}(x', y', z')$ имеет один из указанных в (4.64) видов, т.е. для однополостного гиперболоида $\tilde{\Delta} > 0$, двуполостного гиперболоида $\tilde{\Delta} < 0$, конуса – $\tilde{\Delta} = 0$.

Для уравнений параболоидов ($\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2} > 0$, $\tilde{\lambda}_3 = 0$, $\tilde{\delta} = \tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 \cdot \tilde{\lambda}_3 = 0$):

(7) эллиптического параболоида $\tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 - 2 \cdot z' = 0$, $\tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{b^2} > 0$;

(8) гиперболического параболоида $\tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 - 2 \cdot z' = 0$, $\tilde{\lambda}_2 = -\frac{1}{b^2} < 0$,

определитель $\tilde{\Delta}$ матрицы \tilde{P} квадратичной функции $\tilde{p}(x', y', z')$ имеет вид:

$$\tilde{\Delta} = \left| \begin{array}{ccc|c} \tilde{\lambda}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right| \neq 0, \quad (4.65)$$

т.е. для уравнений эллиптического параболоида $\tilde{\Delta} < 0$, гиперболического параболоида $\tilde{\Delta} > 0$.

Из формул (4.63) следует, что выражения $\tilde{\Delta}$ и Δ имеют одинаковые знаки, поскольку $\tilde{\Delta} = \mu^4 \cdot \Delta$. Поэтому для перечисленных выше уравнений в условиях $\tilde{\Delta} < 0$, $\tilde{\Delta} > 0$, $\tilde{\Delta} = 0$ определитель $\tilde{\Delta}$ можно заменить на Δ . Следовательно, признаками вида для уравнений эллиптического или гиперболического типа служат неравенства $\Delta < 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, а для уравнений параболоидов – неравенства $\Delta < 0$, $\Delta > 0$.

В остальных случаях при $\tilde{\delta} = \tilde{\Delta} = 0$ определение вида поверхности производится аналогично определению вида линии второго порядка (см. разд.3.3.5), так как в канонических уравнениях цилиндрических поверхно-

стей отсутствует неизвестная z . При $a_{13} = a_{23} = a_{33} = a_3 = 0$ имеют место равенства

$$\tau_1 = \tau, \quad \tau_2 = \delta, \quad \kappa_1 = \kappa, \quad \kappa_2 = \Delta,$$

где $\tau_1, \tau_2, \kappa_1, \kappa_2$ – инварианты цилиндрической поверхности, а $\tau, \delta, \kappa, \Delta$ – инварианты линии второго порядка.

Таким образом, классификацию поверхностей второго порядка можно записать, используя инварианты квадратичной функции (см. таблицу 4.3).

Пример 4.19. По ортогональным инвариантам определить виды алгебраических поверхностей второго порядка, заданных в примере 4.18:

а) $x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + 2 \cdot z + 1 = 0$;

б) $x^2 + 6 \cdot y - 8 \cdot z + 10 = 0$;

в) $3 \cdot x^2 - 7 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2 + 8 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x \cdot z - 8 \cdot y \cdot z + 10 \cdot x - 14 \cdot y - 6 \cdot z - 8 = 0$.

□ а) Собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ матрицы A квадратичной формы найдены при решении примера 4.18, "а". Согласно п.5 замечаний 4.12:

$$\tau_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2, \quad \tau_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 = 1, \quad \delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0.$$

Так как хотя бы один из корней равен нулю, то тип поверхности – параболический. Вычисляем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Следовательно (см. таблицу 4.3), заданная поверхность является эллиптическим параболоидом (параболоидом вращения).

б) Собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ матрицы A квадратичной формы найдены при решении примера 4.18, "б". Согласно п.5 замечаний 4.12:

$$\tau_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad \tau_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 = 0, \quad \delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0.$$

Следовательно, тип поверхности – параболический. Вычисляем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\kappa_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 10 \end{vmatrix} = -9 - 16 + 0 = -25 \neq 0.$$

Следовательно (см. таблицу 4.3), заданная поверхность является параболическим цилиндром.

Т а б л и ц а 4.3. Классификация поверхностей второго порядка

		Признаки вида		Название поверхности			
Центральные поверхности	$\delta \neq 0$	Эллиптический тип	$\begin{cases} \tau_2 > 0, \\ \tau_1 \cdot \delta > 0 \end{cases}$	$\Delta < 0$	Эллипсоид		
			\Downarrow	$\Delta > 0$	Мнимый эллипсоид		
			$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одного знака	$\Delta = 0$	Мнимый конус		
		Гиперболический тип	$\begin{cases} \tau_2 \leq 0, \\ \tau_1 \cdot \delta \leq 0 \end{cases}$	$\Delta > 0$	Однополостный гиперболоид		
				$\Delta < 0$	Двуполостный гиперболоид		
				$\Delta = 0$	Конус		
Нецентральные поверхности	$\delta = 0$	Параболический тип	$\Delta < 0$		Эллиптический параболоид		
			$\Delta > 0$		Гиперболический параболоид		
			$\tau_2 > 0$	$\tau_1 \cdot \kappa_2 < 0$		Эллиптический цилиндр	
				$\tau_1 \cdot \kappa_2 > 0$		Мнимый эллиптический цилиндр	
				$\kappa_2 = 0$		Пара мнимых пересекающихся плоскостей	
			$\tau_2 < 0$	$\kappa_2 \neq 0$		Гиперболический цилиндр	
				$\kappa_2 = 0$		Пара пересекающихся плоскостей	
				$\kappa_2 \neq 0$		Параболический цилиндр	
			$\tau_2 = 0$	$\kappa_2 = 0$	$\kappa_1 < 0$		Пара параллельных плоскостей
					$\kappa_1 > 0$		Пара мнимых параллельных плоскостей
					$\kappa_1 = 0$		Пара совпадающих плоскостей

в) Собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$ матрицы A квадратичной формы найдены при решении примера 4.18, "в". Согласно п.5 замечаний 4.12: $\tau_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1$, $\tau_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 = -81$, $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 81$. Поскольку корни характеристического уравнения имеют разные знаки, тип поверхности – гиперболический. Вычисляем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -4 & 5 \\ 4 & -7 & -4 & -7 \\ -4 & -4 & 3 & -3 \\ 5 & -7 & -3 & -8 \end{vmatrix} = 81 > 0,$$

Следовательно (см. таблицу 4.3), заданная поверхность является однополостным гиперболоидом.

Классификация заданных поверхностей совпадает с результатами примера 4.18. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ПОМОЩИ ИНВАРИАНТОВ

Найдем формулы, выражающие коэффициенты канонических уравнений поверхностей через коэффициенты общего уравнения (4.58).

Для уравнений эллиптического типа:

– эллипсоида (1): $\tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 + \tilde{\lambda}_3 \cdot (z')^2 - 1 = 0$,

– мнимого эллипсоида (2): $\tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 + \tilde{\lambda}_3 \cdot (z')^2 + 1 = 0$,

– мнимого конуса (3): $\tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 + \tilde{\lambda}_3 \cdot (z')^2 = 0$,

где $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2}$, $\tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{b^2}$, $\tilde{\lambda}_3 = \frac{1}{c^2}$, причем $0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \tilde{\lambda}_3$. Учитывая (4.63), запишем равенства $\mu \cdot \lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2}$, $\mu \cdot \lambda_2 = \tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{b^2}$, $\mu \cdot \lambda_3 = \tilde{\lambda}_3 = \frac{1}{c^2}$, $\tilde{\delta} = \mu^3 \cdot \delta$,

$\tilde{\Delta} = \mu^4 \cdot \Delta$. Для уравнения эллипсоида $\tilde{\Delta} = -\tilde{\delta}$ (см. первый определитель в (4.64)). Поэтому $\mu^4 \cdot \Delta = -\mu^3 \cdot \delta$, значит $\mu = -\frac{\delta}{\Delta}$. Тогда полуоси эллипсоида

вычисляются по формулам $a = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}}$, $b = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}}$, $c = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_3 \cdot \delta}}$, причем

для выполнения неравенств $a \geq b \geq c$ (или, что то же самое $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \tilde{\lambda}_3$),

корни характеристического уравнения нужно занумеровать так, чтобы они удовлетворяли условиям $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$. Для уравнения мнимого эллипсоида $\tilde{\Delta} = \tilde{\delta}$ (см. второй определитель в (4.64)). Поэтому $\mu^4 \cdot \Delta = \mu^3 \cdot \delta$, значит $\mu = \frac{\delta}{\Delta}$. Тогда полуоси мнимого эллипсоида вычисляются по формулам

$a = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}}$, $b = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}}$, $c = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_3 \cdot \delta}}$, причем корни характеристического урав-

$a = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}}$, $b = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}}$, $c = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_3 \cdot \delta}}$, причем корни характеристического урав-

нения нужно занумеровать так, чтобы $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$. Разделив уравнение мнимого конуса на величину $|\mu| \neq 0$, получим уравнение $|\lambda_1| \cdot (x')^2 + |\lambda_2| \cdot (y')^2 + |\lambda_3| \cdot (z')^2 = 0$. Отсюда находим коэффициенты $a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$, $c^2 = \frac{1}{|\lambda_3|}$.

Для уравнений гиперболического типа:

- однополостного гиперboloида (4): $\tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 + \tilde{\lambda}_3 \cdot (z')^2 - 1 = 0$;
 - двуполостного гиперboloида (5): $\tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 + \tilde{\lambda}_3 \cdot (z')^2 + 1 = 0$;
 - конуса (6) $\tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 + \tilde{\lambda}_3 \cdot (z')^2 = 0$,
- где $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2}$, $\tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{b^2}$, $\tilde{\lambda}_3 = -\frac{1}{c^2} < 0$, причем $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2$, аналогичным образом получаем

для однополостного гиперboloида: $a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}$, $b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}$, $c^2 = \frac{\Delta}{\lambda_3 \cdot \delta}$;

для двуполостного гиперboloида: $a^2 = \frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}$, $b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}$, $c^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_3 \cdot \delta}$;

для конуса: $a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$, $c^2 = \frac{1}{|\lambda_3|}$,

причем корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения нужно занумеровать так, чтобы λ_1 и λ_2 были одного знака и $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$, а корень λ_3 - противоположного знака.

Для уравнения эллиптического параболоида (7):

$$\tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 - 2 \cdot z' = 0, \quad \tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{b^2}, \quad \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2,$$

учитывая (4.63), запишем равенства $\mu \cdot \lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2}$, $\mu \cdot \lambda_2 = \tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{b^2}$, $\tilde{\tau}_2 = \mu^2 \cdot \tau_2$, $\tilde{\Delta} = \mu^4 \cdot \Delta$. Поскольку $\tilde{\lambda}_3 = 0$, то $\tilde{\tau}_2 = \tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 = -\tilde{\Delta}$ (см. (4.65)). Следовательно, $\mu^2 \cdot \tau_2 = -\mu^4 \cdot \Delta$, откуда $\mu^2 = -\frac{\tau_2}{\Delta}$. Тогда $a^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1^2 \cdot \tau_2}}$ и

$b^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^2 \cdot \tau_2}}$, причем корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения

нужно занумеровать так, чтобы нулевым оказался корень $\lambda_3 = 0$, а ненулевые корни λ_1 и λ_2 одного знака должны удовлетворять условию $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$.

Для уравнения гиперболического параболоида (8):

$$\tilde{\lambda}_1 \cdot (x')^2 + \tilde{\lambda}_2 \cdot (y')^2 - 2 \cdot z' = 0, \quad \tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \tilde{\lambda}_2 = -\frac{1}{b^2},$$

аналогично получаем $a^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1^2 \cdot \tau_2}}$, $b^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^2 \cdot \tau_2}}$, причем корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения нужно занумеровать так, чтобы нулевым оказался корень $\lambda_3 = 0$, а из ненулевых корней λ_1 и λ_2 разных знаков положительный обозначить λ_1 ($\lambda_1 > 0$).

Для уравнений цилиндрических поверхностей формулы для нахождения коэффициентов канонических уравнений по коэффициентам исходного уравнения выводятся аналогично тем, которые были получены в разд.3.3.5. Действительно, учитывая, что в канонических уравнениях цилиндрических поверхностей отсутствует неизвестная z , т.е. $a_{13} = a_{23} = a_{33} = a_3 = 0$, получаем равенства

$$\tau_1 = \tau, \quad \tau_2 = \delta, \quad \kappa_1 = \kappa, \quad \kappa_2 = \Delta,$$

где $\tau_1, \tau_2, \kappa_1, \kappa_2$ – инварианты цилиндрической поверхности, а $\tau, \delta, \kappa, \Delta$ – инварианты линии второго порядка. Например, для параметра параболы $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ в разд.3.3.5 получена формула $p = \sqrt{-\frac{\Delta}{\tau^3}}$. Следовательно, параметр параболического цилиндра $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ (в этом уравнении отсутствует неизвестная z) вычисляется по формуле $p = \sqrt{-\frac{\kappa_2}{\tau_1^3}}$.

Пример 4.20. По ортогональным инвариантам определить коэффициенты канонических уравнений алгебраических поверхностей второго порядка, заданных в примере 4.18, "а", "б", "в":

$$\text{а) } x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + 2 \cdot z + 1 = 0; \quad \text{б) } x^2 + 6 \cdot y - 8 \cdot z + 10 = 0;$$

$$\text{в) } 3 \cdot x^2 - 7 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2 + 8 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x \cdot z - 8 \cdot y \cdot z + 10 \cdot x - 14 \cdot y - 6 \cdot z - 8 = 0.$$

□ а) Заданное уравнение определяет эллиптический параболоид (см. решение примера 4.18, "а" или 4.19, "а"). Собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$ матрицы A квадратичной формы найдены при решении примера 4.18, "а", инвариант $\Delta = -1$ вычислен в примере 4.19, "а". Заметим, что корни характеристического уравнения занумерованы в соответствии с условиями $\lambda_3 = 0$, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$. Найдем инвариант $\tau_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 = 1$ и вычислим коэффициенты канонического уравнения $a^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1^2 \cdot \tau_2}} = \sqrt{-\frac{-1}{1^2 \cdot 1}} = 1$, $b^2 = a^2 = 1$, так как $\lambda_1 = \lambda_2$. Таким образом, каноническое уравнение имеет вид $(x')^2 + (y')^2 = 2 \cdot z'$.

б) Заданное уравнение определяет параболический цилиндр (см. решение примера 4.18,"б" или 4.19,"б"). Инварианты $\tau_1 = 1$, $\kappa_2 = -25$ найдены при решении примера 4.19,"б". Вычисляем параметр параболического цилиндра $p = \sqrt{-\frac{\kappa_2}{\tau_1^3}} = \sqrt{-\frac{-25}{1^3}} = 5$. Таким образом, каноническое уравнение имеет вид $(y')^2 = 2 \cdot 5 \cdot x'$.

в) Заданное уравнение определяет однополостный гиперболоид (см. решение примера 4.18,"в" или 4.19,"в"). Собственные значения $\lambda = -1$, $\lambda = 9$, $\lambda = -9$ матрицы A квадратичной формы найдены при решении примера 4.18,"в", инварианты $\delta = 81$ и $\Delta = 81$ вычислены в примере 4.19,"в". Обозначим корни следующим образом: корни одного знака (отрицательные корни) обозначим $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -9$ так, чтобы $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$, а корень противоположного знака $\lambda_3 = 9$. Вычислим коэффициенты канонического уравнения $a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta} = -\frac{81}{(-1) \cdot 81} = 1$, $b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta} = -\frac{81}{(-9) \cdot 81} = \frac{1}{9}$, $c^2 = \frac{\Delta}{\lambda_3 \cdot \delta} = \frac{81}{9 \cdot 81} = \frac{1}{9}$.

Таким образом, каноническое уравнение имеет вид $\frac{(x')^2}{1} + \frac{(y')^2}{\frac{1}{9}} - \frac{(z')^2}{\frac{1}{9}} = 1$.

Канонические уравнения заданных поверхностей совпадают с полученными в примере 4.18,"а","б","в". ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО БАЗИСА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ненулевой вектор \bar{s} , а также его координатный столбец $s = (x \ y \ z)^T$, будем называть *собственным вектором поверхности второго порядка* (4.58), если выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot s = \lambda \cdot s, \quad (4.66)$$

т.е. координатный столбец собственного вектора поверхности (4.58) является собственным вектором матрицы A квадратичной формы функции (4.59). Говорят, что собственный вектор \bar{s} *соответствует (принадлежит)* собственному значению λ . Собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению ($A \cdot s = 0 \cdot s \Leftrightarrow A \cdot s = 0$), будем называть *особым собственным вектором* поверхности второго порядка.

Укажем следующие свойства собственных векторов поверхности второго порядка.

1. Собственный вектор поверхности второго порядка не изменяется при ортогональном преобразовании координат и при умножении обеих частей уравнения поверхности на отличное от нуля число, другими словами, поверхности (4.58) и (4.60) имеют одинаковые собственные векторы.

Действительно, согласно п.5 замечаний 4.7, собственные векторы квадратичной формы не изменяются при однородном ортогональном преобразовании координат, а именно, если s_1 собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению λ_1 , то вектор $s'_1 = S^{-1} \cdot s_1$ является собственным для матрицы $A' = S^T \cdot A \cdot S$, где S – ортогональная матрица. При параллельном переносе системы координат матрица квадратичной формы не изменяется ($A' = S^T \cdot A \cdot S = A$, если $S = E$), поэтому не изменяются и ее собственные векторы. Если же обе части уравнения (4.58) умножаются на отличное от нуля число μ , то все элементы матрицы A , а также ее собственные значения, умножаются на число μ . Однако, собственный вектор поверхности не изменяется, поскольку условия $A \cdot s_1 = \lambda_1 \cdot s_1$ и $\mu \cdot A \cdot s_1 = \mu \cdot \lambda_1 \cdot s_1$ равносильны (при $\mu \neq 0$).

2. Собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, взаимно ортогональны.

В самом деле, пусть \bar{s}_1 и \bar{s}_2 – собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), т.е. координатные столбцы s_1 и s_2 этих векторов удовлетворяют условиям

$$A \cdot s_1 = \lambda_1 \cdot s_1 \text{ и } A \cdot s_2 = \lambda_2 \cdot s_2.$$

Первое равенство умножим слева на строку s_2^T , а второе – на s_1^T , и вычтем второе равенство из первого:

$$s_2^T \cdot A \cdot s_1 - s_1^T \cdot A \cdot s_2 = \lambda_1 \cdot s_2^T \cdot s_1 - \lambda_2 \cdot s_1^T \cdot s_2.$$

Поскольку при транспонировании число (рассматриваемое как матрица размеров 1×1) не изменяется (см. разд.П.4), то правую часть этого равенства можно преобразовать к виду

$$\lambda_1 \cdot s_2^T \cdot s_1 - \lambda_2 \cdot s_1^T \cdot s_2 = \lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s_2 - \lambda_2 \cdot s_1^T \cdot s_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot s_1^T \cdot s_2,$$

так как $s_2^T \cdot s_1 = (s_1^T \cdot s_2)^T = s_1^T \cdot s_2$, а левая часть рассматриваемого равенства, учитывая симметричность матрицы A ($A^T = A$), равна нулю, так как

$$s_2^T \cdot A \cdot s_1 = (s_1^T \cdot A^T \cdot s_2)^T = s_1^T \cdot A^T \cdot s_2 = s_1^T \cdot A \cdot s_2.$$

Следовательно, рассматриваемое равенство можно записать в виде

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot s_1^T \cdot s_2 = 0 \text{ или } s_1^T \cdot s_2 = 0,$$

поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Последнее равенство означает, что $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = s_1^T \cdot s_2 = 0$ – скалярное произведение ненулевых векторов \bar{s}_1 и \bar{s}_2 равно нулю, т.е. они ортогональны.

3. Базисные векторы канонической системы координат являются единичными взаимно ортогональными собственными векторами поверхности.

Действительно, в канонической системе координат матрица A квадратичной формы имеет диагональный вид $A = \Lambda =$

$$A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda_1, \lambda_2,$$

λ_3 – корни характеристического уравнения (см. п.6 замечаний 4.12). Записывая (4.66) для координатных столбцов $s_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$, $s_2 = (0 \ 1 \ 0)^T$, $s_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$ базисных векторов $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$, получаем

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первое соотношение выполняется при $\lambda = \lambda_1$, второе – при $\lambda = \lambda_2$, третье – при $\lambda = \lambda_3$. Следовательно, базисные векторы $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$ являются собственными, соответствующими собственным значениям $\lambda = \lambda_1$ для первого базисного вектора (\bar{s}_1), $\lambda = \lambda_2$ – для второго (\bar{s}_2) и $\lambda = \lambda_3$ – для третьего (\bar{s}_3). При этом не исключается случай равенства собственных значений.

Таким образом, для определения канонического базиса нужно найти три взаимно ортогональных единичных собственных вектора.

З а м е ч а н и я 4.13.

1. Собственные векторы матрицы определяются неоднозначно. Например, если s – собственный вектор матрицы (или поверхности), то столбец $\mu \cdot s$ при любом отличном от нуля числе μ также является собственным вектором, соответствующим тому же собственному значению λ , что и вектор s .

2. Три единичных взаимно ортогональных собственных вектора поверхности второго порядка определяются с точностью до множителя (-1) . Другими словами, каждый из них можно заменить на противоположный, тем самым изменить направление соответствующей координатной оси. Для всех поверхностей, за исключением эллиптического параболоида (7) и параболического цилиндра (14), выбор положительного направления на координатных осях может быть произвольным, другими словами, если, например, вектор \bar{s}_1 базисный, то и противоположный вектор $(-\bar{s}_1)$ также можно взять

в качестве базисного. Положительное направление оси $O'z'$ (базисный вектор \bar{s}_3) для эллиптического параболоида, а также положительное направление оси $O'x'$ (базисный вектор \bar{s}_1) для параболического цилиндра нельзя менять на противоположное. Правильный выбор этих базисных векторов описан ниже в замечании 4.15.

3. Собственные векторы поверхности определяют ее *главные направления* [3,14].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛА КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ поверхность второго порядка задана уравнением вида (4.58):

$$a_{11} \cdot x^2 + a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \cdot z^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + 2 \cdot a_{13} \cdot x \cdot z + 2 \cdot a_{23} \cdot y \cdot z + 2 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot y + 2 \cdot a_3 \cdot z + a_0 = 0 \quad (4.67)$$

или в матричной форме:

$$p(x, y, z) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}}_{a^T} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_0 = 0.$$

Точка M_0 называется *центром симметрии* (или просто *центром*) поверхности второго порядка (4.67), если вместе с каждой своей точкой M поверхность содержит также и точку M' , симметричную точке M относительно M_0 (точка M_0 – середина отрезка MM').

Поверхность второго порядка называется *центральной*, если она имеет единственный центр. В противном случае, если центр отсутствует или не является единственным, поверхность называется *нецентральной*. Центральными поверхностями являются эллипсоиды, гиперboloиды и конусы (рис.4.48), единственный центр этих поверхностей – начало координат. Остальные поверхности – нецентральные.

Центральные поверхности

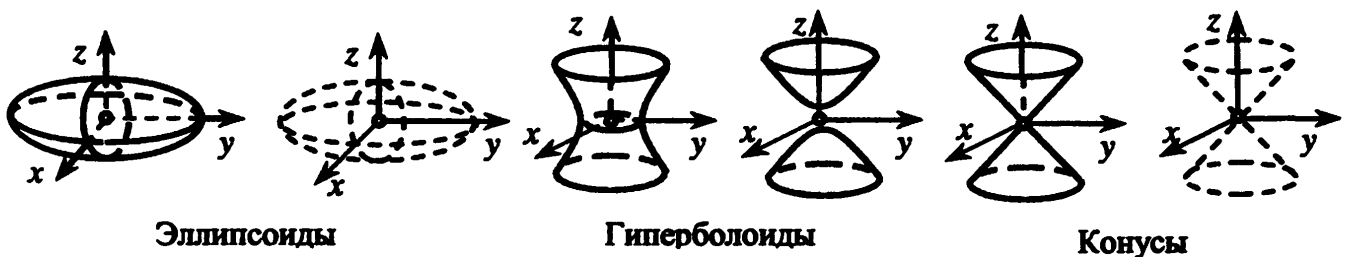


Рис.4.48

Заметим, что поверхности эллиптического или гиперболического типов являются центральными, а поверхности параболического типа – нецентральными, как это указано в первом столбце таблицы 4.3.

Прямая или плоскость, каждая точка которой является центром симметрии, называются *прямой центров* или *плоскостью центров* соответственно. На рис.4.49 изображены поверхности, имеющие прямую центров (эта прямая совпадает с осью аппликат канонической системы координат (двойная линия на рис.4.49)). На рис.4.50 изображены поверхности, имеющие плоскость центров (эта плоскость совпадает с плоскостью Oxz канонической системы координат (выделена двойными линиями на рис.4.50)).

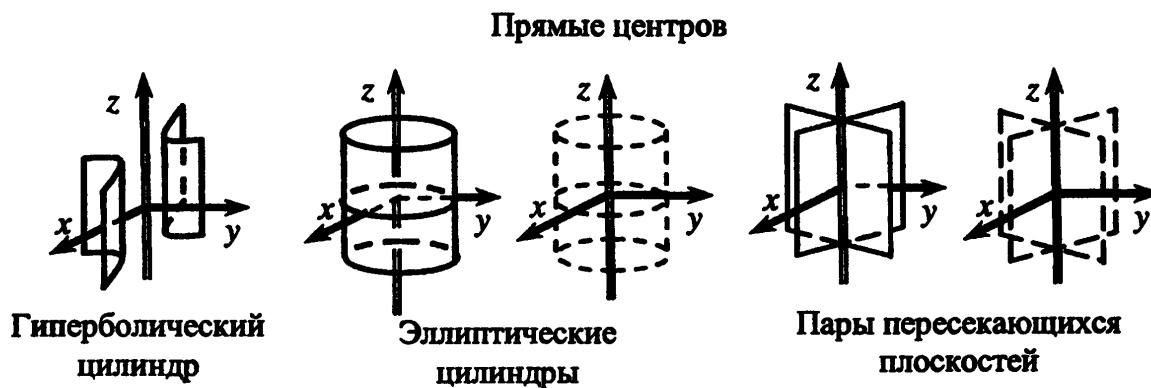
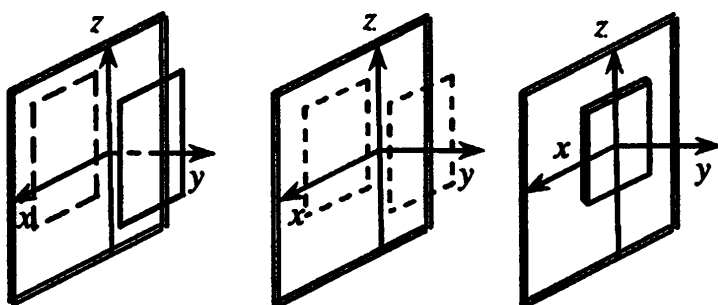


Рис.4.49

Прямая l_0 называется *осью симметрии* поверхности второго порядка (4.67), если вместе с каждой своей точкой M поверхность содержит также и точку M' , симметричную точке M относительно прямой l_0 (прямая l_0 перпендикулярна отрезку MM' и делит его пополам).

Плоскости центров



Пары параллельных или совпадающих плоскостей

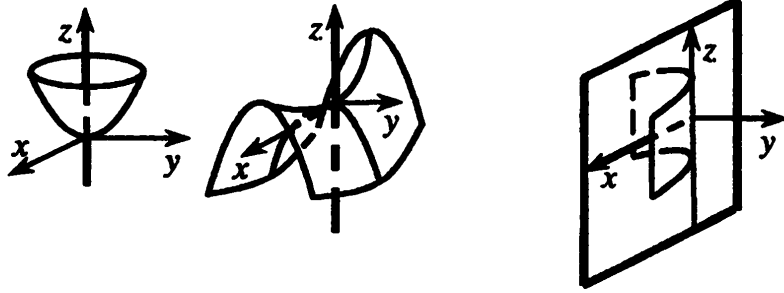
Рис.4.50

Оси симметрии имеют все поверхности второго порядка. Если поверхность центральная, то ось симметрии проходит через ее центр. Например, координатные оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипсоидов, гиперболоидов, конусов (см. рис.4.48). Если нецентральная поверхность имеет прямую центров, то эта прямая служит

осью симметрии. Например, ось аппликат канонической системы координат для гиперболического или эллиптических цилиндров, или пар пересекающихся плоскостей (см. рис.4.49). Другие координатные оси также являются осями симметрии этих поверхностей. Ось Oz является единственной осью симметрии для параболоидов (рис.4.51), а ось абсцисс – единственная ось симметрии для параболического цилиндра.

Плоскость π_0 называется *плоскостью симметрии* поверхности второго порядка (4.67), если вместе с каждой своей точкой M поверхность содержит также и точку M' , симметричную точке M относительно плоскости π_0 (плоскость π_0 перпендикулярна отрезку MM' и делит его пополам).

Оси и плоскость симметрии поверхностей, не имеющих центра



Параболоиды

Параболический цилиндр

Рис.4.51

Плоскости симметрии имеют все поверхности второго порядка. Если поверхность центральная, то плоскость симметрии проходит через ее центр. Если нецентральная поверхность имеет прямую центров, то эта прямая принадлежит плоскости симметрии. Например, плоскость Oxz канонической системы координат для гиперболического или эллиптических цилиндров, или пар пересекающихся плоскостей (см. рис.4.49). Если нецентральная поверхность имеет плоскость центров, то эта плоскость служит плоскостью симметрии поверхности, например, координатная плоскость Oxz для пар параллельных или совпадающих плоскостей (см. рис.4.50). Эта же плоскость Oxz является плоскостью симметрии для параболоидов и параболического цилиндра (см. рис.4.51).

Если поверхность (4.67) имеет хотя бы один центр, то этот центр принимается за начало канонической системы координат (см. рис.4.48, 4.49, 4.50). Если поверхность не имеет ни одного центра, то началом канонической системы координат является либо точка пересечения оси симметрии параболоидов с его поверхностью, либо любая точка пересечения плоскости симметрии параболического цилиндра с его поверхностью (см. рис.4.51).

Составим уравнения для определения центра поверхности (4.67). Для этого сделаем ортогональное преобразование координат (4.62):

$$\begin{cases} x = x_0 + s_{11} \cdot x' + s_{12} \cdot y' + s_{13} \cdot z', \\ y = y_0 + s_{21} \cdot x' + s_{22} \cdot y' + s_{23} \cdot z', \\ z = z_0 + s_{31} \cdot x' + s_{32} \cdot y' + s_{33} \cdot z', \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s + S \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

где $s = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T$ – координатный столбец вектора $\bar{s} = \overline{OO'}$ переноса системы координат, а ортогональная матрица $S = (s_1 \ | \ s_2 \ | \ s_3)$ составлена из единичных взаимно ортогональных собственных векторов поверхности (4.67), соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. В новой системе координат $O'x'y'z'$ уравнение поверхности будет иметь вид

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + \lambda_3 \cdot (z')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + 2 \cdot a'_3 \cdot z' + a'_0 = 0, \quad (4.68)$$

где, согласно (4.56), матрица $A' = S^T \cdot A \cdot S = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ – диагональ-

ная, столбец коэффициентов линейной формы $a' = S^T \cdot (A \cdot s + a)$, а свободный член $a'_0 = s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0$.

Если в уравнении (4.68) отсутствуют линейные члены ($a' = 0$), то начало координат O' является центром симметрии, поскольку при одновременной замене неизвестных $x' \leftrightarrow (-x')$, $y' \leftrightarrow (-y')$, $z' \leftrightarrow (-z')$ уравнение (4.68) не изменяется. Другими словами, если координаты точки $M(x', y', z')$ удовлетворяют уравнению, то и координаты $(-x', -y', -z')$ точки, симметричной точке M относительно начала координат, также удовлетворяют уравнению.

Так как матрица S невырожденная, то равенство $a' = S^T \cdot (A \cdot s + a) = 0$ равносильно системе линейных уравнений (см. разд.4.2.5):

$$A \cdot s + a = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_{11} \cdot x_0 + a_{12} \cdot y_0 + a_{13} \cdot z_0 + a_1 = 0, \\ a_{12} \cdot x_0 + a_{22} \cdot y_0 + a_{23} \cdot z_0 + a_2 = 0, \\ a_{13} \cdot x_0 + a_{23} \cdot y_0 + a_{33} \cdot z_0 + a_3 = 0, \end{cases} \quad (4.69)$$

которая определяет координаты x_0, y_0, z_0 центра симметрии, т.е. точки O' .

Эта система имеет единственное решение только тогда, когда $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ или $\text{rg } A = \text{rg}(A | a) = 3$ (см. разд.П.10). Следова-

тельно, условие $\delta \neq 0$ является критерием наличия единственного центра (т.е. критерием для центральных поверхностей).

При $\text{rg } A = \text{rg}(A | a) = 2$ или при $\text{rg } A = \text{rg}(A | a) = 1$ система (4.69) имеет бесконечно много решений, т.е. центры симметрии поверхности образуют прямую или плоскость центров соответственно. При $\text{rg } A < \text{rg}(A | a)$ система не имеет решений, т.е. поверхность не имеет ни одного центра (см. рис.4.51).

Таким образом, для поверхностей второго порядка, имеющих хотя бы один центр симметрии, этот центр служит началом O' канонической системы координат системы $O'x'y'z'$. Координаты x_0, y_0, z_0 находятся как реше-

ние системы (4.69), причем это решение единственное для центральных поверхностей.

Рассмотрим теперь случай, когда система (4.69) несовместна. В этом случае поверхность (4.67) не имеет ни одного центра (см. рис.4.51), т.е. является либо параболоидом (эллиптическим или гиперболическим), либо параболическим цилиндром.

Получим уравнения плоскостей и осей симметрии поверхности (4.67). Для этого запишем столбец $a' = S^T \cdot (A \cdot s + a)$ коэффициентов линейных членов уравнения (4.68), учитывая, что матрица S составлена из собственных векторов матрицы A , т.е. $S^T \cdot A = \Lambda \cdot S^T$ (последнее равенство можно считать матричной формой записи (4.66)):

$$S^T \cdot A = \Lambda \cdot S^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{s_1^T}{s_1^T} \\ \frac{s_2^T}{s_2^T} \\ \frac{s_3^T}{s_3^T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot s_1^T \\ \lambda_2 \cdot s_2^T \\ \lambda_3 \cdot s_3^T \end{pmatrix}, \text{ т.е. } a' = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s + s_1^T \cdot a \\ \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a \\ \lambda_3 \cdot s_3^T \cdot s + s_3^T \cdot a \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda_1 \neq 0$, то уравнение $\lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s + s_1^T \cdot a = 0$, или в координатной форме

$$\lambda_1 \cdot (s_{11} \cdot x_0 + s_{21} \cdot y_0 + s_{31} \cdot z_0) + s_{11} \cdot a_1 + s_{21} \cdot a_2 + s_{31} \cdot a_3 = 0,$$

имеет решение $s = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T$. Тогда, взяв точку $O'(x_0, y_0, z_0)$ в качестве начала системы координат $O'x'y'z'$, получим уравнение (4.68), в котором будет отсутствовать линейный член с неизвестной x' , так как $a'_1 = \lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s + s_1^T \cdot a = 0$. Такое уравнение при замене неизвестной $x' \leftrightarrow (-x')$ не изменяется. Другими словами, если координаты точки $M(x', y', z')$ удовлетворяют уравнению (4.68), то и координаты $(-x', y', z')$ точки, симметричной точке M относительно плоскости $O'y'z'$, также удовлетворяют уравнению (4.68) (при $a'_1 = 0$). Следовательно, если уравнение $\lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s + s_1^T \cdot a = 0$ имеет решения, то оно определяет плоскость симметрии $O'y'z'$ поверхности (4.67).

В случаях эллиптического или гиперболического параболоидов собственные значения λ_1 и λ_2 отличны от нуля (при этом $\lambda_3 = 0$), поэтому система уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s + s_1^T \cdot a = 0, \\ \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a = 0 \end{cases} \quad (4.70)$$

совместна. Первое уравнение системы определяет плоскость симметрии $O'y'z'$, второе уравнение системы – плоскость симметрии $O'x'z'$, а сама сис-

тема – ось симметрии $O'z'$ параболоидов (как пересечение координатных плоскостей). Заметим, что ось симметрии, определяемая системой (4.70), коллинеарна особому собственному вектору \bar{s}_3 (соответствующему нулевому собственному значению $\lambda_3 = 0$).

Обозначим через \bar{a} вектор с координатным столбцом a , составленным из коэффициентов линейной формы в левой части уравнения (4.67). Представим этот вектор (а также его координатный столбец) в виде

$$\bar{a} = \bar{a}_{np} + \bar{a}_\perp \Leftrightarrow a = a_{np} + a_\perp,$$

где $\bar{a}_{np} = (\bar{a}, \bar{s}_3) \cdot \bar{s}_3$ – ортогональная проекция вектора \bar{a} на ось симметрии (4.70), коллинеарную \bar{s}_3 (см. разд.1.4.2); $\bar{a}_\perp = \bar{a} - \bar{a}_{np}$ – ортогональная составляющая вектора \bar{a} относительно оси (4.70); a_{np} , a_\perp – координатные столбцы соответствующих векторов. Тогда для указанного разложения вектора \bar{a} справедливы равенства

$$s_1^T \cdot a = s_1^T \cdot a_\perp, \quad s_2^T \cdot a = s_2^T \cdot a_\perp, \quad s_3^T \cdot a_\perp = 0,$$

поскольку $s_1^T \cdot a = (\bar{s}_1, \bar{a}) = (\bar{s}_1, \bar{a}_{np} + \bar{a}_\perp) = \underbrace{(\bar{s}_1, \bar{a}_{np})}_0 + (\bar{s}_1, \bar{a}_\perp) = (\bar{s}_1, \bar{a}_\perp) = s_1^T \cdot a_\perp$.

Аналогично доказывается второе равенство, а третье равенство следует из ортогональности векторов \bar{s}_3 и \bar{a}_\perp : $s_3^T \cdot a_\perp = (\bar{s}_3, \bar{a}_\perp) = 0$.

Найдем координаты точки O' пересечения оси симметрии (4.70) с поверхностью (4.67), т.е. найдем такой столбец s , удовлетворяющий (4.70), чтобы $s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0 = 0$. Для этого, учитывая (4.70) и равенства

$A = S \cdot \Lambda \cdot S^T$, $S^T = S^{-1}$, $S = (s_1 \mid s_2 \mid s_3)$, $\lambda_3 = 0$, преобразуем произведение

$$\begin{aligned} A \cdot s &= S \cdot \Lambda \cdot S^T \cdot s = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s \\ \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s \\ \lambda_3 \cdot s_3^T \cdot s \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} -s_1^T \cdot a \\ -s_2^T \cdot a \\ 0 \end{pmatrix} = -S \cdot \begin{pmatrix} s_1^T \cdot a_\perp \\ s_2^T \cdot a_\perp \\ s_3^T \cdot a_\perp \end{pmatrix} = \\ &= -S \cdot S^T \cdot a_\perp = -a_\perp. \end{aligned}$$

Таким образом, столбец s удовлетворяет уравнению $A \cdot s + a_\perp = 0$.

Поскольку матрица A симметрическая, то $s^T \cdot A = -a_\perp^T$ и

$$s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0 = -a_\perp^T \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0 = (a + a_{np})^T \cdot s + a_0.$$

Добавляя уравнение $(a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0$ к системе (4.70), получаем систему уравнений для нахождения начала O' канонической системы координат для параболоидов:

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s + s_1^T \cdot a = 0, \\ \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases} \quad (4.71)$$

где $a_{np} = (a^T \cdot s_3) \cdot s_3$.

В случае параболического цилиндра собственное значение λ_2 отлично от нуля (при этом $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$), поэтому уравнение $\lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a = 0$ определяет плоскость $O'x'z'$ симметрии параболического цилиндра. В качестве координат начала канонической системы координат можно взять любое решение системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a = 0, \\ s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0 = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение можно записать так же, как последнее уравнение системы (4.71):

$$\begin{cases} \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases} \quad (4.72)$$

где $a_{np} = a - a_{\perp}$, $a_{\perp} = (a^T \cdot s_2) \cdot s_2$, т.е. \bar{a}_{np} – ортогональная проекция вектора \bar{a} на плоскость, компланарную особым собственным векторам \bar{s}_1 и \bar{s}_3 ; \bar{a}_{\perp} – ортогональная составляющая вектора \bar{a} относительно этой плоскости.

З а м е ч а н и я 4.14.

1. Определение центра, оси или плоскости симметрии равным образом относится как к вещественным, так и мнимым поверхностям, т.е. включает случай комплексных решений. При этом оказывается [14], что координаты любого центра поверхности, любой точки оси или плоскости симметрии являются вещественными.

2. Система уравнений $A \cdot s + a_{\perp} = 0$ всегда совместна: ее решениями являются координаты центра симметрии, если поверхность имеет центр; либо координаты оси симметрии (коллинеарной особому собственному вектору) или плоскости симметрии (компланарной особым собственным векторам), если поверхность не имеет центра.

3. Если система уравнений $A \cdot s + a = 0$ не имеет решений ($\text{rg } A < \text{rg } (A \mid a)$), т.е. поверхность не имеет ни одного центра, то система

$$\begin{cases} A \cdot s + a_{\perp} = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0 \end{cases}$$

совместна и ее решение определяет начало канонической системы координат [9]. Другими словами, эта система равносильна системе (4.71) в случае параболоидов и системе (4.72) в случае параболического цилиндра.

КВАДРАТИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Вещественная поверхность второго порядка $p(x, y, z) = 0$ разбивает координатное пространство $Oxyz$ на области. В силу свойств многочленов второй степени (в частности, их непрерывности) для решения квадратичных неравенств $p(x, y, z) > 0$, $p(x, y, z) < 0$, $p(x, y, z) \geq 0$, $p(x, y, z) \leq 0$ достаточно определить знак многочлена $p(x, y, z)$ в одной внутренней точке какой-либо области. Знаки в других областях проставляются по правилу чередования знаков (аналогично методу интервалов): переходя через границу области, знак меняется на противоположный, за исключением совпадающих плоскостей (при переходе через них знак многочлена не меняется).

Для всех вещественных поверхностей, за исключением гиперболического параболоида и пары пересекающихся плоскостей, назовем *внутренними* те точки, координаты которых (в канонической системе координат) удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1, & \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} < 1, & \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} < -1, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} < 0, & \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 2 \cdot z, & \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1, & \quad y^2 < 2 \cdot p \cdot x, & \quad y^2 - b^2 < 0 \end{aligned}$$

соответственно. Другими словами, во внутренних точках поверхности левая часть канонического уравнения меньше правой.

Внешними точками по отношению к каждой из перечисленных поверхностей назовем точки, для которых значения левой части канонического уравнения больше правой его части. На рис.4.52 внутренние точки отмечены минусом, а внешние – плюсом. Заметим, что для совпадающих плоскостей все точки, кроме точек, принадлежащих поверхности, являются внешними.

Учитывая п.9 замечаний 4.12, для уравнения (4.67) поверхности второго порядка в прямоугольной системе координат $Oxyz$ можно сформулировать условия, равносильные определениям внутренних и внешних точек поверхности.

Теорема 4.5 (о внутренних и внешних точках поверхности). *Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ является внутренней точкой поверхности (4.67) тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} \tau_1 \cdot p(x_1, y_1, z_1) < 0 & \Leftrightarrow \delta \cdot p(x_1, y_1, z_1) < 0 \text{ – для эллипсоида;} \\ \delta \cdot p(x_1, y_1, z_1) > 0 & \text{ – для гиперболоидов и для конуса;} \end{aligned}$$

$\tau_1 \cdot p(x_1, y_1, z_1) < 0$ – для эллиптического параболоида, эллиптического и параболического цилиндров, пары параллельных плоскостей;

$\kappa_2 \cdot p(x_1, y_1, z_1) < 0$ – для гиперболического цилиндра.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.5.

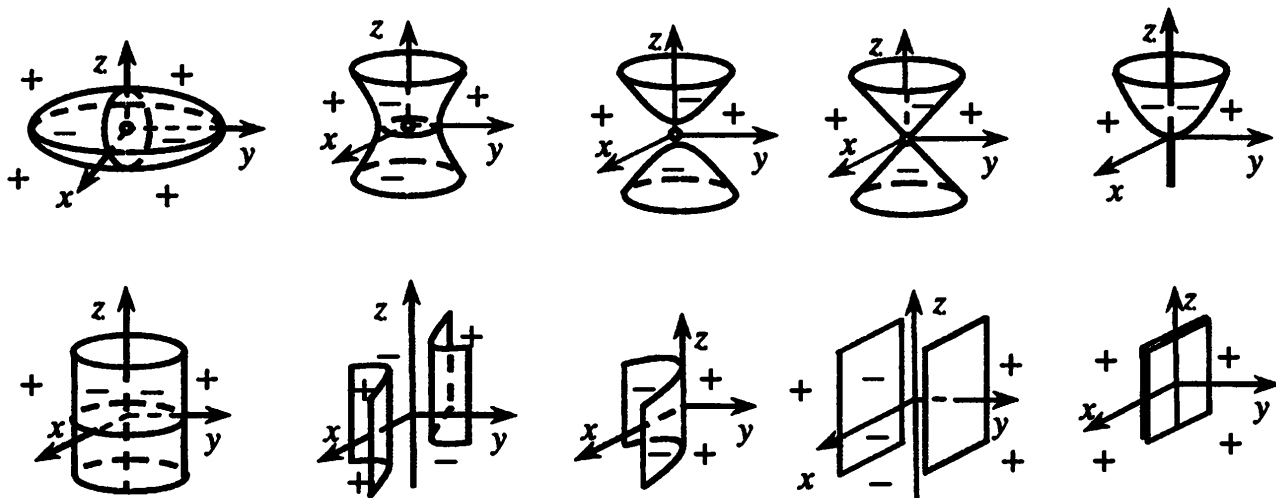


Рис.4.52

Замечания 4.15.

1. Для гиперболического параболоида и пары пересекающихся плоскостей предлагаемое определение внутренних и внешних точек не годится, поскольку каждая из этих поверхностей разбивает пространства на "похожие", области, каждую из которых равным образом можно считать внутренней или внешней. Например, пара пересекающихся плоскостей $x^2 - y^2 = 0$ разбивает пространство на четыре равные "четверти", которые "накладываются" одна на другую при помощи поворота вокруг оси Oz на угол, кратный $\frac{\pi}{2}$. Гиперболический параболоид $x^2 - y^2 = 2 \cdot z$ разбивает пространство на две равные области, которые симметричны прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$.

2. При выборе положительного направления оси $O'z'$ канонической системы координат $O'x'y'z'$ для эллиптического параболоида, заданного уравнением $p(x, y, z) = 0$, достаточно проверить, является ли точка M с координатами $x' = 0, y' = 0, z' = 1$ внутренней. Вычислим значение многочлена $p(x, y, z)$ в точке $M(x_1, y_1, z_1)$ в исходной системе координат $Oxyz$. Из равенства $\overline{OM} = \overline{OO'} + \bar{s}_3 = \bar{s} + \bar{s}_3$, где $s = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T$ – столбец координат точки O' , определяем координатный столбец точки $M(x_1, y_1, z_1)$: $(x_1 \ y_1 \ z_1)^T = s + s_3$. Подставляя этот столбец в квадратичную функцию $p(x, y, z)$, получаем

$$p(x_1, y_1, z_1) = (s + s_3)^T \cdot A \cdot (s + s_3) + 2 \cdot a^T \cdot (s + s_3) + a_0 = \\ = s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0 + s^T \cdot A \cdot s_3 + s_3^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s_3 = 2 \cdot a^T \cdot s_3,$$

поскольку $s^T \cdot A \cdot s + 2 \cdot a^T \cdot s + a_0 = 0$ (точка O' принадлежит поверхности параболоида), $A \cdot s_3 = 0$, так как s_3 – особый собственный вектор параболоида. Из теоремы 4.5 следует, что точка M ($\overline{OM} = \bar{s} + \bar{s}_3$) является внутренней при условии $\tau_1 \cdot p(x_1, y_1, z_1) < 0$, т.е. при условии $\tau_1 \cdot a^T \cdot s_3 < 0$.

Аналогично заключаем, что правильный выбор направления вектора \bar{s}_1 , определяющего положительное направление оси $O'x'$ для параболического цилиндра, отвечает условию $\tau_1 \cdot a^T \cdot s_1 < 0$.

Пример 4.21. Поверхности второго порядка заданы в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнениями (см. пример 4.18):

$$\text{а) } x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + 2 \cdot z + 1 = 0; \quad \text{б) } x^2 + 6 \cdot y - 8 \cdot z + 10 = 0;$$

$$\text{в) } 3 \cdot x^2 - 7 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2 + 8 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x \cdot z - 8 \cdot y \cdot z + 10 \cdot x - 14 \cdot y - 6 \cdot z - 8 = 0.$$

Внутренней или внешней точкой по отношению к каждой поверхности является начало координат O ?

□ а) Заданная поверхность – эллиптический параболоид (см. решение примера 4.19, "а"). Согласно теореме 4.5, проверяем условие $\tau_1 \cdot p(0, 0, 0) < 0$, где $p(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + 2 \cdot z + 1$ – левая часть уравнения поверхности, а $\tau_1 = 2$ (см. решение примера 4.19, "а"). Поскольку неравенство $\tau_1 \cdot p(0, 0, 0) < 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 < 0$ неверное для точки $O(0, 0, 0)$, делаем вывод о том, что точка O является внешней для заданной поверхности.

б) Заданная поверхность – параболический цилиндр (см. решение примера 4.19, "б"). Согласно теореме 4.5, проверяем условие $\tau_1 \cdot p(0, 0, 0) < 0$, где $p(x, y, z) = x^2 + 6 \cdot y - 8 \cdot z + 10$ – левая часть уравнения поверхности, а $\tau_1 = 1$ (см. решение примера 4.19, "б"). Поскольку неравенство $\tau_1 \cdot p(0, 0, 0) < 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 10 < 0$ неверное для точки $O(0, 0, 0)$, делаем вывод о том, что точка O является внешней для заданной поверхности.

в) Заданная поверхность – однополостный гиперболоид (см. решение примера 4.19, "в"). Согласно теореме 4.5, проверяем условие $\delta \cdot p(0, 0, 0) > 0$, где $p(x, y, z)$ – левая часть уравнения поверхности, а $\delta = 81$ (см. решение примера 4.19, "в"). Поскольку неравенство $\delta \cdot p(0, 0, 0) > 0 \Leftrightarrow 81 \cdot (-8) > 0$ неверное для точки $O(0, 0, 0)$, делаем вывод о том, что точка O является внешней для заданной поверхности. ■

4.4.7. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду

Рассмотрим задачу приведения к каноническому виду уравнения поверхности второго порядка, заданной в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением (4.67):

$$a_{11} \cdot x^2 + a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \cdot z^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + 2 \cdot a_{13} \cdot x \cdot z + 2 \cdot a_{23} \cdot y \cdot z + 2 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot y + 2 \cdot a_3 \cdot z + a_0 = 0. \quad (4.73)$$

Требуется определить один из семнадцати возможных канонических видов поверхности (см. теорему 4.3), найти каноническую систему координат $O'x'y'z'$, в которой уравнение поверхности имеет канонический вид, а затем построить поверхность в канонической и исходной системах координат. Построение, разумеется, производится только для вещественных поверхностей.

АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Для приведения поверхности второго порядка, заданной в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением (4.73), к каноническому виду нужно выполнить следующие действия.

1. По уравнению (4.73) поверхности второго порядка составить матрицу P квадратичной функции, матрицу A квадратичной формы и столбец a коэффициентов линейной формы:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

2. Составить характеристическое уравнение $-\lambda^3 + \tau_1 \cdot \lambda^2 - \tau_2 \cdot \lambda + \delta = 0$, либо вычисляя его коэффициенты по формулам: $\tau_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$,

$$\tau_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

либо разлагая определитель

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \tau_1 \cdot \lambda^2 - \tau_2 \cdot \lambda + \delta.$$

Найти корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (с учетом кратности) характеристического уравнения.

$$\text{Вычислить инвариант } \Delta = \det P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}. \text{ Если } \delta = \Delta = 0,$$

то вычислить семиинвариант

$$\kappa_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Если $\delta = \Delta = 0$ и $\tau_1 = \tau_2 = 0$, то вычислить семиинвариант

$$\kappa_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

3. По таблице 4.3 определить вид поверхности.

4. Занумеровать корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения в соответствии с правилами:

а) если поверхность эллиптического типа, то $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$;

б) если поверхность гиперболического типа, то обозначить через λ_1 и λ_2 корни одного знака так, чтобы $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$, а через λ_3 – корень противоположного знака;

в) если поверхность параболического типа, то

– если нулевой корень двойной, то $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$;

– если нулевой корень простой, а ненулевые корни одного знака, то $\lambda_3 = 0$ и $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$;

– если нулевой корень простой, а ненулевые корни разных знаков, то $\lambda_3 = 0$ и

либо $\lambda_1 > 0$, если $\Delta \neq 0$ или $\Delta = \kappa_2 = 0$;

либо $\lambda_1 \cdot \kappa_2 > 0$, если $\Delta = 0$ и $\kappa_2 \neq 0$.

5. Найти взаимно ортогональные собственные направления l_1, l_2, l_3 , соответствующие корням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения:

а) если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то базисные векторы исходной системы имеют искомые направления $l_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$, $l_2 = (0 \ 1 \ 0)^T$, $l_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$;

б) если все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ простые, то для каждого корня найти ненулевое решение однородной системы уравнений $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot l_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Например, собственное направление $l_3 = (x_3 \ y_3 \ z_3)^T$ для простого корня λ_3 находится как любое ненулевое решение системы

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_3) \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = 0, \\ a_{12} \cdot x + (a_{22} - \lambda_3) \cdot y + a_{23} \cdot z = 0, \\ a_{13} \cdot x + a_{23} \cdot y + (a_{33} - \lambda_3) \cdot z = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad (A - \lambda_3 \cdot E) \cdot l_3 = 0.$$

Если $\lambda_3 = 0$ и корни λ_1 и λ_2 имеют разные знаки ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$), то направление l_3 должно удовлетворять дополнительному условию $a^T \cdot l_3 \leq 0$, в противном случае следует заменить столбец l_3 на противоположный ($-l_3$).

Если $\lambda_3 = 0$ и корни λ_1 и λ_2 одного знака ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$), то направление l_3 должно удовлетворять дополнительному условию $\tau_1 \cdot a^T \cdot l_3 < 0$, в противном случае следует заменить столбец l_3 на противоположный ($-l_3$);

в) если имеется двойной ненулевой корень $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то для простого корня λ_3 найти соответствующий собственный вектор l_3 – любое ненулевое решение системы $(A - \lambda_3 \cdot E) \cdot l_3 = 0$, а для кратного корня $\lambda_1 = \lambda_2$ в качестве l_2 взять любой ненулевой столбец матрицы $A - \lambda_3 \cdot E$, а вектор l_1 найти, используя векторное произведение: $\bar{l}_1 = [\bar{l}_2, \bar{l}_3]$;

г) если имеется двойной нулевой корень $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, то направление l_2 , соответствующее простому корню λ_2 , найти как ненулевое решение системы $(A - \lambda_2 \cdot E) \cdot l_2 = 0$. Вычислить проекцию $a_{np} = a - \frac{a^T \cdot l_2}{|l_2|^2} \cdot l_2$. Если $a_{np} = 0$, то направление l_1 найти как ненулевое решение системы $A \cdot l_1 = 0$. Если $a_{np} \neq 0$, то направление $l_1 = -\tau_1 \cdot a_{np}$. Направление l_3 найти, используя векторное произведение: $\bar{l}_3 = [\bar{l}_1, \bar{l}_2]$.

Нормируя полученные векторы l_1, l_2, l_3 , определить координатные столбцы $s_1 = \frac{1}{|l_1|} \cdot l_1$, $s_2 = \frac{1}{|l_2|} \cdot l_2$, $s_3 = \frac{1}{|l_3|} \cdot l_3$ векторов $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$ канонического базиса.

6. Найти координаты x_0, y_0, z_0 начала O' канонической системы координат:

а) для поверхностей, имеющих хотя бы один центр (эллипсоидов, гиперболоидов, конусов, цилиндров, пар плоскостей), найти любое решение $s = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T$ системы уравнений

$$A \cdot s + a = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z + a_1 = 0, \\ a_{12} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z + a_2 = 0, \\ a_{13} \cdot x + a_{23} \cdot y + a_{33} \cdot z + a_3 = 0. \end{cases}$$

б) для поверхностей, не имеющих ни одного центра, найти:

– в случаях эллиптического или гиперболического параболоидов решение $s = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T$ системы

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s + s_1^T \cdot a = 0, \\ \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases}$$

где $a_{np} = (a^T \cdot s_3) \cdot s_3$;

– в случае параболического цилиндра – любое решение $s = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T$ системы

$$\begin{cases} \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases}$$

где $a_{np} = a - a_{\perp}$, $a_{\perp} = (a^T \cdot s_2) \cdot s_2$.

7. Вычислить коэффициенты канонического уравнения:

а) для поверхностей эллиптического типа:

(1) – при $\Delta < 0$ – уравнение эллипсоида $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1$ с коэффициентами $a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}$, $b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}$, $c^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_3 \cdot \delta}$;

(2) при $\Delta > 0$ – уравнение мнимого эллипсоида $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = -1$ с коэффициентами $a^2 = \frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}$, $b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}$, $c^2 = \frac{\Delta}{\lambda_3 \cdot \delta}$;

(3) при $\Delta = 0$ – уравнение мнимого конуса $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 0$ с коэффициентами $a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$, $c^2 = \frac{1}{|\lambda_3|}$;

б) для поверхностей гиперболического типа:

(4) при $\Delta > 0$ – уравнение *однополостного гиперболоида*

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(z')^2}{c^2} = 1 \text{ с коэффициентами } a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}, \quad b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}, \\ c^2 = \frac{\Delta}{\lambda_3 \cdot \delta};$$

(5) при $\Delta < 0$ – уравнение *двуполостного гиперболоида*

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(z')^2}{c^2} = -1 \text{ с коэффициентами } a^2 = \frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}, \quad b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}, \\ c^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_3 \cdot \delta};$$

(6) при $\Delta = 0$ – уравнение *конуса* $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(z')^2}{c^2} = 0$ с коэффици-

$$\text{ентами } a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}, \quad b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}, \quad c^2 = \frac{1}{|\lambda_3|};$$

в) для поверхностей параболического типа:

(7) при $\Delta < 0$ – уравнение *эллиптического параболоида*

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 2 \cdot z \quad \text{с коэффициентами} \quad a^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1^2 \cdot \tau_2}}, \\ b^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^2 \cdot \tau_2}};$$

(8) при $\Delta > 0$ – уравнение *гиперболического параболоида*

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 2 \cdot z \quad \text{с коэффициентами} \quad a^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1^2 \cdot \tau_2}}, \\ b^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^2 \cdot \tau_2}};$$

(9) при $\Delta = 0, \tau_2 > 0, \tau_1 \cdot \kappa_2 < 0$ – уравнение *эллиптического ци-*

$$\text{линдра } \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \quad \text{с коэффициентами} \quad a^2 = -\frac{\kappa_2}{\lambda_1 \cdot \tau_2}, \\ b^2 = -\frac{\kappa_2}{\lambda_2 \cdot \tau_2};$$

(10) при $\Delta = 0, \tau_2 > 0, \tau_1 \cdot \kappa_2 > 0$ – уравнение *мнимого эллиптиче-*

$$\text{ского цилиндра } \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = -1 \text{ с коэффициентами } a^2 = \frac{\kappa_2}{\lambda_1 \cdot \tau_2}, \\ b^2 = \frac{\kappa_2}{\lambda_2 \cdot \tau_2};$$

- (11) при $\Delta = 0$, $\tau_2 > 0$, $\kappa_2 = 0$ – уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 0$ с коэффициентами $a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$;
- (12) при $\Delta = 0$, $\tau_2 < 0$, $\kappa_2 \neq 0$ – уравнение гиперболического цилиндра $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ с коэффициентами $a^2 = -\frac{\kappa_2}{\lambda_1 \cdot \tau_2}$, $b^2 = \frac{\kappa_2}{\lambda_2 \cdot \tau_2}$;
- (13) при $\Delta = 0$, $\tau_2 < 0$, $\kappa_2 = 0$ – уравнение пары пересекающихся плоскостей $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 0$ с коэффициентами $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}$, $b^2 = -\frac{1}{\lambda_2}$;
- (14) при $\Delta = 0$, $\tau_2 = 0$, $\kappa_2 \neq 0$ – уравнение параболического цилиндра $(y')^2 = 2 \cdot p \cdot x'$ с коэффициентом $p = \sqrt{-\frac{\kappa_2}{\tau_1^3}}$;
- (15) при $\Delta = 0$, $\tau_2 = 0$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa_1 < 0$ – уравнение пары параллельных плоскостей $(y')^2 - b^2 = 0$ с коэффициентом $b^2 = -\frac{\kappa_1}{\tau_1^2}$;
- (16) при $\Delta = 0$, $\tau_2 = 0$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa_1 > 0$ – уравнение пары мнимых параллельных плоскостей $(y')^2 + b^2 = 0$ с коэффициентом $b^2 = \frac{\kappa_1}{\tau_1^2}$;
- (17) при $\Delta = 0$, $\tau_2 = 0$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa_1 = 0$ – уравнение пары совпадающих плоскостей $(y')^2 = 0$.

8. В координатном пространстве $Oxuz$ изобразить каноническую систему координат $O'x'y'z'$, координаты x_0, y_0, z_0 начала O' которой найдены в п.6, а координаты базисных векторов – в п.5.

9. Построить поверхность второго порядка в канонической системе координат $O'x'y'z'$ по каноническому уравнению, найденному в п.7. Построение центральных поверхностей (эллипсоида, гиперболоидов, конуса) удобно начинать с изображения основного параллелепипеда (см. разд.4.4.2–4.4.4). При построении параболоидов, цилиндров и пар плоскостей использовать разд.4.4.5; 3.3.2–3.3.4, 4.2.1–4.2.5). Мнимые поверхности не изображаются, за исключением уравнения мнимого конуса или пары мнимых пересекающихся плоскостей, действительными решениями которых являются точка O' или ось $O'z'$ соответственно.

З а м е ч а н и я 4.16.

1. Согласно п.3 замечаний 4.14 для нахождения начала координат параболоидов или параболического цилиндра (см. п.6, "б" алгоритма) можно использовать систему

$$\begin{cases} A \cdot s + a_{\perp} = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases}$$

где $a_{np} = (a^T \cdot s_3) \cdot s_3$, $a_{\perp} = a - a_{np}$ в случае эллиптического или гиперболического параболоидов; $a_{\perp} = (a^T \cdot s_2) \cdot s_2$, $a_{np} = a - a_{\perp}$ в случае параболического цилиндра.

2. Системы уравнений в п.6, "б" алгоритма можно записать в эквивалентном виде:

– в случаях эллиптического или гиперболического параболоидов:

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot l_1^T \cdot s + l_1^T \cdot a_{\perp} = 0, \\ \lambda_2 \cdot l_2^T \cdot s + l_2^T \cdot a_{\perp} = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases}$$

где $a_{np} = (a^T \cdot s_3) \cdot s_3$, $a_{\perp} = a - a_{np}$;

– в случае параболического цилиндра:

$$\begin{cases} \lambda_2 \cdot l_2^T \cdot s + l_2^T \cdot a_{\perp} = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases}$$

где $a_{np} = a - a_{\perp}$, $a_{\perp} = (a^T \cdot s_2) \cdot s_2$.

3. Если требуется получить правую каноническую систему координат, а в результате применения алгоритма каноническая система координат оказалась левой, то достаточно изменить направление оси ординат на противоположное, т.е. заменить базисный вектор \bar{s}_2 на противоположный вектор $(-\bar{s}_2)$.

4. Согласно п.6 замечаний 4.12, если известны корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (с учетом кратности) характеристического уравнения, то инварианты можно вычислить по формулам (см. п.2 алгоритма):

$$\tau_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; \quad \tau_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_1 \cdot \lambda_3; \quad \delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3.$$

Пример 4.21. Поверхность второго порядка задана в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением

$$2 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 + 5 \cdot z^2 + 6 \cdot y \cdot z + 4 \cdot x + 16 \cdot y + 16 \cdot z + 10 = 0.$$

Найти канонический вид уравнения поверхности и каноническую систему координат.

□ 1. Составляем матрицу P квадратичной функции, матрицу A квадратичной формы и столбец a коэффициентов линейной формы:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

2. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda) \cdot [(5-\lambda)^2 - 9] = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 \cdot (8-\lambda) = 0.$$

Находим его корни $\lambda = 2$ (двойной корень) и $\lambda = 8$ (простой корень).

Учитывая п.4 замечаний 4.16, вычисляем инварианты:

$$\tau_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 2 + 8 = 12;$$

$$\tau_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 8 = 36;$$

$$\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2 \cdot 2 \cdot 8 = 32;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 \cdot (-16) = -256.$$

3. По таблице 4.3 определяем, что поверхность эллиптического типа (все корни характеристического уравнения одного знака, что также подтверждается условиями $\tau_2 = 36 > 0$ и $\tau_1 \cdot \delta = 12 \cdot 32 > 0$). Поскольку $\Delta < 0$, заданная поверхность – эллипсоид.

4. Поскольку поверхность эллиптического типа, корни характеристического уравнения обозначим следующим образом (см. п.4, "а" алгоритма):

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 8, \quad \text{чтобы выполнялись неравенства } |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|.$$

5. Находим взаимно ортогональные собственные направления l_1, l_2, l_3 , соответствующие корням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения. Поскольку имеется двойной ненулевой корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ (см. п.5, "в" алгоритма), то для простого корня $\lambda_3 = 8$ находим ненулевое решение l_3 однородной системы уравнений $(A - 8 \cdot E) \cdot l_3 = 0$:

$$\begin{cases} (2-8) \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0, \\ 0 \cdot x + (5-8) \cdot y + 3 \cdot z = 0, \\ 0 \cdot x + 3 \cdot y + (5-8) \cdot z = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмем, например, решение $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$, т.е. $l_3 = (0 \ 1 \ 1)^T$. В качестве направления l_2 принимаем первый (ненулевой) столбец матрицы $A - 8 \cdot E$: $l_2 = (-6 \ 0 \ 0)^T$. Направление l_1 определяем, используя векторное произведение:

$$\bar{l}_1 = [\bar{l}_2, \bar{l}_3] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{i} + 6 \cdot \bar{j} - 6 \cdot \bar{k},$$

следовательно, $l_1 = (0 \ 6 \ -6)^T$.

Нормируя полученные векторы l_1 , l_2 , l_3 , определяем координатные столбцы векторов канонического базиса:

$$|l_1| = \sqrt{l_1^T \cdot l_1} = \sqrt{0^2 + 6^2 + (-6)^2} = 6 \cdot \sqrt{2}, \quad |l_2| = \sqrt{l_2^T \cdot l_2} = \sqrt{6^2 + 0^2 + 0^2} = 6,$$

$$|l_3| = \sqrt{l_3^T \cdot l_3} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$s_1 = \frac{1}{|l_1|} \cdot l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad s_2 = \frac{1}{|l_2|} \cdot l_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \frac{1}{|l_3|} \cdot l_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

6. Находим координаты x_0 , y_0 , z_0 начала O' канонической системы координат, решая систему уравнений (см. п.6, "а" алгоритма):

$$A \cdot s + a = o \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 2 = 0, \\ 0 \cdot x + 5 \cdot y + 3 \cdot z + 8 = 0, \\ 0 \cdot x + 3 \cdot y + 5 \cdot z + 8 = 0. \end{cases}$$

Получаем $x_0 = -1$, $y_0 = -1$, $z_0 = -1$. Следовательно, вектор $\bar{s} = \overline{OO'}$ переноса начала координат имеет координаты $s = (-1 \ -1 \ -1)^T$, или, что то же самое, начало O' канонической системы координат имеет координаты $O'(-1, -1, -1)$ в исходной системе координат.

7. Вычисляем коэффициенты канонического уравнения (1) эллипсоида (см. п.7, "а" алгоритма):

$$a^2 = b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta} = -\frac{-256}{2 \cdot 32} = 4, \quad c^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_3 \cdot \delta} = -\frac{-256}{8 \cdot 32} = 1.$$

Следовательно, каноническое уравнение заданной поверхности имеет вид

$$\frac{(x')^2}{2^2} + \frac{(y')^2}{2^2} + \frac{(z')^2}{1^2} = 1.$$

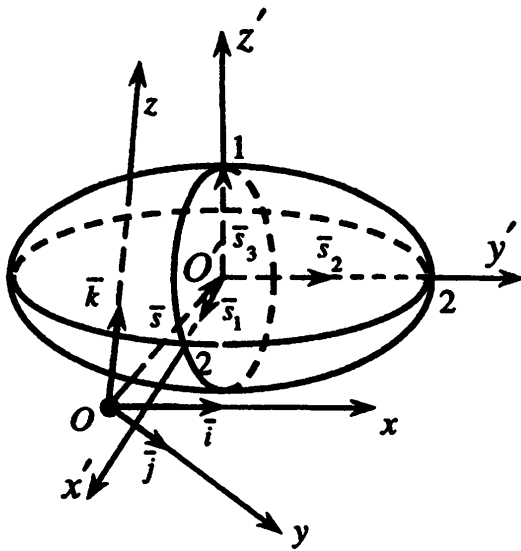


Рис.4.53

8. В координатном пространстве $Oxyz$ изображаем каноническую систему координат $O'x'y'z'$ с началом в точке $O'(-1, -1, -1)$ и базисными векторами $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$, координатные столбцы которых найдены в п.5 (рис.4.53).

9. Строим эллипсоид вращения в канонической системе координат $O'x'y'z'$ по каноническому уравнению, найденному в п.7 (рис.4.53). ■

Пример 4.22. Поверхность второго порядка задана в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением

$$3 \cdot x^2 - 7 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2 + 8 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x \cdot z - 8 \cdot y \cdot z + 10 \cdot x - 14 \cdot y - 6 \cdot z + a_0 = 0,$$

где а) $a_0 = -8$; б) $a_0 = -9$; в) $a_0 = -10$.

Найти канонический вид уравнения поверхности и каноническую систему координат.

□ 1. Составляем матрицу P квадратичной функции, матрицу A квадратичной формы и столбец a коэффициентов линейной формы:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 & 5 \\ 4 & -7 & -4 & -7 \\ -4 & -4 & 3 & -3 \\ 5 & -7 & -3 & a_0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda = -1, \lambda = 9, \lambda = -9$ (см. решение примера 4.18, "в"). Поэтому, учитывая п.4 замечаний 4.14, вычисляем инварианты:

$$\tau_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1 + 9 - 9 = -1;$$

$$\tau_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 = (-1) \cdot 9 + 9 \cdot (-9) + (-1) \cdot (-9) = -81;$$

$$\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = (-1) \cdot 9 \cdot (-9) = 81;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -4 & 5 \\ 4 & -7 & -4 & -7 \\ -4 & -4 & 3 & -3 \\ 5 & -7 & -3 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -1 & -10 \\ -4 & -4 & 3 & -3 \\ 1 & -11 & 0 & a_0 - 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -1 & -10 \\ 0 & -4 & 7 & -11 \\ 0 & -11 & -1 & a_0 - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} -11 & -1 & -10 \\ -4 & 7 & -11 \\ -11 & -1 & a_0 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 10 \\ -4 & 7 & -11 \\ -11 & -1 & a_0 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 10 \\ -81 & 0 & -81 \\ 0 & 0 & a_0 + 9 \end{vmatrix} = 81 \cdot (a_0 + 9).$$

3. По таблице 4.3 определяем, что поверхность гиперболического типа (корни характеристического уравнения имеют разные знаки). При $a_0 = -8$ заданная поверхность – однополостный гиперболоид, так как $\Delta = 81 > 0$; при $a_0 = -9$ заданная поверхность – конус, так как $\Delta = 0$; при $a_0 = -10$ заданная поверхность – двуполостный гиперболоид, так как $\Delta = -81 < 0$.

4. Поскольку поверхность гиперболического типа, корни характеристического уравнения обозначим следующим образом (см. п.4, "б" алгоритма): $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -9$, т.е. λ_1 и λ_2 корни одного знака, причем $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$, а корень противоположного знака $\lambda_3 = 9$.

5. Находим взаимно ортогональные собственные направления l_1 , l_2 , l_3 , соответствующие корням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения. Поскольку все корни простые, то для каждого из них находим ненулевое решение однородной системы $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot l_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Учитывая решение примера 4.18, "в", получаем

$$l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad l_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad l_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Нормируя полученные векторы l_1 , l_2 , l_3 , определяем координатные столбцы векторов канонического базиса:

$$|l_1| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad |l_2| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2} = 3 \cdot \sqrt{2},$$

$$|l_3| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3,$$

$$s_1 = \frac{1}{|l_1|} \cdot l_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad s_2 = \frac{1}{|l_2|} \cdot l_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad s_3 = \frac{1}{|l_3|} \cdot l_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

6. Находим координаты x_0, y_0, z_0 начала O' канонической системы координат; решая систему уравнений (см. п.6, "а" алгоритма):

$$A \cdot s + a = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3 \cdot x + 4 \cdot y - 4 \cdot z + 5 = 0, \\ 4 \cdot x - 7 \cdot y - 4 \cdot z - 7 = 0, \\ -4 \cdot x - 4 \cdot y + 3 \cdot z - 3 = 0. \end{cases}$$

Получаем $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 1$. Следовательно, вектор $\vec{s} = OO'$ переноса начала координат имеет координаты $s = (1 \ -1 \ 1)^T$ или, что то же самое, начало O' канонической системы координат имеет координаты $O'(1, -1, 1)$ относительно исходной системы координат.

7. Вычисляем коэффициенты канонического уравнения (см. п.7, "б" алгоритма):

– при $a_0 = -8$ находим коэффициенты и каноническое уравнение (4) однополостного гиперболоида:

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta} = -\frac{81}{(-1) \cdot 81} = 1, \quad b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta} = -\frac{81}{(-9) \cdot 81} = \frac{1}{9},$$

$$c^2 = \frac{\Delta}{\lambda_3 \cdot \delta} = \frac{81}{9 \cdot 81} = \frac{1}{9}, \quad \frac{(x')^2}{1^2} + \frac{(y')^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{(z')^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1;$$

– при $a_0 = -9$ находим коэффициенты и каноническое уравнение (6) конуса:

$$a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|} = \frac{1}{|-1|} = 1, \quad b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|} = \frac{1}{|-9|} = \frac{1}{9}, \quad c^2 = \frac{1}{|\lambda_3|} = \frac{1}{|9|} = \frac{1}{9},$$

$$\frac{(x')^2}{1^2} + \frac{(y')^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{(z')^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 0;$$

– при $a_0 = -10$ находим коэффициенты и каноническое уравнение (5) двуполостного гиперболоида:

$$a^2 = \frac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta} = \frac{-81}{(-1) \cdot 81} = 1, \quad b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta} = \frac{-81}{(-9) \cdot 81} = \frac{1}{9},$$

$$c^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_3 \cdot \delta} = -\frac{-81}{9 \cdot 81} = \frac{1}{9}, \quad \frac{(x')^2}{1^2} + \frac{(y')^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{(z')^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -1;$$

8. В координатном пространстве $Oxyz$ изображаем каноническую систему координат $O'x'y'z'$ с началом в точке $O'(1, -1, 1)$ и базисными векторами $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$, координатные столбцы которых найдены в п.5 (рис.4.54).

9. Строим однополостный гиперболоид (рис.4.54,а), конус (рис.4.54,б), двуполостный гиперболоид (рис.4.54,в) в канонической системе координат $O'x'y'z'$ по каноническому уравнению, найденному в п.7. ■

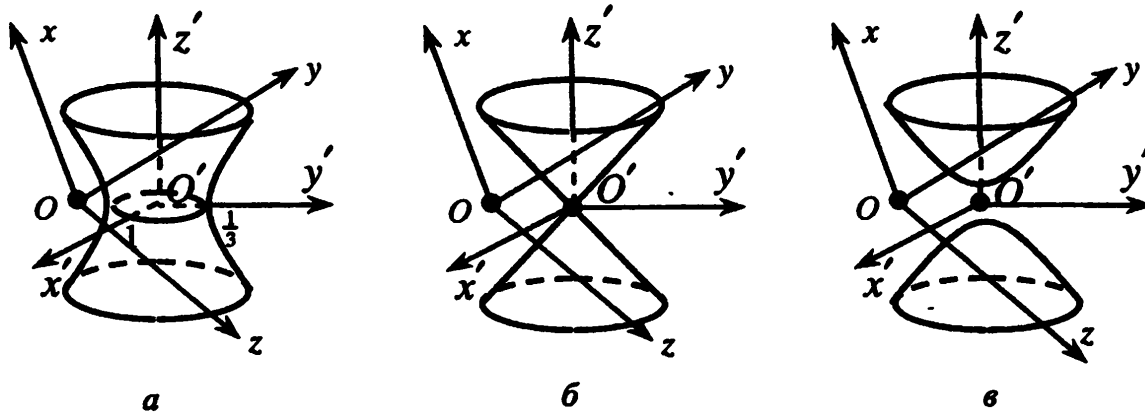


Рис.4.54

Пример 4.23. Поверхность второго порядка задана в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением

$$-2 \cdot x^2 - 2 \cdot y^2 + 4 \cdot z^2 - 20 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x \cdot z + 8 \cdot y \cdot z - 26 \cdot x - 22 \cdot y - 4 \cdot z - 12 = 0.$$

Найти канонический вид уравнения поверхности и каноническую систему координат.

□ 1. Составляем матрицу P квадратичной функции, матрицу A квадратичной формы и столбец a коэффициентов линейной формы:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 & -13 \\ -10 & -2 & 4 & -11 \\ -4 & 4 & 4 & -2 \\ -13 & -11 & -2 & -12 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -10 & -2 & 4 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -13 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляем инварианты:

$$\begin{aligned} \tau_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} &= -2 - 2 + 4 = 0, \quad \tau_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -2 & -10 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -96 - 24 - 24 = -144, \end{aligned}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -10 & -2 & 4 \\ -4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -10 & -4 & -13 \\ -10 & -2 & 4 & -11 \\ -4 & 4 & 4 & -2 \\ -13 & -11 & -2 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24 & -36 & -30 & -13 \\ 12 & -24 & -18 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 11 & -35 & -26 & -12 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3}(-2) \cdot \begin{vmatrix} 24 & -36 & -30 \\ 12 & -24 & -18 \\ 11 & -35 & -26 \end{vmatrix} = 864.$$

Составляем характеристическое уравнение: $-\lambda^3 + 144 \cdot \lambda = 0$. Его корни: $\lambda = 0, \lambda = \pm 12$.

3. По таблице 4.3 определяем, что поверхность параболического типа ($\delta = 0$, т.е. характеристическое уравнение имеет нулевой корень). Поскольку $\Delta > 0$, заданная поверхность – гиперболический параболоид (8).

4. Поскольку поверхность параболического типа, корни характеристического уравнения обозначим следующим образом (см. п.4, "в" алгоритма): $\lambda_3 = 0$ – единственный нулевой корень; так как ненулевые корни разных знаков и $\Delta \neq 0$, то $\lambda_1 = 12$, тогда $\lambda_2 = -12$.

5. Находим взаимно ортогональные собственные направления l_1, l_2, l_3 , соответствующие корням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения. Поскольку все корни простые, то для каждого из них находим ненулевое решение однородной системы $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot l_i = 0, i = 1, 2, 3$:

для $\lambda_1 = 12$

$$\begin{pmatrix} -2-12 & -10 & -4 \\ -10 & -2-12 & 4 \\ -4 & 4 & 4-12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-1, \\ z=-1, \end{cases} \Rightarrow l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

для $\lambda_2 = -12$

$$\begin{pmatrix} -2+12 & -10 & -4 \\ -10 & -2+12 & 4 \\ -4 & 4 & 4+12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=0, \end{cases} \Rightarrow l_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

для $\lambda_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -10 & -2 & 4 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=1, \\ z=-2, \end{cases} \Rightarrow l_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\lambda_3 = 0$ и корни λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, то направление l_3 должно удовлетворять дополнительному условию $a^T \cdot l_3 \leq 0$. Найденное направление l_3 этому условию не удовлетворяет:

$$a^T \cdot l_3 = (-13 \quad -11 \quad -2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 > 0.$$

Поэтому его нужно заменить на противоположное, положив $l_3 = (1 \quad -1 \quad 2)^T$.

Нормируя полученные векторы l_1, l_2, l_3 , определяем координатные столбцы векторов канонического базиса:

$$|l_1| = \sqrt{3}, \quad |l_2| = \sqrt{2}, \quad |l_3| = \sqrt{6},$$

$$s_1 = \frac{1}{|l_1|} \cdot l_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad s_2 = \frac{1}{|l_2|} \cdot l_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \frac{1}{|l_3|} \cdot l_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

6. Так как заданная поверхность (параболоид) не имеет центра, то составляем систему уравнений для нахождения координат x_0, y_0, z_0 начала O' канонической системы координат (см. п.6, "б" алгоритма). Вычисляем

$$a^T \cdot s_3 = (-13 \quad -11 \quad -2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = -\sqrt{6}; \quad a_{np} = (a^T \cdot s_3) \cdot s_3 = -\sqrt{6} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$s_1^T \cdot a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} = 0; \quad s_2^T \cdot a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right) \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{24}{\sqrt{2}};$$

$$a + a_{np} = \begin{pmatrix} -13 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot s_1^T \cdot s + s_1^T \cdot a = 0, \\ \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 \cdot (x_0 - y_0 - z_0) = 0, \\ -12 \cdot (x_0 + y_0) - 24 = 0, \\ -14 \cdot x_0 - 10 \cdot y_0 - 4 \cdot z_0 - 12 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x_0 = 0, y_0 = -2, z_0 = 2$. Следовательно, вектор $\bar{s} = \overline{OO'}$ переноса начала координат имеет координаты $s = (0 \quad -2 \quad 2)^T$ или, что то же самое, начало O' канонической системы координат имеет координаты $O'(0, -2, 2)$ в исходной системе координат.

Согласно п.1 замечаний 4.16, начало канонической системы координат можно найти, решая систему

$$\begin{cases} A \cdot s + a_{\perp} = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \cdot x_0 - 10 \cdot y_0 - 4 \cdot z_0 - 12 = 0, \\ -10 \cdot x_0 - 2 \cdot y_0 + 4 \cdot z_0 - 12 = 0, \\ -4 \cdot x_0 + 4 \cdot y_0 + 4 \cdot z_0 + 0 = 0, \\ -14 \cdot x_0 - 10 \cdot y_0 - 4 \cdot z_0 - 12 = 0, \end{cases}$$

где $a_{\perp} = a - a_{np} = \begin{pmatrix} -13 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. Вычисляем коэффициенты канонического уравнения (8) гиперболического параболоида (см. п.7, "в" алгоритма):

$$a^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1^2 \cdot \tau_2}} = \sqrt{-\frac{864}{12^2 \cdot (-144)}} = \frac{\sqrt{6}}{12}, \quad b^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^2 \cdot \tau_2}} = \sqrt{-\frac{864}{(-12)^2 \cdot (-144)}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Следовательно, каноническое уравнение заданной поверхности имеет вид

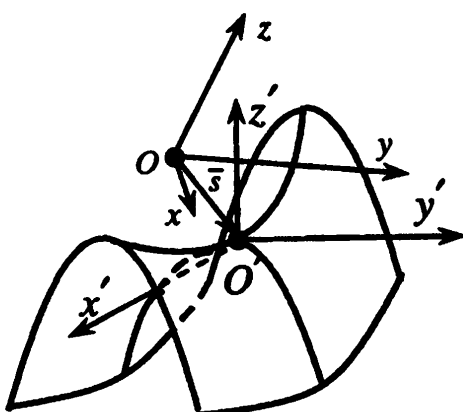


Рис.4.55

$$\frac{(x')^2}{\frac{\sqrt{6}}{12}} - \frac{(y')^2}{\frac{\sqrt{6}}{12}} = 2 \cdot z'.$$

8. В координатном пространстве $Oxyz$ изображаем каноническую систему координат $O'x'y'z'$ с началом в точке $O'(0, -2, 2)$ и базисными векторами $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$, координатные столбцы которых найдены в п.5 (рис.4.55).

9. Строим гиперболический параболоид в канонической системе координат $O'x'y'z'$ по каноническому уравнению, найденному в п.7 (рис.4.55). ■

Пример 4.24. Поверхность второго порядка задана в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением

$$8 \cdot y^2 + 4 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z + 4 \cdot y \cdot z + 4 \cdot x + 8 \cdot y - 9 = 0.$$

Найти канонический вид уравнения поверхности и каноническую систему координат.

□ 1. Составляем матрицу P квадратичной функции, матрицу A квадратичной формы и столбец a коэффициентов линейной формы:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляем инварианты: $\tau_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 + 8 + 0 = 8$,

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 - 1 - 4 = -9; \end{aligned}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4}(-9) \cdot \delta = 0.$$

Так как $\Delta = \delta = 0$, то вычисляем

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & -9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 36 + 9 + 36 = 81. \end{aligned}$$

Составляем характеристическое уравнение: $-\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 + 9 \cdot \lambda = 0$. Его корни: $\lambda = -1, \lambda = 0, \lambda = 9$.

3. По таблице 4.3 определяем, что поверхность параболического типа ($\delta = 0$, т.е. характеристическое уравнение имеет нулевой корень). Поскольку $\Delta = 0$, то поверхность цилиндрическая. Так как $\tau_2 < 0$ и $\kappa_2 \neq 0$, то заданная поверхность – гиперболический цилиндр.

4. Поскольку поверхность параболического типа, корни характеристического уравнения обозначим следующим образом (см. п.4, "в" алгоритма): $\lambda_3 = 0$ – единственный нулевой корень; так как ненулевые корни разных знаков и $\Delta = 0$, а $\kappa_2 = 81 > 0$, то $\lambda_1 = 9$, чтобы выполнялось условие $\lambda_1 \cdot \kappa_2 > 0$, тогда $\lambda_2 = -1$.

5. Находим взаимно ортогональные собственные направления l_1, l_2, l_3 , соответствующие корням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения. Поскольку все корни простые, то для каждого из них находим ненулевое решение однородной системы $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot l_i = 0, i = 1, 2, 3$:

для $\lambda_1 = 9$

$$\begin{pmatrix} 0-9 & 2 & 1 \\ 2 & 8-9 & 2 \\ 1 & 2 & 0-9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=4, \\ z=1, \end{cases} \Rightarrow l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

для $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 0+1 & 2 & 1 \\ 2 & 8+1 & 2 \\ 1 & 2 & 0+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 0, \\ z = 1, \end{cases} \Rightarrow l_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

для $\lambda_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -1, \\ z = 2, \end{cases} \Rightarrow l_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\lambda_3 = 0$ и корни λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, то направление l_3 должно удовлетворять дополнительному условию $a^T \cdot l_3 \leq 0$. Найденное направление l_3 этому условию удовлетворяет:

$$a^T \cdot l_3 = (2 \ 4 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Нормируя полученные векторы l_1, l_2, l_3 , определяем координатные столбцы векторов канонического базиса:

$$|l_1| = 3 \cdot \sqrt{2}, \quad |l_2| = \sqrt{2}, \quad |l_3| = 3,$$

$$s_1 = \frac{1}{|l_1|} \cdot l_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad s_2 = \frac{1}{|l_2|} \cdot l_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad s_3 = \frac{1}{|l_3|} \cdot l_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

6. Так как заданная поверхность (гиперболический цилиндр) не является центральной (она имеет прямую центров), то достаточно найти любое решение $s = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T$ системы уравнений (см. п.6, "а" алгоритма):

$$A \cdot s + a = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z + 2 = 0, \\ 2 \cdot x + 8 \cdot y + 2 \cdot z + 4 = 0, \\ 1 \cdot x + 2 \cdot y + 0 \cdot z + 0 = 0. \end{cases}$$

Возьмем, например, решение $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = -2$. Следовательно, вектор $\vec{s} = \overline{OO'}$ переноса начала координат имеет координаты $s = (0 \ 0 \ -2)^T$ или, что то же самое, начало O' канонической системы координат имеет координаты $O'(0, 0, -2)$ относительно исходной системы координат.

7. Вычисляем коэффициенты канонического уравнения (12) гиперболического цилиндра (см. п.7, "в" алгоритма):

$$a^2 = -\frac{\kappa_2}{\lambda_1 \cdot \tau_2} = -\frac{81}{9 \cdot (-9)} = 1, \quad b^2 = \frac{\kappa_2}{\lambda_2 \cdot \tau_2} = \frac{81}{(-1) \cdot (-9)} = 9.$$

Следовательно, каноническое уравнение заданной поверхности имеет вид

$$\frac{(x')^2}{1^2} - \frac{(y')^2}{3^2} = 1.$$

8. В координатном пространстве $Oxyz$ изображаем каноническую систему координат $O'x'y'z'$ с началом в точке $O'(0, 0, -2)$ и базисными векторами $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$, координатные столбцы которых найдены в п.5 (рис.4.56).

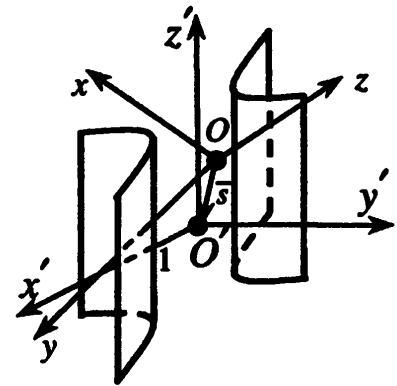


Рис.4.56

9. Строим гиперболический параболоид в канонической системе координат $O'x'y'z'$ по каноническому уравнению, найденному в п.7 (рис.4.56). ■

Пример 4.25. Поверхность второго порядка задана в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением

$$4 \cdot x^2 + y^2 + 9 \cdot z^2 + 4 \cdot x \cdot y - 12 \cdot x \cdot z - 6 \cdot y \cdot z + 6 \cdot x - 2 \cdot y - 6 \cdot z + 11 = 0.$$

Найти канонический вид уравнения поверхности и каноническую систему координат.

□ 1. Составляем матрицу P квадратичной функции, матрицу A квадратичной формы и столбец a коэффициентов линейной формы:

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ -6 & -3 & 9 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 11 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляем инварианты:

$$\tau_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 4 + 1 + 9 = 14, \quad \tau_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ -6 & -3 & 9 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 3 & -1 & -3 & 11 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $\Delta = \delta = 0$, то вычисляем

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -6 & 9 & -3 \\ 3 & -3 & 11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 11 \end{vmatrix} = -25 - 9 - 36 = -70. \end{aligned}$$

Составляем характеристическое уравнение: $-\lambda^3 + 14 \cdot \lambda^2 = 0$. Его корни: $\lambda = 0$ (двойной корень), $\lambda = 14$ (простой корень).

3. По таблице 4.3 определяем, что поверхность параболического типа ($\delta = 0$, т.е. характеристическое уравнение имеет нулевой корень). Поскольку $\Delta = 0$, то поверхность цилиндрическая. Так как $\tau_2 = 0$ и $\kappa_2 \neq 0$, то заданная поверхность – параболический цилиндр.

4. Поскольку поверхность параболического типа, корни характеристического уравнения обозначим следующим образом (см. п.4, "в" алгоритма): $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ – двойной нулевой корень; тогда $\lambda_2 = 14$.

5. Находим взаимно ортогональные собственные направления l_1, l_2, l_3 , соответствующие корням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения. Поскольку $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ – двойной нулевой корень (см. п.5, "г" алгоритма), то находим направление l_2 , соответствующее простому корню $\lambda_2 = 14$, как ненулевое решение системы $(A - \lambda_2 \cdot E) \cdot l_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 4-14 & 2 & -6 \\ 2 & 1-14 & -3 \\ -6 & -3 & 9-14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = -1, \\ z = 3, \end{cases} \Rightarrow l_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем $a^T \cdot l_2 = (3 \quad -1 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -14$; $|l_2|^2 = 14$;

$$a_{np} = a - \frac{a^T \cdot l_2}{|l_2|^2} \cdot l_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{-14}{14} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $a_{np} \neq 0$, то направление $l_1 = -\tau_1 \cdot a_{np} = -14 \cdot a_{np} = (-14 \ 28 \ 0)^T$. Направление l_3 находим, вычисляя векторное произведение

$$\bar{l}_3 = [\bar{l}_1, \bar{l}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -14 & 28 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 84 \cdot \bar{i} + 42 \cdot \bar{j} + 70 \cdot \bar{k}.$$

Следовательно, $l_3 = (84 \ 42 \ 70)^T$.

Нормируя полученные векторы l_1, l_2, l_3 , определяем координатные столбцы векторов канонического базиса:

$$|l_1| = 14 \cdot \sqrt{5}, \quad |l_2| = \sqrt{14}, \quad |l_3| = 14 \cdot \sqrt{70},$$

$$s_1 = \frac{1}{|l_1|} \cdot l_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \frac{1}{|l_2|} \cdot l_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}, \quad s_3 = \frac{1}{|l_3|} \cdot l_3 = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}.$$

6. Так как заданная поверхность (параболический цилиндр) не имеет центров, то составляем систему уравнений для нахождения координат x_0, y_0, z_0 начала O' канонической системы координат (см. п.6, "б" алгоритма). Учитывая п.5, вычисляем

$$a_{np} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a + a_{np} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$s_2^T \cdot a = \left(-\frac{2}{\sqrt{14}} \quad -\frac{1}{\sqrt{14}} \quad \frac{3}{\sqrt{14}} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = -\sqrt{14}.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_2 \cdot s_2^T \cdot s + s_2^T \cdot a = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \cdot x_0 - y_0 + 3 \cdot z_0 - 1 = 0, \\ 4 \cdot x_0 - 3 \cdot y_0 - 3 \cdot z_0 + 11 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечно много решений. Возьмем, например, решение $x_0 = -5, y_0 = 0, z_0 = -3$. Следовательно, вектор $\bar{s} = \overline{OO'}$ переноса начала координат имеет координаты $s = (-5 \ 0 \ -3)^T$ или, что то же самое, начало O' канонической системы координат имеет координаты $O'(-5, 0, -3)$ в исходной системе координат.

Согласно п.1 замечаний 4.16, начало канонической системы координат можно найти, решая систему уравнений

$$\begin{cases} A \cdot s + a_{\perp} = 0, \\ (a + a_{np})^T \cdot s + a_0 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cdot x_0 + 2 \cdot y_0 - 6 \cdot z_0 + 2 = 0, \\ 2 \cdot x_0 + 1 \cdot y_0 - 3 \cdot z_0 + 1 = 0, \\ -6 \cdot x_0 - 3 \cdot y_0 + 9 \cdot z_0 - 3 = 0, \\ 4 \cdot x_0 - 3 \cdot y_0 - 3 \cdot z_0 + 11 = 0, \end{cases}$$

где $a_{\perp} = a - a_{np} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

7. Вычисляем параметр канонического уравнения (14) параболического цилиндра (см. п.7, "в" алгоритма):

$$p = \sqrt{-\frac{\kappa_2}{\tau_1^3}} = \sqrt{-\frac{-70}{14^3}} = \frac{\sqrt{5}}{14}.$$

Следовательно, каноническое уравнение заданной поверхности имеет вид

$$(y')^2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{14} \cdot x'.$$

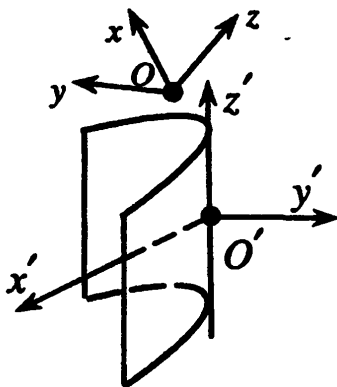


Рис.4.57

8. В координатном пространстве $Oxyz$ изображаем каноническую систему координат $O'x'y'z'$ с началом в точке $O'(-5, 0, -3)$ и базисными векторами $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$, координатные столбцы которых найдены в п.5 (рис.4.57).

9. Строим параболический цилиндр в канонической системе координат $O'x'y'z'$ по каноническому уравнению, найденному в п.7 (рис.4.57). ■

4.4.8. Применение поверхностей первого и второго порядков в задачах на экстремум функций

Общая постановка задачи поиска экстремума функций приведена в разд.3.3.7. Рассмотрим задачу поиска безусловного экстремума функций двух переменных.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОИСКА ЛОКАЛЬНОГО БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Пусть задана дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x) = f(x_1, x_2)$ двух переменных.

Точка x^* называется точкой *локального минимума*, если существует такая окрестность этой точки, для всех точек которой выполняется условие

$$f(x^*) \leq f(x).$$

Если знак неравенства \leq заменить на знак \geq , то получится определение *локального максимума*. Точки локального минимума или максимума называются точками *локального экстремума* функции.

Требуется найти точки локального экстремума функции $f(x)$.

Порядок решения поставленной задачи содержит два этапа [28].

На *первом этапе* при помощи необходимых условий экстремума первого порядка:

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right|_{x=x^*} = 0, \quad \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right|_{x=x^*} = 0, \quad (4.74)$$

находятся стационарные точки x^* , "подозрительные" на наличие локального экстремума (частные производные первого порядка в точке x^* равны нулю).

На *втором этапе* проверяются достаточные условия экстремума, а если они не выполняются, то и необходимые условия второго порядка. Они следуют из формулы Тейлора для приращения функции в точке x^* (учитывая члены до второго порядка включительно):

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2) - f(x_1^*, x_2^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left[a_{11} \cdot \Delta x_1^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 + a_{22} \cdot \Delta x_2^2 \right], \end{aligned}$$

где $a_{11} = \left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \right|_{x=x^*}$, $a_{12} = \left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{x=x^*}$, $a_{22} = \left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \right|_{x=x^*}$, а члены с

производными первого порядка отсутствуют, так как точка x^* удовлетворяет (4.74).

Равенство

$$\Delta f = \frac{1}{2} \left[a_{11} \cdot \Delta x_1^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 + a_{22} \cdot \Delta x_2^2 \right] \quad (4.75)$$

можно рассматривать как уравнение поверхности второго порядка относительно неизвестных $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta f$. Уравнение (4.75) можно записать в матричной форме

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta x_1 \quad \Delta x_2) \cdot H(x^*) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}, \quad (4.76)$$

где $H(x^*)$ – матрица квадратичной формы, называемая *матрицей Гессе*.

Она составлена из частных производных второго порядка, вычисленных в стационарной точке x^* :

$$H(x^*) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \right|_{x=x^*}$$

Как показано в разд.4.4.1, при помощи поворота системы координат вокруг оси Δf можно квадратичную форму в правой части (4.76) привести к каноническому виду

$$\Delta f = \frac{1}{2} \left[\lambda_1 \cdot (\Delta x_1')^2 + \lambda_2 \cdot (\Delta x_2')^2 \right], \quad (4.77)$$

где λ_1, λ_2 – собственные значения матрицы Гессе $H(x^*)$.

В зависимости от знаков собственных значений возможны следующие случаи:

если собственные значения одного знака, то поверхность (4.77) представляет собой эллиптический параболоид: выпуклый при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ (рис.4.58,а), или вогнутый при $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ (рис.4.58,б);

если собственные значения имеют разные знаки, то поверхность (4.77) представляет собой гиперболический параболоид (рис.4.58,в при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$);

если одно из собственных значений равно нулю (например, при $\lambda_2 = 0$), то поверхность (4.77) представляет собой параболический цилиндр: выпуклый при $\lambda_1 > 0$ (рис.4.58,з) или вогнутый при $\lambda_1 < 0$ (рис.4.58,д).

В случае эллиптического параболоида стационарная точка x^* является либо точкой локального минимума функции при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, либо точкой локального максимума функции при $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. В случае гиперболического параболоида (λ_1 и λ_2 имеют разные знаки) в стационарной точке x^* нет экстремума. В случае выпуклого параболического цилиндра можно сказать, что точка x^* не может быть точкой максимума, но может быть точкой минимума, в случае вогнутого параболического цилиндра точка x^* не может быть точкой минимума, но может быть точкой максимума. Таким образом, если хотя бы одно собственное значение равно нулю, судить о наличии экстремума в точке x^* нельзя, так как нужны дополнительные исследования, учитывающие в формуле Тейлора члены выше второго порядка.

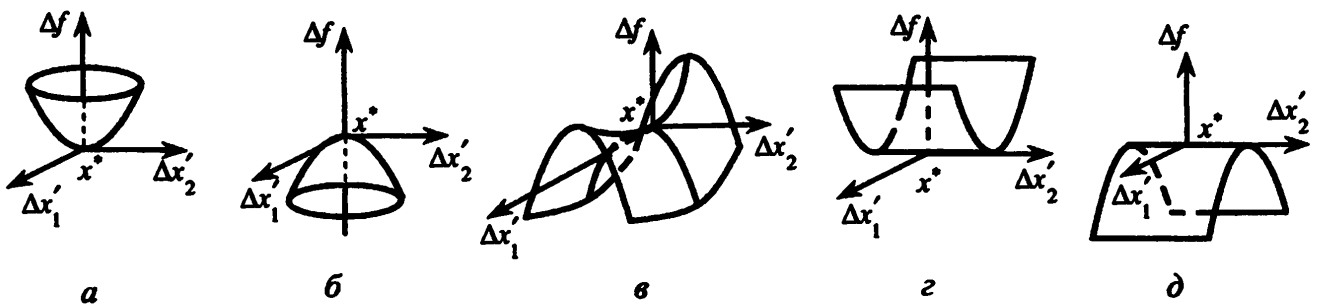


Рис.4.58

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ НА ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

1. Составить и решить систему (4.74) – найти стационарные точки x^* . Если система не имеет решения, то точек локального экстремума нет.
2. Составить матрицу Гессе $H(x^*)$ и найти ее собственные значения λ_1 и λ_2 , решая характеристическое уравнение $\det(H(x^*) - \lambda \cdot E) = 0$.
3. Проверить выполнение следующих условий.
 - а) Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то x^* – точка локального минимума.
 - б) Если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, то x^* – точка локального максимума.
 - в) Если $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, то x^* может быть точкой локального минимума (требуется дополнительное исследование).
 - г) Если $\lambda_1 \leq 0$, $\lambda_2 \leq 0$, то x^* может быть точкой локального максимума (требуется дополнительное исследование).
 - д) Если λ_1 и λ_2 разных знаков ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$), то x^* не является точкой локального экстремума.

Пример 4.25. Найти экстремумы функции $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2$.

□ 1. Решая систему уравнений

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 3 \cdot x_1^2 - 3 \cdot x_2 = 0, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 3 \cdot x_2^2 - 3 \cdot x_1 = 0,$$

находим стационарные точки $O(0,0)$ и $M(1,1)$.

2,3. Составляем матрицу Гессе $H(x) = \begin{pmatrix} 6 \cdot x_1 & -3 \\ -3 & 6 \cdot x_2 \end{pmatrix}$.

В стационарной точке $O(0,0)$ матрица Гессе $H(x)|_O = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем собственные значения матрицы Гессе. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 9 = 0 \text{ имеет корни } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3 \text{ разных знаков.}$$

Следовательно, точка $O(0,0)$ не является точкой экстремума (см. п.3, "д" алгоритма).

В стационарной точке $M(1,1)$ матрица Гессе $H(x)|_M = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (6-\lambda)^2 - 9 = 0$ имеет два положительных корня $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 9$. Следовательно, точка $M(1,1)$ является точкой минимума (см. п.3, "а" алгоритма). ■

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

Рассмотрим постановку задачи поиска условного экстремума функции трех переменных [28].

Пусть заданы:

а) функция $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ трех переменных ($x \in R^3$);

б) множество допустимых решений M ($M \subset R^3$).

Требуется найти такую точку x^* из множества допустимых решений, которой соответствует минимальное значение функции $f(x)$ на этом множестве:

$$f(x^*) = \min_{x \in M} f(x).$$

Алгоритм графического метода поиска условного (или безусловного экстремума) функции аналогичен алгоритму, рассмотренному в разд.3.3.7 для функции двух переменных. Однако его применение на практике ограничивается возможностями изображения пространственных фигур. Как правило, используется плоское изображение пространственных фигур, т.е. проекции этих фигур на плоскость, что не дает полного представления о взаимном их расположении.

Ниже рассматриваются задачи, в которых минимизируемая функция и функции, задающие ограничения, являются многочленами трех переменных первой или второй степени. Построение множества допустимых решений и поверхностей уровня функции $f(x)$ сводится к построению алгебраических поверхностей первого или второго порядков (см. разд.4.2, 4.4.1–4.4.7). В этих задачах применение графического метода упрощается.

Напомним, что поверхностью уровня функции $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ называется геометрическое место точек пространства, в которых функция принимает постоянное значение, т.е. $f(x) = \text{const}$.

Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ является многочленом первой степени, то ее поверхности уровня $f(x) = \text{const}$ при разных значениях постоянной (const) представляют собой семейство параллельных плоскостей (несобственный пучок плоскостей).

Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ является многочленом второй степени, то ее поверхности уровня $f(x) = \text{const}$ при разных значениях постоянной (const) представляют собой поверхности второго порядка. Поскольку уравнения разных поверхностей уровня отличаются только свободными членами, то собственные векторы, собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а также инварианты τ_1, τ_2, δ остаются постоянными для всех поверхностей уровня $f(x) = \text{const}$. Следовательно, тип поверхности и канонический базис остаются постоянными для всех поверхностей уровня квадратичной функции.

Пример 4.26. Графическим методом найти экстремумы:

$$\text{а) } f(x) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 \rightarrow \text{extr}; \quad \text{б) } \begin{cases} f(x) = x_3 \rightarrow \text{extr}, \\ \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + x_3 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \rightarrow \text{extr}, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \end{cases}$$

□ а) 1. Множество M допустимых решений строить не нужно, так как оно совпадает со всем пространством: $M = R^3$.

2. Поверхность уровня $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 = \text{const}$ при $\text{const} > 0$ представляет собой эллипсоид (рис.4.59,а), при $\text{const} = 0$ – мнимый конус с единственной вещественной точкой $O(0, 0, 0)$, при $\text{const} < 0$ – мнимый эллипсоид. При увеличении постоянной (const) полуоси эллипсоида пропорционально увеличиваются. На рис.4.59,а изображены эллипсоиды $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 1$ ($a = 1$,

$b = 2, c = 1$) и $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 4$, или $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{16} + \frac{x_3^2}{4} = 1$ ($a = 2, b = 4, c = 2$).

Стрелками указаны направления наискорейшего возрастания функции.

3. Из п.2 следует, что допустимые значения функции определяются неравенством $0 \leq f(x) < +\infty$.

4. В точке $O(0, 0, 0)$ достигается безусловный минимум функции, так как в этой точке функция принимает наименьшее значение по сравнению со значениями в других точках пространства, а наибольшего значения функция не достигает.

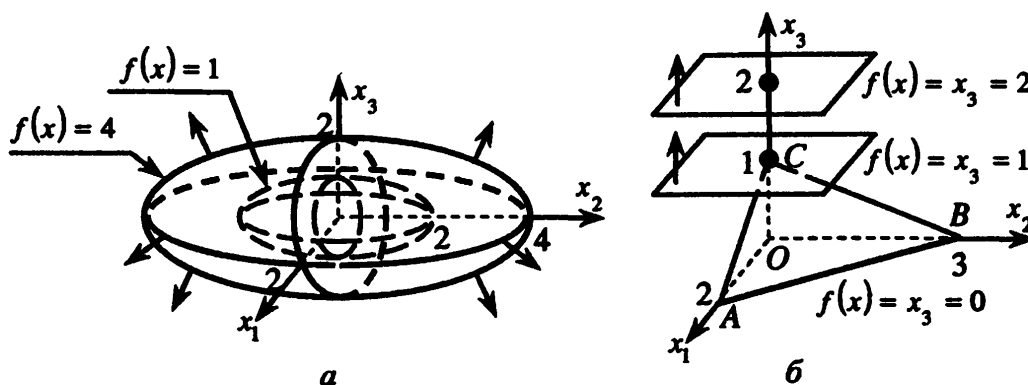


Рис.4.59

б) Решается задача поиска условного экстремума с ограничениями типа равенств и неравенств.

1. Строим множество M допустимых решений – часть плоскости $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + x_3 = 1$ в первом октанте, т.е. плоский треугольник с вершинами $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 1)$ (рис.4.59,б).

2. Поверхности уровня $x_3 = \text{const}$ представляют собой семейство параллельных плоскостей, каждая из которых перпендикулярна оси аппликат. На рис.4.59,б изображены три плоскости уровня $x_3 = 0$, $x_3 = 1$, $x_3 = 2$. При $\text{const} < 0$ или $\text{const} > 1$ плоскость $x_3 = \text{const}$ не имеет общих точек с треугольником ABC ; при $0 \leq \text{const} \leq 1$ плоскость $x_3 = \text{const}$ имеет общие точки с треугольником ABC , в частности, при $\text{const} = 0$ плоскости $x_3 = 0$ принадлежит сторона AB треугольника, при $\text{const} = 1$ плоскости $x_3 = 1$ принадлежит вершина C треугольника.

3. Из п.2 следует, что допустимые значения функции определяются неравенством $0 \leq f(x) \leq 1$.

4. Наименьшее значение на множестве M , равное нулю, функция достигает в любой точке отрезка AB ; наибольшее значение на множестве M , равное единице, функция достигает в точке $C(0, 0, 1)$.

в) Решается задача поиска условного экстремума с ограничением типа равенств.

1. Строим множество M допустимых решений – сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ единичного радиуса с центром в начале координат (рис.4.60).

2. Поверхности уровня $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \text{const}$ представляют собой либо однополостный гиперболоид вращения при $\text{const} > 0$ (например, однополостный гиперболоид $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ (рис.4.60,а)), либо круговой конус $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ при $\text{const} = 0$ (рис.4.60,б), либо двуполостный гиперболоид вращения при $\text{const} < 0$ (например, двуполостный гиперболоид $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ (рис.4.60,в)). При $\text{const} > 1$ поперечные полуоси однополостного гиперболоида $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \text{const}$ больше единицы, и он не имеет общих точек со сферой единичного радиуса. При $\text{const} < -1$ продольная полуось двуполостного гиперболоида $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \text{const}$ больше единицы, и он не имеет общих точек со сферой $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. При $-1 \leq \text{const} \leq 1$ поверхность уровня $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \text{const}$ имеет общие точки с заданной сферой.

3. Из п.2 следует, что допустимые значения функции определяются неравенством $-1 \leq f(x) \leq 1$.

4. Наименьшее значение на множестве M , равное -1 , функция достигает в точках $(0, 0, \pm 1)$ – вершинах двуполостного гиперболоида $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ (рис.4.60,в); наибольшее значение на множестве M , равное единице, функция достигает в точках окружности

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

т.е. в точках горлового эллипса (в данном случае окружности) однополостного гиперболоида вращения $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ (рис.4.60,а). ■

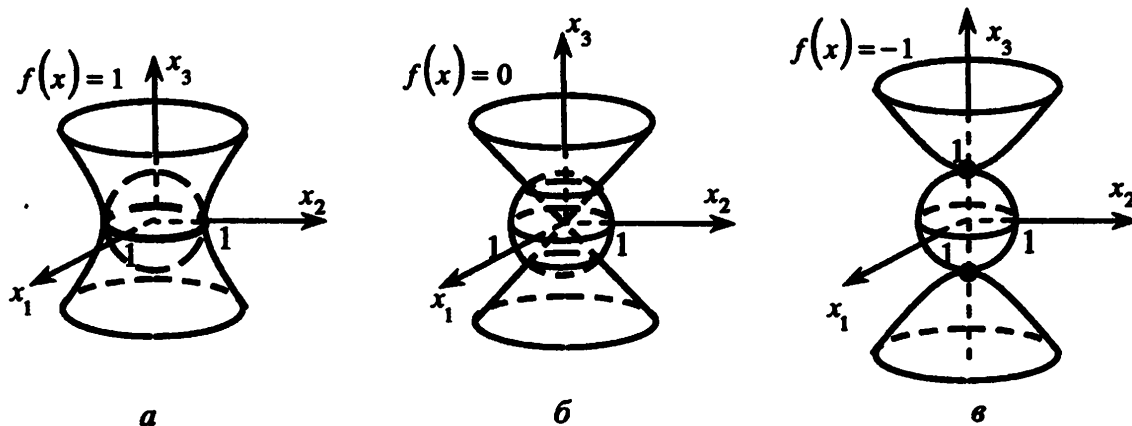


Рис.4.60

Задачи для самостоятельного решения

Во всех задачах предполагается, что в пространстве задана прямоугольная система координат $Oxyz$. Коэффициенты в общих и параметрических уравнениях прямых и плоскостей, а также в канонических уравнениях прямых, указанные в ответах, определяются неоднозначно.

4.1. Плоскость задана уравнением $x + 2 \cdot y - 3 \cdot z - 6 = 0$. Составить параметрическое уравнение и уравнение "в отрезках" этой плоскости.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x=6-2 \cdot t_1+3 \cdot t_2, \\ y=t_1, \\ z=t_2, \end{cases} \quad t_1 \in R, t_2 \in R; \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1.$$

4.2. Плоскость проходит через точки $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 3, 1)$, $C(3, -4, 0)$. Составить для этой плоскости: а) общее уравнение; б) параметрическое уравнение; в) уравнение "в отрезках".

$$\text{Ответ: а) } 3 \cdot x + 2 \cdot y - 2 \cdot z - 1 = 0; \quad \text{б) } \begin{cases} x=1+2 \cdot t_1, \\ y=2+t_2, \\ z=3+3 \cdot t_1+t_2, \end{cases} \quad t_1 \in R, t_2 \in R;$$

$$\text{в) } \frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{-\frac{1}{2}} = 1.$$

4.3. Прямая проходит через точки $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 3, 1)$. Составить для этой прямой: а) общее уравнение; б) параметрическое уравнение; в) каноническое уравнение.

$$\text{Ответ: а) } \begin{cases} x+2 \cdot y-5=0, \\ x-z+2=0; \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x=1-2 \cdot t, \\ y=2+t, \\ z=3-2 \cdot t; \end{cases} \quad t \in R; \quad \text{в) } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}.$$

4.4. Найти ортогональную проекцию A' точки $A(3, -4, -2)$ на плоскость, проходящую через точку $B(2, 3, -3)$ и прямую $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

$$\text{Ответ: } A'(2, -3, -5).$$

4.5. Найти точку C' , симметричную точке $C(2, -5, 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(5, 4, 6)$ и $B(-2, -17, -8)$.

$$\text{Ответ: } C'(4, 1, -3).$$

4.6. Заданы координаты вершин $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 3, 1)$, $C(3, -4, 0)$ треугольника ABC . Составить уравнения прямых, проходящих через вершину A и содержащих медиану, высоту и биссектрису треугольника, а также уравнение серединного перпендикуляра к стороне BC , принадлежащего плоскости треугольника.

$$\text{Ответ: } \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}; \quad \begin{cases} 4 \cdot x - 7 \cdot y - z + 13 = 0, \\ 3 \cdot x + 2 \cdot y - 2 \cdot z - 1 = 0; \end{cases} \quad \frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{11} = \frac{z-3}{23}; \quad \begin{cases} 4 \cdot x - 7 \cdot y - z - 7 = 0, \\ 3 \cdot x + 2 \cdot y - 2 \cdot z - 1 = 0. \end{cases}$$

4.7. В пространстве заданы три прямые:

$$\begin{cases} x - y + 3 \cdot z - 2 = 0, \\ 2 \cdot x + y - 2 \cdot z - 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot t, \\ y = 2 - 16 \cdot t, \\ z = 4 - 6 \cdot t, \end{cases} t \in R; \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{8} = \frac{z+3}{3}.$$

Найти величину угла между скрещивающимися прямыми. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые.

Ответ: $\arccos \frac{36}{37}$; $23 \cdot x + 4 \cdot y - 3 \cdot z - 19 = 0$.

4.8. Заданы координаты вершин $O(0,0,0)$, $A(m,n,-1)$, $B(n,-m,1)$, $C(1,1,1)$ треугольной пирамиды $OABC$. Требуется:

- составить общее уравнение плоскости грани ABC ;
- найти расстояние от вершины O до плоскости грани ABC ;
- найти величину угла между плоскостями граней OAB и ABC ;
- найти угол между ребром OA и основанием ABC пирамиды;
- найти проекцию вершины O на плоскость основания ABC ;
- составить каноническое уравнение прямой, проходящей через вершину O и точку M пересечения медиан треугольника ABC ;
- найти угол между прямыми OM и AB ;
- найти расстояние между прямыми OM и AB ;
- найти ортогональную проекцию C' вершины C на прямую AB ;
- составить уравнение прямой, симметричной прямой OM относительно плоскости основания ABC .

4.9. Определить виды линий второго порядка, получающихся в сечениях поверхности $x^2 + 2 \cdot y^2 - 3 \cdot z^2 - 1 = 0$ плоскостями: а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = 2$.

Ответ: а) гипербола; б) пара пересекающихся прямых; в) гипербола.

4.10. Используя ортогональные инварианты, при каждом действительном значении λ определить вид поверхности:

а) $\lambda \cdot x^2 + 8 \cdot y^2 + z^2 + 16 \cdot x \cdot y + 4 \cdot x \cdot z + 4 \cdot y \cdot z - 4 \cdot x - 4 \cdot y + 2 \cdot z = 0$;

б) $x^2 - 2 \cdot y^2 - 3 \cdot z^2 - 4 \cdot x \cdot y - 6 \cdot x \cdot z - 2 \cdot x + 4 \cdot y + 6 \cdot z + \lambda = 0$;

в) $\lambda \cdot x^2 + z^2 + 4 \cdot x \cdot z + 4 \cdot x - 4 \cdot y + 2 \cdot z = 0$.

Ответ: а) однополостный гиперболоид при $\lambda < 8$, эллиптический цилиндр при $\lambda = 8$, эллипсоид при $\lambda > 8$; б) двуполостный гиперболоид при $\lambda < 1$, конус при $\lambda = 1$, однополостный гиперболоид при $\lambda > 1$; в) гиперболический параболоид при $\lambda < 4$, параболический цилиндр при $\lambda = 4$, эллиптический параболоид при $\lambda > 4$.

4.11. Привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду, определить название поверхности и указать соответствующую ортогональную замену неизвестных:

$$а) x^2 + y^2 - z^2 - 2 \cdot x - 2 \cdot y + 2 \cdot z = 0;$$

$$б) x^2 - y^2 - z^2 - 2 \cdot y - 1 = 0;$$

$$в) x^2 - 4 \cdot x + z + 3 = 0;$$

$$г) 2 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 - 4 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y \cdot z - 1 = 0;$$

$$д) 3 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2 - 8 \cdot x \cdot y - 6 \cdot y \cdot z = 0;$$

$$е) 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + z^2 - 10 \cdot x \cdot y + 20 \cdot x - 8 \cdot y + 29 = 0;$$

$$ж) 16 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 - z^2 - 24 \cdot x \cdot y - 9 \cdot x - 12 \cdot y + 4 \cdot z + 71 = 0.$$

Ответ: а) однополостный гиперболоид (вращения) $\frac{(x')^2}{1^2} + \frac{(y')^2}{1^2} - \frac{(z')^2}{1^2} = 1;$

$x = x' + 1, y = y' + 1, z = z' + 1;$ б) конус (круговой) $\frac{(x')^2}{1^2} + \frac{(y')^2}{1^2} - \frac{(z')^2}{1^2} = 0;$

$x = z', y = x' - 1, z = y';$ в) параболический цилиндр $(y')^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x';$

$x = y' + 2, y = z', z = 1 - x';$ г) эллипсоид $\frac{(x')^2}{1^2} + \frac{(y')^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{(z')^2}{(\frac{1}{\sqrt{10}})^2} = 1;$

$x = \frac{2}{3} \cdot x' + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y' - \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot z', y = \frac{1}{3} \cdot x' + 0 \cdot y' + \frac{4}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot z', z = -\frac{2}{3} \cdot x' + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y' +$

$+\frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot z';$ д) конус $\frac{(x')^2}{(\sqrt{8})^2} + \frac{(y')^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{(z')^2}{(\sqrt{12})^2} = 0;$ $x = \frac{3}{5} \cdot x' + \frac{4}{5 \cdot \sqrt{2}} \cdot y' + \frac{4}{5 \cdot \sqrt{2}} \cdot z',$

$y = 0 \cdot x' - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y' + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z', z = -\frac{4}{5} \cdot x' + \frac{3}{5 \cdot \sqrt{2}} \cdot y' + \frac{3}{5 \cdot \sqrt{2}} \cdot z';$ е) двуполостный

гиперболоид $\frac{(x')^2}{(\sqrt{21})^2} + \frac{(y')^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{(z')^2}{(\sqrt{7})^2} = -1;$ $x = 0 \cdot x' + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y' + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z', y = 2 +$

$+ 0 \cdot x' - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y' + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z', z = x';$ ж) гиперболический параболоид $\frac{(x')^2}{(\sqrt{\frac{3}{10}})^2} -$

$-\frac{(y')^2}{(\sqrt{\frac{15}{2}})^2} = 2 \cdot z';$ $x = 3 + \frac{4}{5} \cdot x' + 0 \cdot y' + \frac{3}{5} \cdot z', y = 4 - \frac{3}{5} \cdot x' + 0 \cdot y' + \frac{4}{5} \cdot z', z = 2 +$

$+ y'.$ Замены переменных определяются неоднозначно.

4.12. Привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду, определить название поверхности, найти координаты начала канонической системы координат и ее базисных векторов относительно исходной системы координат:

$$а) m \cdot x^2 + n \cdot y^2 - z^2 - 2 \cdot m \cdot n \cdot x - 2 \cdot m \cdot n \cdot y - 2 \cdot m \cdot n \cdot z + m^2 \cdot n \cdot (2 - n) = 0;$$

$$б) n \cdot x^2 + n \cdot y^2 + \frac{2}{m+n} \cdot z^2 + 2 \cdot m \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z + m - n = 0.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ [10]

П.1. Числовые матрицы

Матрицей размеров $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = (a_{ij}), \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Числа, составляющие матрицу, называются **элементами матрицы**: a_{ij} – элемент матрицы, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца матрицы. Всюду далее предполагается, что элементы матриц являются действительными числами, если не оговорено противное.

Две матрицы A и B называются **равными** ($A = B$), если они имеют одинаковые размеры ($m \times n$) и равные соответствующие элементы:

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

ТИПЫ МАТРИЦ

В общем случае матрицу (размеров $m \times n$) называют **прямоугольной**. В частности, если матрица состоит из одного столбца ($n = 1$) или одной строки ($m = 1$), то она называется **матрицей-столбцом** или **матрицей-строкой** (либо просто **столбцом** или **строкой**) соответственно. Матрицы-строки или матрицы-столбцы часто обозначают строчными буквами. Матрица размеров 1×1 – это просто число (единственный элемент матрицы).

Если у матрицы количество строк (m) равно количеству столбцов (n), то матрицу называют **квадратной** (n -го порядка). Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ** квадратной матрицы (ей соответствует штриховая линия на рис. П.1, соединяющая левый верхний угол матрицы (элемент a_{11}) с правым нижним углом (элемент a_{nn})). Диагональ, соединяющая левый нижний угол (элемент a_{n1}) с правым верхним углом (элемент a_{1n}), называется **побочной**.

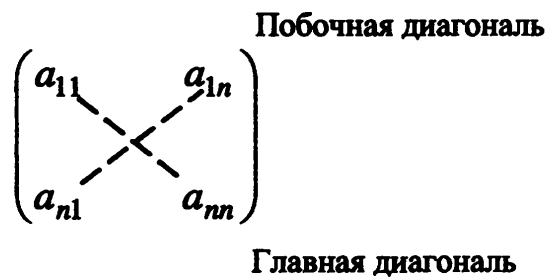


Рис. П.1

Квадратная матрица вида $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, у которой все

элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной* и обозначается $diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. Частным случаем диагональной матрицы служит квадратная матрица

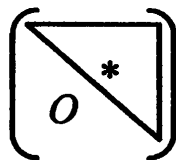
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

которая называется *единичной* (n -го порядка) и обозначается E (или E_n).

Диагональная



Верхняя
треугольная



Нижняя
треугольная

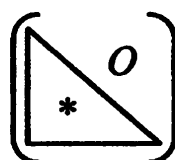


Рис. П.2

Если все элементы квадратной матрицы, расположенные ниже (выше) главной диагонали, равны нулю, то матрицу называют *верхней треугольной* (*нижней треугольной*).

На рис. П.2 изображены диагональная и треугольные матрицы (здесь и далее будем полагать, что в частях матрицы, помеченных символом O , все элементы равны нулю, а в частях, помеченных символом $*$ и линиями, элементы матрицы могут быть произвольными). Заметим, что диагональная матрица, в частности единичная, является одновременно верхней и нижней треугольной.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

П.2. Линейные операции над матрицами

СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – матрицы одинаковых размеров $m \times n$. Матрица $C = (c_{ij})$ тех же размеров $m \times n$ называется *суммой матриц* A и B , если ее элементы равны сумме соответствующих элементов матриц A и B : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Сумма матриц обозначается $C = A + B$. Операция сложения матриц определена только для матриц одинаковых размеров и выполняется поэлементно.

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ **на число** λ **называется матрица** $C = (c_{ij})$ **тех же размеров, что и матрица** A , **каждый элемент которой равен произведению числа** λ **на соответствующий элемент матрицы** A :

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Произведение обозначается λA или $A\lambda$. Операция умножения матрицы на число выполняется поэлементно.

Матрица $(-1) \cdot A$ называется **противоположной** матрице A и обозначается $(-A)$. Сумма матриц B и $(-A)$ называется **разностью** и обозначается $B - A$. Для нахождения разности матриц $B - A$ следует из элементов матрицы B вычесть соответствующие элементы матрицы A . Вычитать можно только матрицы одинаковых размеров.

П.3. Умножение матриц

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

Пусть даны матрицы $A = (a_{ij})$ размеров $m \times p$ и $B = (b_{ij})$ размеров $p \times n$. Матрицу C размеров $m \times n$, элементы c_{ij} которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n;$$

называют **произведением** матриц A и B и обозначают $C = AB$. Операция умножения матрицы A на матрицу B определена только для **согласованных** матриц, у которых число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B :

$$\begin{array}{c} C = A \cdot B \\ \begin{matrix} m \times n & m \times p & p \times n \end{matrix} \end{array}$$

The diagram shows three matrices in large parentheses. The first matrix is labeled 'A' and has dimensions 'm x p' below it. A horizontal arrow points from the center of matrix A to the center of matrix B. The second matrix is labeled 'B' and has dimensions 'p x n' below it. A vertical arrow points from the top of matrix B to the bottom of matrix B. An equals sign follows matrix B. The third matrix is labeled 'C' and has dimensions 'm x n' below it. A dashed box is drawn around the element 'c_ij' in matrix C. The letter 'i' is to the left of the top-left corner of the dashed box, and the letter 'j' is above the top-right corner of the dashed box.

Рис. П.3

Чтобы получить элемент c_{ij} , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца матрицы C , следует выделить i -ю строку матрицы A и j -й столбец матрицы B (рис. П.3). Они содержат одинаковое число элементов, так как матрицы A и B согласованы. Затем найти сумму попарных произведений соответствующих элементов: первый элемент i -й строки умножается на первый элемент j -го столбца, второй элемент i -й строки умножается на второй элемент j -го столбца и т.д., а результаты перемножений складываются.

В произведении $A \cdot B$ матрицу A называют левым множителем для B и говорят об умножении матрицы B на матрицу A *слева*. Аналогично матрицу B называют правым множителем для A и говорят об умножении матрицы A на матрицу B *справа*.

СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Пусть λ – любое число, A, B, C – произвольные матрицы, для которых определены операции умножения и сложения, записанные в левых частях следующих равенств. Тогда определены операции, указанные в правых частях, и справедливы равенства:

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $A(B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B)C = AC + BC$;
4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.

В общем случае умножение матриц не является коммутативным. Произведение зависит от перестановки множителей, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Для любой квадратной матрицы A порядка n справедливы следующие равенства $A \cdot E = E \cdot A = A$, где E – единичная матрица порядка n .

Для любой квадратной матрицы A справедливы равенства $A \cdot O = O$ и $O \cdot A = O$, где O – нулевые матрицы соответствующих порядков.

П.4. Транспонирование матриц

Для любой матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *транспонированной матрицей* называется матрица $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, получающаяся из матрицы

A заменой строк столбцами, а столбцов – строками. Чтобы по данной мат-

рице A получить матрицу A^T , нужно первую строку матрицы A записать как первый столбец матрицы A^T , вторую строку матрица A записать как второй столбец матрицы A^T и т.д. Эта операция называется *транспонированием* матрицы A .

Квадратная матрица называется *симметрической*, если

$$A^T = A.$$

У симметрической матрицы элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ ТРАНСПОНИРОВАНИЯ

Пусть λ – любое число, A, B – произвольные матрицы, для которых определены операции умножения и сложения, записанные в левых частях следующих равенств. Тогда определены операции, указанные в правых частях, и справедливы равенства:

1. $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$;
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
4. $(A^T)^T = A$.

Операцию транспонирования можно применить к числам, считая их матрицами размеров 1×1 . Разумеется, что при транспонировании число не изменяется: $(\lambda)^T = \lambda$.

П5. Блочные (клеточные) матрицы

Числовая матрица A размеров $m \times n$, разделенная горизонтальными и вертикальными линиями на блоки (клетки), которые представляют собой матрицы, называется *блочной (клеточной) матрицей*. Элементами блочной матрицы A являются матрицы A_{ij} размеров $m_i \times n_j$, $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, q$, причем $m_1 + m_2 + \dots + m_p = m$ и $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$.

Операции с блочными матрицами выполняются по тем же правилам, что и с числовыми матрицами.

П.6. Определители

Пусть A – квадратная матрица порядка n . *Определитель (детерминант)* квадратной матрицы A – это число $\det A$, которое ставится в соответствие матрице и вычисляется по ее элементам согласно следующим правилам.

1. Определителем матрицы $A = (a_{11})$ порядка $n = 1$ называется единственный элемент этой матрицы: $\det(a_{11}) = a_{11}$.

2. Определителем матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ порядка $n > 1$ называется число

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n},$$

где M_{1j} – определитель квадратной матрицы порядка $n-1$, полученной из A вычеркиванием первой строки и j -го столбца.

Определитель матрицы обозначают, заключая матрицу в "прямые" скобки:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Имея в виду это обозначение, для краткости говорят о *порядке определителя*, *строках* или *столбцах определителя*, *элементах определителя*, опуская при этом слово "матрица". Например, первая строка определителя n -го порядка – это первая строка $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ квадратной матрицы n -го порядка.

Квадратную матрицу, определитель которой равен нулю, называют *вырожденной (особой)*, в противном случае – *невырожденной (неособой)*.

ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Индуктивное определение позволяет вычислить определитель любого порядка.

Определитель второго порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель второго порядка равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали (см. схему на рис. П.4).

Определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}.$$

Схема вычисления определителя второго порядка

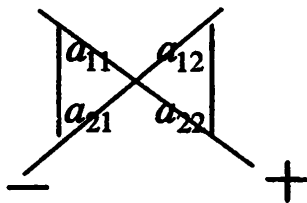


Рис. П.4

Схема вычисления определителя третьего порядка

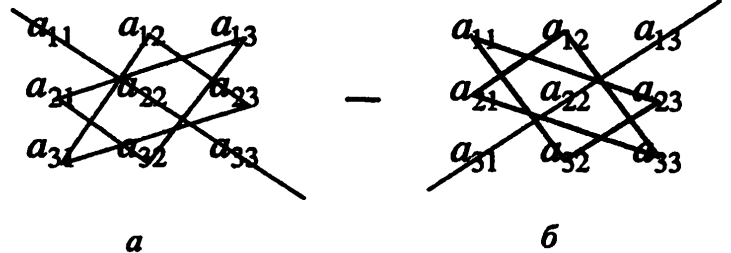


Рис. П.5

Для запоминания формулы используется *правило треугольников*: надо сложить три произведения трех элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников, имеющих сторону, параллельную главной диагонали (рис. П.5,а), и вычесть три произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах двух треугольников, имеющих сторону, параллельную побочной диагонали (рис. П.5,б).

Для определителя квадратной матрицы A порядка n справедливы формулы

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad (\text{формула разложения по } i\text{-й строке});$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad (\text{формула разложения по } j\text{-му столбцу}),$$

где M_{ij} – определитель квадратной матрицы порядка $n-1$, полученной из матрицы A вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Определитель верхней или нижней треугольных матриц равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Для любой квадратной матрицы $\det A = \det(A^T)$, т.е. при транспонировании определитель не изменяется.

2. Если в определителе один из столбцов нулевой (все элементы столбца равны нулю), то определитель равен нулю: $\det(\dots 0 \dots) = 0$.

3. При перестановке двух столбцов определитель меняет знак на противоположный (свойство антисимметричности):

$$\det(\dots a_j \dots a_k \dots) = -\det(\dots a_k \dots a_j \dots).$$

4. Если в определителе имеется два одинаковых столбца, то он равен нулю: $\det(\dots a_j \dots a_k \dots) = 0$ при $a_j = a_k$.

5. При умножении всех элементов одного столбца определителя на число определитель умножается на это число:

$$\det(a_1 \dots \lambda \cdot a_j \dots a_n) = \lambda \cdot \det(a_1 \dots a_j \dots a_n).$$

б. Определитель произведения квадратных матриц одного и того же порядка равен произведению их определителей: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

П.7. Линейная зависимость и линейная независимость строк (столбцов) матрицы

В П.2 были введены операции умножения матриц на число и сложения матриц, в частности, для матриц-столбцов $(n \times 1)$ и матриц-строк $(1 \times n)$. Матрицы-столбцы (матрицы-строки) будем называть далее просто столбцами (соответственно строками) и обозначать в данном разделе прописными буквами. При помощи этих операций можно составлять некоторые алгебраические выражения. Напомним, что *равными* считаются столбцы одинаковых размеров с равными соответствующими элементами.

Столбец A называется *линейной комбинацией* столбцов A_1, A_2, \dots, A_k одинаковых размеров, если

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – некоторые числа. В этом случае говорят, что *столбец A разложен по столбцам A_1, A_2, \dots, A_k* , а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ называют *коэффициентами разложения*. Линейная комбинация $A = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + \dots + 0 \cdot A_k$ с нулевыми коэффициентами называется *тривиальной*.

Если столбцы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix},$$

то матричному равенству $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k$ соответствуют поэлементные равенства

$$a_i = \alpha_1 \cdot a_{i1} + \alpha_2 \cdot a_{i2} + \dots + \alpha_k \cdot a_{ik}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Набор столбцов A_1, A_2, \dots, A_k одинаковых размеров называется *системой столбцов*.

Система из k столбцов A_1, A_2, \dots, A_k называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, что

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k = o. \quad (\text{П.1})$$

Здесь и далее символом o обозначается нулевой столбец соответствующих размеров.

Система из k столбцов A_1, A_2, \dots, A_k называется *линейно независимой*, если равенство (П.1) возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, т.е. когда линейная комбинация в левой части (П.1) тривиальная. Аналогичные определения формулируются и для строк (матриц-строк).

Свойства линейно зависимых и линейно независимых столбцов аналогичны свойствам линейно зависимых и линейно независимых векторов.

П.8. Ранг матрицы

Пусть A – матрица размеров $m \times n$, а k – натуральное число, не превосходящее m и n : $k \leq \min\{m; n\}$. *Минором k -го порядка* матрицы A называется определитель матрицы k -го порядка, образованной элементами, стоящими на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов матрицы A .

В матрице A размеров $m \times n$ минор r -го порядка называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры $(r+1)$ -го порядка равны нулю или их вообще не существует.

Рангом матрицы называется порядок базисного минора. В нулевой матрице базисного минора нет. Поэтому ранг нулевой матрицы, по определению полагают равным нулю. Ранг матрицы A обозначается $\text{rg } A$.

Другими словами, ранг матрицы равен наибольшему порядку отличного от нуля минора этой матрицы.

Теорема о ранге матрицы. *Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк этой матрицы.*

Следствие. *Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов:*

$$\text{rg } A = \text{rg } A^T .$$

Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы один из его столбцов (одна из его строк) был линейной комбинацией остальных столбцов (строк).

П.9. Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица порядка n . Матрица A^{-1} , удовлетворяющая вместе с заданной матрицей A равенствам:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E ,$$

называется *обратной*. Матрицу A называют *обратимой*, если для нее существует обратная, в противном случае – *необратимой*.

Из определения следует, что если обратная матрица A^{-1} существует, то она квадратная того же порядка, что и A . Однако не для всякой квадрат-

ной матрицы существует обратная. Если определитель матрицы A равен нулю ($\det A = 0$), то для нее не существует обратной.

Квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, определитель которой от-

личен от нуля, имеет обратную матрицу и притом только одну:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot A^+,$$

где $A^+ = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица, транспонированная для матри-

цы, составленной из алгебраических дополнений элементов матрицы A .

Матрица A^+ называется **присоединенной матрицей** по отношению к матрице A .

СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Операция обращения матрицы обладает следующими свойствами:

$$1. (A^{-1})^{-1} = A; \quad 2. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \quad 3. (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;$$

$$4. \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}; \quad 5. E^{-1} = E,$$

если имеют смысл операции, указанные в равенствах 1 – 4.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Действительная квадратная невырожденная матрица A называется **ортогональной**, если $A^{-1} = A^T$. Из определения следуют основные свойства ортогональной матрицы A .

$$1. A^T A = E = AA^T.$$

2. $|\det A| = 1$ – модуль определителя ортогональной матрицы равен единице.

3. Матрица A^{-1} (или, что то же самое A^T) является ортогональной.

4. Произведение ортогональных матриц одного и того же порядка является ортогональной матрицей.

П.10. Системы линейных алгебраических уравнений

Системой t линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (\text{П.2})$$

Числа a_{ij} , $i=1, \dots, t$, $j=1, \dots, n$ называются **коэффициентами системы**; b_1, b_2, \dots, b_m — **свободными членами**, x_1, x_2, \dots, x_n — **неизвестными**. Количество t уравнений в системе может быть меньше, больше или равно числу n неизвестных.

Решением системы называется упорядоченная совокупность n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ такая, что после замены неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n соответственно числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ каждое уравнение системы превращается в верное числовое равенство. Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Система (П.2) называется **однородной**, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (\text{П.3})$$

В отличие от однородной, систему общего вида (П.2) называют **неоднородной**.

Матричная запись неоднородной системы уравнений (П.2) имеет вид

$$Ax = b, \quad (\text{П.4})$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица системы, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — **столбец неизвестных**,

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — **столбец свободных членов**. Матричная запись однородной системы уравнений (П.3) имеет вид:

$$Ax = o, \quad (\text{П.5})$$

где символ o в правой части обозначает нулевой столбец размеров $t \times 1$.

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Если определитель Δ матрицы системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1, \dots, n$, где Δ_i – определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой i -го столбца столбцом свободных членов, т.е.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

УСЛОВИЕ СОВМЕСТИСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему (П.4) m линейных уравнений с n неизвестными. Составим блочную матрицу, приписав к матрице A справа столбец свободных членов. Получим *расширенную матрицу системы*:

$$(A | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)_{m \times (n+1)}$$

Эта матрица содержит всю информацию о системе уравнений, за исключением обозначений неизвестных.

Теорема Кронекера–Капелли. Система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы: $\text{rg } A = \text{rg } (A | b)$.

Следствие 1. Система $Ax = b$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы равны числу неизвестных ($\text{rg } A = \text{rg } (A | b) = n$).

Следствие 2. Система $Ax = b$ имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и меньше числа неизвестных ($\text{rg } A = \text{rg } (A | b) < n$).

Однородная система линейных уравнений (П.5) всегда совместна, так как имеет *тривиальное решение* $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ($x = o$).

Следствие 3. Однородная система $Ax = o$ имеет единственное (тривиальное) решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($\text{rg } A = n$).

Следствие 4. Однородная система $Ax = o$ имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных ($\text{rg } A < n$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.Д.* Основания геометрии. – М.: Наука, 1987.
2. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968.
3. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979.
4. *Атанасян Л.С., Денисова Н.С., Силаев Е.В.* Курс элементарной геометрии. В 2-х ч. – М.: "Сантакс-Пресс", 1997.
5. *Балк М.Б., Болтянский В.Г.* Геометрия масс. – М.: Наука, 1987.
6. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. – М.: Наука, 1971.
7. *Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1964.
8. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984.
9. *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под ред. Д.В. Беклемишева. – М.: Наука, 1987.
10. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Линейная алгебра в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2005.
11. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
12. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002.
13. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособ. для студентов вузов. В 2-х ч. Ч.1. – М.: Высшая школа, 1986.
14. *Делоне Б.Н., Райков Д.А.* Аналитическая геометрия. Т.1. – М.–Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948.
15. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Наука, 1979.
16. *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Физматгиз, 1962.
17. *Задачник-практикум по аналитической геометрии и высшей алгебре: Учеб. пособ. / Волков В.А., Ефимова Т.А., Райнес А.А., Шмидт Р.А.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.
18. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1981.

19. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ – М.: Наука, 1979.
20. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Аналитическая геометрия.– М.: Изд-во МГТУ, 2000.
21. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах и задачах.– М.: Высшая школа, 2004.
22. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии.– М.: Наука, 1980.
23. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: Учебник. – М.: Высшая школа, 1988.
24. *Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1976.
25. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. – М.: Изд-во МГУ, 1969.
26. *Нефедов В.Н., Осипова В.А.* Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992.
27. *Пантелеев А.В., Бортакровский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2003.
28. *Пантелеев А.В., Летова Т.А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2002.
29. *Пантелеев А.В., Якимова А.С.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2001.
30. *Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2001.
31. *Погорелов А.В.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1968.
32. *Постников М.М.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1973.
33. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. В 2-х ч. – М.: Наука, 1991.
34. *Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф.* Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1989.
35. *Привалов И.И.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1964.
36. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.– М.: Наука, 1981.
37. *Федорчук В.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. пособ. – М.: Изд-во МГУ, 1990.
38. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1966.
39. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968.
40. *Шилов Г.Е.* Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных). – М.: Наука, 1972.