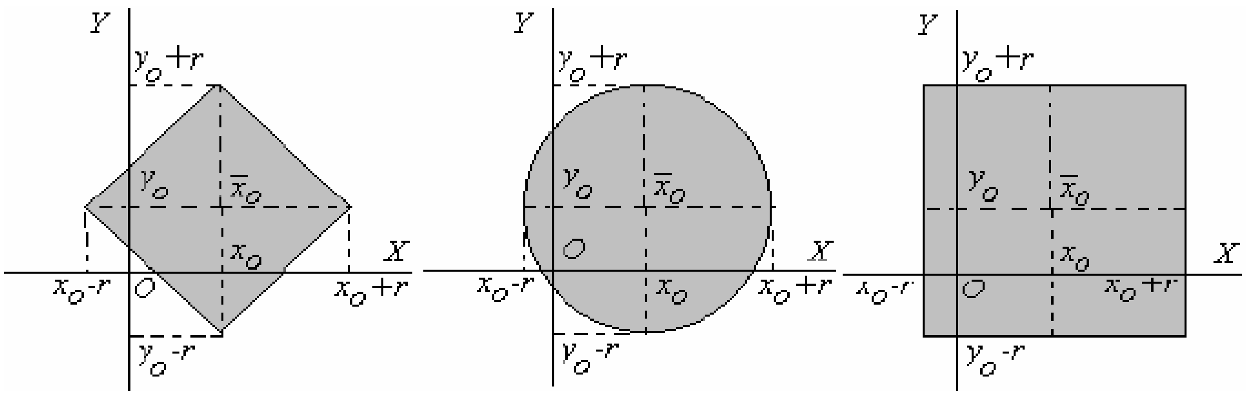
Топологічні властивості множин в МП

Означення. *Відкритою, замкненою кулею і сферою* радіусу r з центром в точці x_0 в метричному просторі (X,ρ) називаються відповідно множини

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x,x_0) < r\}$$
$$B_r[x_0] = \{x \in X : \rho(x,x_0) \le r\}$$
$$S_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x,x_0) = r\}$$

Приклад а) на рис. 1.1 а, б, в зображені замкнені кулі в просторах $\mathbb{R}_1^2$, $\mathbb{R}_2^2$ і $\mathbb{R}_\infty^2$ відповідно.



а б в

Означення. ε*-околом точки* x_0 називається відкрита куля $B_\varepsilon(x_0)$, будемо його позначати $O_\varepsilon(x_0)$. У випадку метричного простору $\mathbb{R}_2^m$ такий ε-окіл називається *кульовим*.

Означення. *Прямокутним* ε*-околом точки* $\bar{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_i^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ в просторі IR_2^m називається множина вигляду

$$V_\varepsilon(x_0) = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in IR^m : \left|x_i - x_i^{(0)}\right| < \varepsilon, i = 1, \ldots, m\right\}.$$

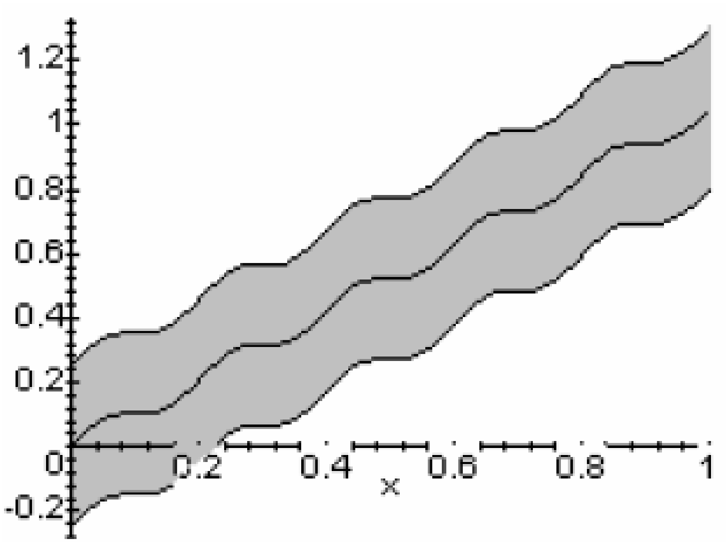


Рис. 16.1 г

б) Розглянемо $C[a,b]$ - простір неперев. на $[a,b]$ функції з метрикою

$\rho(f,g) = \max\limits_{t\in[a,b]}\left|f(t)-g(t)\right| \le r$. Замкнена куля $B_r[f]$ в ньому утворюється із функцій, що задовольняють нерівності

$f(t)-r \le g(t) \le f(t)+r \ \forall t \in [a,b]$.

Графіки функцій

$f(x)-\varepsilon$ і $f(x)+\varepsilon$

можна отримати зсувом графіка функції $f(x)$ відповідно на ε вгору і вниз, що зображено на рис. 16.1 г еометрично на декартовій площині отримано об'єкт, який має назву *«ε-труби»* функції $f(x)$.

Топологічні властивості множин в МП

Означення 1.23. *Обмеженою множиною* в МП X називають множину в X, яку можна помістити всередину деякого круга.

Означення 1.24. ε*-околом* точки x_0 називають відкритий круг з центром в точці x_0 радіуса ε

$$B_\varepsilon(x_0)$$

Означення 1.25. Точку x_0 називають *межовою точкою множини* $D \subset X$, якщо в будь-якому її ε-околі містяться як точки, що належать множині D, так і точки, що їй не належать, тобто

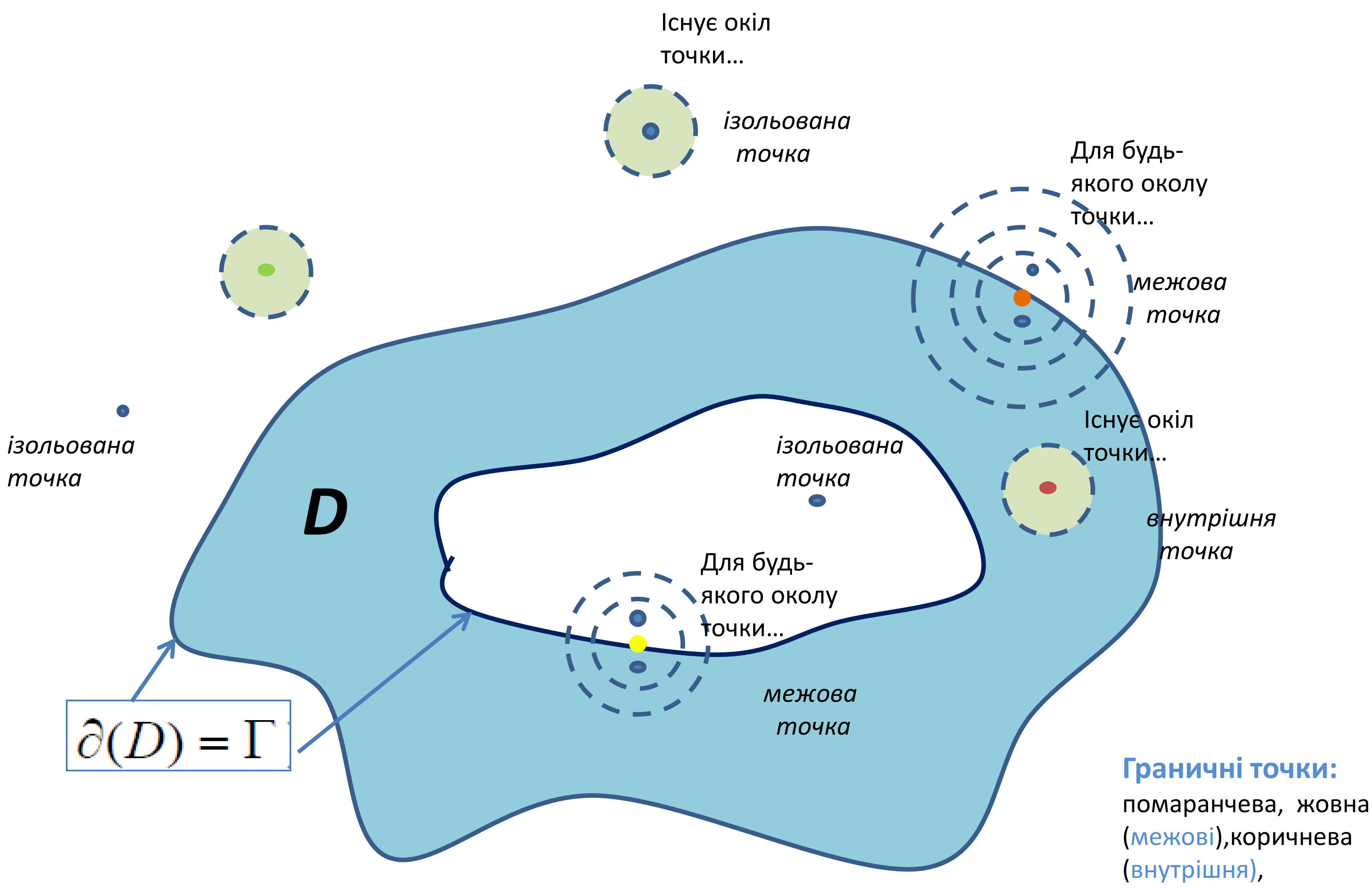
Означення 1.26. Множину всіх межових точок множини D називають *межею* цієї множини (позначення: $\partial(D) = \Gamma$).

Означення 1.27. Точку x_0 називають *граничною точкою множини* D, якщо в будь-якому її ε-околі міститься нескінченна кількість точок, що належать області D, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; B_\varepsilon(x_0) \cap D - \text{нескінченна множина.}$$

Означення 1.27 а Точку x_0 називають *граничною точкою* множини *D*, якщо у будь-якому її околі міститься хоча б одна точка множили, відмінна від x_0.

Означення 1.27 і 1.27 а еквівалентні



☝ 🗁**Означення 1.28**. Множину $D \subset \mathbb{R}^2$ називають *замкненою*, якщо вона містить усі свої граничні точки.

Множину називають *відкритою*, якщо кожна її точка є внутріщньою

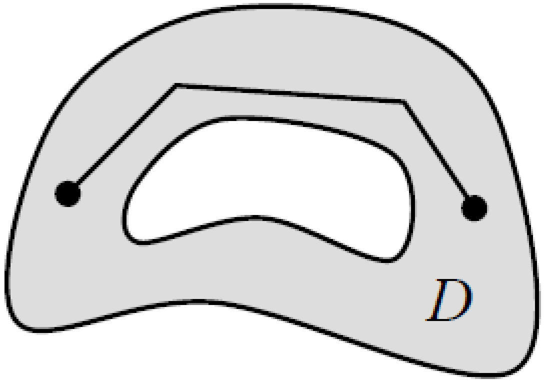


Рис. 1.13.

🗁 **Означення 1.30**. Множину $D \subset \mathbb{R}_2^m$ називають *зв'язною*, якщо будь-які дві її точки можна сполучити ламаною, яка цілком належить множині D

🗁 **Означення 1.29**. *ОБЛАСТЮ* в МП $X = \mathbb{R}_2^m$ називають обмежену замкнену множину або відкритою. в X, яка є зв'язною.

Пряма L в $\mathbb{R}^m$:

∢$m = 2$, тобто пряма в $\mathbb{R}^2$ задається канонічним рівнянням

$$\frac{x_1 - x_1^{(1)}}{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}} = \frac{x_2 - x_2^{(1)}}{x_2^{(2)} - x_2^{(1)}},\text{ де } M_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in L, \quad i = 1, 2.$$

∢$m = 3$, в $\mathbb{R}^3$: канонічне рівняння прямої

$$L: \frac{x_1 - x_1^{(1)}}{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}} = \frac{x_2 - x_2^{(1)}}{x_2^{(2)} - x_2^{(1)}} = \frac{x_3 - x_3^{(1)}}{x_3^{(2)} - x_3^{(1)}} = t,\ M_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) \in L, \quad i = 1, 2,$$

параметричне рівняння прямої в $\mathbb{R}^3$:

$$x_i = x_i^{(0)} + \left(x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right)t, \quad i = 1, 2.3.$$

Узагальнюємо на $\mathbb{R}^m$: канонічне рівнянням прямої

$$L:\frac{x_1-x_1^{(1)}}{x_1^{(2)}-x_1^{(1)}}=\ldots=\frac{x_m-x_m^{(1)}}{x_m^{(2)}-x_m^{(1)}}=t\ ,\quad \overline{x_1}=M_i(x_1^{(i)},\ldots,x_m^{(i)})\in L,\quad i=1,2\ .$$

параметричне рівняння:

$$\begin{cases} x_1=x_1^{(1)}+\left(x_1^{(2)}-x_1^{(1)}\right)t \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i=x_i^{(1)}+\left(x_i^{(2)}-x_i^{(1)}\right)t\quad ,\qquad t\in\mathbb{R}\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m=x_m^{(1)}+\left(x_m^{(2)}-x_m^{(1)}\right)t \end{cases}$$

векторне рівняння:

$$L:\quad \overline{x}=\overline{x_1}+\left(\overline{x_2}-\overline{x_1}\right)t\quad ,t\in\mathbb{R}$$

Під *ламаною* розуміють сукупність відрізків таких, що при їх упорядкуванні кінець кожного попереднього відрізку співпадає з початком наступного.

Нехай ламана сполучає точки $M_i(x_1^{(i)},\ldots,x_m^{(i)})=\overline{x_i},\quad i=1,\ldots,n$, тоді вона задається рівняннями

$$M_1M_2:\quad \overline{x}=\overline{x_1}+\left(\overline{x_2}-\overline{x_1}\right)t,\quad t\in[0,1];$$

$$M_2M_3:\quad \overline{x}=\overline{x_2}+\left(\overline{x_3}-\overline{x_2}\right)t,\quad t\in[0,1];$$

...

$$M_{i-1}M_i:\quad \overline{x}=\overline{x_{i-1}}+\left(\overline{x_i}-\overline{x_{i-1}}\right)t,\quad t\in[0,1];$$

...

$$M_{n-1}M_n:\quad \overline{x}=\overline{x_{n-1}}+\left(\overline{x_n}-\overline{x_{n-1}}\right)t,\quad t\in[0,1];$$

Збіжність в МП

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ елементів метричного простору (X,ρ) називається *збіжною до елемента* x_0 цього простору, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \ \rho(x_n, x_0) < \varepsilon).$$

Точка x_0 називається *границею послідовності* $\{x_n\}$. Позначення:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,\rho)} x_0; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

На мові ε-околів збіжність послідовності до x_0 означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер, що усі члени послідовності, починаючи з цього номера, будуть міститися в ε-околі точки x_0.

Теорема 1 *(критерій збіжності послідовності в* $\mathbb{R}_2^m$ *).* Для того, щоб послідовність в $\boxed{\mathbb{R}_2^m}$ збігалась, необхідно і достатньо, щоб вона *збігалась покоординатно*, тобто

$$\bar{x}_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_i^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{IR_2^m} \bar{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_i^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i^{(0)} \forall i = 1, \ldots, m.$$

В просторі $\boxed{C[a;b]}$ збіжність послідовності еквівалентна рівномірній збіжності.

1.2 Функції багатьох змінних

Відображення $f : R_2^m \to R^1$ називають числовою *функцією m змінних*. Її *областю визначення* називають множину $D(f) = \left\{ \bar{x} \in R_2^m : \exists y \in R : f(\bar{x}) = y \right\}$

Функція m змінних задає поверхню у $m+1$-вимірному просторі (графік функції): $G = \left\{(\bar{x}, y) \in R^m \times R, y = f(\bar{x})\right\}$, зокрема, для функції двох змінних графіком буде множина $G = \left\{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3, z = f(x, y)\right\}$. Інтерпретацією графіка функції двох змінних є поверхня в тривимірному просторі. На рис 1.3 зображено графік функції $z = x^2 + y^2$.

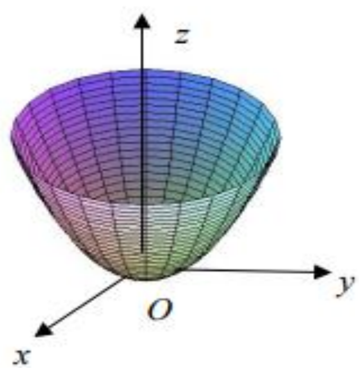


Рис. 1.3

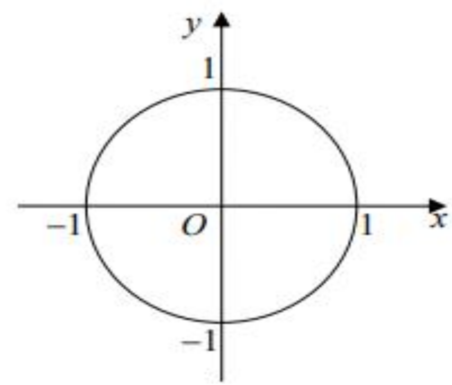


Рис. 1.4

Переріз графіка функції $z = f(x, y)$ площиною $z = z_0$ називають *лінією рівня* цієї функції. Частіше під лінією рівня розуміють проекцію зазначеного перерізу. В будь-якому випадку її зображують на площині XOY.

У випадку функцій трьох і більше змінних можна аналогічно ввести поняття *поверхні рівня*, як перерізу графіка функції $z = f(\bar{x})$ площиною $z = z_0$.

Лінією рівня функції $z = x^2 + y^2$ при $z_0 = 1$ в проекції на площину XOY буде коло з центром в точці O радіуса 1 (див. рис. 1.4). На рис. 1.3 різні лінії рівня цієї функції – кола, паралельні площині XOY, розташовані в просторі. Вони роблять рисунок більш наочним. Зокрема, зрозуміло, що при $z_0 < 0$ ліній рівня не існує.

Границя і неперервність ФБЗ

Def K

Означення (за Коші 1). Число b називається *границею функції* $f(\bar{x})$ *в точці* $\bar{x}_0 \in IR_2^m$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x} \in D(f)\ 0 < \rho(\bar{x}, \bar{x}_0) < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - b| < \varepsilon .$$

Позначення: $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = b$ або $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ \dots \\ x_m \to x_m^{(0)}}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$. Ця границя називається *кратною*. У випадку функції двох змінних вона називається *подвійною*.

Це означення можна переписати в розгорнутому вигляді:

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ \dots \\ x_m \to x_m^{(0)}}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b \ \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x} \in D(f)$$
$$0 < \sqrt{\left(x_1 - x_1^{(0)}\right)^2 + \left(x_2 - x_2^{(0)}\right)^2 + \dots + \left(x_m - x_m^{(0)}\right)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1, x_2, \dots, x_m) - b| < \varepsilon .$$

В термінах околів означення кратної границі означає той факт, що для будь якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, що, як тільки $\bar{x} \in O_\delta(\bar{x}_0) \setminus \{\bar{x}_0\}$ (тобто $\bar{x}$ належить проколотому кульовому δ-околу), так $|f(\bar{x}) - b| < \varepsilon$.

Означення (за Коші 2). $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ \dots \\ x_m \to x_m^{(0)}}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b \ \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x} \in D(f) \\ 0 < \left|x_1 - x_1^{(0)}\right| < \delta \wedge 0 < \left|x_2 - x_2^{(0)}\right| < \delta \wedge \dots \wedge 0 < \left|x_m - x_m^{(0)}\right| < \delta \Rightarrow \\ \qquad |f(x_1, x_2, \dots, x_m) - b| < \varepsilon \end{array} .$$

Або в термінах околів: для будь якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, що, як тільки $\bar{x} \in V_\delta(\bar{x}_0) \setminus \{\bar{x}_0\}$ (тобто $\bar{x}$ належить проколотому прямокутному δ-околу), так $|f(\bar{x}) - b| < \varepsilon$.

Def Г

Означення (за Гейне 1).

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\{\overline{x}_n\}\in D(f)\setminus\{\overline{x}_0\} \quad \overline{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}_2^m} \overline{x}_0 \Rightarrow f(\overline{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}^1} b .$$

Воно еквівалентне наступному (згідно до критерію збіжності в скінченновимірному просторі)

Означення (за Гейне 2). $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_1^{(0)}\\ \cdots\\ x_m\to x_m^{(0)}}} f(x_1,x_2,\ldots,x_m) = b \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\{\overline{x}_n\}\in D(f)\setminus\{\overline{x}_0\} \quad x_i^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}^1} x_i^{(0)} \forall i=1,\ldots,m \Rightarrow f(x_1,x_2,\ldots,x_m) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}^1} b .$$

Теорема 3 *(арифметичні операції над границями).*

Якщо функції $f(\overline{x})$ *і* $g(\overline{x})$, що визначені на одній і тій же множині, в точці $\overline{x}_0$ мають границі, що відповідно дорівнюють b і c, то функції $f(\overline{x})\pm g(\overline{x})$, $f(\overline{x})\cdot g(\overline{x})$ і $\dfrac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})}$ мають в точці $\overline{x}_0$ границі $b\pm c$, $b\cdot c$ і $\dfrac{b}{c}$, відповідно (у випадку частки – накладається додаткова умова: $c\neq 0$).

Якщо фіксувати усі змінні, окрім однієї, то можна здобути означення повторної границі. Розглянемо випадок функції двох змінних.

Означення. Нехай функція $u=f(x,y)$ задана в деякому проколотому прямокутному околі точки (x_0,y_0)

$$V=\left\{(x,y)\in IR^2 : 0<|x-x_0)<d_1 \wedge 0<|y-y_0|<d_2\right\}.$$

Якщо для будь-якого фіксованого y, що задовольняє умові $0<|y-y_0|<d_2$, існує границя функції $u=f(x,y)$ однієї змінної x в точці $x=x_0$, а саме: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y-fix}} f(x,y)=\varphi(y)$, а також, крім того, існує $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=b$, тоді кажуть що існує *повторна границя* функції $u=f(x,y)$ в точці (x_0,y_0). Позначення: $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=b$.

Теорема 4. Якщо функція $u=f(x,y)$ задана в деякому проколотому прямокутному околі точки (x_0,y_0)

$$V=\left\{(x,y)\in IR^2 : 0<|x-x_0)<d_1 \wedge 0<|y-y_0|<d_2\right\},$$

1) існує подвійна границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$,

2) для будь-якого y, що задовольняє умові $0<|y-y_0|<d_2$, існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$,

$\Rightarrow$

1) існує повторна границя $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$,

2) крім того повторна границя дорівнює подвійній:

$$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=$$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b.$$

Наслідок 1.

Якщо виконуються дві зазначені умови теореми 4 і
3) для будь-якого x, що задовольняє умові $0 < | x - x_0 | < d_1$, існує границя $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \phi(x)$,

$\Rightarrow$

1) існує повторна границя $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$,

2) крім того обидві повторні границі дорівнює подвійній:

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b$$

Наслідок 2. Якщо повторні границі нерівні, то не існує подвійна границя.

16.5. Неперервність функції багатьох змінних

Означення *(формальне)*. Функція $f(\bar{x})$ *називається неперервною в точці* $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}_2^m$, якщо $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$.

Самостійно записати усі означенні за Коші і за Гейне та еквівалентні їм, при цьому пам'ятати, що функція повинна бути визначеною в точці $\bar{x}_0$, тому відповідні околи не повинні бути проколотими і точка $\bar{x}_0$ повинна належати множині визначення функції.

Приклад . Дослідити на неперервність функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x \neq 0 \; i \; y \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Як було отримано в прикладі 5 а, ця функція в точці (0,0) на має границі, тому в цій точці вона розривна. У всіх інших точках (x_0, y_0), де $x_0 \neq 0$ або $y_0 \neq 0$, функція $f(x,y)$ неперервна, оскільки

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x_0 y_0}{x_0^{\,2}+y_0^{\,2}} = f(x_0, y_0).$$

Висновок: <u>дана функція за сукупністю змінних x і y неперервна на всій площині, крім точки (0,0)</u>

Якщо функція неперервна в кожній точці множини $M \subset \mathbb{R}_2^m$, то кажуть, що вона неперервна на цій множині.

Властивості неперервних функцій.

1^0 ***(Арифметичні операції над неперервними функціями.)*** Якщо дві функції $f(\bar{x})$ і $g(\bar{x})$, що визначені на одній і тій же множині $M \subset \mathbb{R}_2^m$, неперервні в точці $\bar{x}_0 \in M$, то функції $f(\bar{x}) \pm g(\bar{x})$, $f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})$ і $f(\bar{x})/g(\bar{x})$ неперервні в точці $\bar{x}_0$ (у випадку частки $g(\bar{x}_0) \neq 0$).

Нагадаємо поняття складеної функції багатьох змінних. Нехай функція g переводить деяку множину $E_1 \subset R^m$ в множину $E \subset R^n$ за правилом $\bar{x} = \bar{g}(\bar{t})$, тобто $(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(g_1(t_1, t_2, ..., t_m), g_2(t_1, t_2, ..., t_m), ..., g_n(t_1, t_2, ..., t_m)\right)$, а функція $f(\bar{x})$ переводить $E \subset R^n$ в R^1. Тоді *складеною* називають функцію $\phi(\bar{t}) = f(\bar{g}(\bar{t}))$, яка переводить множину $E_1 \subset R^m$ в R^1:

$$\varphi(\bar{t}) = f\left(g_1(t_1, t_2, ..., t_m), g_2(t_1, t_2, ..., t_m), ..., g_n(t_1, t_2, ..., t_m)\right).$$

2^0 ***(Неперервність складеної функції).*** Якщо функція $\bar{g}(\bar{t})$, що переводить множину $E_1 \subset \mathbb{R}_2^m$ в множину $E \subset \mathbb{R}_2^n$ неперервна на E_1 (тобто неперервною на E_1 є кожна з функцій координат $g_i(t_1, t_2, ..., t_m), i = 1, ..., n$), а функція $f(\bar{x})$, що переводить $E \subset \mathbb{R}_2^n$ в $\mathbb{R}^1$, неперервна на E, тоді функція $\varphi(\bar{t}) = f(\bar{g}(\bar{t}))$, що діє із $E_1 \subset \mathbb{R}_2^m$ в $\mathbb{R}^1$, є неперервною на $E_1 \subset \mathbb{R}_2^m$.

3^0 (*Теорема Коші* про проходження неперервної функції через нуль при зміні знаків*)*. Якщо функція $z = f(\bar{x})$ неперервна в зв'язній області $E \subset \mathbb{R}_2^m$, до того ж, $\exists \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in E : f(\bar{x}_2) \cdot f(\bar{x}_1) < 0$, і, тоді можна знайти таку точку $\bar{x}^* \in E$, що $f(\bar{x}^*) = 0$.

Лема Больцано – Вейєрштрасса. Із будь - якої обмеженої послідовності простору $\mathbb{R}_2^m$ можна виділити збіжну підпослідовність.

4^0 *(Перша теорема Вейєрштрасса.)* Якщо функція $f(\bar{x})$ неперервна в обмеженій замкненій області $D \subset \mathbb{R}_2^m$, то ця функція обмежена в цій області.

5^0 *(Друга теорема Вейєрштрасса)*. Якщо функція $f(\bar{x})$ неперервна в обмеженій замкненій області $D \subset \mathbb{R}_2^m$, то ця функція в цій області досягає своїх точних верхньої та нижньої меж.

Означення. Функція $f(\bar{x})$ називається рівномірно неперервною на множині $D \subset \mathbb{R}_2^m$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D \; \rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < \delta \Rightarrow \left| f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_2) \right| < \varepsilon .$$

Має місце наступна теорема.

Теорема (*теорема Кантора про рівномірну неперервність*). Неперервна на замкненій обмеженій множині функція являється рівномірно неперервною на цій множині.

Зауваження. Назвемо діаметром обмеженої множини $D \subset \mathbb{R}_2^m$ значення

$$d(D) = \sup_{\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in D} \rho(\overline{x}_1, \overline{x}_2).$$

Наслідок (*наслідок із теореми Кантора(*. Нехай функція $f(\overline{x})$ неперервна на замкнутій обмеженій множині $D \subset \mathbb{R}_2^m$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що на кожній замкненій підмножині D_1 множини D , діаметр якої менше δ, коливання $\omega_f(D_1)$ функції $f(\overline{x})$ менше за ε, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \, \forall D_1 \subset D \text{ - замкненій } d(D_1) < \delta \Rightarrow \omega_f(D_1) < \varepsilon .$$