Математичні моделі оптимізаційних задач

Конспект лекцій

Змістовий модуль 1. Варіаційні принципи механіки

Тема 2. Необхідні та достатні умови екстремуму функціоналів

1.1 Найпростіша задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера

Розглянемо задачу про знаходження екстремуму функціонала

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx, \tag{1.1}$$

визначеного на множині функцій $y(x) \in C^1_{[a;b]}$, що задовольняють умовам:

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2. \tag{1.2}$$

У функціоналі (1.8) $F(x, y, y')$ будемо вважати двічі неперервно диференційовною функцією своїх аргументів.

Сформульовану задачу називають **найпростішою задачею варіаційного числення.**

Оскільки умови (1.2) фіксують значення допустимих функцій на межах відрізка інтегрування $[a;b]$, тому варіація δy функції $y(x)$ у цих точках повинна дорівнювати нулю: $\delta y|_{x=a} = \delta y|_{x=b} = 0$.

Необхідна умова екстремуму у найпростішій задачі варіаційного числення визначається наступною теоремою.

Теорема 1.3 Для того, щоб функція $y_0(x)$ надавала слабкий екстремум функціоналу (1.8), необхідно, щоб вона задовольняла диференціальному рівнянню

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0. \tag{1.3}$$

Це рівняння називають **рівнянням Ейлера** для функціонала (1.1). У загальному випадку воно є звичайним диференціальним рівнянням другого порядку відносно функції $y(x)$.

Означення. Розв’язки рівняння Ейлера для даного функціонала називають **екстремалями** цього функціонала.

Оскільки умова (1.4) є необхідною, то точки екстремуму функціонала слід шукати серед його екстремалей.

Приклад. Знайти екстремалі функціонала $J(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2\right) dx$, що задовольняють крайові умови $y(0) = 0, \; y(\pi/2) = 1$ [2].

Відповідь: $y(x)=\sin x$

1.2 Необхідна умова екстремуму для функціоналів, що залежать від кількох функцій

Розглянемо випадок, коли функціонал залежить від кількох функцій однієї незалежної змінної, тобто він має вигляд:

$$J\left(y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)\right)=\int_a^b F\left(x, y_1, y_2,\ldots,y_n, y_1', y_2',\ldots,y_n'\right)dx, \qquad (1.4)$$

де F – двічі неперервно диференційовна функція своїх аргументів x, y_i, $i=1,2,\ldots,n$. Нехай функціонал (1.4) визначений на множині вектор-функцій $Y=\left(y_1, y_2,\ldots,y_n\right)$, де функції $y_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$ належать простору $C^1_{[a;b]}$ та задовольняють заданим крайовим умовам:

$$\begin{cases} y_1(a)=y_{11},\, y_2(a)=y_{21},\ldots,\, y_n(a)=y_{n1}; \\ y_1(b)=y_{12},\, y_2(b)=y_{22},\ldots,\, y_n(b)=y_{n2}. \end{cases} \qquad (1.5)$$

<u>Теорема.</u> Якщо функціонал (1.6) досягає слабкого екстремуму на вектор-функції $Y(x)=\left(y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)\right)$, то функції $y_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$, є розв'язками системи диференціальних рівнянь Ейлера:

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right)=0,\quad i=1,2,\ldots,n. \qquad (1.8)$$

Доведення. Для довільних допустимих варіацій $\delta y_1, \delta y_2,\ldots,\delta y_n$ розглянемо функцію $\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=I\left(y_1+\alpha_1\delta y_1, y_2+\alpha_2\delta y_2,\ldots,y_n+\alpha_n\delta y_n\right)$. Якщо на вектор-функції $Y(x)=\left(y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)\right)$ функціонал (1.6) досягає екстремуму, то функція $\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ повинна мати екстремум при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, тобто при нульових значеннях $\alpha_i, i=1,2,\ldots,n$ повинна виконуватися необхідна умова екстремуму даної функції – $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}=0, i=1,2,\ldots,n$. Таким чином, при нульових значеннях $\alpha_i, i=1,2,\ldots,n$ отримуємо:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}=\int_a^b\left(F_{y_i}\cdot\delta y_i+F_{y_i'}\cdot\delta y_i'\right)dx=0, i=1,2,\ldots,n.$$

Застосувавши до цих рівностей лему Дюбуа – Раймона, отримуємо систему рівнянь Ейлера (1.8) для функціонала (1.6).

<u>Означення.</u> Будь-який розв'язок $Y(x)=\left(y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)\right)$ системи рівнянь Ейлера для функціонала (1.6) називають **екстремаллю** цього функціонала.

Система рівнянь Ейлера (1.8) для функціонала (1.6) є системою n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, тому її розв'язки –

екстремалі $Y(x)$ містять n довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Для їх визначення використовують крайові умови (1.7).

Приклад. Для функціонала $J\left(y_1(x), y_2(x)\right) = \int\limits_0^{\pi/2} \left(y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1 y_2\right)dx$ знайти екстремалі, що задовольняють крайові умови $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0$, $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Розв'язання. Побудуємо систему рівнянь Ейлера для заданого функціонала:

$$F = y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1 y_2,\ F_{y_1} = 2y_2, F_{y_2} = 2y_1,\ f_{y_1'} = 2y_1',\ F_{y_2'} = 2y_2',$$

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y_1'}\right) = 2y_1'',\ \frac{d}{dx}\left(F_{y_2'}\right) = 2y_2''.$$

Підставивши у (1.8), отримуємо систему:

$$\begin{cases} y_2 - y_1'' = 0, \\ y_1 - y_2'' = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему, звівши її до одного рівняння. Для цього двічі продиференціюємо перше рівняння системи та за допомогою другого рівняння виключимо з нього функцію y_2. Отримаємо рівняння $y_1^{(4)} - y_1 = 0$. Корені його характеристичного рівняння $k^4 - 1 = 0$ $k_{1,2} = \pm 1, k_{3,4} = \pm i$. За цими коренями знаходимо функцію $y_1(x)$:

$$y_1(x) = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

З першого рівняння системи $y_2 = y_1''$ знаходимо y_2:

$$y_2(x) = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Для знаходження сталих інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4 використаємо крайові умови:

$$\begin{cases} y_1(0) = C_1 + C_3 = 0, \\ y_2(0) = C_1 - C_3 = 0, \\ y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 \operatorname{ch}\frac{\pi}{2} + C_2 \operatorname{sh}\frac{\pi}{2} + C_4 = 1, \\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 \operatorname{ch}\frac{\pi}{2} + C_2 \operatorname{sh}\frac{\pi}{2} - C_4 = -1. \end{cases}$$

З отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь знаходимо $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1$. Таким чином, отримано рівняння екстремалі заданого функціонала $Y(x) = \left(y_1(x), y_2(x)\right)$, де $y_1 = \sin x$, $y_2 = -\sin x$.

1.3 Функціонали, що залежать від похідних вищих порядків

Нехай функція $F\left(y, y', y'',\ldots, y^{(n)}\right)$ є неперервно диференційовною $n+2$ рази за своїми аргументами функцією. Розглянемо функціонал

$$J(y)=\int_a^b F\left(y, y', y'',\ldots, y^{(n)}\right)dx, \tag{1.9}$$

визначений на множині n разів неперервно диференційовних на $[a;b]$ функцій $y(x)\in C^n_{[a;b]}$, що задовольняють заданим крайовим умовам:

$$\begin{cases} y(a)=y_{10}, y'(a)=y_{11},\ldots, y^{(n-1)}(a)=y_{1,n-1}, \\ y(b)=y_{20}, y'(b)=y_{21},\ldots, y^{(n-1)}(b)=y_{2,n-1}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Оскільки будь-яка допустима для даної варіаційної задачі функція $y(x)+\delta y(x)$ повинна задовольняти умови (1.10), то допустимою варіацією функції $y(x)$ є довільна функція $\delta y\in C^n_{[a;b]}$, що задовольняє однорідні крайові умови:

$$\begin{cases} \delta y(a)=\delta y'(a)=\ldots=\delta y^{(n-1)}(a)=0, \\ \delta y(b)=\delta y'(b)=\ldots=\delta y^{(n-1)}(b)=0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Визначимо необхідну умову, якій повинна задовольняти функція $y(x)$ з даної множини, що надає екстремум функціоналу (1.10).

<u>Теорема.</u> Якщо функціонал (1.9), визначений на множині функцій з $C^n_{[a;b]}$, що задовольняють крайові умови (1.10), досягає екстремуму на деякій функції $y(x)\in C^{2n}_{[a;b]}$, то ця функція є розв'язком **рівняння Ейлера – Пуассона**:

$$F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y''}\right)-\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(F_{y^{(n)}}\right)=0. \tag{1.12}$$

Розв'язки рівняння (1.12) називають **екстремалями** функціонала (1.9).

Рівняння Ейлера – Пуассона (1.12) є звичайним диференціальним рівнянням порядку $2n$. У його загальному розв'язку присутні $2n$ довільних сталих, які визначаються з крайових умов (1.10).

Приклад. Знайти екстремалі функціонала $J(y)=\int\limits_a^b\left(\left(y'''\right)^2+y^2-2yx^3\right)dx$.

Розв'язання. Запишемо для даного функціонала рівняння Ейлера – Пуассона, для чого знайдемо необхідні похідні.

$$F_y=2y-2x^3;\ F_{y'}=F_{y''}=0;\ F_{y'''}=2y''';\ \frac{d\left(F_{y'''}\right)}{dx^3}=2y^{(6)}.$$

Підставивши їх у рівняння (1.12), отримаємо:

$$y^{(6)}-y=-x^3.$$

Коренями характеристичного рівняння $k^6-1=0$ для отриманого лінійного неоднорідного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами є

$$k_{1,2}=\pm 1,\, k_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2},\, k_{5,6}=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}.$$

За коренями характеристичного рівняння запишемо розв'язок однорідного рівняння $y^{(6)}-y=0$:

$$y_0=C_1e^x+C_2e^{-x}+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+$$
$$+e^{\frac{x}{2}}\left(C_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_6\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Частинний розв'язок отриманого неоднорідного рівняння Ейлера – Пуассона знаходимо за виглядом правої частини: $\tilde{y}=Ax^3+Bx^2+Cx+D$. Невизначені коефіцієнти у цьому розв'язку знаходимо шляхом підстановки його у неоднорідне диференціальне рівняння. При цьому отримуємо: $A=1$, решта коефіцієнтів дорівнює нулю. Тому $\tilde{y}=x^3$, а екстремалі заданого функціонала мають вигляд $y=y_0+\tilde{y}$.

1.4 Функціонали, що залежать від функцій кількох змінних

Знайдемо необхідну умову екстремуму функціонала, визначеного на множині функцій, що залежать від кількох змінних на прикладі функціонала, областю визначення якого є множина функцій виду $z=z(x,y)$, залежних від 2 змінних. Далі будемо розглядати функціонали $J(z)$, визначені на функціях $z=z(x,y)$, двічі неперервно диференційовних у деякій області $D\subset\mathbb{R}^2$, обмеженій замкненою кривою L, тобто функціонали виду

$$J(z)=\iint\limits_D F\big(x,y,z(x,y),z_x(x,y),z_y(x,y)\big)\,dxdy. \qquad (1.13)$$

У (1.13) F є двічі неперервно диференційованою функцією своїх аргументів x та y.

Розглянемо задачу про знаходження екстремуму функціонала (1.13), визначеного на множині функцій $z=z(x,y)$, які на межі L області D набувають заданих значень, тобто

$$z(x,y)\big|_L=\varphi(x,y), \qquad (1.14)$$

де задана функція $\varphi(x,y)$ визначена на кривій L.

Допустимими варіаціями для $z=z(x,y)$ у даному випадку є функції $\delta z(x,y)$, двічі диференційовані у області D, що дорівнюють нулю на межі L даної області. Запишемо необхідну умову екстремуму функціонала $J(z)$:

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(J\left(z+\alpha\cdot\delta z\right)\right)\Big|_{\alpha=0}=0. \qquad (1.15)$$

Вираз для варіації функціонала (1.13) набуває вигляду:

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(J\left(z+\alpha\cdot\delta z\right)\right)\Big|_{\alpha=0}=\iint\limits_D\left(F_z\delta z+F_p\delta p+F_q\delta q\right)dxdy,$$

де $p=z_x, q=z_y$.

Оскільки $\frac{\partial}{\partial x}\left(F_p\delta z\right)=\frac{\partial F_p}{\partial x}\delta z+F_p\delta p$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(F_q\delta z\right)=\frac{\partial F_q}{\partial y}\delta z+F_q\delta q$,

отримуємо:

$$\iint\limits_D\left(F_p\delta p+F_q\delta q\right)dxdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(F_p\delta z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(F_q\delta z\right)\right)dxdy-$$

$$-\iint\limits_D\left(\frac{\partial F_p}{\partial x}\delta z+\frac{\partial F_q}{\partial y}\delta z\right)dxdy.$$

До першого з інтегралів у правій частині останньої рівності застосуємо формулу Гріна, згідно з якою

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_L Pdx+Qdy.$$

Отримаємо:

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(F_p\delta z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(F_q\delta z\right)\right)dxdy=\int\limits_L F_p\delta z\,dy-F_q\delta z\,dx=\int\limits_L\delta z\left(F_pdy-F_qdx\right)=0$$

,

оскільки на контурі L, де значення допустимих функцій $z(x,y)$ є фіксованими, $\delta z=0$.

Таким чином, маємо:

$$\iint\limits_D\left(F_p\delta p+F_q\delta q\right)dxdy=-\iint\limits_D\left(\frac{\partial F_p}{\partial x}+\frac{\partial F_q}{\partial y}\right)\delta z\,dxdy.$$

Необхідна умова екстремуму функціонала (2.9) набуває вигляду:

$$\delta J=\iint\limits_D\left(F_z-\frac{\partial F_p}{\partial x}-\frac{\partial F_q}{\partial y}\right)\delta z\,dxdy=0. \qquad (1.16)$$

Оскільки перший співмножник під знаком інтеграла у (1.16) є неперервним, а варіація δz є довільною функцією, що приймає нульове значення на контурі L, то повинна виконуватися рівність

$$F_z-\frac{\partial F_p}{\partial x}-\frac{\partial F_q}{\partial y}=0. \qquad (1.17)$$

Отримане диференціальне рівняння у частинних похідних називається **рівнянням Ейлера – Остроградського**, а будь-який диференційований розв'язок цього рівняння – **екстремаллю функціонала** (1.13).

Приклад. Записати рівняння Ейлера – Остроградського для функціонала Діріхле $J(z)=\iint\limits_D\left(z_x{}^2+z_y{}^2\right)dxdy$.

Розв'язання. Оскільки $p=z_x, q=z_y$, то $F(x,y,z,p,q)=p^2+q^2$. Звідси:

$$F_z=0, F_p=2p=2\frac{\partial z}{\partial x}, F_q=2q=2\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial F_p}{\partial x}=2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial F_q}{\partial y}=2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Рівняння Ейлера – Остроградського для функціонала Діріхле набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Отримали рівняння Лапласа для функції $z(x,y)$. Таким чином, екстремалями функціонала Діріхле є гармонічні функції.

Тема 2. Основні варіаційні принципи механіки

2.1 Сутність варіаційних принципів теорії пружності

Повна характеристика стану рівноваги пружного деформівного тіла, що знаходиться під дією зовнішнього навантаження, визначається векторними функціями переміщень $\vec{u}$, напружень $\vec{\sigma}$ та деформацій $\vec{\varepsilon}$. Компонентами вектора $\vec{u}$ є переміщення $u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)$ точок тіла відповідно у напрямі координатних осей *Ox*, *Oy*, *Oz*, компонентами вектора $\vec{\varepsilon}$ є лінійні та кутові деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$, компоненти вектора $\vec{\sigma}$ – нормальні та дотичні напруження $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$.

Наведемо основні рівняння теорії пружності, що повністю визначають компоненти напружено-деформованого стану згаданого тіла. Сюди відносяться наступні рівняння:

1) Рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0,\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0,\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Тут X, Y, Z – компоненти об'ємного навантаження, що діє у кожній точці тіла (його проекції на координатні осі).

2) Рівняння Коші (геометричні рівняння):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{2.2}$$

3) Рівняння сумісності деформацій:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

4) Закон Гука у прямій формі:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z \right), \\
\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z \right), \\
\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y \right), \\
\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}.
\end{gathered} \tag{2.4}$$

5) Закон Гука у зворотній формі:

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, \sigma_y = \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, \sigma_z = \lambda\theta + 2G\varepsilon_z,$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \tau_{xz} = G\gamma_{xz}. \tag{2.5}$$

У рівняннях (2.4), (2.5) *E* та *G* – модулі пружності відповідно при розтязі та зсуві, ν – коефіцієнт Пуассона, $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$, $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, θ – відносна об'ємна деформація елемента тіла, $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.

6) Крайові умови:

$$\begin{aligned} &\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = p_x, \\ &\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = p_y, \\ &\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = p_z. \end{aligned} \tag{2.6}$$

У рівняннях (2.6) p_x, p_y, p_z – проекції навантаження, що діє на поверхню тіла, l, m, n – напрямні косинуси вектора зовнішньої нормалі до поверхні тіла.

У курсі варіаційного числення показано, що за певних умов задача про розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних при заданих крайових умовах еквівалентна задачі про знаходження екстремуму деякого інтегрального квадратичного функціонала. Формулювання еквівалентних варіаційних задач механіки суцільного середовища називають *варіаційними принципами* механіки суцільного середовища. На основі варіаційних принципів розроблені сучасні потужні методи наближеного розв'язання крайових задач механіки деформованого твердого тіла.

2.2 Функціонал енергії деформівного твердого тіла

Повна потенціальна енергія *C* тіла, що деформоване під дією зовнішнього навантаження, визначається рівністю:

$$C = U + V. \tag{2.7}$$

У рівності (2.7) *U* – потенціальна енергія деформації тіла (потенціал внутрішніх сил), *V* – потенціальна енергія (потенціал) зовнішніх сил.

Далі будемо вважати, що у початковому (недеформованому) стані повна енергія тіла $C_0 = 0$. Тоді повна енергія – це зміна енергії внутрішніх та зовнішніх сил при переході тіла з початкового у деформований стан.

Енергія будь-якої системи сил вимірюється роботою, яку можуть виконати ці сили при переміщенні системи з положення, що досліджується, у початкове положення. Тому при обчисленні повної потенціальної енергії (2.7) буде знаходити її, додаючи роботу внутрішніх сил пружності, що визначає величину *U,* та роботу зовнішніх сил, що визначає *V* при переведенні тіла з деформованого у початковий, недеформований стан.

Отримаємо спочатку вираз для потенціалу внутрішніх сил *U.* Оскільки деформації по об'єму тіла розподілені нерівномірно, то й енергія деформації розподілена нерівномірно по об'єму тіла. Щільністю енергії деформації (питомою потенціальною енергією деформації) U_0 називають границю

$$U_0 = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta T},$$

де ΔT – об'єм виділеного елементу тіла.

Для однорідного деформованого стану величина U_0 є сталою і виражає енергію, накопичену у одиниці об'єму матеріалу.

У випадку лінійного напружено-деформованого стану одновимірного тіла (стержня) щільність енергії деформації дорівнює площі під лінійним графіком залежності $\sigma(\varepsilon)$, тобто $U_0 = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$. Узагальнивши цю рівність на випадок об'ємного лінійного напружено-деформованого стану тривимірного тіла, отримуємо:

$$U_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right). \qquad (2.8)$$

Рівність (1.8) у векторній формі можна записати у вигляді:

$$U_0 = \frac{1}{2}\vec{\sigma}^T\vec{\varepsilon}, \qquad (2.9)$$

де $\vec{\sigma}^T = \left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\right)$, $\vec{\varepsilon}^T = \left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\right)$.

У всьому об'ємі тіла енергію деформації U знайдемо шляхом інтегрування по цьому тілу. Маємо:

$$U = \iiint_T U_0 dT. \qquad (2.10)$$

Пружні сили, намагаючись відновити початкову форму деформованого тіла, мають додатну енергію деформації і формують додатний внесок у повну потенціальну енергію (1.7).

Знайдемо вираз для потенціалу зовнішніх сил *V*. При переведенні тіла у недеформований стан ці сили виконують від'ємну роботу на переміщеннях u, v, w. Отже, маємо на ділянці поверхні dS для зовнішніх сил, що діють на цю ділянку:

$$dV_S = -\left(p_x u + p_y v + p_z w\right)dS.$$

Аналогічно, для об'ємного навантаження, що діє у кожній точці тіла, отримуємо:

$$dV_T = -\left(Xu + Yv + Zw\right)dT.$$

Інтегруючи ці величини відповідно по поверхні та об'єму, знаходимо:

$$V = -\iint_S \left(p_x u + p_y v + p_z w\right)dS - \iiint_T \left(Xu + Yv + Zw\right)dT. \qquad (2.11)$$

Рівність (2.11) можна написати у векторній формі:

$$V = -\iint_S \vec{p}^T\vec{u}\,ds - \iiint_T \vec{g}^T\vec{u}dT. \qquad (2.12)$$

Величина енергії *U* та величина *V* повністю визначається, якщо відомі переміщення *u*, *v*, *w*, тобто повна енергія деформованого тіла (2.7) є функціоналом, що залежить від вибору його аргументів – трьох функцій $u(x,y,z)$, $v(x,y,z), w(x,y,z)$. Дійсно, використовуючи закон Гука (2.5) та рівняння Коші (2.2), вираз (2.9) можна записати у вигляді:

$$U_0 = \frac{1}{2}\left([D]\cdot\vec{\varepsilon}^T\right)\cdot\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}^T[D]\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left([A]^T\cdot\vec{u}\right)^T[D]\cdot\left([A]^T\cdot\vec{u}\right). \quad (2.13)$$

У рівності (2.13) $[D]$ – матриця закону Гука (2.5), $[A]$ – матриця оператора диференціювання для формул Коші (2.2).

Матриця $[D]$ – квадратна матриця, що містить 6 рядків та 6 стовпців, її елементи:

$$d_{11} = d_{22} = d_{33} = \lambda + 2G, d_{44} = d_{55} = d_{66} = G,$$
$$d_{21} = d_{31} = d_{32} = d_{12} = d_{13} = d_{23} = G,$$

решта елементів цієї матриці дорівнюють нулю.

Ненульові елементи матриці оператора диференціювання $[A]$, що містить 3 рядки та 6 стовпців, мають вигляд:

$$a_{11} = a_{24} = a_{36} = \frac{\partial}{\partial x}, a_{14} = a_{22} = a_{35} = \frac{\partial}{\partial y}, a_{16} = a_{25} = a_{33} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Отже, <u>*функціонал повної потенціальної енергії*</u> (2.7) можна записати у вигляді:

$$C = \frac{1}{2}\iiint\limits_T\left(\left([A]^T\vec{u}\right)^T[D]\left([A]^T\vec{u}\right)\right)dT - \iint\limits_S\vec{p}^T\vec{u}dS - \iiint\limits_T\vec{g}^T\vec{u}dT. \quad (2.14)$$

Перший з доданків у (2.14) є повною енергією деформації або потенціалом внутрішніх сил:

$$U = \frac{1}{2}\iiint\limits_T\left(\left([A]^T\vec{u}\right)^T[D]\left([A]^T\vec{u}\right)\right)dT. \quad (2.15)$$

Потенціал зовнішніх сил, прикладених до тіла, має вигляд:

$$\Pi = -\iint\limits_S\vec{p}^T\vec{u}dS - \iiint\limits_T\vec{g}^T\vec{u}dT. \quad (2.16)$$

Можна довести, що рівняння Ейлера для функціонала (2.14) є диференціальними рівняннями рівноваги (2.1), у яких напруження з допомогою закону Гука та формул Коші виражені через переміщення.

2.3 Варіаційний принцип Лагранжа

Застосуємо до деформованого пружного тіла, що знаходиться у стані рівноваги, принцип можливих переміщень Лагранжа. Він виражає умову рівноваги внутрішніх та зовнішніх сил. Згідно з цим принципом, якщо $\vec{u}$ є дійсними переміщеннями точок тіла, при яких система зовнішніх та внутрішніх сил знаходиться у стані рівноваги, то робота цих сил на довільній нескінченно малій зміні переміщень $\delta\vec{u}^T = (\delta u, \delta v, \delta w)$, що допускається зв'язками, накладеними на тіло, дорівнює нулю. Нескінченно малі функції $\delta u, \delta v, \delta w$ називають <u>*варіаціями*</u> <u>*переміщень*</u> u, v, w.

Отже, маємо:

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = 0, \tag{2.17}$$

де ΔA_1 та ΔA_2 – відповідно прирости роботи внутрішніх та зовнішніх сил. Зауважимо, що ці прирости з точністю до знаку дорівнюють приростам відповідних потенціалів (2.15) та (2.16). Отримуємо: $\Delta A = -\Delta C$. Звідси випливає, що для дійсних переміщень $\vec{u}$ зміна повної енергії, викликана варіаціями $\delta\vec{u}$, повинна дорівнювати нулю:

$$\Delta C = C\left(\vec{u} + \delta\vec{u}\right) - C\left(\vec{u}\right) = 0. \tag{2.18}$$

Головна, лінійна по відношенню до приросту переміщень $\delta\vec{u}$, частина приросту (2.18) є варіацією функціоналу (2.14). З точністю до нескінченно малих приростів переміщень порядків, вищих за перший, можемо стверджувати, що з (1.18) випливає рівність нулю варіації функціонала (2.14), тобто виконується необхідна умова локального екстремуму цього функціоналу.

Принцип Лагранжа (принцип варіації переміщень) формулюється наступним чином: для дійсних переміщень деформованого пружного тіла функціонал (2.14) його повної енергії має екстремальне значення. Цей принцип у варіаційній формі виражає умови рівноваги деформованого тіла.

Варіаційне формулювання задачі теорії пружності найчастіше використовується у двох випадках. У першому випадку для визначення переміщень, що надають екстремум функціоналу повної енергії, використовують чисельні методи (метод Рітца, метод скінченних елементів тощо). У другому випадку варіаційний підхід застосовують для отримання диференціальних рівнянь та крайових умов для конкретної задачі теорії пружності у вигляді рівнянь Ейлера для відповідної варіаційної задачі. Такий шлях є виправданим для тіл складної форми, наприклад, багатошарових пластин та оболонок, а також при переході від однієї системи координат до іншої.

2.4 Варіаційний принцип Кастильяно

При застосуванні варіаційного принципу Лагранжа стан деформованого тіла визначається функціями переміщень. У принципі Кастильяно стан тіла визначається функціями напружень $\vec{\sigma} = \left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\right)$. Ці функції задовольняють умовам рівноваги тіла при заданому зовнішньому навантаженні $\vec{p}_1 = \left(p_x, p_y, p_z\right)^T$ на поверхні S_1 та заданим переміщенням $\vec{u}_2$ на поверхні тіла S_2. Вказані напруження утворюють *статично можливу* або *рівноважну* систему напружень. Для кожної задачі теорії пружності існує нескінченна кількість таких систем напружень, оскільки у три рівняння рівноваги (2.1) входить 6 невідомих функцій напружень. Можна підібрати нескінченну кількість систем функцій напружень, які б задовольняли ці рівняння та крайові умови на поверхні тіла.

Принцип Кастильяно зі всіх можливих рівноважних систем напружень дозволяє виділити систему, яка не лише забезпечує рівновагу тіла, але й сумісність його деформацій. Отже, вона є єдиним розв'язком задачі теорії пружності.

Для формулювання принципу Кастильяно розглянемо два стани тіла: перший – з дійсними напруженнями $\vec{\sigma}$, другий – з напруженнями $\vec{\sigma}+\delta\vec{\sigma}$. Обидві системи напружень є статично можливими, тобто врівноважують зовнішнє навантаження $\vec{p}_1$. Тоді напруженню $\delta\vec{\sigma}$ відповідає відсутність навантаження на поверхні S_1, тобто система напружень $\delta\vec{\sigma}$ повинна бути самоврівноваженою. При такому навантаженні на поверхні S_2 виникають реактивні зусилля – поверхневі навантаження $\delta\vec{p}_2$. Оскільки ці сили та напруження врівноважують один одного, то їх робота δA на можливих переміщеннях дорівнює нулю. Умовою сумісності деформацій є рівність нулю роботи напружень $\delta\vec{\sigma}$ та навантажень $\delta\vec{p}_2$ на дійсних деформаціях $\vec{\varepsilon}$ та переміщеннях $\vec{u}_1$. Отримуємо:

$$\delta A=-\iiint_T \vec{\varepsilon}^T\delta\vec{\sigma}dxdydz+\iint_{S_1}\vec{u}_2^T\delta\vec{p}_2dS_2=0. \qquad (2.19)$$

Ліву частину (2.19), взяту з протилежним знаком, називають *функціоналом Кастильяно* або *додатковою енергією деформівного тіла*.

З рівності (2.19) випливає принцип Кастильяно: дійсні напруження надають додатковій енергії тіла стаціонарного значення.

Формулювання варіаційного принципу залежить від того, якими функціями описують стан напружено деформованого тіла. При використанні принципу Лагранжа такими функціями є переміщення $\vec{u}$, для принципу Кастильяно – це напруження $\vec{\sigma}$. Ці функції є невідомими, що визначаються з необхідної умови екстремуму відповідного функціоналу. Решта функцій, що описують напружено-деформований стан тіла, вважаються пов'язаними з невідомими функціями основними рівняннями теорії пружності, розглянутими у п. 2.1.

Крім розглянутих варіаційних принципів Лагранжа та Кастильяно, у теорії пружності використовують ще кілька варіаційних принципів, що відрізняються від них вибором невідомих функцій. Для отримання цих принципів використовують наступну формулу, що виражає перехід від інтегрування по об'єму до інтегрування по поверхні та доводиться з використанням відомої формули Остроградського-Гауса:

$$\iiint_T\left(\left[A\right]^T\vec{a}\right)^T\vec{b}dT=\iint_S\vec{a}^T\left[L\right]\vec{b}dS-\iiint_T\vec{a}^T\left[A\right]\vec{b}dT. \qquad (2.20)$$

У рівності (2.20) $\left[A\right]$ – матриця операторів диференціювання, що містить 3 рядки та 6 стовпців. У ній $a_{11}=\dfrac{\partial}{\partial x}=a_{24}=a_{36}$, $a_{14}=\dfrac{\partial}{\partial y}=a_{21}=a_{35}$, $a_{16}=\dfrac{\partial}{\partial z}=a_{25}=a_{33}$, решта елементів цієї матриці дорівнюють нулю; $\left[\left[L\right]\right]$ –

матриця направляючих косинусів нормалі у точках поверхні того ж розміру, що й матриця $\left[A\right]$, $l_{11}=l=l_{24}=l_{36}, l_{14}=m=l_{22}=l_{35}$, $l_{16}=n=l_{25}=l_{36}$, решта елементів матриці $\left[\left[L\right]\right]$ дорівнюють нулю. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – це вектори, замість яких можуть використовуватися вектори $\vec{u}, \vec{\varepsilon}, \vec{\sigma}$ або їх варіації, вектор $\vec{a}$ має три компоненти, $\vec{b}$ – шість компонент.

Формула (2.20) приводить інтеграл від похідних компонент вектора $\vec{a}$ до інтеграла від похідних компонент вектора $\vec{b}$ і є узагальненням формули інтегрування частинами для тіла довільної форми та оператора диференціювання $\left[A\right]$.

Виберемо у якості невідомих функцій $\vec{u}$ та $\vec{\sigma}$. Підставимо у (2.20) замість $\vec{a}$ та $\vec{b}$ відповідно $\vec{u}+\delta\vec{u}$ та $\vec{\sigma}+\delta\vec{\sigma}$. Відкинувши доданки, що є нескінченно малими другого та вищих порядків, після перетворень отримуємо рівність

$$\delta I_1 = 0, \tag{2.21}$$

де I_1 – *<u>функціонал</u>* *<u>Рейснера</u>*:

$$\begin{aligned} I_1 = \iiint\limits_T \left(\vec{\sigma}^T \left(\left[A\right]^T \vec{u}\right) - 0{,}5\vec{\sigma}^T \left[K\right]\vec{\sigma}\right) dxdydz - \iiint\limits_T \vec{u}^T \vec{g} dxdydz - \\ -\iint\limits_{S_1} \vec{u}^T \vec{p}_1 dS - \iint\limits_{S_2} \left(\vec{u}-\vec{u}_2\right)^T \left[L\right]\vec{\sigma} dS. \end{aligned} \tag{2.22}$$

У (2.22) $\left[K\right]$ – матриця коефіцієнтів закону Гука (2.4) $\vec{\varepsilon}=\left[K\right]\vec{\sigma}$.

Вибравши у якості незалежних невідомих функцій переміщення, деформації та напруження $\vec{u}, \vec{\varepsilon}, \vec{\sigma}$, отримуємо найбільш загальний функціонал відносно 15 невідомих функцій – *<u>функціонал</u>* *<u>Ху-Вашіцу</u>*:

$$\begin{aligned} I = 0{,}5\iiint\limits_T \vec{\varepsilon}^T \left[D\right]\vec{\varepsilon} dxdydz + \iiint\limits_T \vec{\sigma}^T \left(\left[A\right]^T \vec{u} - \vec{\varepsilon}\right) dxdydz - \\ -\iiint\limits_T \vec{u}^T \vec{g} dxdydz - \iint\limits_{S_1} \vec{u}^T \vec{p} dS - \iint\limits_{S_2} \left(\vec{u}-\vec{u}_2\right)^T \left[L\right]\vec{\sigma} dS. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Основні рівняння теорії пружності та умови на поверхні тіла, що є об'єктом дослідження є рівняннями Ейлера для цього функціонала та крайовими умовами для них.

Ввівши певні залежності між 15 невідомими функціями, можна від функціонала Ху-Вашіцу перейти до інших функціоналів. Наприклад, вважаючи, що напруження та деформації пов'язані між собою співвідношеннями закону Гука, переходимо від функціонала Ху-Вашіцу до функціонала Рейснера.

Література:

1. Клименко М.І., Швидка С.П., Кондрат’єва Н.О. Варіаційне числення та методи оптимізації. Запоріжжя: ЗНУ, 2020. 93 с.
2. Клименко М.І., Панасенко Є.В., Стреляєв Ю.М., Ткаченко І.Г. Варіаційне числення та методи оптимізації. Запоріжжя: ЗНУ, 2015. 84 с.
3. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В., Ловейкін Ю.В. Варіаційне числення та методи оптимізації. Київ: Київський національний університет імені Т. Шевченка, 2010. 121 с.
4. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. ВПЦ «Київський університет», 2009. 380 с.
5. Моклячук М.П. Збірник задач з варіаційного числення та методів оптимізації. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. 256 с.

.

.

.

.

.

13. .

14. .

15. :

16. :

17. .

18. ,

19. :

20. Зайченко О.Ю., Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Збірник задач. Київ: Слово, 2007. 472 с.
21. Кутковицький В.Я. Дослідження операцій. Київ: Професіонал, 2005. 264 с.
22. Глушик М.М., Копич І.М., Пенцак О.С., Сороківський В.М. Математичне програмування. Львів: Новий Світ-2000, 2006.216 с.
23. Боровик О.Л., Боровик Л.В. Дослідження операцій в економіці. Київ: ЦУЛ, 2007. 424 с.
24. Косоруков О.А., Мищенко А.В., Исследование операций. Москва: Экзамен, 2003. 448 с.
25. Мартинюк П.М., Мічута О.Р. Методи оптимізації та дослідження операцій. Рівне: НУВГП, 2011. 283 с.
26. Исследование операций в экономике. Под ред. Н.Ш. Кремера. Москва: Банки и биржи, 1997. 407 с.
27. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. Москва: Финансы и статистика. 2001. 368 с.
28. Дубров А.М., Лагоша , Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. Москва: Финансы и статистика, 2000. 176 с.
29. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики. Санкт-Петербург: Питер, 2002. 176 с.
30. Шелобаев С.И. Математические методы и модели: в экономике, финансах, бизнесе. Москва: ЮНИТИ, 2001. 368 с.
31. Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте. Москва: РДЛ, 2003. 256 с.
32. Кігель В.Р. Математичні методи ринкової економіки. Київ: Кондор, 2003. 158 с.
33. Вітлінський В.В. Моделювання економіки. Київ: КНЕУ, 2003. 408 с.
34. Модели и методы теории логистики. Под редакцией В.С. Лукинского. Санкт-Петербург: Питер, 2007. 448 с.
35. Практикум по логистике. Учебное пособие под ред. Б.А. Аникина. Москва: ИНФРА-М, 2003. 280 с.
36. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. Москва: Аудит, 1997, 590 с.