

Тема 1. Моделювання часових рядів

1.1 Сутність та види часових рядів

Часовим рядом або **рядом динаміки** називають послідовність статистичних показників, розташованих у хронологічному порядку. Його зображають у вигляді таблиці або графіка.

До складових елементів часового ряду відносять:

- 1) Ряд моментів або проміжків часу;
- 2) Ряд числових значень статистичних показників, що є об'єктами дослідження (рівнів часового ряду).

У залежності від типу рівнів часового ряду розрізняють:

- ряди абсолютних величин,
- ряди відносних величин,
- ряди середніх величин.

За ознакою часу розрізняють **інтервальні** та **моментні часові ряди**. Інтервальний часовий ряд характеризує явище за певні періоди часу (місяць, квартал, рік). Моментний часовий ряд характеризує явище за його станом на певний момент часу (на початок чи кінець періоду, певну дату).

При побудові часових рядів потрібно слідкувати, щоб всі рівні ряду були співставними між собою, тобто повинна враховуватися наявність змін при обчисленні рівнів часового ряду. Така порівнянність забезпечується застосуванням процедури змикання часового ряду. При цьому застосовують коефіцієнт співвідношення рівнів двох рядів.

Приклад. У таблиці наведений ряд динаміки для валового збору зерна у регіоні. На протязі періоду часу, що досліджується, територія регіону зазнала змін.

Таблиця 1.1. Валовий збір зерна у регіоні (тис. т)

Рік	2016	2017	2018	2019	2020	2021
До змін	4160	4320	4500	–	–	–
Після змін	–	–	6300	6220	6480	6840

Зміни відбулися у 2018 році. За даними цього року розрахуємо коефіцієнт співвідношення рівнів рядів:

$$K = \frac{6300}{4500} = 1,4.$$

Помножимо на цей коефіцієнт рівні ряду до змін і отримуємо значення показника, співставні з рівнями ряду після зміни території регіону.

Таблиця 1.2. Співставні показники валового збору зерна у регіоні з врахуванням зміни його території (тис. т)

Рік	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Валовий збір зерна	5820	6050	6300	6220	6480	6840

1.2 Аналітичні показники часових рядів

При дослідженні часових рядів визначають, як саме змінюються їх рівні у абсолютному та відносному виразах. Щоб визначити величину та напрям змін рівнів ряду у часі, обчислюють наступні показники: абсолютний приріст, темп зростання, темп приросту, абсолютне значення 1 % приросту, абсолютне та відносне прискорення (сповільнення), коефіцієнт прискорення (сповільнення), коефіцієнт випередження.

Абсолютний приріст свідчить, на скільки одиниць збільшився чи зменшився наступний рівень ряду у порівнянні з попереднім або базисним (тобто рівнем ряду у початковий період чи момент часу). Нехай y_i – рівень ряду у момент часу i , $i=0, 1, 2, \dots, n$. **Ланцюговий абсолютний приріст** рівня ряду визначається за формулою: $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, **базисний абсолютний приріст** – за формулою $\Delta y_i = y_i - y_0$, де y_0 – базисний рівень часового ряду.

Сума ланцюгових абсолютних приростів дорівнює кінцевому базисному приросту:

$$\sum_{i=1}^n \Delta y_i = y_n - y_0 = \Delta y_n^{\text{б.}}$$

Темп зростання показує, у скільки разів наступний рівень ряду більший за попередній або за базисний рівень. **Ланцюговий темп зростання** обчислюють за формулою:

$$T_i = \frac{y_i}{y_{i-1}},$$

базисний темп зростання:

$$T_i^{\text{б.}} = \frac{y_i}{y_0}.$$

Темпи зростання вимірюються у частках або у процентах.

Добуток ланцюгових темпів зростання дорівнює кінцевому базисному:

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_n = \frac{y_n}{y_0}.$$

Темп приросту показує, на скільки процентів наступний рівень ряду більший за попередній або за базисний. Він вимірюється лише у процентах і визначається як відношення абсолютного приросту до бази порівняння або як різниця між темпом зростання у відсотках та 100%. **Ланцюговий темп приросту** визначається за формулою:

$$T_{i, \text{прир.}} = \frac{\Delta y_i}{y_{i-1}} \cdot 100\%,$$

базисний темп приросту:

$$T_{i, \text{прир.}}^{\text{б.}} = \frac{\Delta y_i^{\text{б.}}}{y_0} \cdot 100\%.$$

Ці показники можна обчислювати, віднімаючи від відповідного темпу зростання 100%.

Абсолютне значення 1% приросту показує, яка абсолютна величина рівня ряду відповідає 1% приросту. Його визначають як відношення абсолютного приросту до темпу приросту:

$$A_i = \frac{\Delta y_i}{T_i^{\text{прир.}}}$$

Якщо порівняти ланцюгові абсолютні прирости, обчисливши різницю між наступним та попереднім приростами, то отримаємо **абсолютне прискорення (сповільнення) швидкості зміни рівня ряду:**

$$\Delta'_i = \Delta y_i - \Delta y_{i-1}.$$

Порівняння абсолютних приростів шляхом обчислення їх співвідношення дозволяє отримати **відносне прискорення (сповільнення) швидкості зміни рівнів ряду:**

$$k_{\Delta} = \frac{\Delta y_i}{\Delta y_{i-1}}$$

Відношення ланцюгових темпів зростання рівнів часового ряду

$$k'_i = \frac{T_i}{T_{i-1}}$$

дорівнює **коефіцієнту прискорення (сповільнення) відносної швидкості зміни рівня ряду.**

Відношення темпів зростання у різних рядах динаміки називають **коефіцієнтом випередження:**

$$k_i^{\text{в}} = \frac{T_i^1}{T_i^2}$$

1.3. Середні показники часових рядів

До середніх показників часових рядів відносять середні рівні, середні абсолютні прирости та середні темпи зростання ряду.

При обчисленні **середнього рівня ряду динаміки** у інтервальному ряді абсолютних величин використовують просту середню арифметичну:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

де n – кількість рівнів ряду.

Для моментного часового ряду використовують середню хронологічну:

$$\bar{y} = \frac{1}{n-1} \left(\frac{y_1 + y_n}{2} + y_2 + \dots + y_{n-1} \right).$$

Якщо у моментному ряді динаміки інтервали часу нерівні між собою, то для обчислення середнього рівня ряду використовують зважену середню арифметичну:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i t_i}{\sum_{i=1}^n t_i},$$

де t_i – інтервали часу між датами.

Середній темп зростання визначають як середню геометричну ланцюгових темпів зростання:

$$\bar{T} = \sqrt[n]{T_1 T_2 \dots T_n} = \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}}.$$

Середній абсолютний приріст визначають за формулою простої середньої арифметичної ланцюгових абсолютних приростів:

$$\overline{\Delta y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta y_i = \frac{y_n - y_0}{n}.$$

Приклад. Обсяг продукції, реалізованої підприємством у період з 2016 по 2021 рр. наведено у таблиці 1.3. Визначити абсолютні прирости, темпи зростання та приросту, абсолютне значення 1% приросту, середній абсолютний приріст, середній темп зростання та середній темп приросту.

Таблиця 1.3. Обсяг продукції, реалізованої підприємством у період з 2016 по 2021 рр., тис. г.о.

Рік	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Обсяг реалізації, тис. г.о.	570	530	550	590	610	630

Виберемо за базу порівняння 2016 р., тобто початкове значення обсягу реалізації $y_0 = 570$, $y_1 = 530$, $y_2 = 550$, $y_3 = 590$, $y_4 = 610$, $y_5 = 630$.

Знаходимо абсолютні базисні прирости:

$$\Delta y_1^{\bar{y}} = y_1 - y_0 = 530 - 570 = -40, \Delta y_2^{\bar{y}} = y_2 - y_0 = 550 - 570 = -20,$$

$$\Delta y_3^{\bar{y}} = y_3 - y_0 = 590 - 570 = 20. \Delta y_4^{\bar{y}} = y_4 - y_0 = 610 - 570 = 40,$$

$$\Delta y_5^{\bar{y}} = y_5 - y_0 = 630 - 570 = 60.$$

Знайдемо абсолютні ланцюгові прирости.

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0 = 530 - 570 = -40, \Delta y_2 = y_2 - y_1 = 550 - 530 = 20,$$

$$\Delta y_3 = y_3 - y_2 = 590 - 550 = 40, \Delta y_4 = y_4 - y_3 = 610 - 590 = 20,$$

$$\Delta y_5 = y_5 - y_4 = 630 - 610 = 20.$$

Визначимо базисні темпи зростання:

$$T_1^{\text{б.}} = \frac{y_1}{y_0} = \frac{530}{570} = 0,9298, T_2^{\text{б.}} = \frac{y_2}{y_0} = \frac{550}{570} = 0,9649, T_3^{\text{б.}} = \frac{y_3}{y_0} = \frac{590}{570} = 1,0351,$$

$$T_4^{\text{б.}} = \frac{y_4}{y_0} = \frac{610}{570} = 1,0702, T_5^{\text{б.}} = \frac{y_5}{y_0} = \frac{630}{570} = 1,1053.$$

Ланцюгові темпи зростання:

$$T_1 = \frac{y_1}{y_0} = \frac{530}{570} = 0,9298, T_2 = \frac{y_2}{y_1} = \frac{550}{530} = 1,0377, T_3 = \frac{y_3}{y_2} = \frac{590}{550} = 1,0727,$$

$$T_4 = \frac{y_4}{y_3} = \frac{610}{590} = 1,0339, T_5 = \frac{y_5}{y_4} = \frac{630}{610} = 1,0328,$$

Базисні темпи приросту:

$$T_{1,\text{прир.}}^{\text{б.}} = \frac{\Delta y_1^{\text{б.}}}{y_0} \cdot 100\% = \frac{-40}{570} \cdot 100\% = -7,02\%,$$

$$T_{2,\text{прир.}}^{\text{б.}} = \frac{\Delta y_2^{\text{б.}}}{y_0} \cdot 100\% = \frac{-20}{570} \cdot 100\% = -3,51\%,$$

$$T_{3,\text{прир.}}^{\text{б.}} = \frac{\Delta y_3^{\text{б.}}}{y_0} \cdot 100\% = \frac{20}{570} \cdot 100\% = 3,51\%,$$

$$T_{4,\text{прир.}}^{\text{б.}} = \frac{\Delta y_4^{\text{б.}}}{y_0} \cdot 100\% = \frac{40}{570} \cdot 100\% = 7,02\%,$$

$$T_{5,\text{прир.}}^{\text{б.}} = \frac{\Delta y_5^{\text{б.}}}{y_0} \cdot 100\% = \frac{60}{570} \cdot 100\% = 10,53\%.$$

Ланцюгові темпи приросту:

$$T_{1,\text{прир.}} = \frac{\Delta y_1}{y_0} \cdot 100\% = (T_1 - 1) \cdot 100\% = (0,9298 - 1) \cdot 100\% = -7,02\%,$$

$$T_{2,\text{прир.}} = (T_2 - 1) \cdot 100\% = (1,0377 - 1) \cdot 100\% = 3,77\%,$$

$$T_{3,\text{прир.}} = (T_3 - 1) \cdot 100\% = (1,0727 - 1) \cdot 100\% = 7,27\%,$$

$$T_{4,\text{прир.}} = (T_4 - 1) \cdot 100\% = (1,0339 - 1) \cdot 100\% = 3,39\%,$$

$$T_{5,\text{прир.}} = (T_5 - 1) \cdot 100\% = (1,0328 - 1) \cdot 100\% = 3,28\%.$$

Знайдемо абсолютне значення 1% приросту.

$$A_1 = \frac{\Delta y_1}{T_1^{np.}} = \frac{-40}{-7,02} = 5,7; A_2 = \frac{\Delta y_2}{T_2^{np.}} = \frac{20}{3,77} = 5,3; A_3 = \frac{40}{7,27} = 5,5;$$

$$A_4 = \frac{20}{3,39} = 5,9; A_5 = \frac{40}{7,27} = 5,8.$$

Середній абсолютний приріст: $\overline{\Delta y} = \frac{630 - 570}{5} = 12$ тис. г.о., Середній темп

зростання $\bar{T} = \sqrt[5]{\frac{630}{570}} = 1,0202$, середній темп приросту

$$\bar{T}_{np.} = (1,0202 - 1) \cdot 100\% = 2,02\%.$$