

Міністерство освіти і науки України  
Запорізький національний університет

О.В. Маслова

## **Матметоди**

Методичні рекомендації до лабораторних занять для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Лісове господарство» освітньо-професійної програми «Мисливське господарство та рослинні ресурси»

Затверджено  
вченою радою ЗНУ  
Протокол № xxx від xxxxx2021

Запоріжжя  
2022

УДК: 502/504:51(075.8)

МЗ16

Маслова О.В.: Інформаційні технології в лісомисливських господарствах методичні рекомендації до лабораторних занять для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Лісове господарство» господарство» освітньо-професійної програми бакалаврів «Мисливське господарство та рослинні ресурси». Запоріжжя : ЗНУ, 2022. 81с.

У методичних рекомендаціях до лабораторних занять в систематизованому вигляді подано програмний матеріал з дисципліни «Інформаційні технології в лісомисливських господарствах». Викладено основи математичних та статистичних методів розрахунку практичних екологічних задач. Для формування необхідних навичок запропоновано практичні завдання різного рівня складності. Тлумачення основних термінів і понять статистичних та математичних методів подається в тексті у відповідних розділах.

Методичні рекомендації до лабораторних занять з дисципліни «Інформаційні технології в лісомисливських господарствах» містять необхідний мінімум теоретичного матеріалу, покрокові рекомендації щодо виконання практичних завдань, питання для самоконтролю. З метою формування необхідних навичок запропоновано завдання для самостійного виконання.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Екологія» освітньо-професійної програми «Екологія охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування».

Інформаційні технології в лісомисливських  
Господарствах ЗП 7

Рецензент *О.С. Пшенична*, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук.

Відповідальний за випуск *О.Ф. Рильський*, доктор біологічних наук, професор, завідувач кафедри Загальної та прикладної екології і зоології.



## Зміст

Вступ	4
<b>Розділ 1. Статистичні методи в екології.</b>	
<b><u>Змістовний модуль 1. Основні поняття ймовірності та статистики.</u></b>	
Лабораторне заняття 1. Використання спеціалізованих обчислювальних програм в екологічній галузі.	8
Лабораторне заняття 2. Розв’язання задач на ймовірність.	17
Лабораторне заняття 3. Математичне сподівання, дисперсія та побудова частотних гістограм.	20
<b><u>Змістовний модуль 2. Параметрична статистика.</u></b>	
Лабораторне заняття 4. Обчислення критерія Стьюдента.	29
Лабораторне заняття 5. Обчислення критерія Фішера.	37
<b><u>Змістовний модуль 3. Непараметрична статистика.</u></b>	
Лабораторне заняття 6. Визначення критерія Манна-Уїтні.	40
Лабораторне заняття 7. Визначення критерія Колмогорова-Смірнова.	44
<b>Розділ 2. Математичні методи в екології.</b>	
<b><u>Змістовний модуль 4. Поняття диференціалів та інтегралів.</u></b>	
Лабораторне заняття 8. Розрахунок диференціалу.	49
Лабораторне заняття 9. Розрахунок інтегралу.	53
<b><u>Змістовний модуль 5. Поняття матриці.</u></b>	
Лабораторне заняття 10. Розрахунок матриці	58
Лабораторне заняття 11. Матричний метод в сучасній екології.	63
<b><u>Змістовний модуль 6. Графічний метод аналізу екологічних задач.</u></b>	
Лабораторне заняття 12. Дослідження функції.	66
Лабораторне заняття 13. Система рівнянь в екологічних задачах.	72
Лабораторне заняття 14. Побудова двомірної сплайн-інтерполяції.	76
Література	81

## Вступ

«Математичні методи в екології» – це спеціальний курс, який належить до галузі знань – «Природничі науки» і викладається на першому курсі навчання для здобувачів освіти спеціальності «Екологія», освітньо-професійної програми «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування» бакалаврського рівня вищої освіти.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є математичні способи і методи розрахунку чисельності популяції, динаміки зміни й аналізу функцій розподілу показників, характерних для загальних питань екології.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Математичні методи в екології» є отримання здобувачами освіти теоретичних знань з основ математичного аналізу для вирішення задач прикладного характеру в екології.

Мета дисципліни є навчити здобувачів освіти основним поняттям з теорії математичної статистики та ймовірності, принципам побудови системи диференціальних рівнянь і методам їх розрахунку для розв'язку задач екологічного спрямування.

Завдання дисципліни полягає у набуті здобувачами освіти навичок визначення характеристик вибірок і рангу, типу матриць, будови гістограм, діаграм і графічної залежності по експериментальним даним, рішення системи рівнянь використовуючи спеціалізоване програмне забезпечення.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Математичні методи в екології» є: вивчення основних математичних елементів з подальшою їх оцінкою за рівнями та критеріями, їх використання, для вирішення екологічних завдань. У результаті вивчення навчальної дисципліни здобувач освіти повинен набути таких результатів навчання (знання, уміння тощо) та компетентностей:

1. К01. Знання та розуміння предметної області та професійної діяльності.
2. К14. Знання та розуміння теоретичних основ екології, охорони довкілля та збалансованого природокористування.
3. ПР09. Демонструвати навички оцінювання непередбачуваних екологічних проблем і обдуманого вибору шляхів їх вирішення.
4. К02. Навички використання інформаційних і комунікаційних технологій
5. ПР08. Уміти проводити пошук інформації з використанням відповідних джерел для прийняття обґрунтованих рішень.
6. ПР10. Уміти застосовувати програмні засоби, ГІС-технології та ресурси Інтернету для інформаційного забезпечення екологічних досліджень.
7. К08. Здатність проведення досліджень на відповідному рівні.
8. К23. Здатність до використання сучасних інформаційних ресурсів для екологічних досліджень.
9. ПР21. Уміти обирати оптимальні методи та інструментальні засоби для проведення досліджень, збору та обробки даних.
10. К33. Здатність прогнозувати стан окремих складових навколишнього середовища, у тому числі із використанням методів математичного моделювання.
11. ПР31. Базові знання про склад і будову атмосфери, закономірності формування погоди і клімату; про фізичні основи геологічних і гідрологічних явищ

та процесів; умови формування природних вод, водний баланс і режим річкових басейнів, еволюцію ґрунтоутворюючих процесів, фізико-хімічні, водно-фізичні, агрохімічні та біологічні властивості ґрунтів. Уміння обирати та використовувати методи математичного моделювання та прогнозування стану довкілля.

12. К16. Розуміння основних теоретичних положень, концепцій та принципів математичних та соціально-економічних наук.

13. ПР01. Демонструвати розуміння основних принципів управління природоохоронними діями та/або екологічними проектами.

14. ПР02. Розуміти основні екологічні закони, правила та принципи охорони довкілля та природокористування.

Методи і контрольні заходи навчальної дисципліни «Математичні методи в екології» передбачають: метод проблемного викладу, дослідницький, догматичний, інтерактивний, проблемно-пошуковий, метод моделювання пояснювальна-ілюстративний (інформаційно-рецептивний), досліді, практичні роботи, індивідуальна домашня дослідницька робота.

Курс «Математичні методи в екології» входить до циклу фахових дисциплін, що викладаються студентам-екологам, і тісно пов'язана з такими дисциплінами, як «Моделювання та прогнозування стану довкілля», «Моніторинг довкілля», «Нормування антропогенного навантаження середовища», «Екологічна експертиза та екологічні ризики». Він надає майбутнім екологам серйозну математичну базу для проведення екологічної експертизи, та дозволяє застосовувати теоретичні досягнення на практиці.

Мета методичних рекомендації до лабораторних занять – засвоєння теоретичних основ статистичного аналізу експериментальних даних, формування знань і умінь, що стосуються організації і проведення наукових і науково-прикладних досліджень, отримання практичних навичок статистичного та математичного аналізів з використанням персонального комп'ютера та програмного середовищ Excel, MathCAD, STATISTICA, MathCAD Prime, яке доступне широкому загалу. Завдання курсу полягають у освоєнні методів варіаційної статистики, методів дисперсійного, кореляційного та регресійного аналізу, формуванні практичних навичок планування лабораторного та польового експерименту та використання спеціалізованого програмного забезпечення для аналізу даних, засвоєння правил коректного представлення результатів аналізу експериментальних даних наукового чи науково-практичного дослідження. У цьому випадку передбачається, що видання методичних рекомендації сприятиме поглибленню знань з використання різних методів математичної обробки для розв'язку різноманітних задач, пов'язаних із навколишнім середовищем, а також дозволить здобувачам освіти ефективно опанувати існуючу термінологію та розширити науковий кругозір у природничих науках.

Методичні рекомендації складаються з двох розділів, які відповідають шести змістовним модулям відповідно до робочої програми курсу «Математичні методи в екології». Практична частина курсу «Математичні методи в екології» спрямована на формування у здобувачів освіти комплексу вмінь та навичок використання сучасних пакетів прикладних програм, застосування методу збору, систематизації та аналізу інформації у практичній діяльності фахівця-еколога. Методичні вказівки

містять необхідний мінімум теоретичного матеріалу, покрокові рекомендації щодо виконання практичних завдань, контрольні питання.

Методичні рекомендації до лабораторних занять «Математичні методи в екології» допомагає здобувачам освіти спеціальності 101 «Екологія», освітньо-професійної програми «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування» практично застосовувати знання з вищої математики для розв'язку задач та отримувати безперервне та системне навчання, яке сприяє професійному зростанню в природничій галузі.

Матеріали методичних рекомендацій «Математичні методи в екології» довгий час апробовані здобувачами освіти Запорізького національного університету спеціальності «Екологія», освітньо-професійної програми «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування» бакалаврського рівня вищої освіти.

## **Правила техніки безпеки при виконання лабораторних робіт з курсу «Математичні методи в екології»**

Інструкція з охорони праці №4 для користувачів комп'ютерів, включно студентів, від «24» «січня» 2019 року № 09АГП (ЗНУ), вимагає раціонального розташування елементів робочого місця, що є важливим для підтримки оптимальної робочої пози в процесі праці та значно зменшує розумову і нервово-емоційну напругу, що впливає на напругу зорової системи та є досить значним навантаженням на м'язи рук під час роботи з клавіатурою персонального комп'ютера.

### **Перед початком виконання лабораторної роботи потрібно:**

- перевірити надійність встановлення апаратури на робочому столі. Повернути монітор так, щоб було зручно дивитися на екран – під прямим кутом (а не збоку) і трохи зверху вниз, при цьому екран має бути трохи нахиленим нижній його край ближче до оператора;
- перевірити загальний стан апаратури, перевірити справність електропроводки, з'єднувальних шнурів, штепсельних вилок, розеток, заземлення тощо;
- відрегулювати освітленість робочого місця;
- відрегулювати та зафіксувати висоту крісла, зручний для користувача нахил його спинки;
- приєднати до системного блоку необхідну апаратуру. Всі кабелі, що з'єднують системний блок з іншими пристроями, слід вставляти та виймати при вимкненому комп'ютері;
- ввімкнути апаратуру комп'ютера вимикачами на корпусах в послідовності: монітор, системний блок, принтер (якщо передбачається друкування); відрегулювати яскравість монітора та контрастність зображення. Не слід робити зображення надто яскравим, щоб не втомлювати очей.

### **Вимоги безпеки під час виконання роботи:**

- необхідно забезпечити стійке розташовувати клавіатуру на робочому столі, не допускаючи її хитання. Під час набору текстова-цифрових даних сидіти прямо, не напружуватися;
- для запобігання несприятливого впливу на користувача маніпулятору типу «миша» належить забезпечувати вільну велику поверхню столу для його переміщення і зручного упору ліктьового суглоба;
- не дозволяються сторонні розмови, подразнюючі шуми.

### **Забороняється:**

- входити до лабораторії у верхньому одязі;
- ставити на стіл стакани, пляшки, із водою чи будь-якою іншою рідиною, навіть якщо вони закриті кришкою;
- класти будь-які предмети на апаратуру комп'ютера;
- закривати будь-чим вентиляційні отвори апаратури, що може призвести до перегрівання і виходу її з ладу.
- самостійно ремонтувати апаратуру.



**Розділ 1. Статистичні методи в екології**  
*Змістовний модуль 1. Основні поняття ймовірності та статистики*

**Лабораторне заняття 1**

Використання спеціалізованих обчислювальних програм в екологічній галузі

**Мета лабораторного заняття:**

Ознайомити студентів з обчислювальними програмами MathCAD, MathCAD Prime, MS Excel і STATISTICA.

**Необхідне обладнання та матеріали:**

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MathCAD, MathCAD Prime, MS Excel, STATISTICA, Інтернет браузер, методичні вказівки.

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Призначення MathCAD, MathCAD Prime, MS Excel і STATISTICA.
2. Особливості використання обчислювальних програм MathCAD, MathCAD Prime, MS Excel і STATISTICA.

**Короткі теоретичні відомості.**

MathCAD – це багатофункціональна інтерактивна обчислювальна система для аналітичного і чисельного рішення різноманітних математичних задач і документування результатів роботи/дослідів.

Математична система MathCAD, у всьому світі, визнана однією з найбільш досконалих програмних систем, що дозволяють вирішувати математичні завдання в обсязі програми технічного призначення. Починаючи з версії MathCAD 2002 потім MathCAD 11 - 15 і останньої доступної версії MathCAD Prime 7.0.0.0, система забезпечує зручний інтерфейс і широкий набір вирішуваних завдань. Перевагою системи є можливість використання так званої символічної математики – методів вирішення завдань аналітичними методами.

Microsoft Excel (повна назва Microsoft Office Excel) — табличний процесор, програма для роботи з електронними таблицями. Програма входить до складу офісного пакета Microsoft Office. Лист Excel являє собою готову таблицю, тому Excel часто використовують для створення документів, що мають табличне представлення, крім того, створюють різні види графіків і діаграм, які беруть дані для побудови з комірок таблиць. Excel містить багато математичних і статистичних функцій, завдяки чому його використовують для елементарних розрахунків. Excel може працювати як база даних, хоча, звичайно, до повноцінної бази даних йому далеко.

Система STATISTICA, призначена для аналізу даних, візуалізації, прогнозування та проведення багатьох інших статистичних аналізів. Система STATISTICA складається з окремих модулів, кожний з яких є повноцінним Windows-застосунком. Можна швидко і зручно переключатися з одного модуля в інший, клацаючи мишею на значках модулів на робочому столі чи активізуючи

відповідне вікно застосунку (якщо воно вже було відкрите) або вибираючи модулі в діалоговому вікні. Інтерфейс системи може бути вбудований у конкретний проект користувача.

### Хід виконання лабораторної роботи (методика експериментальних досліджень).

1. Провести ввід даних і де кілька арифметичних дій у різних запропонованих програмах.
2. Побудувати графічне зображення отриманих результатів.
3. Визначити особливості використанням обчислювальних програм MathCAD, MathCAD Prime, MS Excel і STATISTICA.

Приклади виконання завдання.

MathCAD 15 має інтерфейс користувача, яке зображено на рисунку 1, на екрані комп'ютера спочатку є вікно програми з чистим робочим листом з ім'ям Untitled (Без назви): N (N – порядковий номер документа). Велику частину вікна MathCAD займає робоча область, в яку користувач вводить математичні вирази, текстові поля або графіки.

Панелі інструментів служать для швидкого виконання найбільш часто вживаних команд. На рис. 1 зображено вікно MathCAD з п'ятьма основними панелями інструментів, розташованими безпосередньо під рядком меню.

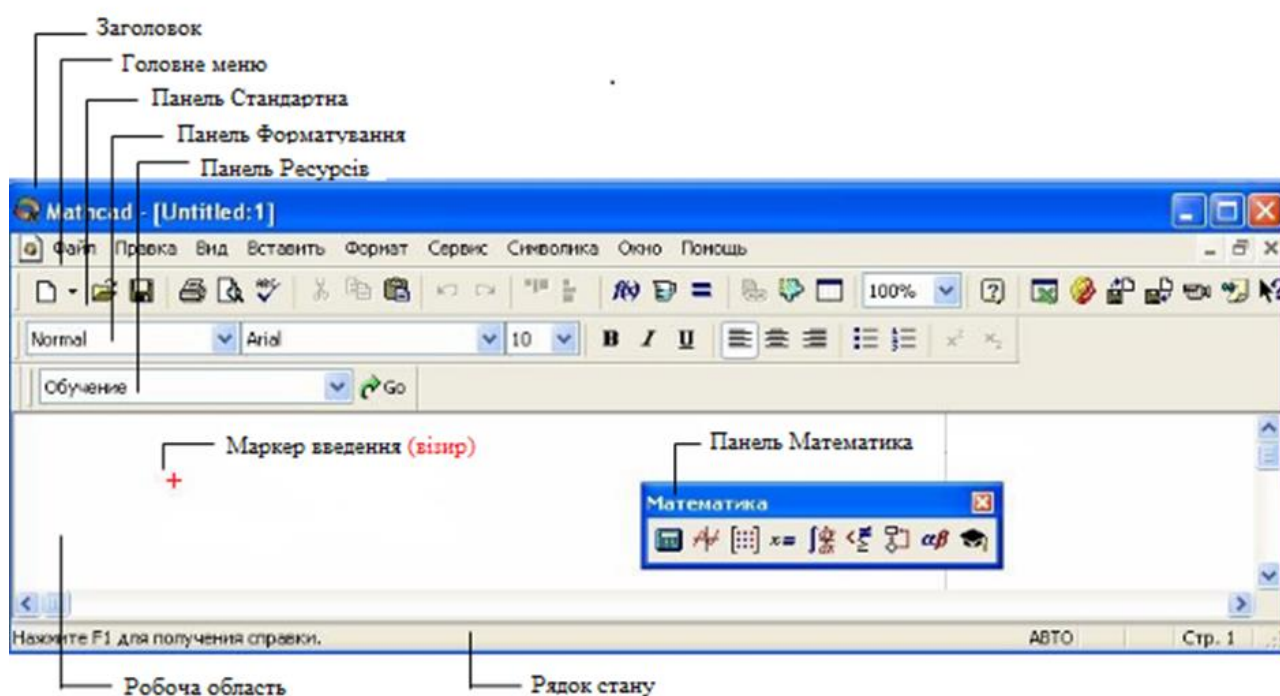


Рис. 1 – Панелі інструментів MathCAD 15

MathCAD включає наступні функціональні компоненти:

- текстового редактору для введення і редагування тексту і формул;
- обчислювального процесору для швидких розрахунків згідно введених формул;

- символічного процесору для символічних обчислень і отримання аналітичного результату;
- редактору графіків для побудови двовимірних і тривимірних графіків різних типів;
- основних і математичних панелі інструментів.

Головне меню системи містить наступні позиції:

**File** (Файл) – робота з файлами, мережею Internet та електронною поштою;

**Edit** (Правка) – редагування документів;

**View** (Вид) – зміна коштів огляду і включення елементів інтерфейсу;

**Insert** (Вставити) – установка вставок об'єктів і їх шаблонів;

**Format** (Формат) – зміна формату (параметрів) об'єктів;

**Tools** (Сервіс) – управління параметрами і процесом обчислення;

**Symbolics** (Символика) – вибір операцій символічного процесора;

**Window** (Окно) – управління вікнами системи;

**Help** (Помічь) – робота з довідковою базою даних про систему.

Кнопки в панелях згруповані за схожим дії команд:

**Standard** (Стандартная) – служить для виконання більшості операцій, таких як дії з файлами, редакторська правка, вставка об'єктів і доступ до довідкових систем;

**Formatting** (Форматирование) – для форматування (зміни типу і розміру шрифту, вирівнювання і таке інше) тексту і формул;

**Math** (Математика) – для вставки математичних символів і оператора в документи;

**Resources** (Ресурсы) – для виклику Ресурсів MathCAD (прикладів, підручників і таке інше);

**Controls** (Элементы управления) – для вставки в документи стандартних елементів управління інтерфейсу користувача (прапорців перевірки, полів введення і таке інше).

Панель Math (Математика) призначена для виклику на екран ще дев'яти панелей (рис.2), за допомогою яких, власне, і відбувається вставка математичної операції в документи.

Перерахуємо призначення математичних панелей:

1. **Calculator** (Калькулятор) – служить для вставки основні математичні підрахунки, отримала свою назву через схожість набору кнопок з кнопками типового калькулятора;
2. **Graph** (Графіки) – для вставки графіків;
3. **Matrix** (Матрица) – для вставки матриць і матричних операторів;
4. **Evaluation** (Определение) – для вставки операторів управління обчисленнями;
5. **Calculus** (Вычисления) – для вставки операторів інтегрування, диференціювання, підсумовування;
6. **Boolean** (Логика) – для вставки логічних (булевих) операторів;

7. **Programming** (Программирование) – для програмування засобами MathCAD;
8. **Greek** (Греческий Алфавит) – для вставки грецьких символів;
9. **Symbolic** (Символы) – для вставки символівних операторів.

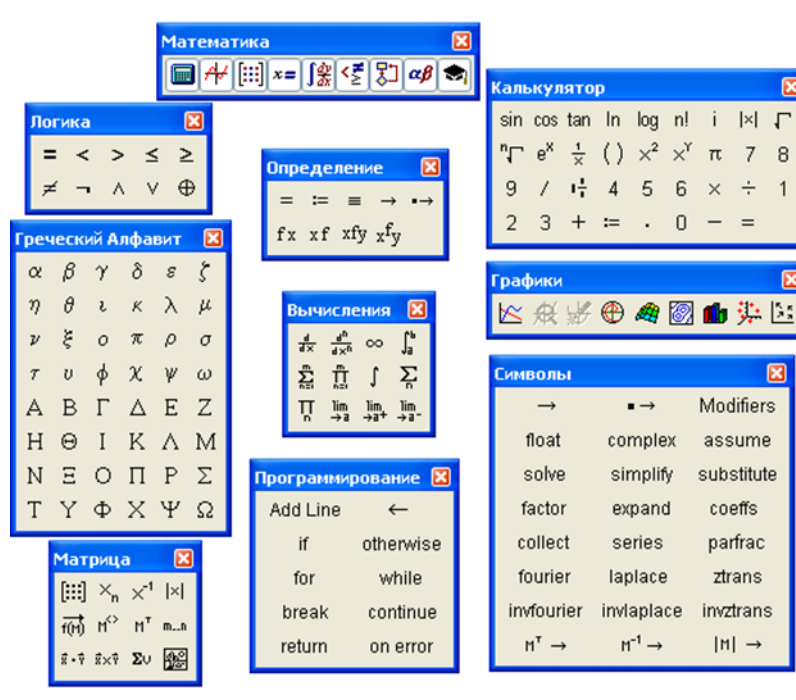


Рис. 2 – Панелі інструментів панелі Math (Математика) у MathCAD 15

- За допомогою програми MathCAD Prime можна:
- використовувати звичайний калькулятор для простих, повторюваних обчислень;
  - обчислювати і спрощувати символні вирази;
  - використовувати для обчислення інтеграли і похідні функції;
  - розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь, працювати з матрицями і визначниками;
  - розв'язувати системи нелінійних алгебраїчних рівнянь;
  - будувати графіки як в декартових і циліндричних, так і в полярних координатах, різні діаграми та гістограми;
  - створювати програми з розгалужуються і циклічними алгоритмами, використовуючи свій власний, інтуїтивно зрозумілий, мова програмування;
  - вирішувати диференціальні рівняння;
  - вирішувати задачі теорії ймовірності та математичної статистики;
  - здійснювати обмін інформацією з іншими додатками операційної системи Windows, такими, як Excel, PowerPoint, Word;
  - документувати розрахунки і створювати звітну документацію;
  - має більше 600 вбудованих математичних функцій;
  - підтримка шаблонів документів, форматування тексту, форматування формул;
  - покращений модуль роботи з 3D-графіками;

- «Математика в тексті» - можливість вводити формули безпосередньо в тексті.

Переваги використання MathCAD Prime – це зручний інтерфейс і легко доступний спосіб побудови графіків різних типів, як показано на рисунках 3 та 4. При запуску PTC Mathcad Prime відкривається новий документ, в який можна додати текст, рівняння, графіки та зображення. Кількість одночасно відкритих документів обмежується тільки ресурсами операційної системи. Рядок заголовка, який розташований у верхній частині вікна, відображає встановлену версію PTC Mathcad Prime (рис.3).

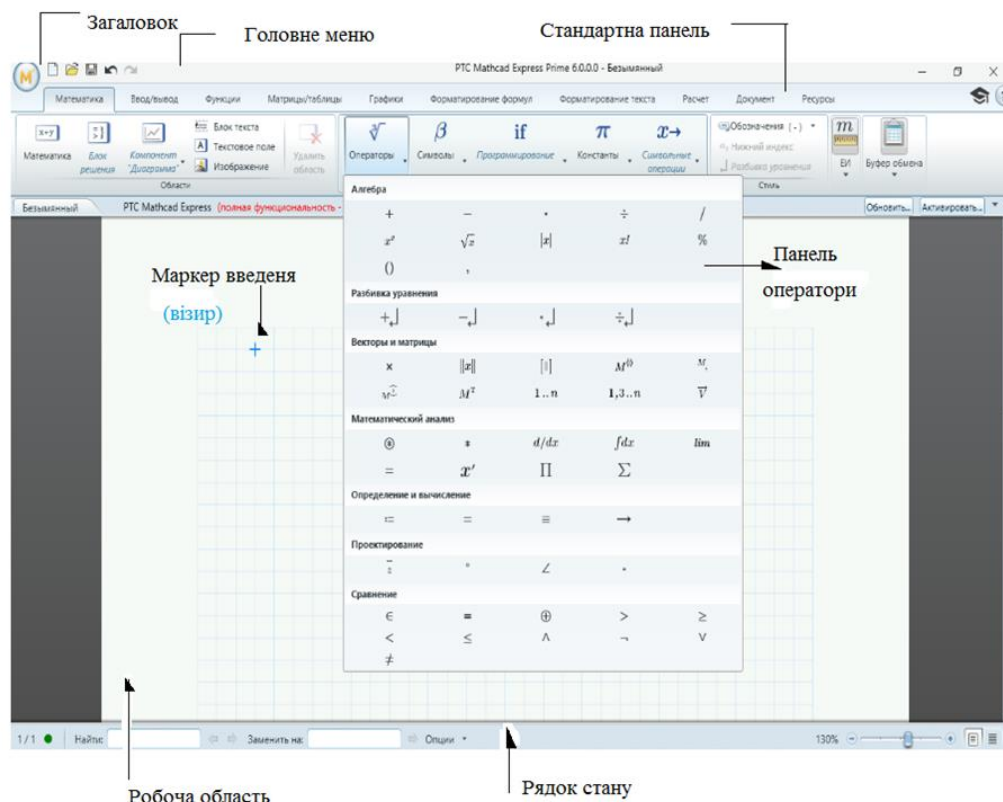


Рис. 3 – Панелі інструментів MathCAD Prime 6.0.0.0

Компонента "Діаграма" – це вбудований компонент, що вставляється в документ. На відміну від власного графіка XY, можна використовувати компонент "Діаграма" (Chart) для поліпшення візуалізації і представлення даних.

Можна вставити кілька компонентів "Діаграма" (Chart) в свій документ.

Після визначення вхідних виразів для X і Y графік відображається в області побудови графіка компонента "Діаграма" (Chart). Двічі клацніть область графіка, щоб відкрити програму "Діаграма" (Chart). Компонент "Діаграма" відображається зафарбовані сірим кольором і залишиться таким, щоб закрити відповідне йому додаток "Діаграма" (Chart).

Додаток "Діаграма" (Chart) – це місце настройки графіка відповідно до необхідної візуалізацією і поданням даних.

Стрічка – містить вкладки, на яких згруповані пов'язані команди. На вкладках стрічки відображаються контекстні меню, спливаючі підказки і поєднання клавіш (рис.4).

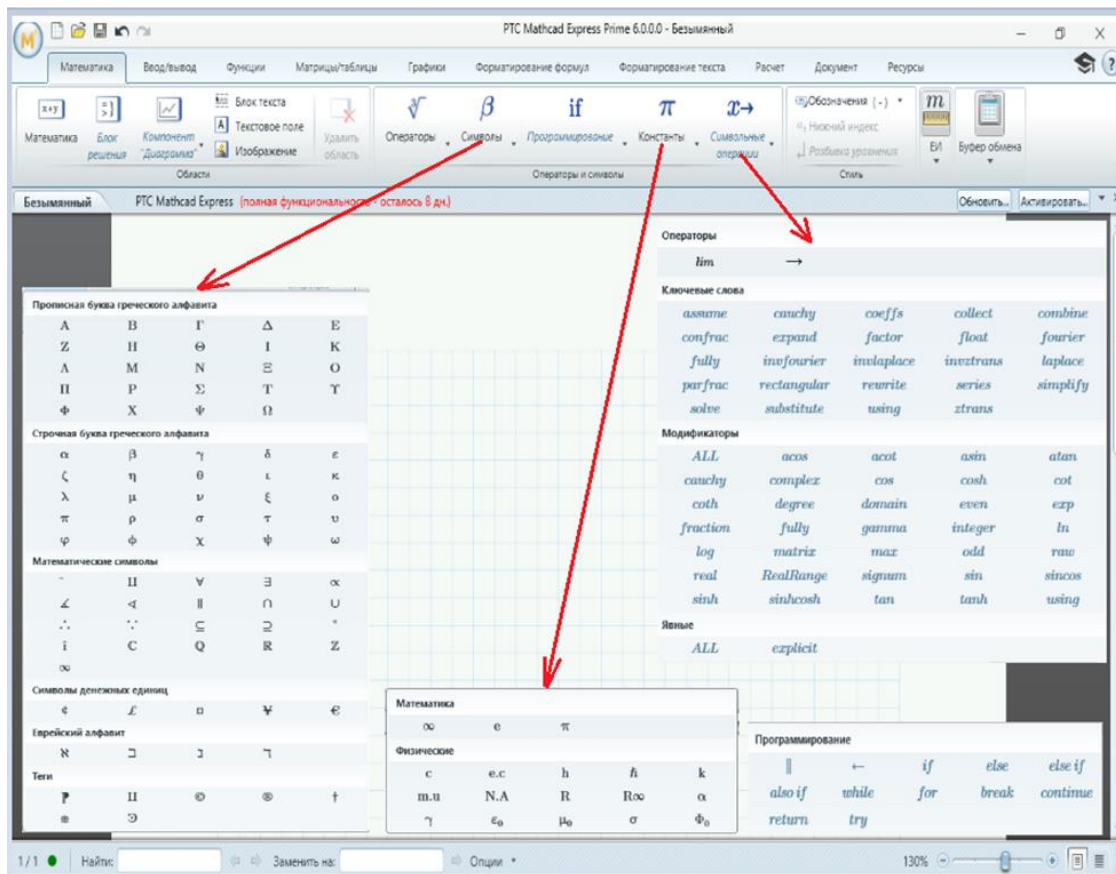


Рис. 4 – Вкладки інструментів у MathCAD Prime 6.0.0.0

Microsoft Excel (повна назва Microsoft Office Excel) — табличний процесор, програма для роботи з електронними таблицями. Програма входить до складу офісного пакета Microsoft Office (рис. 5).

Типові області застосування Excel:

- завдяки тому, що лист Excel являє собою готову таблицю, Excel часто використовують для створення документів без усіляких розрахунків, що просто мають табличне представлення (наприклад, прайс-листи в магазинах, розклади);
- у Excel легко можна створювати різні види графіків і діаграм, які беруть дані для побудови з комірок таблиць (графік зниження ваги тіла за вказаний період від початку занять спортом);
- його можуть використовувати звичайні користувачі для елементарних розрахунків (скільки витратив за цей місяць, що/кому/коли дав/взяв);
- Excel містить багато математичних і статистичних функцій, завдяки чому його можуть використовувати школярі і студенти для розрахунків курсових, лабораторних робіт;
- Excel інтенсивно використовується в бухгалтерії — у багатьох фірмах це основний інструмент для оформлення документів, розрахунків і створення діаграм. Природно, він має в собі відповідні функції;

- Excel може навіть працювати як база даних. Хоча, звичайно, до повноцінної бази даних йому далеко.

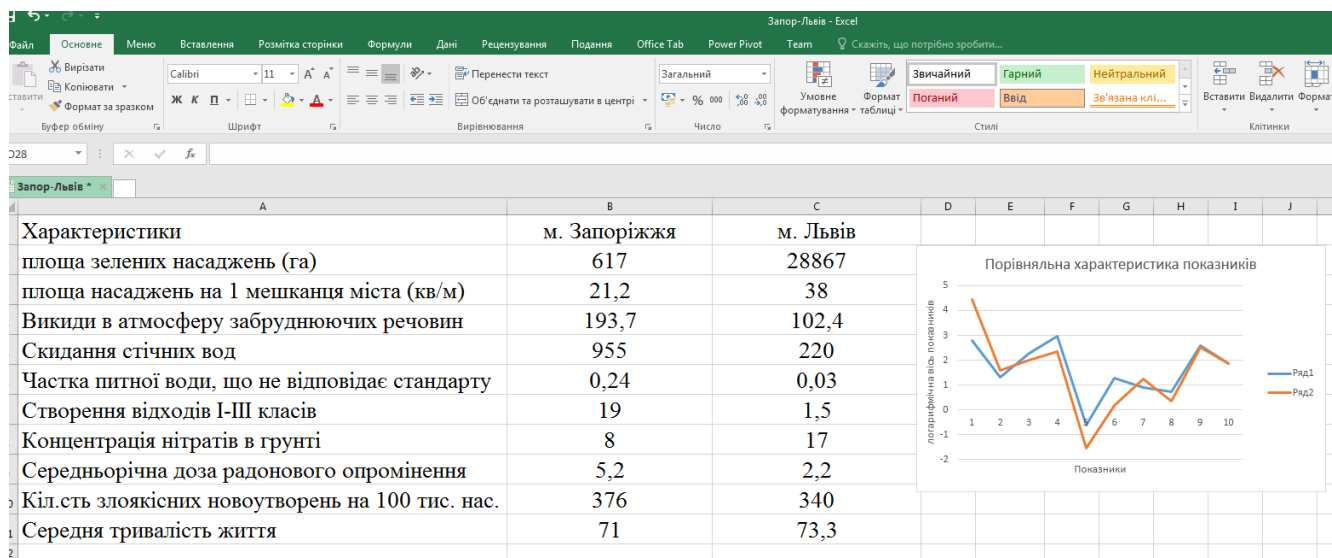


Рис. 5 – Приклад аркуша Excel

Excel — програмований табличний калькулятор. Всі розрахунки в Excel виконують формули. Excel вважає формулою все, що починається із знаку "=". Якщо в комірці написати просто «1 +1», то Excel не буде обчислювати цей вираз. Однак, якщо написати «=1 +1» і натиснути клавішу Enter, в комірці з'явиться результат обчислення виразу — число 2. Після натискання клавіші Enter формула не пропадає, її можна побачити в панелі інструментів «Рядок формул».

У формулі можна використовувати різні типи операторів (арифметичні і таке інше), текст, посилання на комірку або діапазон комірок, круглі дужки, іменовані діапазони. Природно, в формулах дотримується пріоритет виконання операцій (множення виконується раніше додавання і таке інше). Для зміни порядку виконання операцій використовуються круглі дужки.

При написанні складних формул, особливо використовують вкладені функції, використання майстра функцій – найкраще рішення. Він дуже полегшує і прискорює введення формул, і робить багато речей за нас: автоматично вставляє знак «дорівнює», ім'я функції, круглі дужки, розставляє крапки з комою. Дозволяє переглядати значення посилань і результати проміжних обчислень, так наприклад:

- у вікні майстра функцій, виділяючи посилання і натискаючи «F4» один, або кілька разів, можна поміняти тип посилання (зробити абсолютної або змішаної);
- якщо у вікні майстра функцій натиснути «F3», відкриється вікно для вставки іменованих посилань (якщо вони існують);
- якщо якусь функцію у формулі потрібно замінити на іншу, виділяємо цю функцію в рядку формул і вставляємо потрібну функцію. Виділена функція автоматично вставляється;
- клавіша «Tab» служить для перемикавання на наступний аргумент (текстове поле), а поєднання «Shift + Tab» – на попереднє;

- якщо виділити комірку, що містить формули з функціями і натиснути кнопку *Fx*, то відкриється вікно майстра функцій для однієї з функцій у формулі;
- для того, щоб написати формулу типу «= СУММ (J1: J3) / СУММ (K1: K3)», відкрийте майстер функцій, виберете функцію «СУМ», виділіть потрібний діапазон, потім клацнете мишкою в рядок формул і в ній вручну наберіть « / », потім натисніть на кнопку для вставки функції, і вставте другу функцію « СУМ »;
- якщо в текстовому полі потрібно ввести ТІЛЬКИ текст, не обов'язково вручну ставити подвійні лапки. Можна написати текст без лапок і натиснути Tab, або просто клацнути в інше поле. Excel проставить лапки автоматом (працює не у всіх текстових полях);
- у тих полях, де потрібно ввести логічне значення «БРЕХНЯ» або «ІСТИНА», досить ввести «0» для «БРЕХНЯ», і будь-який не нульове значення для «ІСТИНА» (прийнято використовувати 1).

STATISTICA — пакет для всебічного статистичного аналізу. В пакеті реалізовані процедури для управління даними (data management), добування даних (data mining), візуалізації даних (data visualization) та як показано на рисунку 6 аналіз даних (data analysis). Система STATISTICA складається з окремих модулів (рис.6), кожний з яких є повноцінним Windows-застосунком. Можна швидко і зручно переключатися з одного модуля в інший, клацаючи мишею на значках модулів на робочому столі чи активізуючи відповідне вікно застосунку (якщо воно вже було відкрите) або вибираючи модулі в діалоговому вікні.

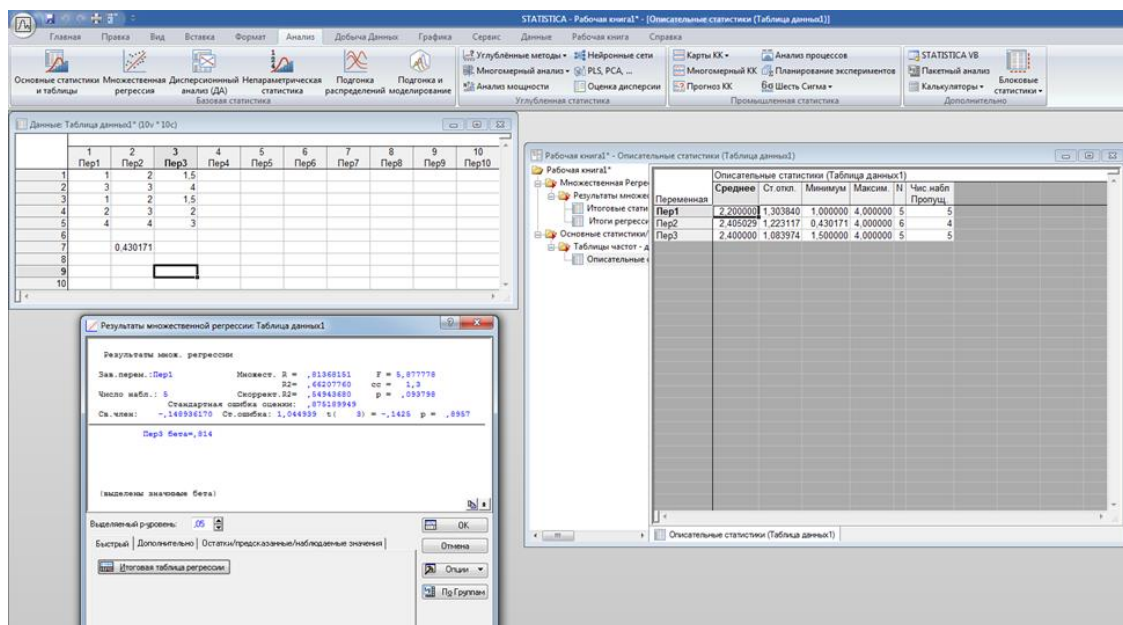


Рис. 6 – Приклад розрахунку в програмі STATISTICA

Найсильнішою стороною пакета є графіка і засоби редагування графічних матеріалів. Представлено сотні типів графіків, матриці і піктограми. Існує можливість розробити свій дизайн графіка і додати його до меню. Засоби керування графіками містять у собі роботу одночасно з декількома графіками, зміну розмірів складних об'єктів, розширені можливості малювання з додаванням художньої



перспективи і спеціальних ефектів, розбивку сторінок. Наприклад, тривимірні графіки можна обертати, накладати один на одного, стискувати або збільшувати. Крім того можна побачити на графіках, які фрагменти там змінилися під впливом змін в одній з перемінних (рис.7).

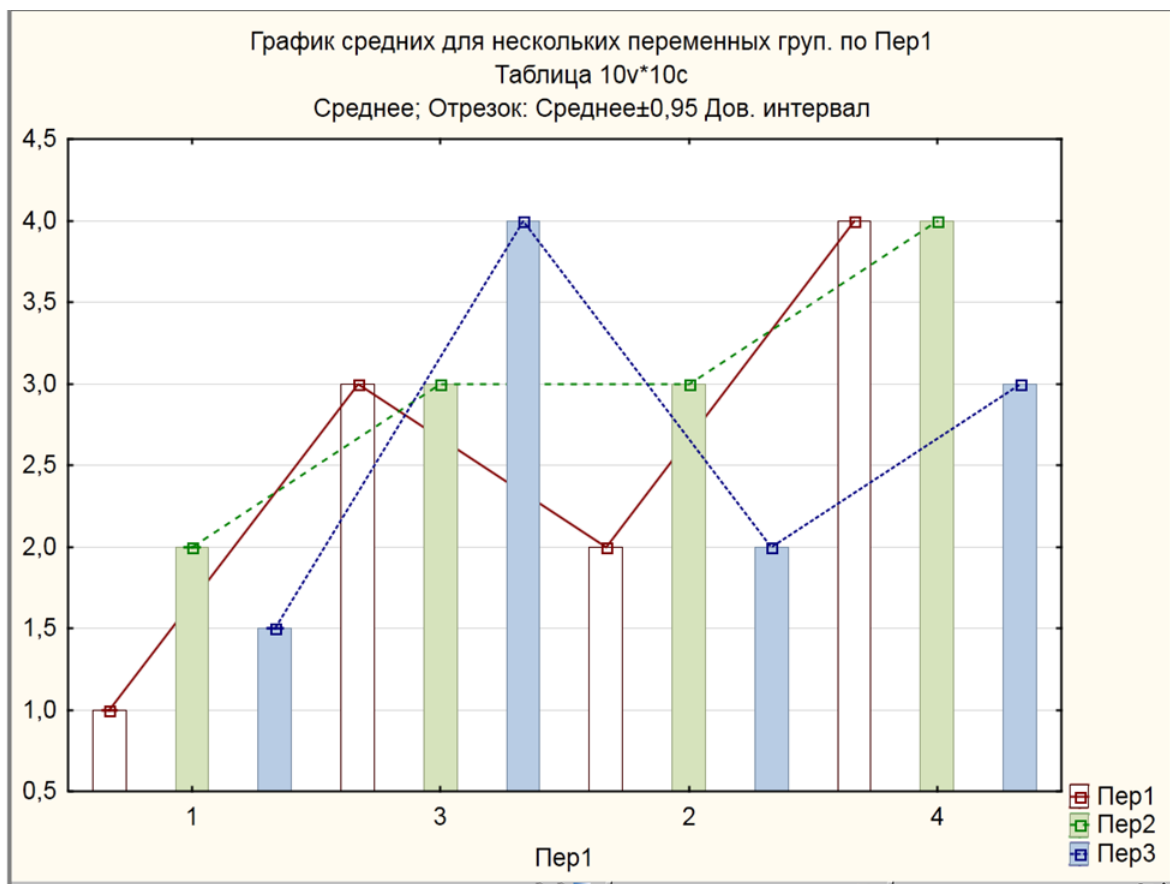


Рис. 7 – Приклад графічного зображення у програми STATISTICA

### Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.

1. Титульний лист.
2. Описати отримані результати.
3. Висновки.

## Лабораторне заняття 2

### Розв'язання задач на ймовірність

#### **Мета лабораторного заняття:**

Ознайомити студентів з методами розв'язання задач на ймовірність використовуючи MathCAD або MathCAD Prime.

#### **Необхідне обладнання та матеріали:**

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MathCAD, MathCAD Prime, Інтернет браузер, методичні вказівки.

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Визначення ймовірності.
2. Властивості ймовірності
3. Застосування теорії ймовірності.

#### **Короткі теоретичні відомості.**

Ймовірність це числова характеристика можливості того, що випадкова подія відбудеться в умовах, які можуть бути відтворені необмежену кількість разів. Випадковою подією називається подія, результат якої не може бути відомий наперед. Навіть у тому разі, коли насправді подія детермінована своїми передумовами, вплив цих передумов може бути настільки складним, що вивести з них наслідок логічно й послідовно, неможливо.

Існують два підходи до означення ймовірності: математично-аксіоматичний (Колмогорова) і Баєсів. Аксіоматичний підхід, строго сформульований Колмогоровим, будується на припущенні, що ймовірності елементарних випадкових подій задані, і зосереджується на визначенні ймовірностей складних подій, що є сукупністю елементарних.

Баєсів підхід не робить припущень про ймовірності елементарних подій, а намагається отримати їх із аналізу попереднього досвіду, спираючись на теорему Баєса і на попередні гіпотези. Баєсів підхід ближчий до того, як визначаються ймовірності випадкових подій у природознавстві. Оскільки ці ймовірності наперед невідомі, результати серії дослідів розбиваються на сприятливі й несприятливі, й експериментально визначена ймовірність дорівнює відношенню числа сприятливих подій до числа дослідів, тобто частоті подій.

Властивості:

- ймовірність достовірної події дорівнює 1;
- ймовірність неможливої події дорівнює 0;
- ймовірність випадкової величини є позитивним числом, що міститься між нулем та одиницею  $0 \leq P \leq 1$ ;
- сума імовірності різних подій А і В  
 $P(A+B)=P(A)+P(B)$ ;
- добуток двох подій  $P(AB)=P(A) \cdot P(B)$ .

Ймовірностей застосовується у повсякденному житті для оцінки ризиків і статистичного моделювання. Так наприклад, урядові служби застосовують імовірнісні методи для екологічного регулювання, аналізу правомірності (Теорія надійності старіння та довголіття) і фінансового регулювання. Крім фінансових оцінок, імовірність можна використовувати для аналізу тенденцій в біології (наприклад, розвитку хвороби), а також в екології (наприклад, біологічні квадрати Паннета). В якості статистичного методу може використовуватися аналіз ризиків для розрахунку ймовірності виникнення небажаних подій, що може допомогти створити протоколи які дозволяють уникати шкідливих обставин.

### Хід виконання лабораторної роботи (методика експериментальних досліджень).

1. Визначити в СЕЗН Moodle завдання за номером журналу академічної групи.
2. Ввести дані у програмне середовище.
3. Зробити обчислювання.

Приклади розрахунку задач на ймовірність в Mathcad Prime:

**Задача 1:** Відносна частота зараження вітряною віспою у дитячому садку 0,67.

Знайти число заражених дітей, якщо усього в групі 40 осіб.

Рішення задачі 1 за допомогою MathCAD Prime показано на рисунку 8.

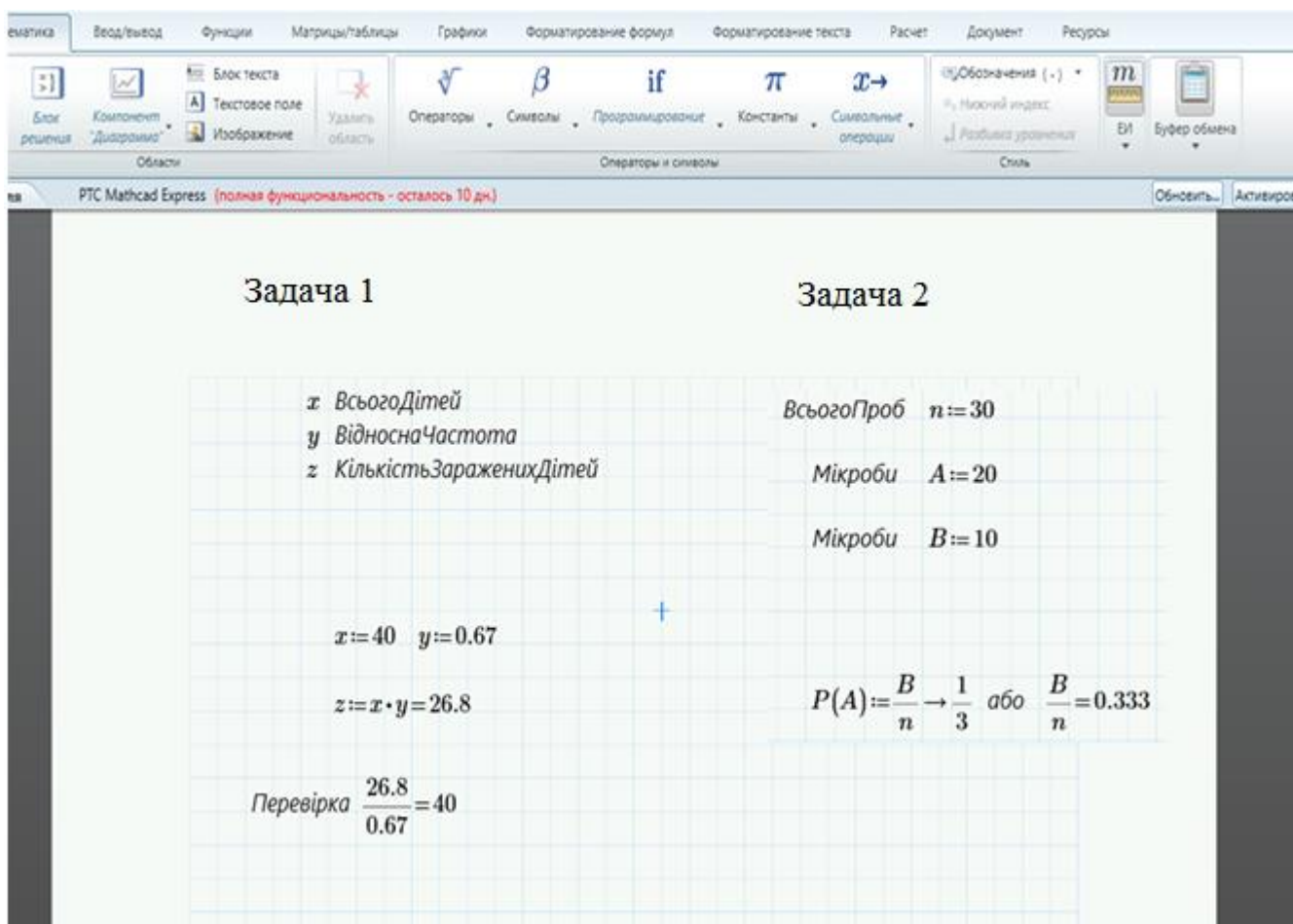


Рис. 8 – Приклад розв’язку задач за допомогою MathCAD Prime

### Задача 2 :

У лабораторії знаходиться 30 проб води. Лаборант забув наклеїти на них етикетки. Відомо, що проби з двома видами мікробів: А і В, а проб із мікробом А – 20. Також відомо, що в 1 пробі не можуть одночасно бути мікроби А і В. Навмання беруть пробу. Яка імовірність узяти пробу з мікробом В?

Рішення задачі 2 за допомогою MathCAD Ptime показано на рисунку 8.

### Приклади розрахунку задач на ймовірність в Mathcad 15

#### Задача:

На місто з Північної сторони дує вітер 100 днів на рік і 200 днів з Західної сторони. Підприємство, що знаходиться по факелу з Північної сторони, за технологічним процесом має викиди кожні три дні, а підприємство з Західної частини один раз в кінці тижня. Визначити частоту забруднення міста смогом підприємств. Визначити ймовірність того що у будь-який день над містом буде чисте повітря.

Рішення задачі за допомогою MathCAD показано на рисунку 9.

Mathcad - [Безымянный:1]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Мой веб-узел Go

$x := 100$   $y := 200$

$x1 := 3$   $y1 := 7$

$A := x \div 365 = 0.274$   $B1 := y \div y1 = 28.571$   $B2 := B1 \div 365 = 0.078$

$B := y \div 365 = 0.548$   $A1 := x \div x1 = 33.333$   $A2 := A1 \div 365 = 0.091$

$1 - A - B = 0.178$   $D := A2 + B2 = 0.17$

$P := (A1 + B1) \div (x + y) = 0.206$

Рис. 9 – Приклад розв’язку задачі на ймовірність за допомогою MathCAD

### **Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.**

1. Титульний лист.
2. Виконати всі завдання за варіантами в СЕЗН Moodle
3. Оформити завдань з коментарями використовуючи MathCAD або MathCAD Prime.
4. Висновки.

### Лабораторне заняття 3

Визначення математичного сподівання, дисперсії і побудова частотних гістограм

**Мета лабораторного заняття:** Ознайомити студентів з методами розрахунку математичного сподівання, дисперсії і будови частотних гістограм.

**Необхідне обладнання та матеріали:**

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MS Excel, Інтернет браузер, методичні вказівки

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Визначення, значення і формула математичного сподівання.
2. Визначення, значення і формула дисперсії.
3. Визначення гістограм, види гістограм.

#### Короткі теоретичні відомості.

Математичне сподівання це одна з основних числових характеристик кожної випадкової величини. В теорії ймовірностей, математичне сподівання випадкової величини є середнім значенням при довгостроковому повторенні одного і того ж експерименту. Закон великих чисел стверджує, що середнє арифметичне всіх значень майже певно збігається до математичного сподівання, із тим як кількість повторів даного експерименту прямує до нескінченності. Математичне сподівання також іноді називають сподіванням, середнім, середнім значенням. У більш практичному розумінні, математичне сподівання дискретної випадкової величини є середнім зваженим по імовірності для всіх можливих значень. Іншими словами, кожне можливе значення випадкової величини фактично є помножене на його імовірність виникнення, і отриманий добуток складається у загальну суму, яка утворює математичне сподівання. Математичного сподівання визначають за формулою:

$$M = \sum_1^n x_i p_i.$$

Дисперсія це міра розсіяння значень випадкової величини відносно середнього значення розподілу. Більші значення дисперсії свідчать про більші відхилення значень випадкової величини від центру розподілу.

Дисперсія випадкової величини — це один з параметрів розподілу ймовірностей — це середньоквадратичне відхилення від середнього значення. Інакше кажучи, це математичне сподівання квадрату відхилення цієї змінної від її очікуваного значення (її математичного сподівання). Отже дисперсія є вимірюванням величини розпорошеності значень цієї змінної, беручи до уваги всі її значення і їхні ймовірності. Формула розрахунку дисперсії:

$$D = \sum_1^n x_i^2 p_i - (M)^2.$$

У простому розумінні, дисперсія дозволяє виміряти наскільки далеко випадкові значення розподілені від їх середнього значення. Дисперсія відіграє важливу роль в статистиці.

Гістограма — спосіб графічного представлення табличних даних, приблизне представлення розподілу числових даних. Являє собою діаграму, що складається з прямокутників без розривів між ними. Кількісні співвідношення деякого показника представлені у вигляді прямокутників, площі яких пропорційні. Найчастіше для зручності сприйняття ширину прямокутників беруть однакою, при цьому їх висота визначає співвідношення відображуваного параметра.

### **Хід виконання лабораторної роботи (методика експериментальних досліджень).**

1. Згенерувати вибірку одним із способів які показано нижчі.
2. Записати частотний ряд.
3. Створити формулу в Excel математичного сподівання та зробити розрахунок.
4. Створити в Excel формулу дисперсії та зробити розрахунок.
5. За отриманими даними побудувати частотну діаграму.
6. Використовуючи описову статистику зробити порівняльний аналіз отриманих результатів.

Щоб виконати завдання а саме, скласти варіаційний ряд та побудувати полігон розподілу у MS Excel, де складання варіаційних рядів та побудова графіків розподілу ґрунтується на застосуванні лише трьох функцій: МІН(), МАКС(), які визначають найменше та найбільше значення вибірових даних, та функції ЧАСТОТА(), яка визначає частоту зустрічальності кожної з варіант, треба виконати наступні дії:

- 1) скласти варіаційний ряд;
- 2) сортувати дані за збільшенням;
- 3) визначити частоти зустрічальності певної величини/ознаки (побудова варіаційного ряду частот);
- 4) побудувати та налаштувати графічне зображення.

### **Приклади виконання завдання в Excel.**

1. Згенерувати вибірку одним із способів:

1) На новий лист Excel, як показано на рисунку 10, виділити комірку A1 і в рядку для формул ввести «СЛЧИС» подвійним натисканням на праву кнопку мишки і закрити дужку натиснувши одночасно кнопку «Shift» і «9». В комірки з'явиться число в зеленій рамці, підвести курсор до нижнього правого кута рамки, курсор набирає вигляду чорного хрестика і не відпускаючи затиснувши правою кнопкою мишки протягнути на ту кількість рядків на яку треба отримати вибірку.

The screenshot shows the Microsoft Excel interface. The ribbon includes 'Главная', 'Вставка', 'Разметка страницы', and 'Формулы'. The formula bar contains '=СЛЧИС()'. The active cell is A1. The data table is as follows:

	A	B	C	D	E	F	G
1	0,331458		0,452504		0,08601		
2	0,121047		-0,33146		0,05977		
3	0,233502				0,715433		
4	0,802479		0,02143		0,02143		
5	0,679992				0,475181		
6	0,408899				0,040888		
7	0,942567				0,890097		
8	0,970216				0,272926		
9	0,124124				0,305555		
10	0,446674				0,467515		
11	0,255505				0,936532		
12	0,780476				0,870589		
13	0,248285				0,758852		
14	0,964431				0,448468		
15	0,422301				0,533643		
16	0,535372				0,064496		
17	0,622331				0,631552		
18	0,706536				0,685791		
19	0,334929				0,845018		
20	0,668555				0,537984		
21	0,130458				0,008503		
22	0,858946				0,583941		
23	0,380987				0,99196		
24	0,862686				0,750172		
25	0,243376				0,973184		
26	0,171966				0,368218		
27	0,654632				0,920817		
28	0,4325				0,534165		

Рис. 10 – Приклад генерування вибірки у Excel

- 2) Закріпити генеровані цифри: виділити весь діапазон, копіювати і вставити через спеціальну вставку "Вставка значень" бажано на інший лист.
- 3) Округлити дані вибірки використовуючи =ОКРУГЛ(A1;2), як показано на рисунку 11, далі копіюємо і вставляємо через спеціальну вставку для значень.

	A	B	C	D	E	F
1	0,008503	0,010000				
2	0,02143	0,020000				
3	0,040888	0,040000				
4	0,05977	0,060000				
5	0,064496	0,060000				
6	0,08601	0,090000				
7	0,272926	0,270000				
8	0,305555	0,310000				
9	0,368218	0,370000				
10	0,448468	0,450000				
11	0,467515	0,470000				
12	0,475181	0,480000				
13	0,533643	0,530000				
14	0,534165	0,530000				
15	0,537984	0,540000				
16	0,583941	0,580000				
17	0,611125	0,610000				
18	0,631552	0,630000				
19	0,685791	0,690000				
20	0,715433	0,720000				
21	0,750172	0,750000				
22	0,758852	0,760000				
23	0,76772	0,770000				
24	0,845018	0,850000				

Рис. 11 – Приклад генерування вибірки у Excel (округлення)

- 4) В стовпчик А вставте значення вашої вибірки, а у стовпчик В число зустрічаємості даного числа (використовуючи функцію «Счетесли», або вручну записати формулу «=счетесли(\$A\$1:\$A\$37;A1)»).
- 5) В стовпчик С у першу комірку вставити знак «=» активізувати комірку В1, вставити знак поділу «/» загальну кількість значень (n), або в стрічки формул ввести формулу =C2/\$A\$2.
- 6) В стовпчике D вставити «= A1 \* C1», далі комірку D1 активізувати та отримавши тонкий чорний хрестик потягнути на всі строчки стовпчика.
- 7) Розрахувати суму значень стовпчика D1 відомим вам способом.



**Увага! Не забувайте робити перевірку:**  
Сума ймовірності повинна дорівнювати **1**

Далі працюємо з даними. Перший спосіб генерую дані від 0 до 1, другий спосіб генерує значення від мінімального вказаного числа до максимального вказаного числа.

8) На новий лист Excel виділити комірку A1 і в рядку для формул ввести «=СЛУЧМЕЖДУ(11;53)» подвійним натисканням на праву кнопку мишки і закрити дужку натиснувши одночасно кнопку «Shift» і «9». В комірки з'явиться число в зеленій рамці, як показано на рисунку 12, підвести курсор до нижнього правого кута рамки, курсор набирає вигляду чорного хрестика і не відпускаючи затиснувши правою кнопкою мишки протягнути на ту кількість рядків на яку треба отримати вибірку.

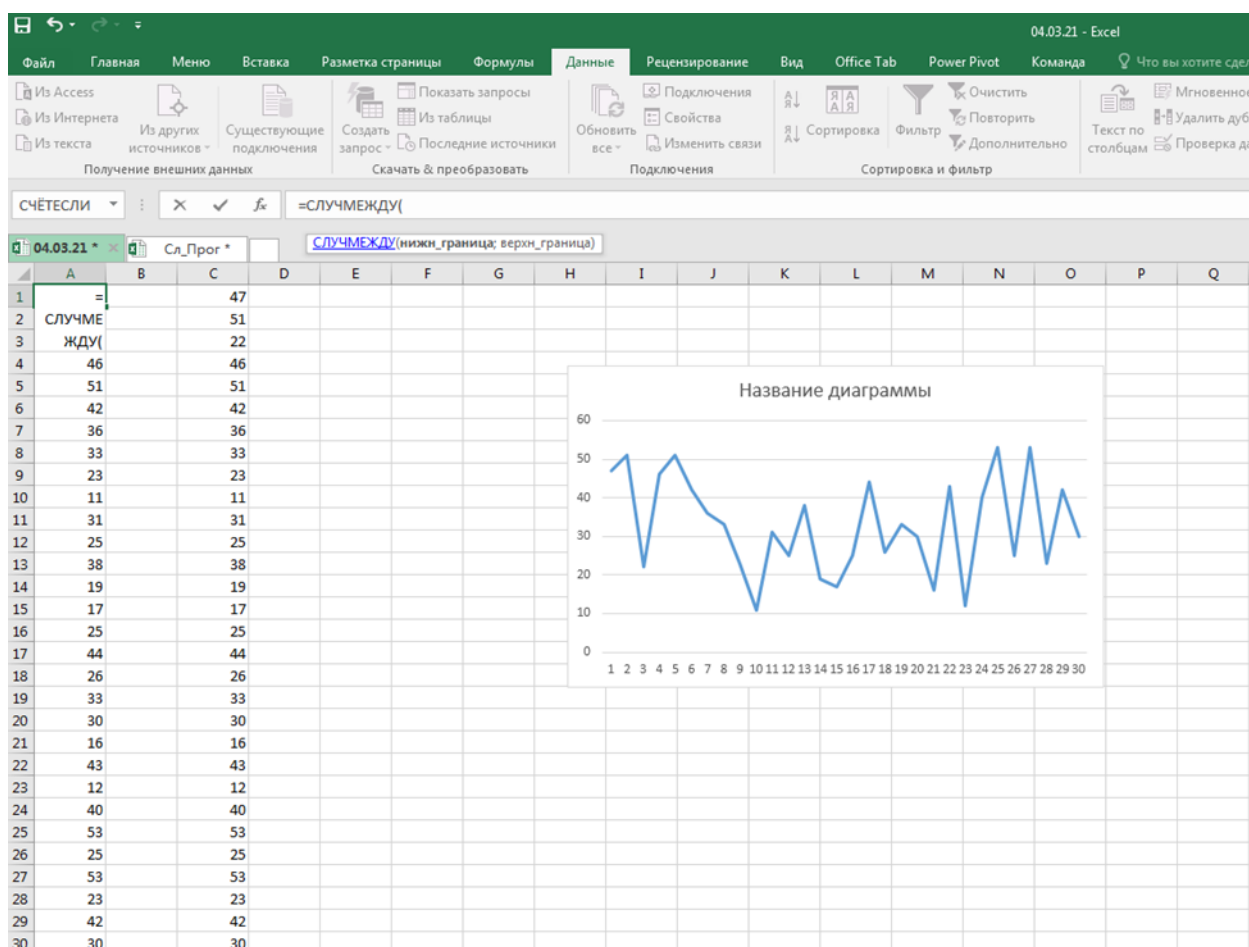


Рис. 12 – Приклад генерування вибірки у Excel різного діапазону

9) Далі повторюємо пункти 4 і 5 та отримуємо вибірні значення та частотний ряд.

10) Видалити значення які повторюються, використовуючи вкладку «Дані» та «Видалити дублі», як показано на рисунку 13.

2. Записати частотний ряд.

1) Вибірку записати у ранжируваний ряд (використовуючи вкладку «Головна»→ «Сортування і фільтр»).

2) Записати частотний ряд, тобто яка кількість раз зустрічається величина, (використовуючи функцію «Счетесли», або вручну записати формулу =счетесли(\$A\$1:\$A\$37;A1). Визначити частоту зустрічаємості.

	A	B	C	D	E	F	G
1	0,008503	0,010000	0,01	1			
2	0,02143	0,020000	0,02	1			
3	0,040888	0,040000	0,04	1			
4	0,05977	0,060000	0,06	2			
5	0,064496	0,060000	0,06	2			
6	0,08601	0,090000	0,09	1			
7	0,272926	0,270000	0,27	1			
8	0,305555	0,310000	0,31	1			
9	0,368218	0,370000	0,37	1			
10	0,448468	0,450000	0,45	1			
11	0,467515	0,470000	0,47	1			
12	0,475181	0,480000	0,48	1			
13	0,533643	0,530000	0,53	2			
14	0,534165	0,530000	0,53	2			
15	0,537984	0,540000	0,54	1			
16	0,583941	0,580000	0,58	1			
17	0,611125	0,610000	0,61	1			
18	0,631552	0,630000	0,63	1			
19	0,685791	0,690000	0,69	1			
20	0,715433	0,720000	0,72	1			
21	0,750172	0,750000	0,75	1			
22	0,758852	0,760000	0,76	1			
23	0,76772	0,770000	0,77	1			
24	0,845018	0,850000	0,85	1			
25	0,870589	0,870000	0,87	1			
26	0,890097	0,890000	0,89	1			
27	0,920817	0,920000	0,92	1			
28	0,936532	0,940000	0,94	1			
29	0,973184	0,970000	0,97	1			
30	0,99196	0,990000	0,99	1			

Рис. 13 – Приклад генерування вибірки у Excel (повторюваність)

3) Видалити значення які повторюються, використовуючи вкладку «Дані», як показано на рисунку 14.

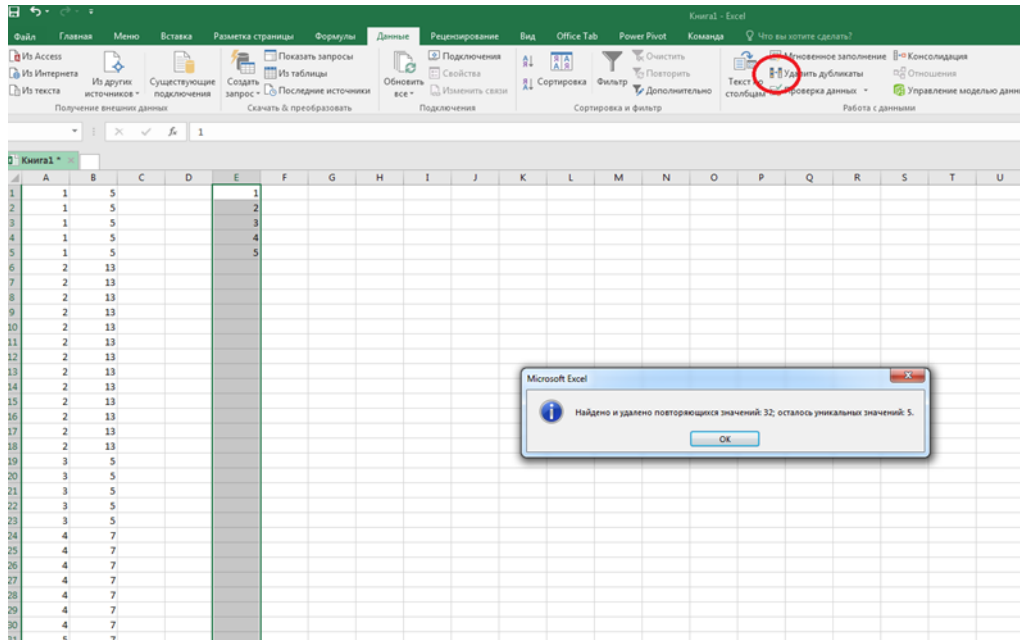


Рис.14 – Використовуючи вкладку «Дані» прибираємо повторення

3. Створити формулу в Excel математичного сподівання та зробити розрахунок. Створення формул завжди починаються зі знаку дорівнює (=), за яким слідує константи, які є числами і операторами обчислень, такими як «плюс» (+), «мінус» (-), «зірочка» (\*) множення або «коса риска» (/) ділення на початку. Як приклад розглянемо формулу математичного сподівання:

$$M = \sum_1^n x_i p_i.$$

Виділіть на аркуші комірку, в яку необхідно ввести формулу.

Введіть = (знак рівності), а потім константи і оператори (не більше 8192 знаків), які потрібно використовувати при обчисленні.

4. Створити в Excel формулу дисперсії та зробити розрахунок.

Використовуючи формулу розрахунку дисперсії проводимо розрахунок, як показано на рисунку 15.

$$D = \sum_1^n x_i^2 p_i - (M)^2 .$$

**Проводячи розрахунки не забувайте проводити перевірку.**

Для використання вбудованих формул визначення математичного сподівання та дисперсії у програмному середовищі Excel необхідно перейти во вкладку «Данные», далі «Анализ данных», «Описательная статистика», «Ок».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	n	Xi	Wi	Pi	M	M2	Xi2	Xi2*P			D	s	
2	30	11	1	0,033333	0,366667	0,134444	121	4,033333			1166,55	150,956667	
3		12	1	0,033333	0,4	0,16	144	4,8					
4		16	1	0,033333	0,533333	0,284444	256	8,533333					
5		17	1	0,033333	0,566667	0,321111	289	9,633333					
6		19	1	0,033333	0,633333	0,401111	361	12,033333				M=ΣXiPi	
7		22	1	0,033333	0,733333	0,537778	484	16,133333					
8		23	2	0,066667	1,533333	2,351111	529	35,266667				D=ΣX2P-M2	
9		25	3	0,1	2,5	6,25	625	62,5					
10		26	1	0,033333	0,866667	0,751111	676	22,533333					
11		30	2	0,066667	2	4	900	60					
12		31	1	0,033333	1,033333	1,067778	961	32,033333					
13		33	2	0,066667	2,2	4,84	1089	72,6					
14		36	1	0,033333	1,2	1,44	1296	43,2					
15		38	1	0,033333	1,266667	1,604444	1444	48,133333					
16		40	1	0,033333	1,333333	1,777778	1600	53,333333					
17		42	2	0,066667	2,8	7,84	1764	117,6					
18		43	1	0,033333	1,433333	2,054444	1849	61,633333					
19		44	1	0,033333	1,466667	2,151111	1936	64,533333					
20		46	1	0,033333	1,533333	2,351111	2116	70,533333					
21		47	1	0,033333	1,566667	2,454444	2209	73,633333					
22		51	2	0,066667	3,4	11,56	2601	173,4					
23		53	2	0,066667	3,533333	12,48444	2809	187,2667					
24			30	1	32,9	66,81667		1233,367					
25					1082,41								

Рис.15 – Приклад розрахунків математичного сподівання та дисперсії

5. За отриманими даними будуюмо гістограму даної вибірки (рис. 16) та частотну діаграму (рис.17).



Рис.16 – Приклад гістограми вибірки у програми Excel

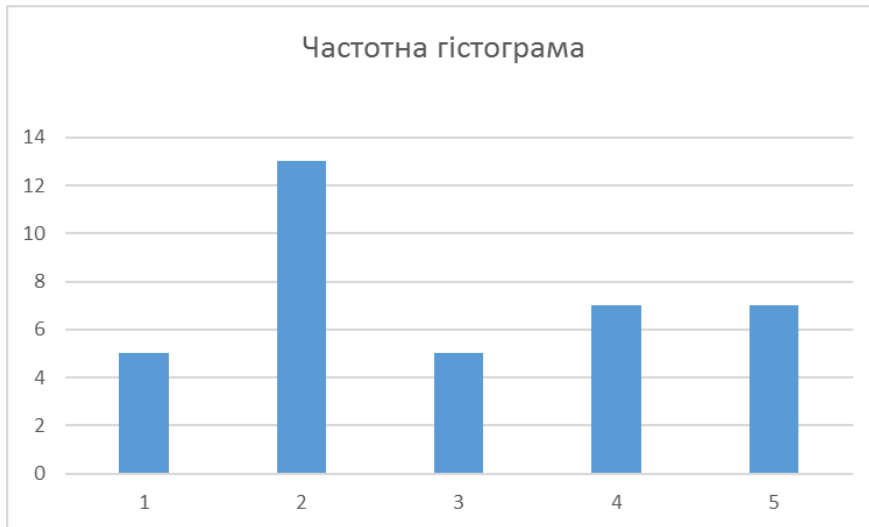


Рис.17 – Приклад частотної гістограми у програми Excel

б. Використовуючи описову статистику зробити порівняльний аналіз отриманих результатів.

Використовуючи формули розрахунку математичного сподівання та дисперсії робимо розрахунки, як показано на рисунку 18, праворуч показана загальна описова статистика, робимо висновки.

Категорія	Частота	Середнє	Стандартна помилка	Медіана	Мода	Стандартне відхилення	Дисперсія вибірки	Ексіцес	Асиметричність	Інтервал	Мінімум	Максимум	Сума	Счет	Уровень надежности(95,0%)
1	5	32,9	2,281535075	32	32	12,49648226	156,162069	-1,069457082	0,024870142	42	11	53	987	30	4,666263165

Рис.18 – Перевірка розрахунків у програми Excel

**Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.**

1. Титульний лист.
2. Виконати всі завдання за варіантами в СЕЗН Moodle.
3. Описати отримані результати.
4. Висновки.

## *Змістовний модуль 2 Параметрична статистика*

### **Лабораторне заняття 4** Обчислення критерія Стьюдента

#### **Мета лабораторного заняття:**

Ознайомити студентів з методами визначення критерія Стьюдента.

#### **Необхідне обладнання та матеріали:**

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MS Excel, STATISTICA, Інтернет браузер, методичні вказівки.

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Визначення та застосування критерія Стьюдента.
2. Метод розрахунку критерія Стьюдента для залежних і незалежних вибірок в програмі Excel і STATISTICA.

#### **Короткі теоретичні відомості.**

t-критерій Стьюдента – загальна назва для класу методів статистичної перевірки гіпотез (статистичних критеріїв), заснованих на розподілі Стьюдента. Найбільш часті випадки застосування t-критерію пов'язані з перевіркою рівності середніх значень у двох вибірках.

t-статистика будується зазвичай за наступним загальним принципом: в чисельнику – випадкова величина з нульовим математичним очікуванням (при виконанні нульової гіпотези), а в знаменнику – вибіркоче стандартне відхилення цієї випадкової величини, що отримується як квадратний корінь дисперсії.

Для застосування даного критерію необхідно, щоб вихідні дані мали нормальний розподіл. У разі застосування двохвибіркового критерію для незалежних вибірок також необхідне дотримання умови рівності дисперсії. Вимога нормальності розподілу даних є необхідним для точного t-тесту. Однак, навіть при інших розподілах даних можливе використання t- статистики. У багатьох випадках ця статистика асимптотична має стандартний нормальний розподіл –  $N(0,1)$ , тому можна використовувати квантиль цього розподілу. Однак часто навіть в цьому випадку використовують квантиль не стандартного нормального розподілу, а відповідного розподілу Стьюдента, як в точному t-тесті. Асимптотично вони еквівалентні, проте на малих вибірках довірчі інтервали розподілу Стьюдента ширше і надійніше.

При недотриманні умов нормального розподілу при порівнянні вибіркових середніх повинні використовуватися аналогічні методи непараметричної статистики.

**Хід виконання лабораторної роботи** (методика експериментальних досліджень).

1. Вибрати вибірку за номером списку в академічному журналі або генерувати самостійно (дивися лабораторну роботу № 3).

2. Перевірити нормальність розподілу.
3. Розрахувати використовуючи формули з урахуванням зв'язності вибірки.

### Приклад виконання лабораторної роботи.

Задача 1. При дослідженні параметрів жорсткості води у старому та новому водогоні міста А, були отримані результати (таблиця 1). Визначити ефективність впровадження нового водогону.

Таблиця 1. Параметри дослідження жорсткості води у водогоні (ммоль/дм<sup>3</sup>)

Старий	7	6	3	5	10	9	6	7	10	7	7	6
8	4	6	7	10	4	8	9	9	8	10	4	9
6	4	10	6	5	3	2	3	4	8	4	10	5
3	10	8	6	3	4	6	6	5	7	10	4	
Новий	5	7	5	3	8	6	9	4	5	7	10	3
8	6	6	5	7	3	4	2	8	1	8	7	3
10	10	7	4	8	1	9	7	6	3	10	6	8
1	2	7	2	2	7	9	3	6	2	10	2	1
5	5	5	10	5	8	5	9	9	9	3	6	7
8	1	5	5	7	3	3	10	9	7	5	7	4
2	8	5	9	9	2	1	3	6	4	1	9	7

1. Вносимо дані дослідження в таблицю (дивись лабораторну роботу №1)
2. Щоб дізнатися чи розрізняються водогони між собою необхідно обчислити t- критерій Стюдента для незалежних вибірок (рис. 19).
3. Щоб використовувати t- критерій Стюдента необхідно перевірити розподілу на нормальність.

4. Розрахувати середнє арифметичне  $M = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}$ ,

стандартне відхилення  $\delta = \sqrt{\frac{\sum (X_i - X_{cp})^2}{N}}$  кількість досліджень в кожному водогоні N.

5. Обчислюємо емпіричне значення за формулою t-критерію Стюдента для незалежних вибірок за формулою.

У разі якщо розміри вибірок відрізняються мало, застосовують спрощену формулу наближених розрахунків:

$$t = \frac{|M_1 - M_2|}{\sqrt{\frac{\delta_1^2}{N_1} + \frac{\delta_2^2}{N_2}}}$$

Коли розміри вибірок відрізняються значно, застосовується складніша і точніша формула (рис. 20):

$$t = \frac{|M_1 - M_2|}{\sqrt{\frac{(N_1 - 1)\delta_1^2 + (N_2 - 1)\delta_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \left( \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right)}};$$

де  $M_1, M_2$  — середнє арифметичне,  $\delta_1, \delta_2$  — стандартне відхилення,  $\delta = \sqrt{D}$   
 $N_1, N_2$  — розміри вибірок (лабораторна робота № 3).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Старий	Новий		M <sub>стар</sub>	M <sub>новий</sub>		xci-Mc	(Xci-Mc)^2	SS	SS/N	X <sub>ні</sub> -M <sub>н</sub>	(X <sub>ні</sub> -M <sub>н</sub> )^2	SS	SS/N	
2	7	5		6,42	5,6889		0,58	0,3364	278,2	5,564	-0,68889	0,474567901	683,2889	7,592099	
3	6	7	Сумма	321	512		-0,42	0,1764			1,311111	1,719012346			
4	3	5	Кіл-ть	50	90		-3,42	11,6964			-0,68889	0,474567901			
5	5	3					-1,42	2,0164			-2,68889	7,230123457			
6	10	8					3,58	12,8164			2,311111	5,341234568			
7	9	6					2,58	6,6564			0,311111	0,096790123			
8	6	9					-0,42	0,1764			3,311111	10,96345679			
9	7	4					0,58	0,3364			-1,68889	2,852345679			
10	10	5					3,58	12,8164			-0,68889	0,474567901			
11	7	7					0,58	0,3364			1,311111	1,719012346			
12	7	10					0,58	0,3364			4,311111	18,58567901			
13	6	3					-0,42	0,1764			-2,68889	7,230123457			
14	8	8					1,58	2,4964			2,311111	5,341234568			
15	4	6					-2,42	5,8564			0,311111	0,096790123			
16	6	6					-0,42	0,1764			0,311111	0,096790123			
17	7	5					0,58	0,3364			-0,68889	0,474567901			
18	10	7					3,58	12,8164			1,311111	1,719012346			
19	4	3					-2,42	5,8564			-2,68889	7,230123457			
20	8	4					1,58	2,4964			-1,68889	2,852345679			
21	9	2					2,58	6,6564			-3,68889	13,60790123			
22	9	8					2,58	6,6564			2,311111	5,341234568			
23	8	1					1,58	2,4964			-4,68889	21,98567901			
24	10	8					3,58	12,8164			2,311111	5,341234568			

Рис.19 – t-критерій Стьюдента для незалежних вибірок, Excel (частина 1)

6. Обчислюємо ступені свободи за формулою:

$$df = N_1 + N_2 - 2.$$

7. Визначаємо по таблиці критичних значень t-Стьюдента рівень значимості.

8. Якщо рівень значимості менше 0,05 робимо висновок про наявність відмінностей між старим та новим водогонами.

9. Висновок: оскільки 1,5812 (експериментальне значення критерія Стьюдента) менше за 1,977 (табличного значення), то приймається  $H_0$ , що не має відмінностей між параметрами жорсткості води нового і старого водогонів міста А.



$t = \frac{ M_1 - M_2 }{\sqrt{\frac{(N_1 - 1)\delta_1^2 + (N_2 - 1)\delta_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}}$			
P1		P2	
P1	272,6164		
P2	675,6968	1,581209	= (D2-E2)/(КОРЕНЬ(S14))
P3	138		
P4	0,031111		
	0,21379		= ((S10+S11)/S12)*S13
<b>df</b>	138		
<b>T<sub>таб</sub></b>	1,977 для 0,05		
	2,61 для 0,01		
	3,361 для 0,001		

Рис.20 – t- критерій Стьюдента для незалежних вибірок, Excel (частина 2)

**Задача 2.** Дослідження впливу забруднення на вагу равликів *Helix pomatia* проводили на території міста і рекреаційної зони. Визначити наявність відмінностей між групами досліджуваних груп.

Таблиця 2. Параметри досліду ваги равликів *Helix pomatia*.

Місто	7	6	3	5	10	9	6	7	10	7	7	6
	8	4	6	7	10	4	8	9	9	8	10	4
	6	4	10									
Заповідник	5	7	5	3	8	6	9	4	5	7	10	3
	8	6	6	5	7	3	4	2	8	1	8	7
	10	10	7									

- Вносимо дані досліду у таблицю програми STATISTICA, зверніть увагу, що всі параметри ваги вносимо в перший стовпчик, а територію досліду позначаємо 1 – це місто, а 2 – це рекреаційна зона.
- Вибираємо вкладку «Анализ», потім «Основные статистики», «Т-критерій для независимых выборок», як показано на рисунку 21.

Переменная	Среднее 1	Среднее 2	t-знач.	сс	p	N набл. 1	N набл. 2	Ст.откл. 1	Ст.откл. 2	F-отн. дисперс.	p дисперс.
Вага	7,090909	5,892857	1,805097	48	0,077334	22	28	1,997834	2,558056	1,639461	0,248495

Рис.21 – Розрахунок t- критерій Стьюдента для незалежних вибірок, STATISTICA

3. Обираємо «Діаграма розмаху» у вкладки «Т-критерій для независимых групп», як показано на рисунку 22.

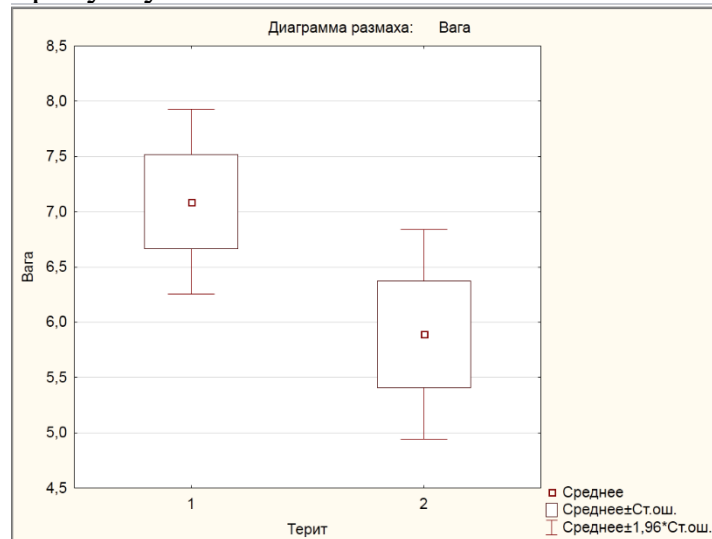


Рис.22 – Діаграма розмаху для незалежних вибірок, STATISTICA

4. Для отримання графіків розподілу імовірності необхідно активізувати вкладку «Категория нормальный вероятностные графики» (рис.23.)

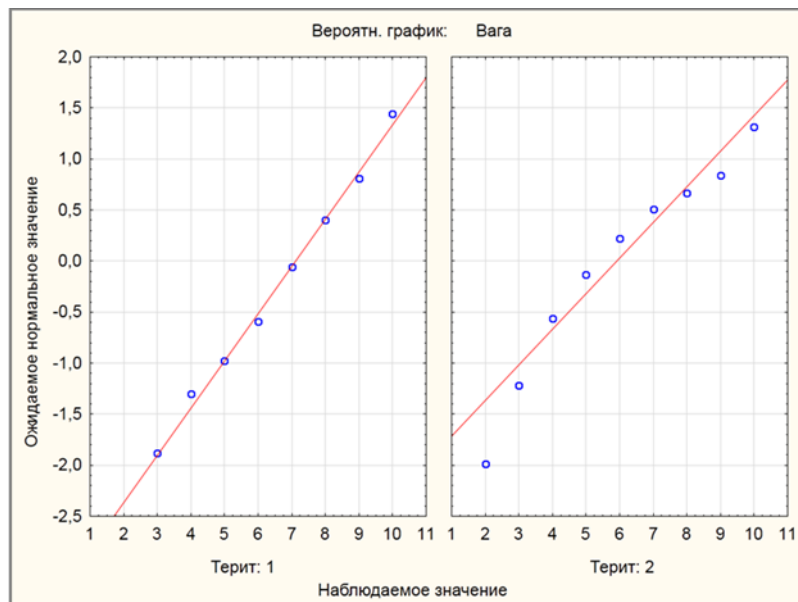


Рис.23 – Графік імовірності нормального розподілу для незалежних вибірок, STATISTICA

5. Для отримання гістограм розподілу ваги по території необхідно активізувати вкладку «Дополнительно», «Категория гистограмм» (рис.24).

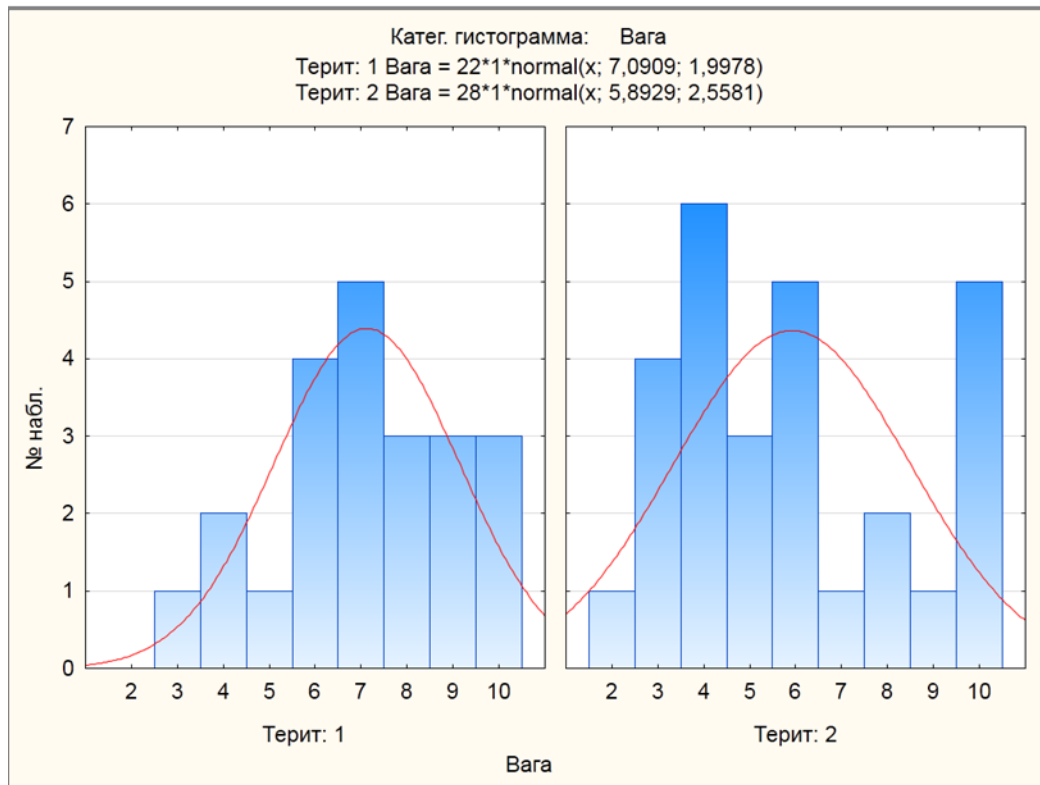


Рис.24 – Гістограма розподілу для незалежних вибірок, STATISTICA

**Задача 3:** При дослідженні водогінної води з використання установки оберненого осмосу було виявлено концентрацію сполук неорганічної природи. Визначити вплив даної установки на очищення водогінної води за отриманими даними дослідження (таблиця 3).

До	7	6	3	5	10	9	6	7	10	7	7	6	8
	4	6	7	10	4	8	9	9	8	10	4	9	6
	4	10	6	5									
Після	5	7	5	3	8	6	9	4	5	7	10	3	8
	6	6	5	7	3	4	2	8	1	8	7	3	10
	10	7	4	8									

1. Вносимо дані дослідження в таблицю:
2. Щоб дізнатися чи розрізняються результати до очищення і після необхідно обчислити t-критерій Стюдента для залежних вибірок.
3. Розрахуємо різницю для кожної пари значень, на прикладі в таблиці Excel стовпчик позначено P<sub>із</sub>.
4. Обчислюємо суму значень стовпчика P<sub>із</sub>.
5. Розрахуємо середню різницю значень (середнє арифметичне по різниці M<sub>d</sub>), на прикладі середнє значення стовпчику P<sub>із</sub>, як показано на рисунку 25.

6. Стандартне відхилення і ступеня свободи (для розрахунку стандартного відхилення необхідно знати середнє арифметичне в різниці значень, а потім підставити наявні значення в формулу стандартного відхилення).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	До	Після	Piz	A	A^2	δ^2	δ	df	t	
2	7	5	2	0,966667	0,934444	10,72299	3,274597	29	1,728	
3	6	7	-1	-2,03333	4,134444					
4	3	5	-2	-3,03333	9,201111				$t = \frac{ M_d }{\frac{\delta_d}{\sqrt{N}}}$	
5	5	3	2	0,966667	0,934444					
6	10	8	2	0,966667	0,934444					
7	9	6	3	1,966667	3,867778					
8	6	9	-3	-4,03333	16,26778					A=piz-cep
9	7	4	3	1,966667	3,867778		Таб	2,045		
10	10	5	5	3,966667	15,73444					
11	7	7	0	-1,03333	1,067778					
12	7	10	-3	-4,03333	16,26778					
13	6	3	3	1,966667	3,867778					
14	8	8	0	-1,03333	1,067778					
15	4	6	-2	-3,03333	9,201111					
16	6	6	0	-1,03333	1,067778					
17	7	5	2	0,966667	0,934444					
18	10	7	3	1,966667	3,867778					
19	4	3	1	-0,03333	0,001111					
20	8	4	4	2,966667	8,801111					
21	9	2	7	5,966667	35,60111					
22	9	8	1	-0,03333	0,001111		31	Сума		
23	8	1	7	5,966667	35,60111		30	Кіл-ть		
24	10	8	2	0,966667	0,934444		1,033	Серед		

Рис.25 – t- критерій Стюдента для залежних вибірок у програмі Excel

7. Підставами значення середнього арифметичного в формулу стандартного відхилення:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sum(X_{Piz} - M_d)^2}{N - 1}}$$

8. Підставляємо отримані значення в формулу t-критерію Стюдента для залежних вибірок.

$$t = \frac{|M_d|}{\frac{\delta_d}{\sqrt{N}}}$$

де  $M_d$  — середня різниця значень, а  $\delta_d$  — стандартне відхилення різниць.

Кількість ступенів свободи розраховують як  $df = N - 1$

Приклад розрахунку Т-критерія для програмного середовища STATISTICA демонструється на рисунках 26 (алгоритм дії) та 27 (діаграма розрахунку).

Переменная	Т-критерий для зависимых выборок (Таблица данных1)									
	Среднее	Стд. откл.	N	разн.	Стд. откл. разн.	t	сс	p	Доверит. -95,000%	Доверит. +95,000%
До	7,000000	2,117253								
После	5,966667	2,456284	30	1,033333	3,274597	1,728396	29	0,094553	-0,189421	2,256088

Рис.26 – t- критерій Стьюдента для залежних вибірок у програмі STATISTICA

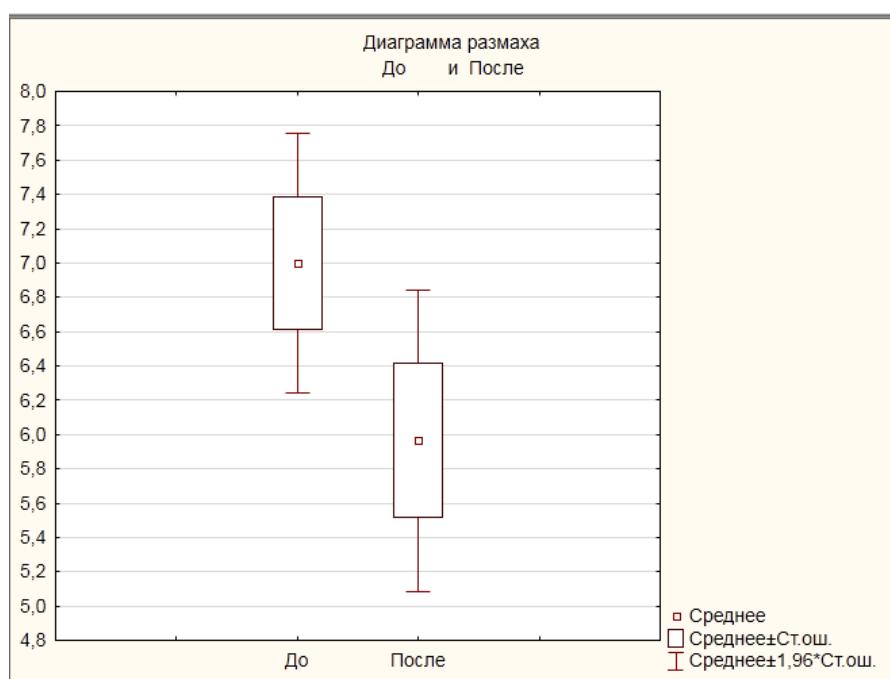


Рис.27 – Діаграма розмаху t- критерій для залежних вибірок, STATISTICA

- Визначимо по таблиці критичних значень t-Стьюдента рівень значимості та порівняємо з отриманим результатом. Табличне значення Т дорівнює 2,045 при  $p=0,05$ , а експериментальне – 1,728, робимо висновок про недоцільність використання установки оберненого осмосу.

**Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.**

- Титульний лист.
- Вирішення всіх завдань з коментарями.
- Функції для розв'язку за варіантами в СЕЗН Moodle.
- Висновки.

## Лабораторне заняття 5

### Обчислення критерія Фішера

**Мета лабораторного заняття:** Ознайомити студентів з вимогами до використання та практичне застосування критерія Фішера.

**Необхідне обладнання та матеріали:**

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MS Excel, Інтернет браузер, методичні вказівки.

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Визначення та застосування критерія Фішера.
2. Метод розрахунку критерія Фішера в програмах Excel.

**Короткі теоретичні відомості.**

*Критерій Фішера* – статистичний критерій для оцінки значущості відмінності дисперсій двох випадкових вибірок. Критерій Фішера відносять до критеріїв розсіювання та застосовується для перевірки рівності середніх значень в двох вибірках. При перевірці гіпотези положення (гіпотези про рівність середніх значень в вибірках) з використанням критерію Стюдента має сенс заздалегідь перевірити гіпотезу про рівність дисперсій. Для цього обчислюється F-статистика, рівна

$$F = \frac{D_1}{D_2},$$

де  $D_1$  - велика дисперсія,  $D_2$  - менша дисперсія.

Так як, згідно з умовою критерію, величина чисельника повинна бути більше або дорівнює величині знаменника, то значення  $F_{\text{емп}}$  завжди буде більше або дорівнює одиниці.

Число ступенів свободи визначається:

$$df_1 = n_1 - 1$$

для першої вибірки (тобто для тієї вибірки, величина дисперсії якої більше)

$$df_2 = n_2 - 1$$

для другої вибірки.

По таблиці значення Фішера критичні значення критерію Фішера знаходяться по величинам  $df_1$  (верхній рядок таблиці) і  $df_2$  (лівий стовпчик таблиці).

Якщо  $t_{\text{емп}} > t_{\text{крит}}$ , то нульова гіпотеза приймається, в іншому випадку приймається альтернативна.

**Хід виконання лабораторної роботи** (методика експериментальних досліджень).

1. Вибрати вибірку за номером списку в академічному журналі або використовувати вибірки лабораторної роботи № 4.
2. Розрахувати використовуючи формули.

## Приклад виконання лабораторної роботи.

Задача 1. При дослідженні параметрів жорсткості води у старому та новому водогоні міста А, отримані значення величин середніх достовірно не розрізнялися, проте спеціаліста-еколога цікавить питання – чи є відмінності в ступені однорідності показників жорсткості води між новим і старим водогонями.

Для критерію Фішера необхідно порівняти дисперсії показники жорсткості в обох водогонях. Результати представлені в таблиці 1 лабораторної роботи № 4.

Розрахувавши дисперсію для старого 5,719 і нового 3,46 водогонів отримуємо  $F=1,652$ ; як показано на рисунках 28 і 29.

По таблиці для F критерію при ступенях свободи в обох випадках рівних

$$df_1 = 14 - 1 = 13$$

$$df_2 = 20 - 1 = 19$$

знаходимо  $F_{кріт} = 2,28$ ; отже, в термінах статистичних гіпотез можна стверджувати, що  $H_0$  (гіпотеза про подібність) може бути відкинута на рівні 5%, а приймається в цьому випадку гіпотеза  $H_1$ . Спеціаліст-еколог може стверджувати, що за ступенем однорідності такого показника, як жорсткість води, є відмінність між вибірками з двох водогонів.

Для використання вбудованих формул визначення критерія Фішера у програмному середовищі Excel необхідно перейти во вкладку «Данные», далі «Анализ данных», «Двухвыборочный F-тест для дисперсии», «Ок».

Во вкладці «Двухвыборочный F-тест для дисперсии» обираємо комірки вхідного інтервалу 1 і 2 змінної (у нашому випадку експериментальні дані старого і нового водогону), а також комрки вихідного інтервалу.

Двухвыборочный F-тест для дисперсии		
	Стара	Нова
Среднее	5,214285714	6,1
Дисперсия	5,71978022	3,463157895
Наблюдения	14	20
df	13	19
F (розрахунок)	1,65160827	
P(F<=f) одностороннее	0,15563086	
F критическое одностороннее	2,280034052	

Рис.28 – Аналіз даних критерія Фішера у програмі Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Стара		Нова			$X_i - X_{сер}$	$(X_i - X_{сер})^2$	$\delta^2$		$\delta^2$	$(X_i - X_{сер})^2$	$X_i - X_{сер}$	
2	2		7			-3,2	10,3				0,81	0,9	
3	2		5			-3,2	10,3				1,21	-1,1	
4	6		9			0,8	0,6				8,41	2,9	
5	4		3			-1,2	1,5				9,61	-3,1	
6	6		4			0,8	0,6				4,41	-2,1	
7	2		5			-3,2	10,3				1,21	-1,1	
8	7		5			1,8	3,2				1,21	-1,1	
9	8		8			2,8	7,8				3,61	1,9	
10	6		6			0,8	0,6				0,01	-0,1	
11	9		8			3,8	14,3				3,61	1,9	
12	6		3			0,8	0,6				9,61	-3,1	
13	6		6			0,8	0,6				0,01	-0,1	
14	7		9			1,8	3,2				8,41	2,9	
15	2		4			-3,2	10,3				4,41	-2,1	
16	73	сума	5				74,4	5,71978			1,21	-1,1	
17	14	кіль-сть	8								3,61	1,9	
18	5,2	середнє	6								0,01	-0,1	
19			7								0,81	0,9	
20			8								3,61	1,9	
21			6								0,01	-0,1	
22			122	сума			$F_{tab}$	2,28			3,463158	65,8	
23			20	кіль-сть			$F_{розрах} = \delta_{стар} / \delta_{нова}$	1,652					
24			6,1	середнє									

Рис.29 – Розрахунок критерій Фішера для незалежних вибірок у програмі Excel

**Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.**

1. Титульний лист.
2. Вирішення всіх завдань з коментарями.
3. Задачі для розв’язку за варіантами в СЕЗН Moodle.
4. Висновки.



## *Змістовний модуль 3 Непараметрична статистика*

### **Лабораторне заняття 6** Визначення критерія Манна-Уїтні

**Мета лабораторного заняття:** Ознайомити студентів з методами визначення критерія Манна-Уїтні та продемонструвати можливості програм MS Excel і STATISTICA.

**Необхідне обладнання та матеріали:**

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MS Excel, STATISTICA, Інтернет браузер, методичні вказівки

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Визначення та застосування критерія Манна-Уїтні.
2. Метод розрахунку U-критерія в програмах Excel і STATISTICA.

**Короткі теоретичні відомості.**

U - критерій Манна-Уїтні призначений для оцінки розходжень між двома вибірками за рівнем будь яких ознак і кількістю спостережень. Він дозволяє виявляти відмінності між малими вибірками, коли  $n_1, n_2 \geq 3$  або  $n_1 = 2, n_2 \geq 5$ , і є дуже потужним.

Приклад формулювання гіпотез:

H<sub>0</sub>: рівень ознаки в групі 2 не нижче рівня ознаки в групі 1.

H<sub>1</sub>: рівень ознаки в групі 2 нижче рівня ознаки в групі 1.

Обмеження критерію:

1. У кожній вибірці повинно бути не менше 3 спостережень:  $n_1, n_2 \geq 3$ .
2. Допускається, щоб в одній вибірці було 2 спостереження, але тоді в другій їх повинно бути не менше 5;  $n_1 = 2, n_2 \geq 5$ .
3. У кожній вибірці повинно бути не більше 60 спостережень:  $n_1, n_2 \leq 60$ .

Алгоритм підрахунку U - критерій Манна-Уїтні

1. Перенести всі дані випробовуваних на індивідуальні картки.
2. Позначити показники вибірки 1 одним кольором, скажімо червоним, а всі показники з вибірки 2 - іншим, наприклад, синім.
3. Розкласти всі показники в єдиний ряд за ступенем наростання ознаки, не зважаючи на те, до якої вибірки вони відносяться, як якщо б ми працювали з однією великою вибіркою.
4. Проранжировать отримані значення, приписуючи меншому значенню менший ранг. Всього рангів вийде стільки, скільки у нас ( $n_1 + n_2$ ).
5. Знову розкласти картки на дві групи, орієнтуючись на кольорові позначення: червоні картки в один ряд, сині – в інший.
6. Підрахувати суму рангів окремо на червоних показниках (вибірка 1) і на синіх показниках (вибірка 2). Перевірити, чи збігається загальна сума рангів з розрахунковою.

7. Визначити більшу з двох рангових сум.
8. Визначити значення U за формулою:

$$U_{emp} = (n_1 * n_2) + \frac{n_x * (n_x + 1)}{2} - T_x$$

де  $n_1$  - кількість випробуваних у вибірці 1;

$n_2$  - кількість випробуваних у вибірці 2;

$T_x$  - більша з двох рангових сум;

$n_x$  - кількість випробуваних у групі з більшою сумою рангів.

9. Визначити критичні значення U по таблиці, якщо  $U_{emp} > U_{кр}$  при  $p=0,05$ , то  $H_0$  приймається. Якщо  $U_{emp} \leq U_{кр}$  при  $p=0,05$ , то  $H_0$  відкидається. Чим менше значення U, тим достовірність відмінностей вище.

**Хід виконання лабораторної роботи** (методика експериментальних досліджень).

1. Вибрати вибірку за номером списку в академічному журналі.
2. Перевірити нормальність розподілу
3. Розрахувати використовуючи формули .

Приклад виконання лабораторної роботи.

#### Задача 1.

Студенти на практиці проводили дослідження забруднення води планктоном синьо-зеленої водорості видів Cyanophyta, Bacillariophyta на територіях пляжів А і В. Визначити ступень забруднення використовуючи критерій Манна-Уїтні.

Таблиця 4. Показники синьо-зеленої водорості

С	76	90	91	94	87	109	109	77	47	74	120	40	40
	116	90											
В	104	44	114	72	91	87	76	87	110	69	101	101	69
	69	97											

У нашому випадку є два виду синьо-зеленої водорості, тому використовується для порівняння двох незалежних вибірок непараметричний критерій Манна-Уїтні. При використанні програми Excel, де всі елементи з першої вибірки порівнюються з усіма елементами другої вибірки (на рисунку 33 позначено різними кольорами). Якщо якийсь елемент більше порівнюваного, то йому зараховується 1 бал. Якщо елементи рівні, то їм зараховується по 0,5 балу. Потім бали елементів для кожної вибірки підсумовуються, а менша отримана сума є критерієм – U-статистика. Якщо вибірки не мають істотних відмінностей, то значення критерію має бути більше критичного значення для вибірок відповідного розміру.

Експериментальні показники вводимо в програмне середовище STATISTICA і виконуємо алгоритм дій, для розрахування критерія Манна-Уїтні, як показано на рисунках 30. Вводимо додатково стовпець по території: група 1 – для даних з пляжу А, а група 2 – для даних з пляжу території В і будуюмо діаграми розмаху (рис.31) і гістограми розподілу для С і В вибірок (рис.32).

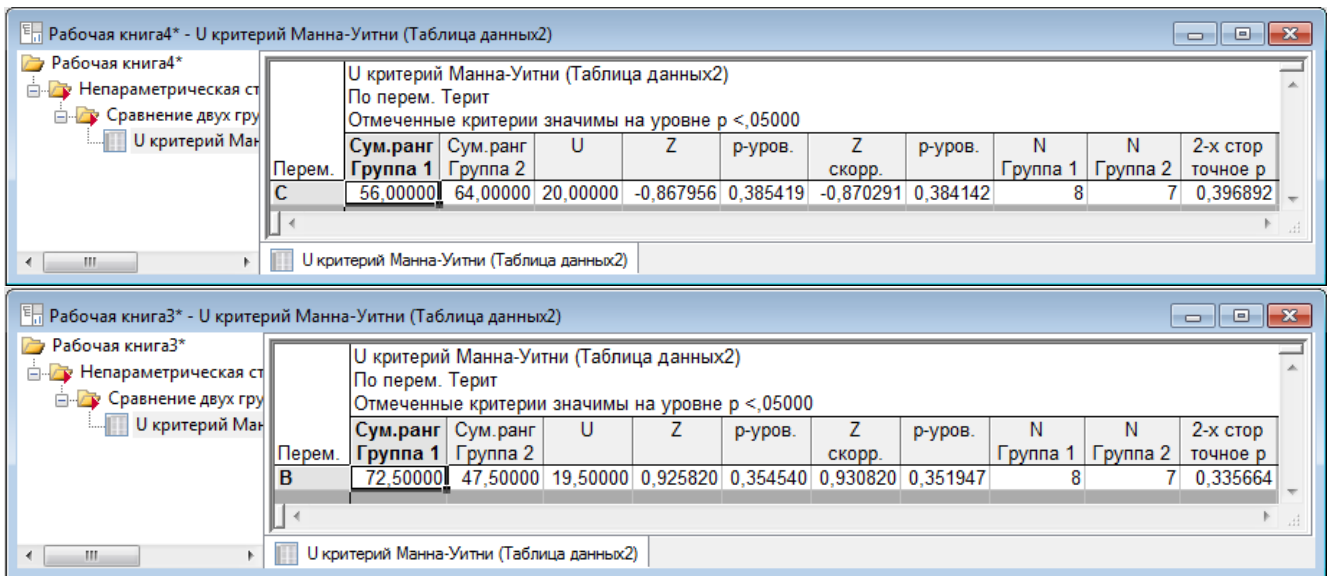


Рис.30 – Розрахунок U-критерія для незалежних вибірок у програмі STATISTICA

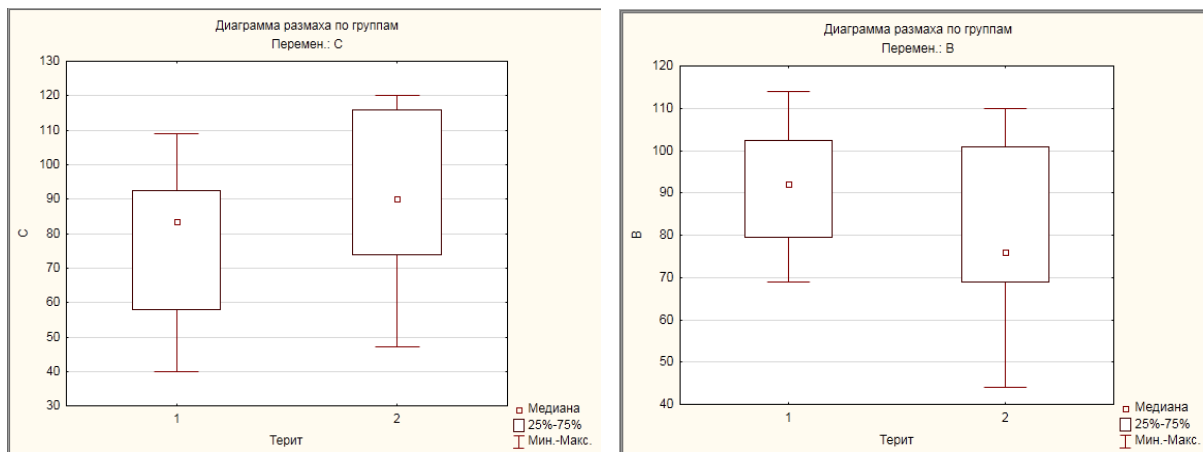


Рис.31 – Діаграми розмаху для С і В вибірок у програмі STATISTICA

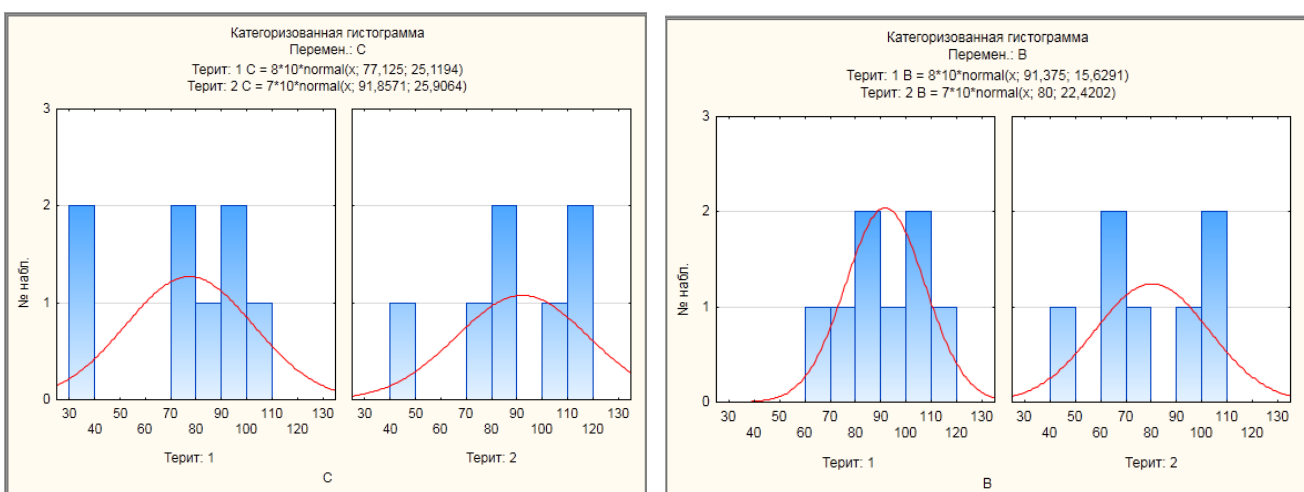


Рис.32 – Гістограми розподілу для С і В вибірок у програмі STATISTICA

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	X1	Rc1	X2	Rc2	n1*n2	B	b/2	Uf	Ukr	X1;X2	P	Pc
2	76	10,5	104	24	225	240	120	114	64	76	10	10,5
3	90	16,5	44	3						90	16	16,5
4	91	18,5	114	28						91	18	18,5
5	94	20	72	8						94	20	20
6	87	14	91	18,5						87	13	14
7	109	25,5	87	14	Висновок: за таблицю критичних значень статистики <b>Ukr = 64.</b>					109	25	25,5
8	109	25,5	76	10,5						109	25	25,5
9	77	12	87	14						77	12	12
10	47	4	110	27						47	4	4
11	74	9	69	6						74	9	9
12	120	30	101	22,5						120	30	30
13	40	1,5	101	22,5						40	1	1,5
14	40	1,5	69	6						40	1	1,5
15	116	29	69	6						116	29	29
16	90	16,5	97	21						90	16	16,5
17	15	234	15	231						104	24	24
18	n1		n2=nx	$\Sigma=T_x$						44	3	3
19										114	28	28
20	$U=n1*n2+(nx*(nx+1)/2)-T_x$									72	8	8
21										91	18	18,5
22										87	13	14
23										76	10	10,5
24										87	13	14
25										110	27	27
26										69	5	6
27										101	22	22,5
28										101	22	22,5
29										69	5	6
30										69	5	6
31										97	21	21

Рис.33 – Розрахунок U – критерія у програмі Excel

**Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.**

1. Титульний лист.
2. Вирішення всіх завдань з коментарями.
3. Задачі для розв'язку за варіантами в СЕЗН Moodle.
4. Висновки.

## Лабораторне заняття 7

### Визначення критерія Колмогорова-Смірнова

**Мета лабораторного заняття:** Ознайомити студентів з використанням критеріїв Колмогорова-Смірнова і Шапіра-Уилка (W-критерій).

**Необхідне обладнання та матеріали:**

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MS Excel, STATISTICA, Інтернет браузер, методичні вказівки.

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Визначення та застосування критерія Колмогорова-Смірнова.
2. Визначення та застосування критерія Шапіра-Уилка (W-критерій).
3. Метод розрахунку в програмах Excel і STATISTICA критеріїв Колмогорова-Смірнова і Шапіра-Уилка (W-критерій).

**Короткі теоретичні відомості:**

У статистиці критерій узгодженості Колмогорова (також відомий, як критерій узгодженості Колмогорова — Смирнова) використовується для того, щоб визначити, чи підпорядковуються два емпіричних розподіли одному закону, або визначити, чи підпорядковується емпіричний розподіл певній моделі.

Перевірка гіпотези однорідності є однією з важливих задач прикладної статистики – це завдання перевірки однорідності статистичного матеріалу. Нехай є дві незалежні вибірки  $X = (X_1, X_2 \dots, X_n)$  і  $Y = (Y_1, Y_2 \dots, Y_m)$ , що описують один і той же процес, явище і таке інше, але отримані в різний час або в різних умовах. Потрібно встановити, чи є вони вибірками з одного і того ж розподілу.

Нехай  $X$  і  $Y$  – вибірки з різних розподілів. Потрібно перевірити гіпотезу однорідності: проти альтернативи  $H_2 = \{H_1 \text{ невірна}\}$ .

Таким чином, для повірки гіпотези однорідності за критерієм Колмогорова-Смирнова необхідно слідувати наступним алгоритмом:

- 1) за вибірками  $X$  і  $Y$  побудувати відповідні емпіричні функції розподілу і знайти значення загальної статистики;
- 2) за заданим рівнем значущості  $\alpha$  по таблиці розподілу Колмогорова (таб. 5) знайдемо критерій Колмогорова  $K-Cd$ :

$$K - Cd = 1 - \alpha.$$

Критерій Колмогорова (іноді зустрічається назва – критерій Колмогорова-Смирнова) прийнятний при  $n \geq 20$  для перевірки гіпотези, підпорядковується Чи випадкова величина деякого теоретичного закону розподілу, якщо його параметри передбачаються відомими (проста гіпотеза). Перевірку можна проводити для будь-якого виду розподілу. Критерій заснований на визначенні максимального відхилення накопиченої частотності (емпіричної функції розподілу) від передбачуваної теоретичної функції розподілу.

**W - критерій Шапіра-Уилка** – це перевірка розподілу на нормальність, а також є графічним методом визначення відповідності значень вибірки нормальному розподілу. Якщо потрібно оцінити, чи відповідає вибірка нормальному розподілу застосовується критерій для зіставлення показників, виміряних в двох різних умовах на одній і тій же вибірці випробовуваних.

Він дозволяє встановити не тільки спрямованість змін, але і їх вираженість. З його допомогою можна визначити, чи є зрушення показників в якомусь одному напрямку більш інтенсивним, ніж в іншому.

Приклад формулювання гіпотез:

H0: інтенсивність зрушень в типовому напрямку не перевершує інтенсивності зрушень в нетиповому напрямку.

H1: інтенсивність зрушень в типовому напрямку перевищує інтенсивність зрушень в нетиповому напрямку.

Обмеження критерію:

Мінімальна кількість випробовуваних, які пройшли вимірювання в двох умовах – 5 осіб. Максимальна кількість випробовуваних – 50 осіб.  $5 \leq n \leq 50$

**Хід виконання лабораторної роботи** (методика експериментальних досліджень).

1. Вибрати вибірку за номером списку в академічному журналі.
2. Перевірити нормальність розподілу.
3. Розрахувати використовуючи формули Колмогорова-Смірнова для Excel.

Приклад використання критерія Колмогорова-Смірнова в Excel.

Задача Досліджували вплив жорсткості води на плідність п'явки Hirudinidae, при жорсткості води дослідів від 1 до 3 ммоль на дециметр кубічний плідність мала наступних розподіл X, а при жорсткості від 8 до 12 ммоль на дециметр кубічний розподіл змінних Y. Визначити впливає жорсткість води на плідність п'явки Hirudinidae.

Хід виконання:

1. побудувати графік розподілу  $F(x)$  і  $G(y)$ ;
2. розрахувати за формулою Колмогорова-Смірнова:

$$T = \sqrt{\frac{xy}{x+y}}$$

3. максимальне значення  $|F_x(t) - G_y(t)|$  де  $t \in X, Y$ ;
4. порівняти отриманий результат з табличним і зробити висновок.

Таблиця 5.– Значення функції розподілу Колмогорова K (t)

t	K(t)
1,36	0,9505
1,4	0,9603
1,45	0,9702
1,52	0,9803
1,63	0,9902

У програмне середовище Excel вводимо експериментальні дані в стовпці, де в стовпці А знаходяться експериментальні показники плодючості п'явок в жорсткій воді, а в стовпці В є експериментальні показники плодючості в воді, коефіцієнти яких відповідають змісту солей – нормальних і м'яких, як показано на рисунку 34. Далі будуємо графік «Динаміки розвитку п'явок» за допомогою вкладки «Вставка», «Діаграммы». Визначаємо максимальні значення для F(x) і G(y) відповідно стовпцям А і В. Далі розраховуємо критерій Колмогорова-Смірнова і порівнюємо з табличним значенням. Максимальне значення двох розподілів F(x) та G(y) також можна визначити за максимальними показниками, але виключно тільки максимальні показники не будуть характеризувати однорідність та узгодженість (відповідність) цих двох функціональних залежностей з точки зору певної моделі, а саме, не можливо дати відповідь на питання: «Чи вибірки з одного або з різних розподілів?»

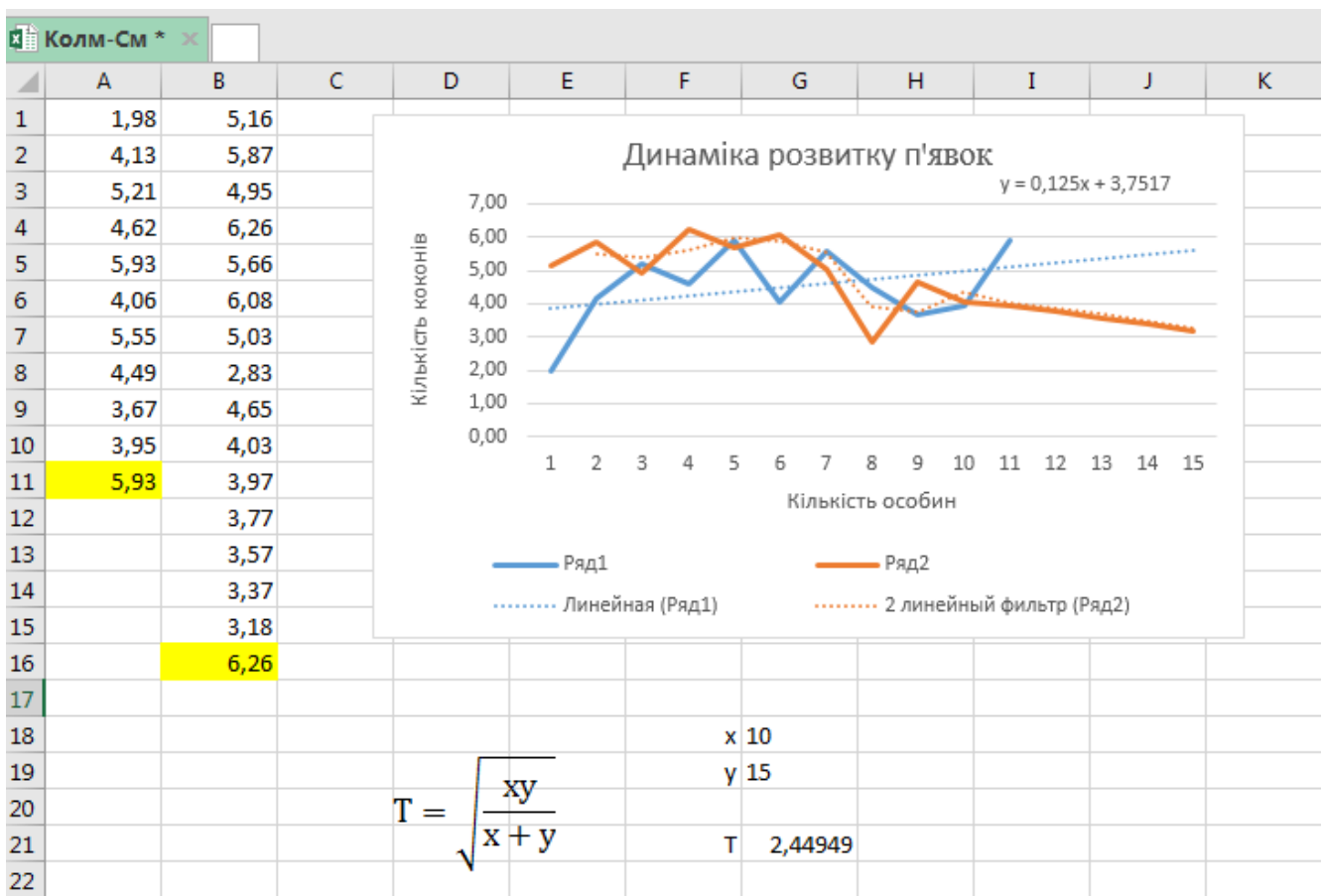


Рис.34 – Розрахунок критерія Колмогорова-Смірнова у програмі Excel

Для розрахунку критерія узгодженості розподілу народжуваності п'явок з використанням програми STATISTICA необхідно зробити наступні дії:

1. Ввести експериментальні дані у стовпчики X та Y.
2. Відкрити «Описательную статистику», вкладку «Нормальность», активізувати критерій «Критерий нормальности Колм.-Смирнова и Лиллиефорса», виділити «Категоризованные гистограммы», «Ок» (рис.35).

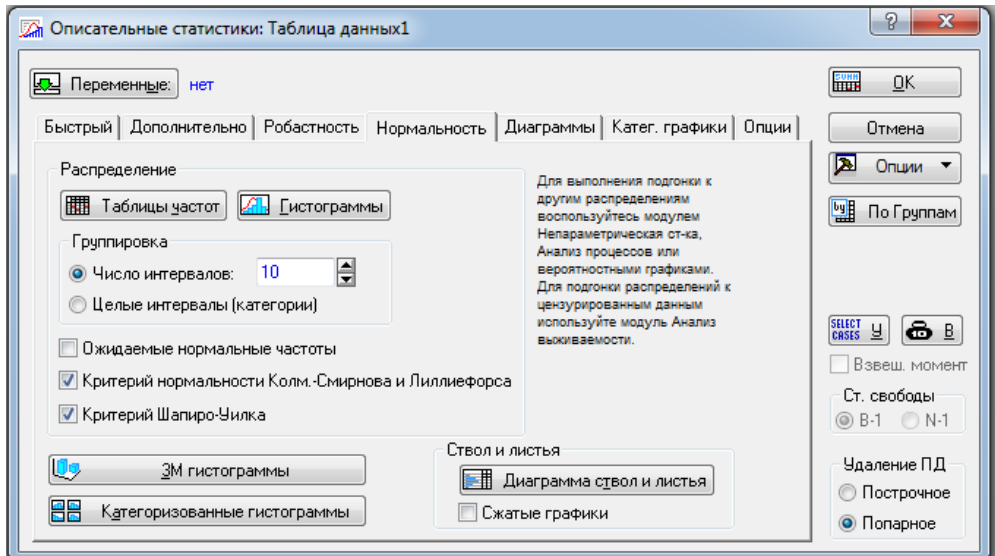


Рис.35 – Вкладка «Описательная статистика» у програмі STATISTICA

Для розрахунку відкрити «Описательную статистику», обрати вкладку «Дополнительно», в виділити «Среднее», «Медиана», «Дисперсия», «Стандартное отклонение», «Стандартные ошибки», «Асимметрия», «Стандартные ошибки асимметрии», «Эксцесс», «Стандартные ошибки Эксцесс». Результаты розрахунку по вибіркам на рисунку 36. По даним розрахунку можна зробити, що вибірка X має відмінне значення асиметрії, тобто в розподілі частіше зустрічаються значення більше середнього, а вибірка Y має відмінне значення, що свідчить про специфічний фактор впливу на показники вибірки Y.

Переменная	Описательные статистики (Таблица данных2)												
	Среднее	Медиана	Минимум	Максим.	Дисперсия	Ст.откл.	Дов.инт. Ст.откл.	Дов.инт. Ст.откл.	Станд. ошибки	Асимметрия	Стд.ош. Асимметрия	Эксцесс	Стд.ош. Эксцесс
X	4,3591291	4,310635	1,976985	5,926243	1,239655	1,113398	0,765834	2,032630	0,352087	-0,779840	0,687043	1,495508	1,334249

Переменная	Описательные статистики (Таблица данных2)									
	N набл.	Среднее	Медиана	Минимум	Максим.	Ст.откл.	Асимметрия	Стд.ош. Асимметрия	Эксцесс	Стд.ош. Эксцесс
Y	15	4,559158	4,653417	2,829509	6,258877	1,115421	0,066009	0,580119	-1,32581	1,120897

Рис.36 – Розрахунок критерія Колмогорова-Смірнова у програмі STATISTICA

При порівнянні двох вибірок перевіряється нульова гіпотеза, яка полягає в тому, що обидві ці вибірки відбуваються з нормально розподілених генеральних сукупностей з однаковими середніми значеннями. Через наявність непереборний статистичної похибки випадкової величини, неможливо однозначно відповісти на питання «Дана вибірка з нормального розподілу чи ні». Тому, графічний метод, скоріше, дає відповідь на питання «Чи розумно припущення, що оцінюється вибірка взята з нормального розподілу?»

На рисунку 37 зображена гістограма розподілу двох вибірок X та Y. Коефіцієнт Колмогорова-Смірнова при однакових показниках Лиллиефорса більше 0,2 для вибірки X дорівнює 0,16734, а для вибірки Y –0,14922.



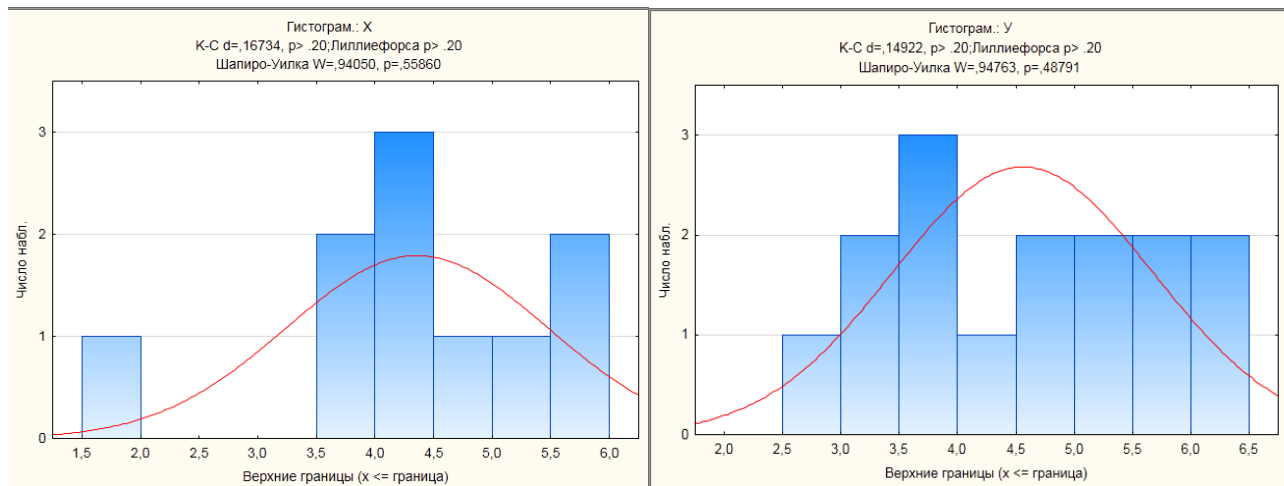


Рис.37 – Гістограма розподілу плідності п'явки Hirudinidae для умов X і Y  
 STATISTICA

**Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.**

1. Титульний лист.
2. Вирішення всіх завдань з коментарями.
3. Задачі для розв'язку за варіантами в СЕЗН Moodle.
4. Висновки.

**Розділ 2 Математичні методи в екології**  
**Змістовний модуль 4 Поняття диференціалів та інтегралів**

**Лабораторне заняття 8**  
**Розрахунок диференціалу**

**Мета лабораторного заняття:**

Ознайомити студентів з базовими навичками розрахунку диференціалу.

**Необхідне обладнання та матеріали:**

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MathCAD або MathCAD Prime або онлайн-калькулятор диференціалу функцій, Інтернет браузер, методичні вказівки.

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Лінійна відносно приросту аргументу, частина приросту функції або відображення.
2. Види диференціалів.
3. Алгебраїчний, геометричний та фізичний зміст диференціалу.
4. Поняття похідної функції.
5. Геометричний, механічний зміст похідної.
6. Таблиця похідних функцій.

**Короткі теоретичні відомості.**

Термін диференціал використовується в обчисленні для позначення нескінченно малого зміни деякої змінної величини. Наприклад, якщо  $x$  - змінна, то зміна значення  $x$  часто позначається як  $\Delta x$ . Диференціал  $dx$  є нескінченно мала зміна змінної  $x$ . Диференціал в математиці — головна, лінійна відносно приросту аргументу, частина приросту функції або відображення.

В математичному аналізі диференціал традиційно вважається нескінченно малим приростом змінної. Наприклад, якщо  $x$  — змінна, тоді приріст значення  $x$  часто позначається  $\Delta x$  (чи  $\delta x$ , якщо цей приріст малий). Диференціал  $dx$  також є таким приростом, але нескінченно малим.

Головна властивість диференціалу: якщо  $y$  функція від  $x$ , тоді диференціал  $dy$  від  $y$  пов'язаний з  $dx$  формулою:

$$dy = \frac{dy}{dx} dx;$$

де  $dy/dx$  позначає похідну від  $y$  по змінній  $x$ .

Ця формула підсумовує інтуїтивне твердження, що похідна  $y$  по змінній  $x$  це границя відношення приростів  $\Delta y/\Delta x$  де  $\Delta x$  прямує до нуля.

Приріст та лінійна частина приросту функції однієї змінної зображена на рисунку 38.

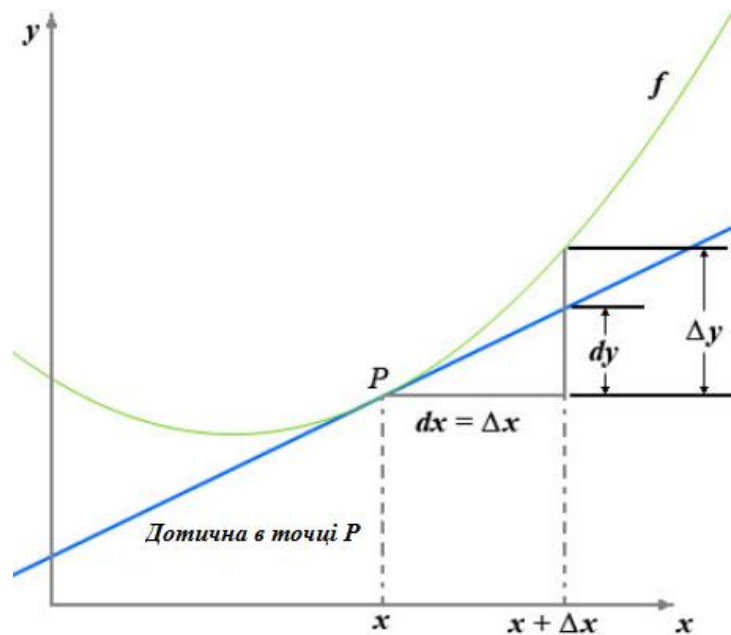


Рис.38 – Приріст та лінійна частина приросту функції однієї змінної

Основними об'єктами вивчення диференціального числення є похідна від функції, та такі поняття, як диференціал, та їх застосування. Похідна функції при обраному вхідному значенні описує швидкість зміни функції поблизу цього вхідного значення. Процес пошуку похідної називається диференціацією. Геометрично похідна в точці є нахилом дотичної прямої до графіка функції в цій точці за умови, що похідна існує і визначена в цій точці. Для дійсної функції однієї реальної змінної похідна функції в точці зазвичай визначає найкраще лінійне наближення до функції в цій точці. У фізиці похідною переміщення рухомого тіла відносно часу є швидкість тіла, а похідною швидкості відносно часу - прискорення. Похідна імпульсу тіла відносно часу дорівнює силі, прикладеній до тіла; перестановка цього похідного твердження призводить до відомого рівняння  $F = ma$ , пов'язаного з другим законом руху Ньютона. Швидкість реакції хімічної реакції є похідною. Похідні часто використовують для знаходження максимумів та мінімумів функції. Рівняння, що включають похідні, називаються диференціальними рівняннями і є основними в описі явищ природи.

Таблиця похідної простої функції з прикладами та поясненнями розв'язку за посиланням

[https://profmeter.com.ua/communication/learning/course/course30/lesson1105/?LESSON\\_PATH=1103.1104.1105](https://profmeter.com.ua/communication/learning/course/course30/lesson1105/?LESSON_PATH=1103.1104.1105)

**Хід виконання лабораторної роботи** (методика експериментальних досліджень).

1. Відкрити середу обчислень.
2. Ввести змінне значення для програмного забезпечення MathCAD, MathCAD Prime або онлайн-калькулятор диференціалу згідно вимог середі обчислювання.
3. Задати аналітичну формулу диференціалу.
4. Провести розрахунок.

Приклад розрахунку диференціалу у програмі MathCAD показано на рисунку 39.

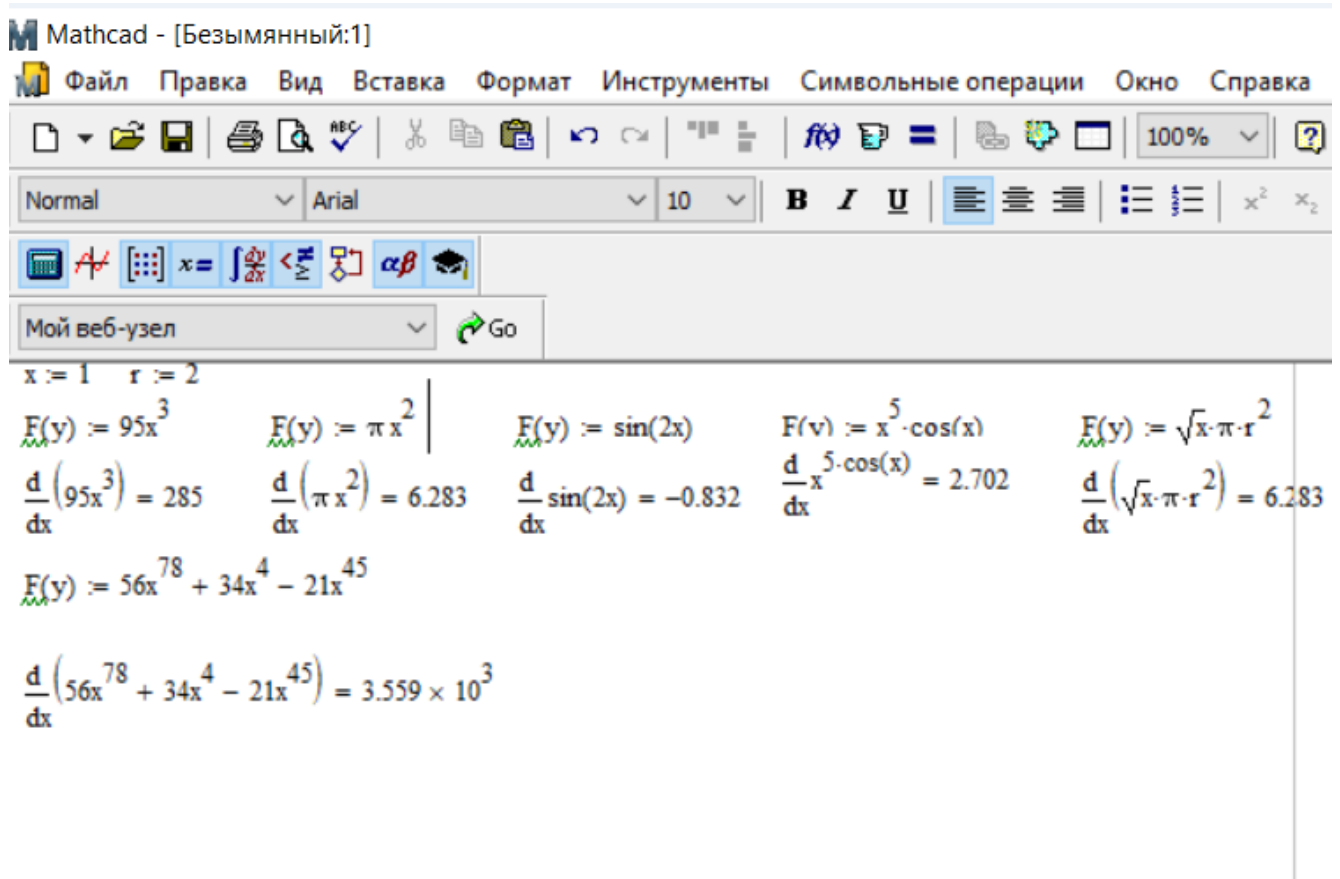


Рис.39 – Приклад розрахунку диференціалу у програмі MathCAD.

Приклад розрахунку диференціалів програмою PTC Mathcad Express Prime показано на рисунку 40.

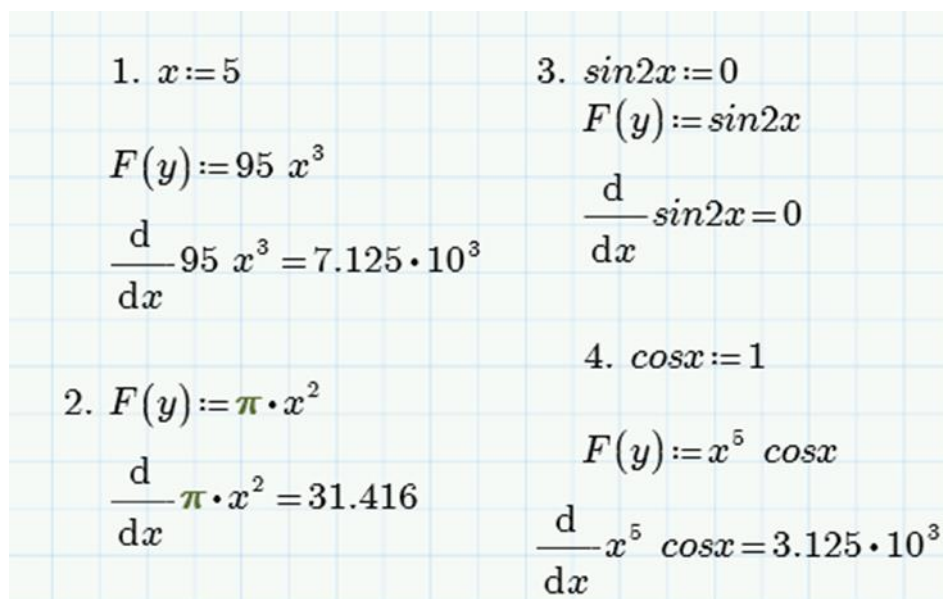


Рис.40 – Розрахунок диференціалів програмою PTC Mathcad Express Prime

Приклади розрахунку в онлайн калькуляторе показано на рисунку 41.

**Дифференциал функции**

$y = \pi \cdot x$

Поскольку  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f(x)'$ , то полученную производную, домножим затем на  $\pi$ .

Решение:

$(x)' = 1$

Ответ:

$\pi$

Дифференциал функции:

$dy = \pi dx$

---

$y = 95 \cdot x^3$

Поскольку  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f(x)'$ , то полученную производную, домножим затем на 95.

Решение:

$(x^3)' = 3 \cdot x^2$

Поскольку:

$(x^3)' = 3 \cdot x^{3-1} (x)' = 3 \cdot x^2$

$(x)' = 1$

Ответ:

$285 \cdot x^2$

Дифференциал функции:

$dy = 285 \cdot x^2 dx$

Рис.41 – Приклади розрахунку диференціалів функцій в онлайн калькуляторе

**Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи:**

1. Титульний лист.
2. Вирішення всіх завдань з коментарями.
3. Функції для розв'язку за варіантами в СЕЗН Moodle.
4. Висновки.

## Лабораторне заняття 9

### Розрахунок інтегралу

#### Мета лабораторного заняття:

Ознайомити студентів з базовими навичками розрахунку інтегралу.

#### Необхідне обладнання та матеріали:

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MathCAD або MathCAD Prime або онлайн-калькулятор диференціалу функцій, Інтернет браузер, методичні вказівки.

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Поняття первісної функції
2. Поняття невизначеного інтеграла.
3. Види інтеграла
4. Інтегральні перетворення.
5. Застосування інтегральних перетворень до рішення диференціальних рівнянь

#### Короткі теоретичні відомості.

Первісною для функції  $f(x)$  називається така функція  $F(x)$ , похідна якої  $F'(x)$  дорівнює  $f(x)$ . Операція взяття первісної є оберненою (в деякому сенсі) до операції взяття похідної: первісними для похідної  $f(x)$  будуть функції  $F(x) + C$ , де  $C \in \mathbb{R}$  — довільна стала (зокрема, однією з первісних буде сама функція  $F(x)$ ). І навпаки, похідною від первісної  $F(x)$  для функції  $f(x)$  буде сама функція  $f(x)$ .

Первісними для функції  $f(x)=2x$  є функції вигляду  $x^2+C$ , де  $C$  — довільна стала, рисунок 42, а на рисунку  $C=3$ .

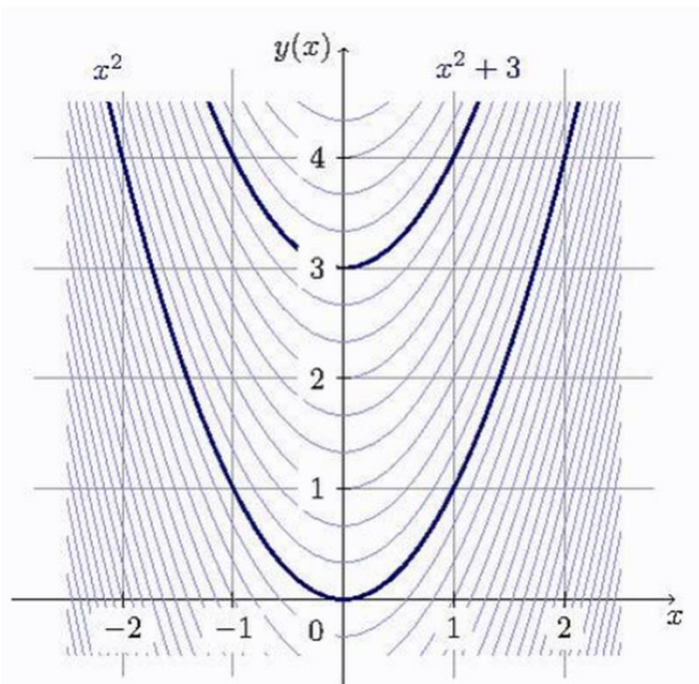


Рис.42 – Первісними для функції  $f(x)=2x$

**Невизначений інтеграл** для функції  $f(x)$  — це сукупність усіх первісних цієї функції. Невизначеним інтегралом функції  $f(x)$ , або первісною, називають таку функцію  $F(x)$ , похідна якої дорівнює  $f(x)$ , тобто,  $F'(x)=f(x)$ .

Позначається це так:

$$\int f(x) dx = F(x).$$

Слід зазначити, що первісна існує не для будь-якої функції. Легко бачити, що первісна існує для будь-якої неперервної функції. Оскільки похідні двох функцій, які відрізняються лише на сталу, збігаються, при знаходженні невизначеного інтегралу включають невизначену сталу

Задача диференціального числення — знаходження похідної від заданої функції  $y = f(x)$ . Задача інтегрального числення протилежна: потрібно визначити функцію, похідна від якої відома. Фундаментальними поняттями інтегрального числення є поняття первісної та невизначеного інтегралу.

Нехай функція  $F$  — первісна для  $f$  на області визначення  $J$ . Невизначеним інтегралом від функції  $f$  називається сукупність усіх первісних цієї функції, тобто вираз:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ де } x \in J ;$$

де  $C \in \mathbb{R}$  — довільна стала.

Функція  $f$  називається підінтегральною функцією,  $f(x)dx$  — підінтегральним виразом,  $C$  — сталою інтегрування,  $x$  — змінною інтегрування.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл — це сукупність ліній (набору кривих)  $F(x) + C$ , які показані на рисунку 41.

**Визначений інтеграл** — в математичному аналізі це інтеграл функції з вказаною областю інтегрування. Визначений інтеграл є неперервним функціоналом, лінійним по підінтегральних функціях і адитивним по області інтегрування. У найпростішому випадку область інтегрування — це відрізок числової осі. Геометричний зміст визначеного інтеграла — це площа криволінійної фігури (криволінійної трапеції), обмеженої віссю абсцис, двома вертикалями на краях відрізка і кривою графіка функції.

Процес знаходження інтеграла називається інтегруванням. Цей процес зазвичай використовується при знаходженні таких величин як площа, об'єм, маса, зсув тощо, коли задана швидкість або розподіл змін цієї величини по відношенню до деякої іншої величини (розташування, час тощо).

Існує декілька різних визначень операції інтегрування, що відрізняються в технічних деталях. Проте всі вони сумісні, тобто будь-які два способи інтегрування, якщо їх можна застосувати до даної функції, дадуть той самий результат.

Інтегрування — операція, обернена до диференціювання. В результаті невизначеного інтегрування виходить функція, яка називається первісною. Першим інтегралом є число (або, принаймні, не залежна від змінної інтегрування частина).

**Хід виконання лабораторної роботи** (методика експериментальних досліджень).

1. Відкрити середу обчислень.
2. Ввести змінне значення для програмного забезпечення MathCAD, MathCAD Prime або онлайн-калькулятор інтегралу згідно вимог середи обчислювання.
3. Задати аналітичну формулу інтегралу.
4. Провести розрахунок.

Приклад розрахунку інтегралів у програмі MathCAD на рисунку 43.

$$\begin{aligned} F(x) &:= \pi \cdot x^2 & C &:= 100 \\ \frac{d}{dx} (\pi \cdot x^2) &= 207.345 \\ \int (25\pi x)^2 dx &\rightarrow 7486875 \cdot \pi^2 \\ \int_0^{10} 95(x-C)^x dx &= 1.203 \times 10^{31} \\ \int_0^1 \sin(2x) + \cos(2\pi x) dx &= 0.708 \\ \int_0^1 (\sin(2x) + \cos(2\pi x)) dx &= 0.708 \\ \int \sqrt[5]{x} dx &\rightarrow \int \sqrt[5]{33} d33 \\ \int_0^1 \cos(2x) dx &= 0.455 \end{aligned}$$

Рис.43 – Розрахунок інтегралів у програмі MathCAD



Приклад розрахунку інтегралів у MathCAD Prime 7.0.0.0 на рисунку 44.

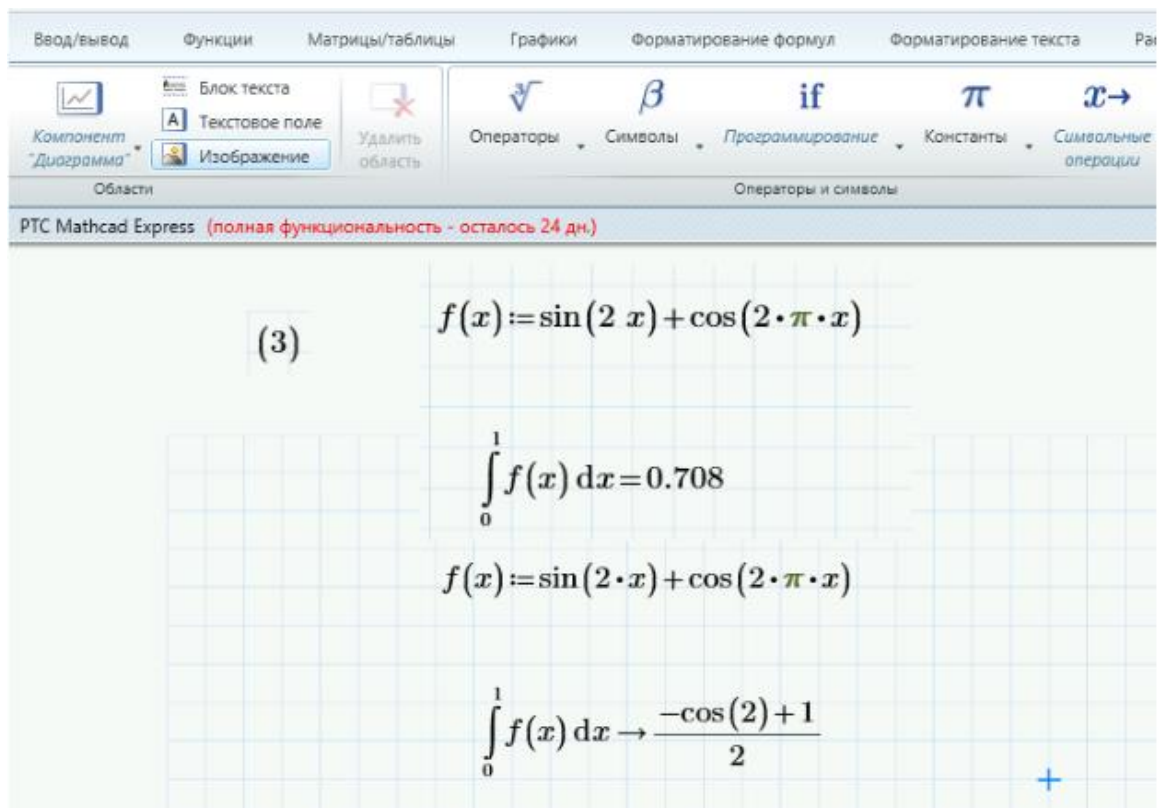
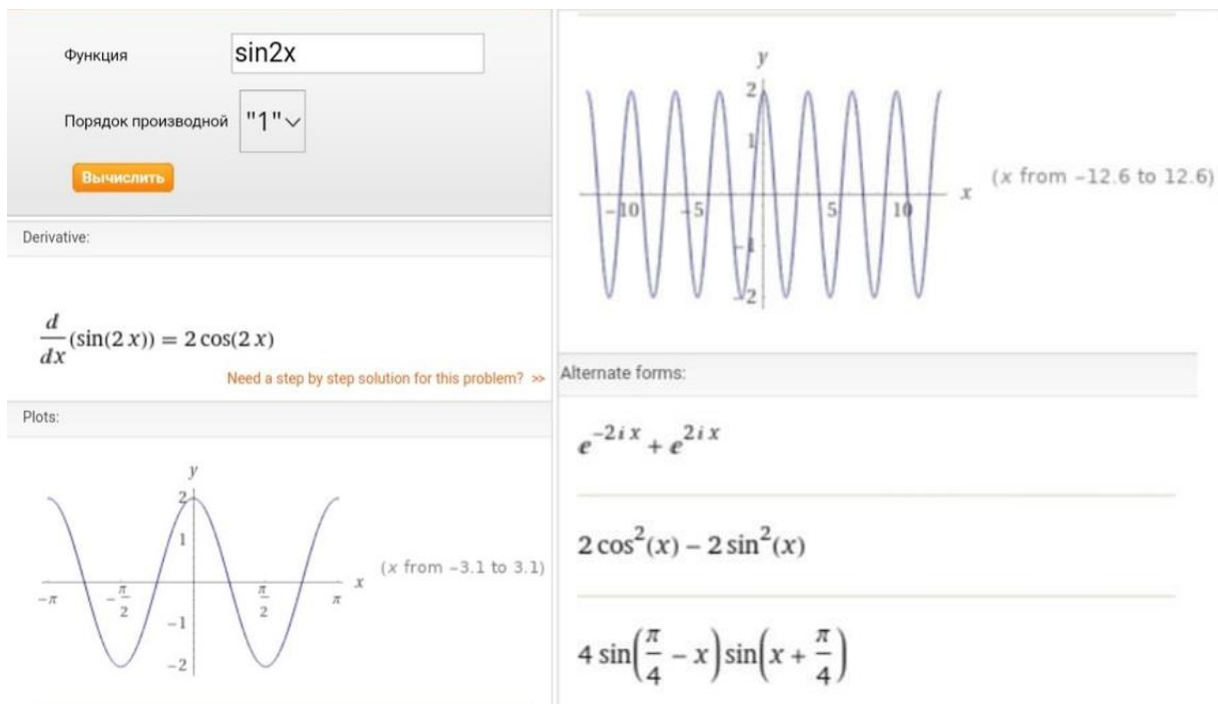


Рис.44 – Розрахунок інтегралу програмою Mathcad Prime

Приклад розрахунку функції  $F(y) = \sin 2x$  в онлайн калькуляторе на рисунку 45.



$$x = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Need a step by step solution fo

Series expansion at x=0:

$$2 - 4x^2 + \frac{4x^4}{3} + O(x^6)$$

(Taylor series)

Indefinite integral:

$$\int 2 \cos(2x) dx = \sin(2x) + \text{constant}$$

Рис.45 – Розрахунок інтегралу функції в онлайн калькуляторі

**Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.**

1. Титульний лист.
2. Вирішення всіх завдань з коментарями.
3. Функції для розв'язку за варіантами в СЕЗН Moodle.
4. Висновки.

## Змістовний модуль 5 Поняття матриці

### Лабораторне заняття 10 Розрахунок матриці

#### Мета лабораторного заняття:

Ознайомити студентів з базовими навичками розрахунку матриць.

#### Необхідне обладнання та матеріали:

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MathCAD або MathCAD Prime або онлайн-калькулятор матриць, Інтернет браузер, методичні вказівки

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Матриці: основні визначення та поняття.
2. Види матриць.
3. Властивості матриць.

#### Короткі теоретичні відомості.

Матрицею розміру  $m \times n$  називається прямокутна таблиця, яка містить  $m \cdot n$  чисел і складається з  $m$  рядків і  $n$  стовпців.

#### Види матриць

Матриця розміру  $n \times n$  називається **квадратною**, число  $n$  називається **порядком** матриці

#### Діагональні матриці

Квадратна матриця  $D$  називається **діагональною**, якщо всі її елементи, які стоять поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю.

**Скалярною** називається діагональна матриця  $S$ , у якої всі діагональні елементи рівні між собою.

**Одиничною** матрицею  $E_n$  називається скалярна матриця порядку  $n$ , діагональні елементи якої дорівнюють 1.

#### Трикутні матриці

Матриця називається **верхньою трикутною матрицею**, якщо всі елементи нижче головної діагоналлю дорівнюють нулю.

Матриця називається **нижньою трикутною матрицею**, якщо всі елементи вище головної діагоналлю дорівнюють нулю.

#### Ступінчаста матриця

Ступінчастою називається матриця, яка задовольняє таким умовам:

1. Якщо ця матриця містить нульовий рядок (тобто рядок, всі елементи якого рівні нулю), то всі рядки, розташовані під нею, також нульові.
2. Якщо перший ненульовий елемент деякого рядка розташований в стовпці з номером  $i$ , то перший ненульовий елемент наступного рядка повинен знаходитися в стовпці з номером більшим, ніж  $i$ .

За визначенням до ступінчастих матриць будемо відносити нульову матрицю  $\Theta$ , а також матрицю, яка містить один рядок.

### Рівні матриці

Дві матриці називаються **рівними**, якщо вони мають однакові розміри і їх відповідні елементи рівні:

$$A_{m \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$$

### Добуток матриці на число.

Добутком матриці на число називається матриця, отримана з вихідної множенням кожного її елемента на задане число.

### Сума матриць

Сумою матриць  $A$  і  $B$  одного розміру називається матриця  $C = A + B$  такого ж розміру, одержувана з вихідних шляхом складання відповідних елементів.

Операції множення матриці на число і сума матриць називаються **лінійними**.

### Властивості лінійних операцій:

Скрізь далі матриці  $A$ ,  $B$  і  $C$  - матриці одного розміру.

1. Асоціативність  $(A + B) + C = A + (B + C)$
2.  $A + \Theta = \Theta + A$ , Де  $\Theta$  - нульова матриця відповідного розміру.
3.  $A - A = \Theta$
4. Комутативність  $A + B = B + A$
5. Дистрибутивність  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
6.  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7.  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

### Добуток двох матриць

Добутком матриці  $A_{m \times n}$  на матрицю  $B_{n \times k}$  називається матриця  $C_{m \times k}$ , така що містить елемент матриці  $C$ , що стоїть в  $i$ -му рядкові і  $j$ -ому стовпці, тобто елемент  $c_{ij}$  дорівнює сумі добутків елементів  $i$ -го рядка матриці  $A$  на відповідні елементи  $j$ -го стовпця матриці  $B$ .

### Властивості добуткової матриці:

1. Асоціативність  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. Асоціативність по множенню  $(\mu \cdot A) \cdot B = \mu \cdot (A \cdot B)$
3. Дистрибутивність  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ ,  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4. Множення на одиничну матрицю  $E_m \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n} \cdot E_n = A_{m \times n}$
5. У загальному випадку множення матриць не комутативне, тобто  $AB \neq BA$
6.  $EA = A$

## Транспонування матриць

Транспонування матриці - це операція над матрицею, коли її рядки стають стовпцями з тими ж номерами.

### Властивості транспонування матриць:

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
3.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
4.  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

## Множення матриці на число

Добутком матриці  $A$  на ненульове число  $\lambda$  називається матриця  $B = \lambda A$  того ж порядку, отримана з вихідної множенням на задане число всіх її елементів:

$$B = \lambda A \implies b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

### Властивості множення матриці на число:

1.  $1 \cdot A = A$
2.  $0 \cdot A = \Theta$
3.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
4.  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
5.  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

Додавання і віднімання матриць допускаються тільки для матриць однакового розміру.

## Сума матриць

Сумою матриць  $A$  і  $B$  одного розміру називається матриця  $C = A + B$  такого ж розміру, одержувана з вихідних шляхом складання відповідних елементів:

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n}; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n}$$

Властивості додавання і віднімання матриць:

1. Асоціативність  $(A + B) + C = A + (B + C)$
2.  $A + \Theta = \Theta + A$ , Де  $\Theta$  - нульова матриця відповідного розміру.
3.  $A - A = \Theta$
4. Комутативність  $A + B = B + A$

## Різниця матриць

Різницю двох матриць однакового розміру можна визначити через операцію складання матриць і через множення матриці на число .

Віднімання матриць здійснюється таким чином:  $A - B = A + (-1) \cdot B$

Тобто до матриці  $A$  додається матриця  $B$ , помножена на  $(-1)$ .

Різницею матриць  $A$  і  $B$  одного і того ж розміру називається матриця  $C = A - B$  такого ж розміру, одержувана з вихідних шляхом додавання до матриці  $A$  матриці  $B$ , помноженої на  $(-1)$ .

**Хід виконання лабораторної роботи** (методика експериментальних досліджень).

1. Відкрити середу обчислень.
2. Ввести змінне значення для програмного забезпечення MathCAD, MathCAD Prime або онлайн-калькулятор матриць згідно вимог середи обчислювання.
3. Провести розрахунок згідно вимог завдання в СЕЗН Moodle.

Приклад розрахунку матриць у програмі MathCAD Prime показано на рисунку 46.

#### Додавання двох матриць

*Квадратные*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C := A + B = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 13 \\ 9 & 6 & 6 \\ 16 & 13 & 15 \end{bmatrix}$$

#### Віднімання двох матриць

*Прямоугольные*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C := A - B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & 7 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

#### Множення двох матриць

*Треугольные*

$$A := \begin{bmatrix} 21 & 20 & 11 & 12 \\ 0 & 13 & 17 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 8 & 11 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C := A \cdot B = \begin{bmatrix} 168 & 411 & 326 & 436 \\ 0 & 117 & 205 & 299 \\ 0 & 0 & 81 & 132 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

#### Множення матриці на число

*Прямоугольная*

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \\ 9 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad B := 5$$

$$C := A \cdot B = \begin{bmatrix} 15 & 25 \\ 35 & 10 \\ 45 & 40 \\ 30 & 20 \end{bmatrix}$$

Рис.46 – Приклади розрахунку матриць програмою Mathcad Prime

Приклад аналітичного запису матриць у програмі MathCAD (рис. 47).

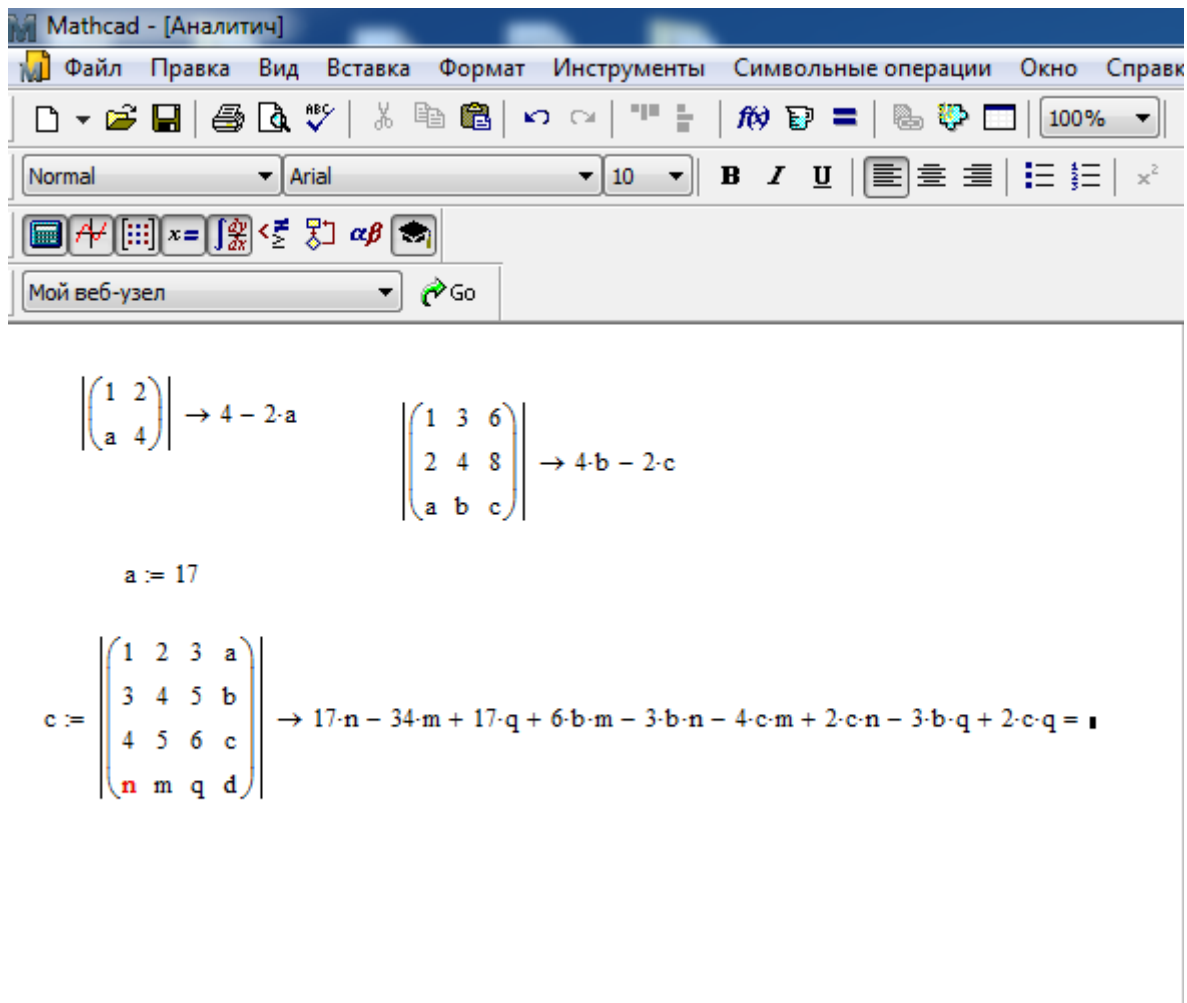


Рис.47 – Приклади аналітичного запису матриць у програмі MathCAD

**Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.**

1. Титульний лист.
2. Вирішення всіх завдань з коментарями.
3. Матриці для розв’язку за варіантами в СЕЗН Moodle.
4. Висновки.

## Лабораторне заняття 11

### Матричний метод в сучасній екології

#### Мета лабораторного заняття:

Ознайомити студентів з використанням матричного методу для вирішення задач екологічного спрямування та визначити алгоритм матричного запису системи лінійних рівнянь і її розв'язування.

#### Необхідне обладнання та матеріали:

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MathCAD або MathCAD Prime або MS Excel, онлайн-калькулятор матриць, Інтернет браузер, методичні вказівки

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Матричний запис системи лінійних рівнянь і її розв'язування.
2. Алгоритм розв'язування матричним методом систему лінійних рівнянь.

#### Короткі теоретичні відомості.

Задано  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими ( $n > 3$ ).

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}x + \dots + a_{1n}x = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}x + \dots + a_{2n}x = b_2 \\ a_{n1}x + a_{n2}x + \dots + a_{nn}x = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язок системи рівнянь у матричній формі можливий лише тоді, коли матриця системи не вироджена, а саме, не вироджена матриця (неособлива, несингулярна, інвертована) — квадратна матриця, визначник якої не дорівнює нулю:

$$\det(A) \neq 0$$

Нехай задано систему, яка містить  $n$  лінійних рівнянь  $n$  з невідомими.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Введемо матриці.

і визначник системи  $\Delta \neq 0$ , то така система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta};$$

Матрицю  $A$ , складену з коефіцієнтів системи (1), називають основою матрицею системи, матрицю  $X$  – матрицею з невідомих, а матрицю  $B$  – матрицею з вільних



членів. Тоді згідно з правилом множення матриць систему (1) можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею X:

$$AX=B \quad (2)$$

Припустимо, що матриця A системи (1) має обернену матрицю  $A^{-1}$ ; помножимо обидві частини рівності (2) на  $A^{-1}$  зліва:

$$A^{-1}AX=A^{-1}B.$$

Оскільки  $A^{-1}A=E$  і  $EX=X$ , то  $X=A^{-1}B$

Отже, щоб розв'язати систему рівнянь (1), достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи, і помножити її справа на матрицю з вільних членів.

**Хід виконання лабораторної роботи** (методика експериментальних досліджень).

1. Скласти задачу екологічного спрямування.
2. Відкрити середу обчислень та ввести умови задачі.
3. Ввести змінне значення для програмного забезпечення MathCAD, MathCAD Prime або онлайн-калькулятор матриць згідно вимог середу обчислювання.
4. Перевірити визначник матриці.
5. Провести розрахунок.

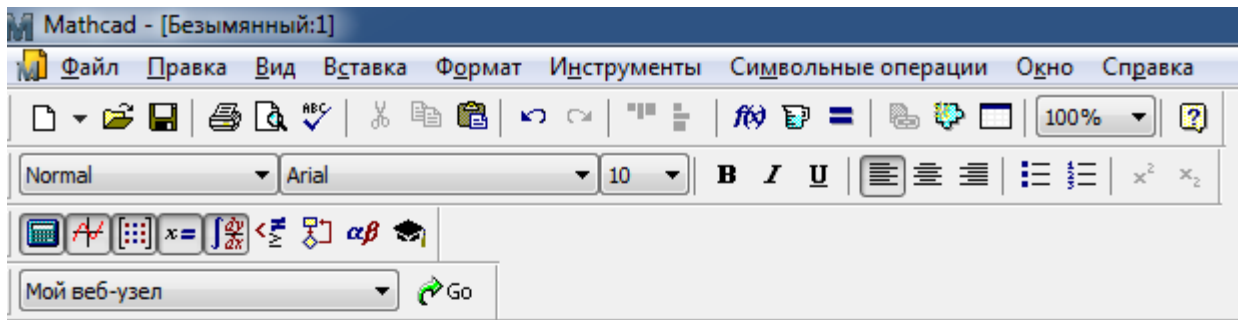
Задача для прикладу: Динаміка зростання бактеріальної популяції в середовищах A, B, і C записана системою лінійних рівнянь, де X - концентрація фактору який обмежує зростання бактерій в надходженні їжі; Y - швидкість асиміляції; Z - швидкість розбавлення.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 32x + y + 2z = 3 \\ 3x + 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

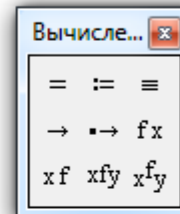
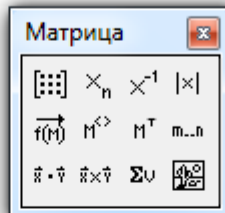
Приклад розрахунку у програмі MathCAD

1. Ввести значення матриці A та розрахувати визначник, якщо визначник не дорівнює нулю то можливо використання методу матриць. В даному випадку визначник дорівнює 64.
2. Використовуючи матричну вкладку визначаємо обернену матрицю.
3. Отриману обернену матрицю помножимо на матрицю вільних членів.
4. Визначаємо змінні **x, y, z**.
5. Записати в символному вигляді.

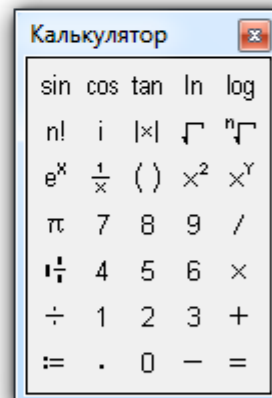
Приклад розв'язку задачі у програмному середовищу MathCAD на рисунку 48.



$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 32 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 64$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 32 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.047 & 0.031 & 0.016 \\ -2.406 & -0.063 & 1.469 \\ 1.953 & 0.031 & -0.984 \end{pmatrix}$$



$$B := \begin{pmatrix} -0.047 & 0.031 & 0.016 \\ -2.406 & -0.063 & 1.469 \\ 1.953 & 0.031 & -0.984 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.063 \\ 0.875 \\ 0.063 \end{pmatrix}$$

$$x := 0.063 \quad y := 0.875 \quad z := 0.063$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 32 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \rightarrow 64 \cdot b - 64 \cdot c + 64 \cdot d$$

Рис.48 – Приклад використання матриць у програмі MathCAD

**Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.**

1. Титульний лист.
2. Скласти задачу екологічного спрямування.
3. Рішення матричним методом запропонованої задачі.
4. Висновки.

**Лабораторне заняття 12**  
Дослідження функції

**Мета лабораторного заняття:**

Ознайомити студентів з алгоритмом дослідження функцій.

**Необхідне обладнання та матеріали:**

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MathCAD або MathCAD Prime або MS Excel, STATISTICA, онлайн-калькулятор, Інтернет браузер, методичні вказівки.

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Визначення та застосування функцій.
2. Особливості використання графічних вкладок в програмах MathCAD або MathCAD Prime або MS Excel, STATISTICA, онлайн-калькулятор.

**Короткі теоретичні відомості.**

Функція – це відповідність між двома множинами, причому кожному елементу першої множини відповідає один і тільки один елемент другої множини. Функція – це дія над змінної, закон по якому розраховують змінну. Функція – це залежність однієї змінної величини від іншої. Іншими словами, взаємозв'язок між величинами.

В екології функцію застосовують для прогнозування дій, подій і розрахунку ризиків, найчастіше використовують графічне зображення, а особливо широко використовують аналітичний запис функції для аналізу впливу зовнішніх факторів.

**Хід виконання лабораторної роботи** (методика експериментальних досліджень).

1. Дослідити запропоновану функцію СЕЗН Moodle.
2. Побудувати графік.
3. Зробити висновки.

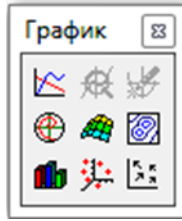
Приклад виконання лабораторної роботи.

Дослідити функцію та побудувати графік функції використовуючи програму MathCAD.

$$z(x, y) = (x^2 - y^2) * \sin(x + y)$$

Для дослідження функції необхідно з'ясувати критичні точки, точки перетину осі та точки перегину, але дуже зручно без математичних розрахування будувати функції використовуючи сучасні програми, наприклад MathCAD.

Для побудови графіків в MathCAD можна скористатися функцією Вставка→ Графік→ Тип графіка або панеллю інструментів Графік (рис. 49). Підтримуються наступні типи графіків:



двовимірний ("X-Y графік");  
 в полярних координатах ("Полярний графік");  
 лінії рівня ("Контурний графік");  
 стовпчаста діаграма ("3D панелі");  
 поверхню ("Поверхневий графік");  
 векторний ("Векторне поле").

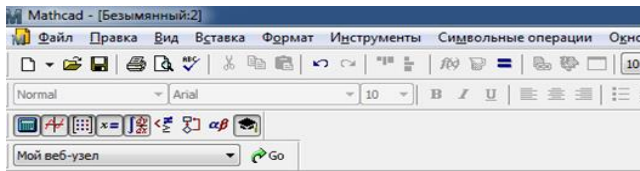
Рис.49 – Приклад вкладки «График» у програмі MathCAD.

Найбільш поширеним з тривимірних графіків є графік поверхні. Для будови графіка треба зробити наступні дії:

1. вставити в документ шаблон поверхневого графіка. Для цього встановіть курсор у вільному місці робочої області і виберіть команду меню Insert→Graph→Surface Plot або клацніть на відповідній кнопці панелі інструментів Graph;
2. шаблон тривимірного графіка має лише одне поле для введення, в це поле і потрібно ввести ім'я заданої функції z.

Аналогічно будують графіки у програмі MathCAD Prime. На рисунку 50 показано зображення функції

$$z(x, y) = (x^2 - y^2) * \sin(x + y)$$



$$z(x, y) := (x^2 + y^2) \cdot \sin(x + y)$$

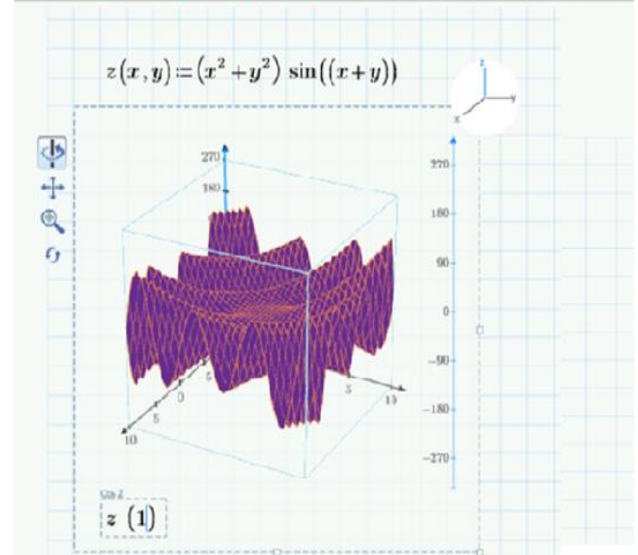
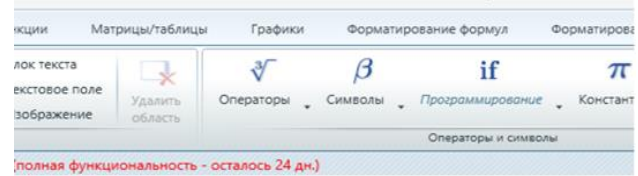
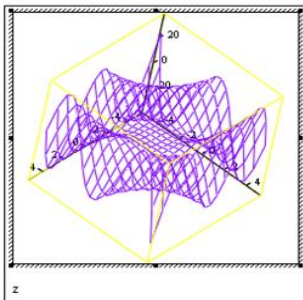


Рис.50 – Приклад поверхневого графіка функції  $z(x, y)$  програмах MathCAD і MathCAD Prime.

Кожному графіком STATISTICA відповідає набір даних з вихідної таблиці даних або таблиці, на основі якої був побудований графік. Тип і кількість даних у відповідному графіку є функцією типу графіка, а також зазначених параметрів при побудові графіка. Наприклад, гістограм простого типу відповідає тільки одна змінна, на основі якої будується гістограма. Складні графіки містять відповідне число змінних.

Редактор даних графіка – це тип таблиці, яка дозволяє переглядати дані прямо на графіку. Цей інструмент корисний для різних аналітичних додатків, таких як зафарбовування або інші форми виділення різних точок даних. Він також пропонує (іноді єдиний) спосіб отримання даних з цих графіків, які не є вихідними значеннями, а є похідними, перетвореними, або результатом специфічних обчислень, також як і значення підігнаних функцій. Може також використовуватися для додавання додаткових графіків сумісних типів до існуючих графіків. Наприклад в біології широко застосовують гістограму для аналізу нормального розподілу, як показано на рис. 51.

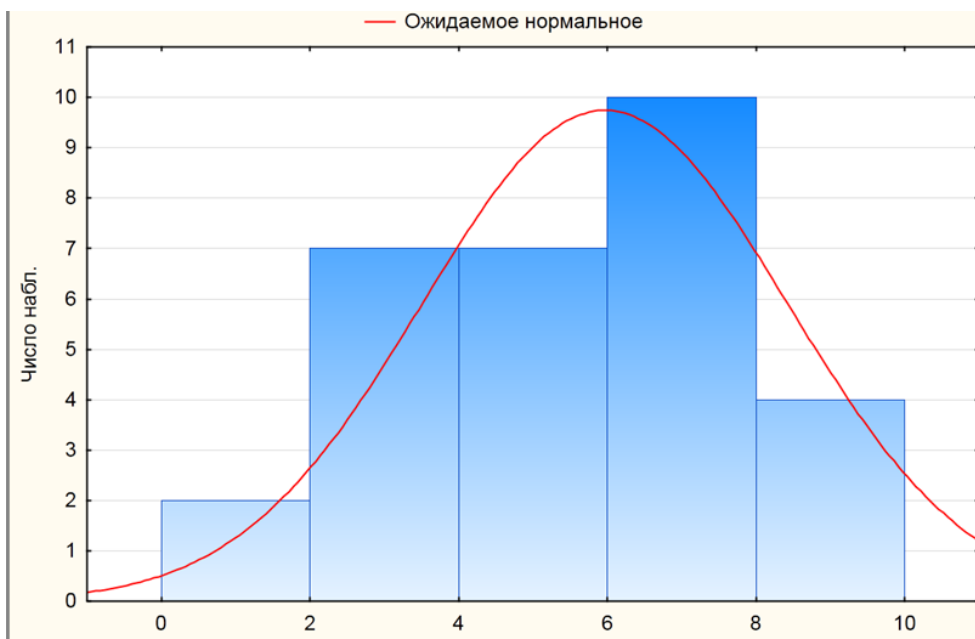


Рис.51 – Гістограма розподілу змінної у програмі STATISTICA

Графіки функцій – це безліч всіх точок, що представляють геометричний вид функції; при цьому  $x$  – будь-яка точка з області визначення функції, а всі  $y$  – точки, рівні відповідним значенням функції. Іншими словами, графік функції  $y = f(x)$  є множиною всіх точок, абсциси і ординати яких відповідають рівнянням  $y = f(x)$ .

Зобразити графік функції абсолютно точно в більшості випадків неможливо, так як точок нескінченно багато, важко знайти всі точки графіка функції. У таких випадках можна побудувати приблизний графік функції. Чим більше точок береться в розрахунок, тим графік більш точний.

Програма калькулятора будує графік функції онлайн в прямокутній системі координат на певному інтервалі значень з урахуванням максимальної кількості точок. Також можна побудувати кілька графіків функцій в одній координатній площині. Приклад розрахунку в онлайн калькуляторі показано на рисунку 52.

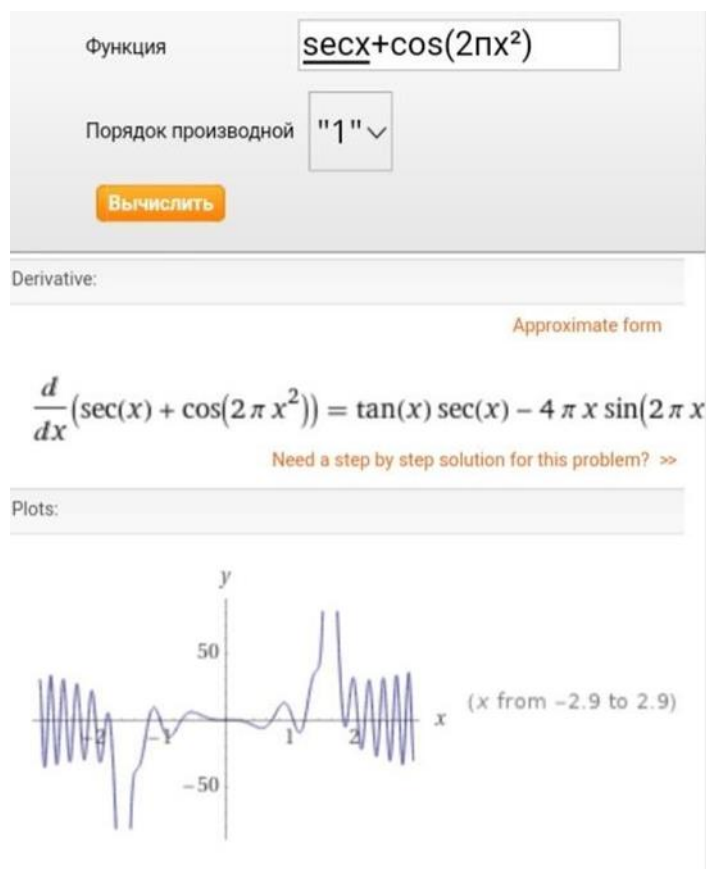


Рис. 52 – Приклад графічного зображення функції  $F = \sec x + \cos(2\pi x^2)$  в онлайн калькуляторі

Побудувати графік в Excel за даними таблиці можна декількома способами. Кожен з них має свої переваги й недоліки для конкретної ситуації. За допомогою графіка можна наочно показати залежність одних даних від інших, а також простежити зміну значень. Для створення графіка в програмі Excel, в першу чергу, потрібно створити таблицю і ввести в неї все значення, на базі яких буде будуватися графік (рис.53).

Заходимо у вкладку «Вставка», пропонується кілька типів діаграм, Вибираємо «График». У спливаючому вікні – його вид. Коли наводиш курсор на той чи інший тип діаграми, показується карта: де краще використовувати цей графік, для яких даних. При створенні діаграми Excel, легенда для діаграми створюється автоматично. Додавання умовних позначень діаграми: клацніть діаграму → натисніть кнопку «Элементы диаграммы» → плюс поруч із таблицею «+» → встановіть галочку «Легенда».

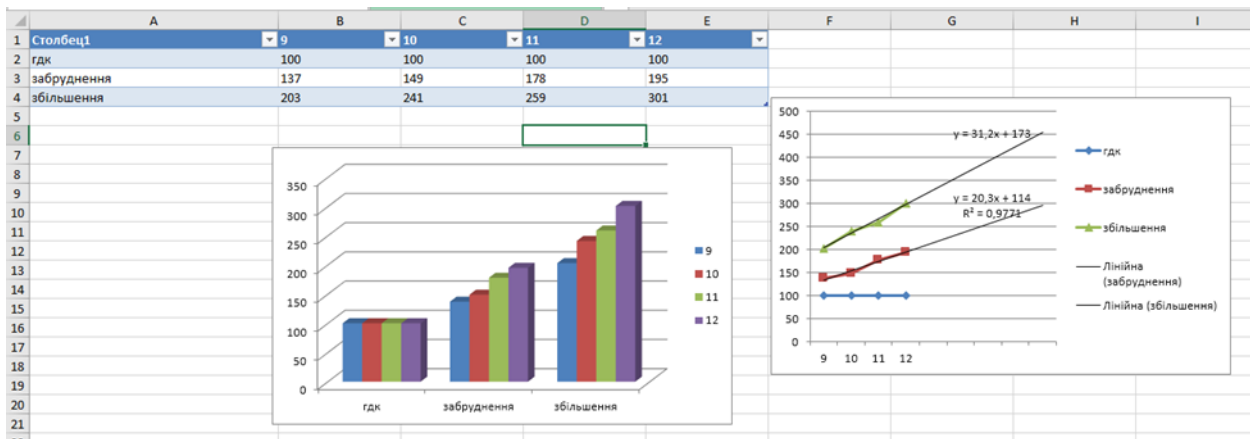


Рис. 53 – Приклад графічного зображення забруднення і ГДК у програмі Excel

Задача для прикладу.

Визначили вплив консументів 2, 3 та 4 порядку показати на графіках смертність та народжуваність популяцій, та визначили лінії тренду популяцій при ідеальних умовах існування, також визначити рівняння графіків. Побудувати графіки за умови впливу хижаків у харчовому ланцюгу.

Експериментальні дані наведені нижче у таблиці 6, розрахунок у Excel (рис.54).

Таблиця 6. Харчовий ланцюг.

	Миша	Змія	Жаба-бик	Зміїд	
Приплід	9	9	7	4	
Діти	7	5	5	1	
	Миша	Змія	Жаба бик	Зміїд	Середнє
2019	38	25	18	4	21,25
2020	96	30	16	4	36,5
2021	112	35	31	5	45,75
2022	239	40	29	5	78,25
2023	528	45	44	7	156
2024	486	50	42	7	146,25
2025	632	55	40	11	184,5
2026	304	60	55	11	107,5
2027	398	65	53	17	133,25

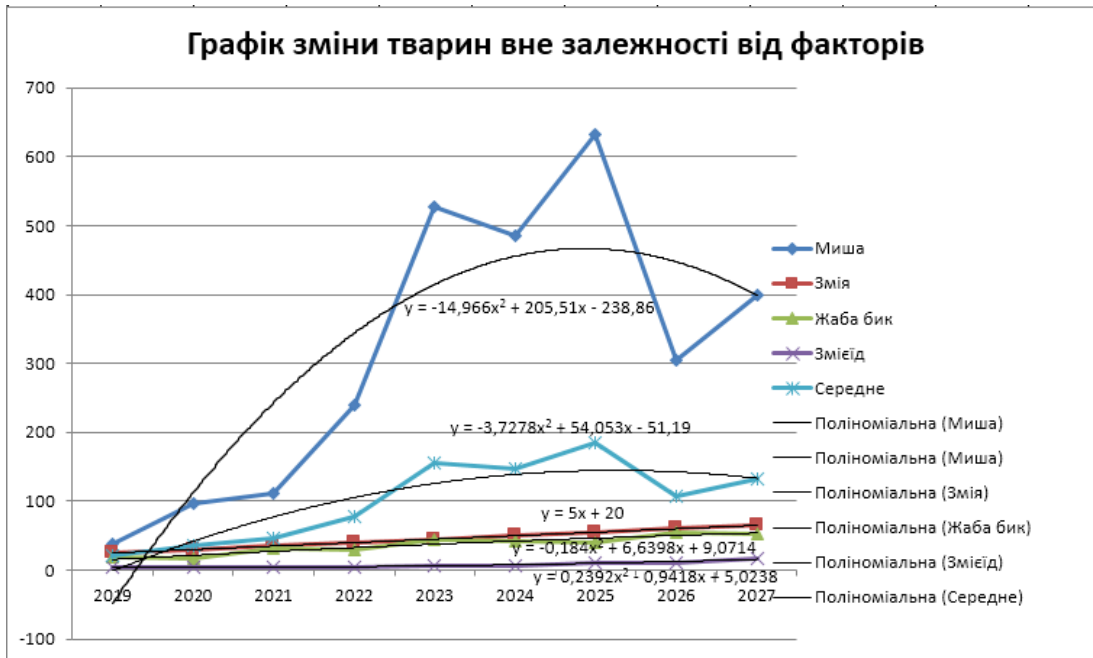


Рис.54 – Графічне рішення задачі

**Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.**

1. Титульний лист.
2. Вирішення всіх завдань з коментарями.
3. Функції для розв'язку за варіантами в СЕЗН Moodle.
4. Висновки



## Лабораторне заняття 13

### Система рівнянь в екологічних задачах

#### Мета лабораторного заняття:

Ознайомити студентів з алгоритмом СЛАР.

#### Необхідне обладнання та матеріали:

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MathCAD або MS Excel, Інтернет браузер, методичні вказівки.

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Алгоритм розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Розв'язування системи лінійних рівнянь за формулами Крамера.
3. Метод винятків Гауса.

#### Короткі теоретичні відомості.

Нехай задано систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими  $x$  і  $y$ :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Виконуємо такі елементарні перетворення системи (2): спочатку помножимо перше рівняння на  $a_{22}$ , друге – на  $-(a_{11})$  а потім складемо їх після цього перше рівняння помножимо на  $a_{12}$ , а друге на  $-(a_{11})$  і складемо їх. Дістанемо систему

$$\begin{cases} x(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ y(a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12}) = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

Систему можна записати за допомогою визначників:

$$\begin{cases} x \times \Delta = \Delta_x, \\ y \times \Delta = \Delta_y, \end{cases}$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Розглянемо тепер систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Якщо визначник системи  $\Delta \neq 0$  то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta};$$

У методі Гауса для спрощення матриці, використовують послідовні елементарні операції перетворення матриці для модифікації матриці доки нижній лівий кут матриці не буде заповнено нулями, настільки наскільки це можливо.

Існує три типи елементарних перетворень матриці:

- 1) Заміна двох рядків,
- 2) Множення рядка на не нульове число,
- 3) Додавання одного рядка до іншого.

Використовуючи ці операції, матрицю завжди можна перетворити на верхню трикутну матрицю, а фактично і у скорочену рядкову ступінчасту форму. Як тільки всі перші коефіцієнти (ті що знаходяться ліворуч і є не нульовими входженням в кожному рядку) стають рівними 1, і кожен стовпець, який містить перший ненульовий коефіцієнт має в усіх інших місцях нулі, тоді говорять що матриця знаходиться у скороченій рядковій ступінчастій формі. Ця фінальна форма є унікальною; іншими словами, вона не залежить від того, яку послідовність перетворень буде здійснено.

Наприклад, треба виконати наступну послідовність перетворень (де на кожному кроці виконано декілька елементарних перетворень матриці), щоб фінальна утворена матриця прийняла свою унікальну скорочену рядкову ступінчасту форму.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 11 & 5 & 35 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Для рішення системи рівнянь методом Гауса в MahtCAD треба виконати наступні дії:

1. Вести матрицю коефіцієнтів системи A і векторів неоднорідності B
2. Створити розширену матрицю системи C. Вона являє собою матрицю A до якої дописаний справа вектор B (функція **augment**).

3. Перетворимо розширену матрицю за допомогою функції **rref**
4. Останній стовпець, отриманий в ході перетворення матриці, - це і є рішення системи рівнянь. Скористаємося функцією **submatrix**, щоб виділити вектор з матриці

**Хід виконання лабораторної роботи** (методика експериментальних досліджень).

1. Скласти задачу екологічного спрямування.
2. Відкрити середу обчислень та ввести умови задачі.
3. Ввести змінне значення для програмного забезпечення MathCAD або MS Excel системи лінійних рівнянь згідно вимог середи обчислювання.
4. Провести розрахунок

Приклад виконання лабораторної роботи.

Задача для прикладу: Динаміка зростання популяції біоти в середовищах А, В, і С записана системою лінійних рівнянь.

Приклад розрахунку у програмі Excel показано на рисунку 55.

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ x + y + z = 6 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$	A	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$
	4			
	$\begin{bmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	
	4	8	12	
	x= 1	y= 2	z= 3	

Рис. 55 – Рішення задачі у програмі MS Excel

Задача для прикладу: Динаміка зростання популяції біоти в середовищах А, В, і С записана системою лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} x + 6y + 3z = 0 \\ 6x + 4y + 7z = 3 \\ 9y + 4z = 2 \end{cases}$$

Приклад розрахунку у програмі MathCAD методом Гауса показано на рисунку 56.

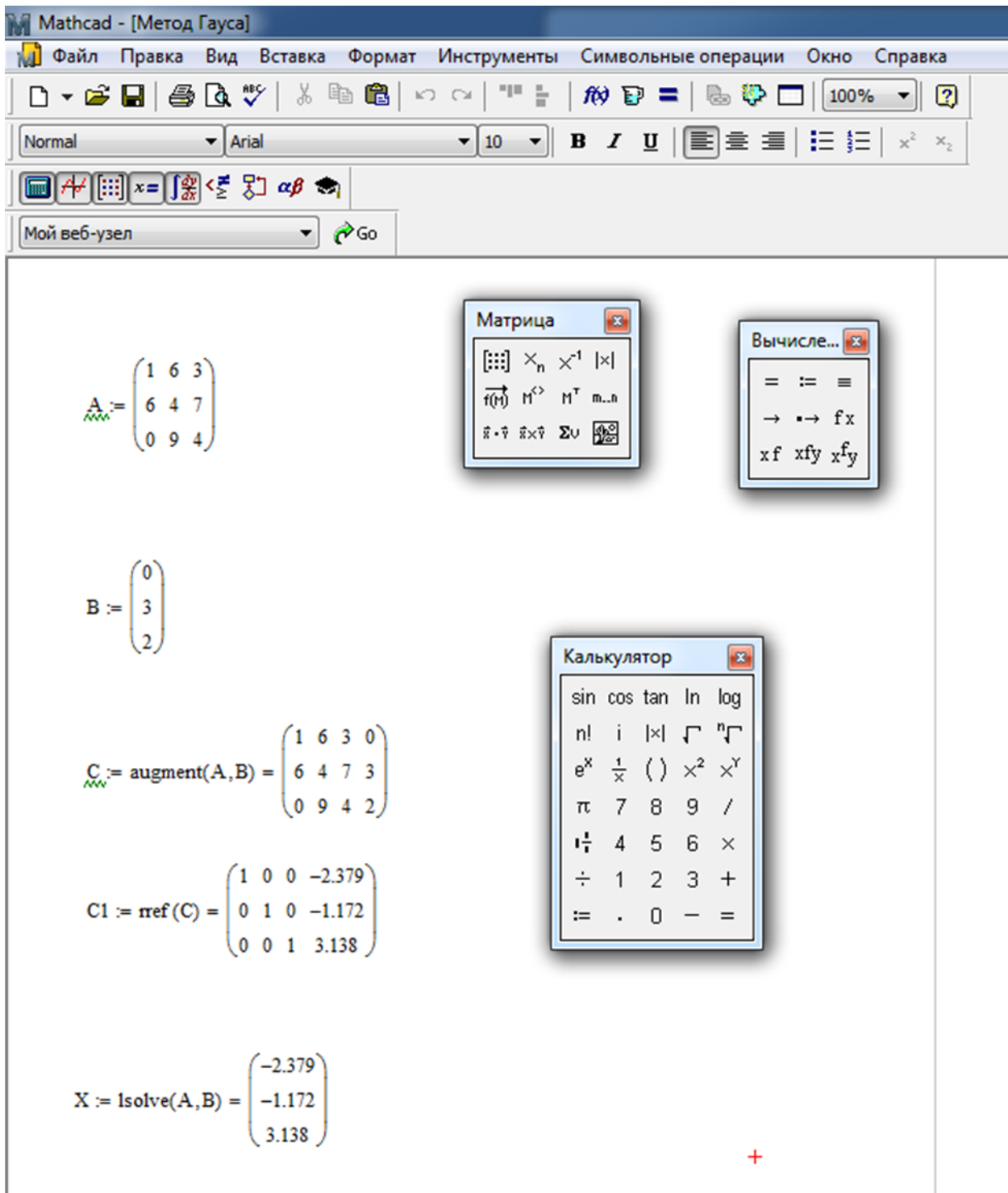


Рис.56 – Рішення задачі у програмі MathCAD

**Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.**

1. Титульний лист.
2. Скласти задачу екологічного спрямування.
3. Рішення методом СЛАР запропонованої задачі.
4. Висновки.

## Лабораторне заняття 14

### Побудова графіка поверхні та двомірної сплайн-інтерполяції

#### Мета лабораторного заняття:

Ознайомити студентів з алгоритмом будови графічної сплайн-інтерполяції.

#### Необхідне обладнання та матеріали:

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MathCAD або MathCAD Prime, Інтернет браузер, методичні вказівки.

**Питання для актуалізації знань** і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Визначення сплайн-функції.
2. Застосування сплайн інтерполяції.

#### Короткі теоретичні відомості.

Сплайн - функція, область визначення якої розбита на шматки, на кожному зі шматків функція є крива яка описує деяким поліномом (многочленом).

Інтерполяція використовує значення деякої функції, задані в ряді точок, щоб передбачити значення функції між ними. У Mathcad можна або з'єднувати точки даних прямими лініями (лінійна інтерполяція) або з'єднувати їх відрізками кубічного полінома (кубічна сплайн-інтерполяція). В екологічних задачах сплайн-інтерполяція використовується при з'єднанні дискретних величин які найточніше відповідають функціональній залежності окремого шматка, наприклад, розповсюдження забруднення у певній середі, тому інтерполяція сплайном краща, ніж інтерполяція многочленом, оскільки дає схожі результати навіть при менших степенях поліномів.

Максимальний степінь поліномів в сплайні називається степенем сплайна. Різниця між степенем сплайна і його гладкістю називається дефектом сплайна.

Теорія інтерполяції сплайнами широко застосовується у системи автоматизованого проектування, однак потенційні можливості сплайнів значно ширші ніж просто опис деяких кривих. В реальному світі велика кількість фізичних, хімічних і біологічних процесів за самою своєю природою є сплайнами, наприклад: траєкторія руху тіла, якщо сила, що діє на нього змінюється ступінчато, теплообмін в середі, яка має фрагменти з різною теплопередачою, дифузія через шари різних речовин, поширення електромагнітних полів через різномірні середовища. Тобто сплайн не надумана математична абстракція, а в багатьох випадках він є розв'язанням диференціальних рівнянь, які описують цілком реальні фізичні процеси.

Для початку введемо дані графіка, для цього вводимо визначник і додаємо матрицю потрібним розміром, як показано на рисунку 57 і вводимо в неї свої дані для графіка. У Mathcad є функція, яка дозволяє прогнозувати майбутні значення даних на основі вже наявних даних тобто робити прогноз. Далі натисніть клавіші Ctrl + 3, або через вкладку «Графік» щоб вставити 3D-графік, і введіть  $f$  де червоним кольором визначено положення для функції.

У програмі MathCAD Prime використовуйте вбудовану функцію *matrix*, щоб створити набір даних на основі попередньої функції. РТС Mathcad будує графік функції одного параметра, що приймає значення в вигляді векторів, у вигляді тривимірної кривої. Це тривимірна крива.

**Хід виконання лабораторної роботи** (методика експериментальних досліджень).

1. Скласти задачу екологічного спрямування.
2. Побудувати графік у виді поверхні.
3. Побудувати двомірну сплайн-інтерполяцію.
4. Зробити висновки.

Приклад виконання лабораторної роботи.

Задача 1: Стан гідросфери поблизу промислової зони досліджується на територіях А, В, і С. Та записан системою лінійних рівнянь, де

x- промислова зона

y- територія за 1 км від пром. зони

z- територія за 2 км від пром. зони

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + y + 1 = 7 \\ 6x + 2y + 3z = 8 \end{cases}$$

Приклад розв'язку задачі показано на рисунку 57.

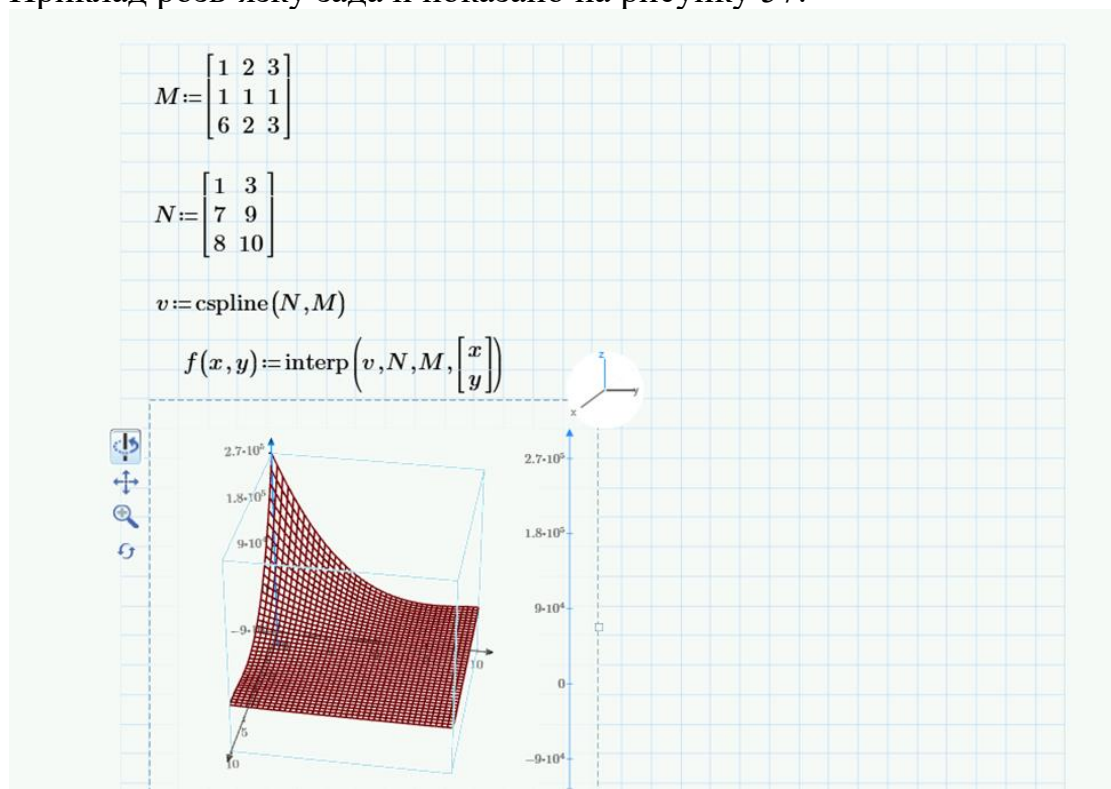


Рис.57 – Рішення задачі у програмі MathCAD Prime.

**Висновок:** Виходячи з побудови графіку, стан гідросфери є задовільним.

Задача 2: Об'єм забруднень промисловими викидами хімічних елементів в ґрунтах А, В, і С записано відповідними матрицями.

Треба побудувати графік поверхні та двомірну сплайн-інтерполяцію.

Приклад розв'язку задачі показано на рисунку 58.

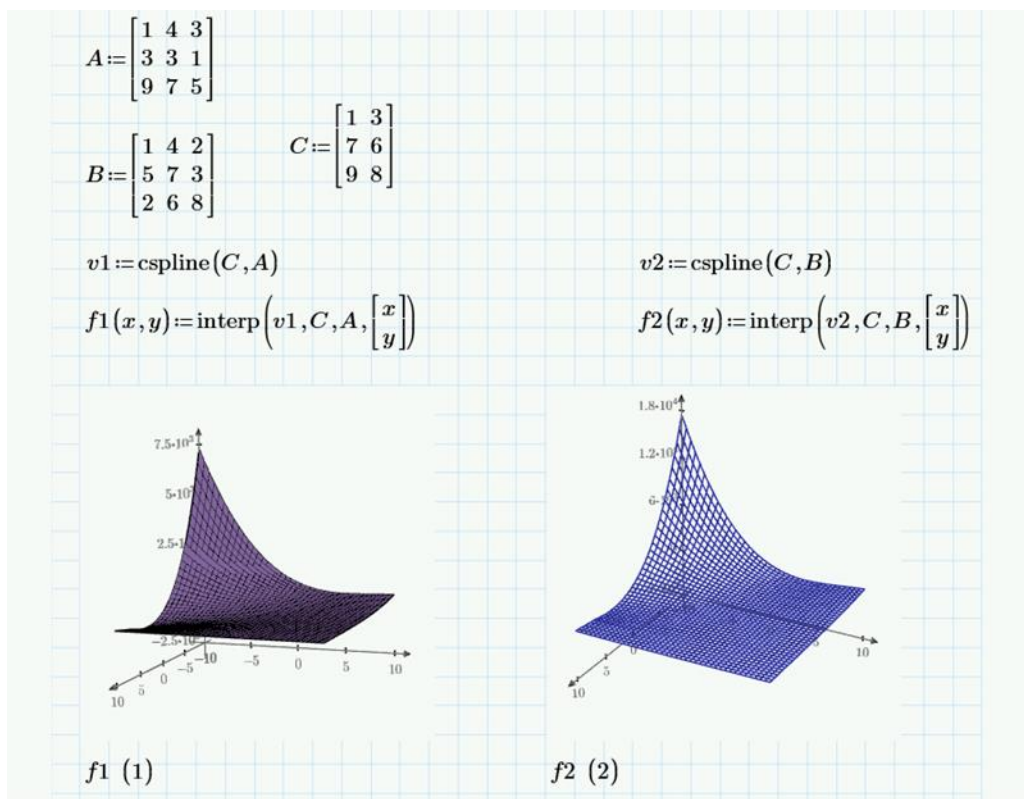


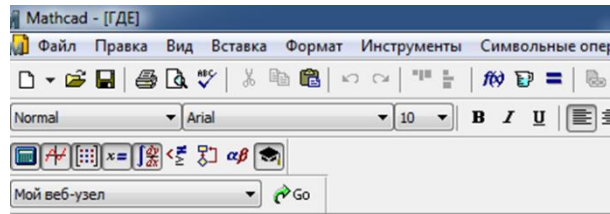
Рис.58 – Рішення задачі у програмі MathCAD Prime.

**Висновок:** Виходячи з побудови графіків, викиди хімічних елементів значно перевищують норму, оцінка ділянки цих ґрунтів є «критичною».

Задача 3: На виробництві є два види джерел забруднення: стаціонарні і пересувні. Показники забруднення позначені у вигляді матриць А і В. Визначити вплив забруднення кожного виду, якщо відомо, що на території виробництва є вітер напрям і швидкість якого позначено матрицею D.

Треба побудувати графік поверхні та двомірну сплайн-інтерполяцію у програмі MathCAD. Приклад розв'язку задачі показано на рисунку 59.

Графічне зображення будуємо на базі двох матриць – забруднення від пересувних джерел, показники матриці В, графічне зображення на рисунку 60 і стаціонарних джерел, показники матриці А на рисунку 61.



$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

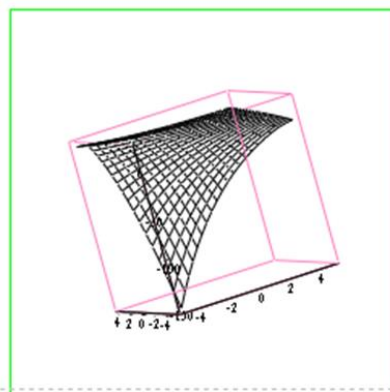
$$B := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 33 & 44 & 55 \\ 44 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Рис.59 – Рішення задачі у програмі MathCAD

$$v1 := \text{cspline}(D, A)$$

$$f1(x, y) := \text{interp}\left[v1, D, A, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$



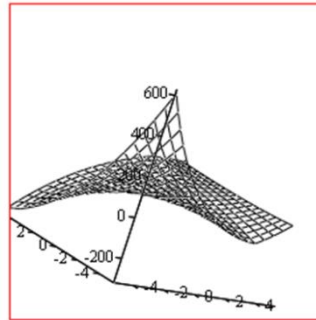
f1

Рис.60 – Графічне зображення рішення задачі для стаціонарних джерел забруднення у програмі MathCAD.



$v := \text{cspline}(D, B)$

$f(x, y) := \text{interp}\left[v, D, B, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$



f

Рис.61 – Графічне зображення рішення задачі для пересувних джерел забруднення у програмі MathCAD.

**Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.**

1. Титульний лист.
2. Задача екологічного спрямування.
3. Побудова двомірної сплайн-інтерполяції.
4. Висновки.

## ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Лиман Ф., Власенко В., Петренко С. Вища математика : навч. посіб. Київ, 2018. 614 с.

### Інформаційні джерела:

1. Словники та енциклопедії. *Математичні методи*: веб-сайт. URL: [http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc\\_math](http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_math) ;
2. Офіційний сайт Microsoft. *Приклади та засоби використання Microsoft Software* веб-сайт. URL: <https://support.microsoft.com/ru-ru/training> ;
3. Математичні основи. *Таблиця математичних констант*: веб-сайт. URL: <http://matematikauskusstvo.ru/const.html>.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

### Основна:

1. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології : підручник. Київ: Фітосоціоцентр, 2004. 216 с.
2. Клепко В., Голець В., Вища математика в прикладах і задачах : навч.посіб. Київ, 2019. 594 с.

### Додаткова:

1. J. David Logan, William R. Wolessensky *Mathematical Methods in Biology*: WILEY, 2009. 448 p.

### Інформаційні ресурси:

1. Вся математика в одному місці. *Вища математика*: веб-сайт. URL: <http://www.allmath.ru/books/vysshaja-matematika>;
2. Інформаційні ресурси з вищої математик. *Підручники з вищої математики*: веб-сайт. URL: <https://www.mathelp.spb.ru/magazin.htm> ;
3. Безкоштовні комп'ютерні курси online. *Покрокові уроки для початківців*: веб-сайт. URL: <http://www.neumeka.ru>;
4. Електронний ресурс з біології. *Підручники з біології*: веб-сайт. URL: [www.curator.ru/e-books/biology.html](http://www.curator.ru/e-books/biology.html) ;
5. Пояснення частини математичного апарату. *Основи математичного апарату*: веб-сайт. URL: <http://sci-lib.com/>;
6. Вільна енциклопедія. Загальні відомості про Microsoft Excel, призначення та версії: веб-сайт. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Microsoft\\_Excel](https://ru.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Excel) ;
7. Відео лекції. Покрокові лекції використання макросів в Excel: веб-сайт. URL: [https://youtube.com/playlist?list=PLKbOx3gUV\\_E87DSMLQFKdYy2XxwrcBA19](https://youtube.com/playlist?list=PLKbOx3gUV_E87DSMLQFKdYy2XxwrcBA19);

Методичні рекомендації до лабораторних занять

Маслова Оксана Володимирівна

## МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ЕКОЛОГІЇ

Методичні рекомендації до лабораторних занять  
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра  
спеціальності «Екологія» освітньо-професійної програми «Екологія охорона  
навколишнього середовища та збалансоване природокористування»

Рецензент *О.С. Пшенична*  
Відповідальний за випуск *О.Ф. Рильський*  
Коректор *Н.М. Притула*